بخش اول: درونیابی لاگرانژ و اسپلاین

در این بخش، هدف یافتن تابعی است که دقیقاً از مجموعه نقاط داده شده شامل $(۱,۱), (۲,۳), (۳,۵), (۴,۸), (۵,۵), (۶,۲)$ عبور کند. برای این منظور از دو روش درونیابی لاگرانژ و اسپلاین مکعبی (Cubic Spline) استفاده شد. همان‌طور که در نتایج خروجی کد پایتون مشخص است، هر دو روش با موفقیت پیاده‌سازی شده و خطای ارزیابی آن‌ها در گره‌های داده شده برابر صفر است.

۱. ضابطه توابع به دست آمده

الف) درونیابی لاگرانژ:

از آنجا که ۶ نقطه داده شده است، چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ یک چندجمله‌ای واحد از درجه ۵ خواهد بود. ضابطه دقیق این تابع پس از محاسبه و ساده‌سازی به فرم زیر به دست آمد:

$$P(x) = ۰٫۱۷۵x^۵ - ۲٫۹۵۸x^۴ + ۱۸٫۳۷۵x^۳ - ۵۲٫۰۴۱x^۲ + ۶۸٫۴۵x - ۳۱٫۰ \tag{۱}$$

ب) درونیابی اسپلاین مکعبی:

برخلاف روش لاگرانژ، اسپلاین مکعبی از چندجمله‌ای‌های تکه‌ای از درجه ۳ تشکیل شده است که در مرز بازه‌ها، یعنی گره‌ها، دارای مشتقات اول و دوم پیوسته هستند. ضابطه دقیق این توابع برای هر بازه محاسبه شد؛ به عنوان نمونه، ضابطه این تابع در بازه اول $[۱, ۲]$ به صورت زیر است:

$$S_۰(x) = -۰٫۱۸۶x^۳ + ۰٫۵۵۹x^۲ + ۱٫۶۲۶x - ۱٫۰ \tag{۲}$$

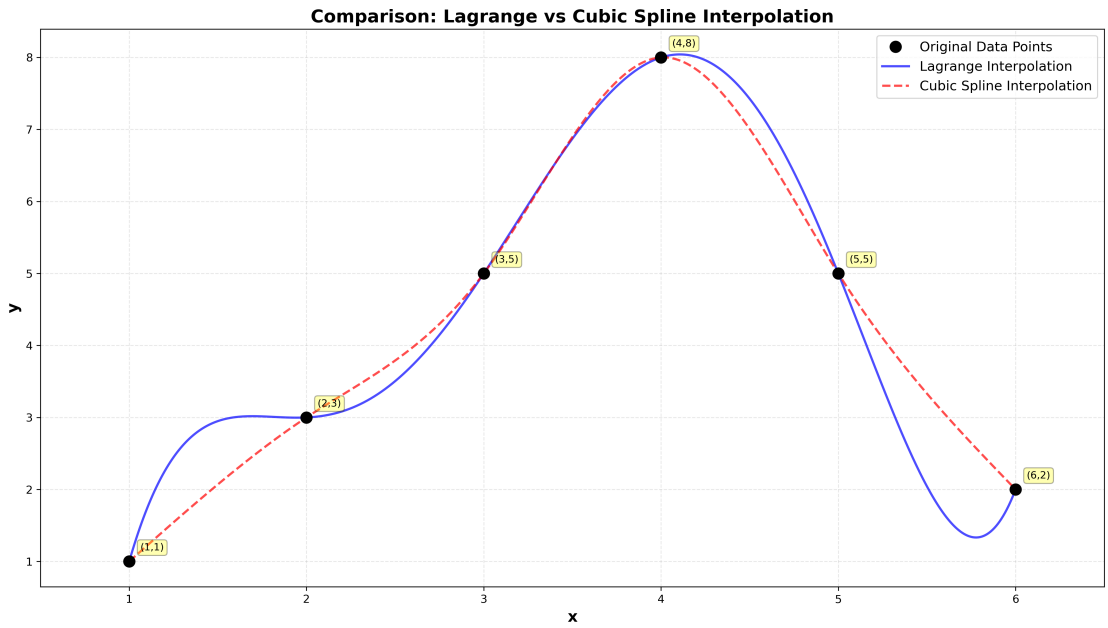
(توابع مربوط به سایر بازه‌ها نیز به طور کامل در خروجی کد درج شده‌اند).

۲. تحلیل نمودار و مقایسه دو روش

با توجه به نمودار رسم شده، شکل ۱، تفاوت‌های بنیادین رفتار این دو روش به وضوح قابل مشاهده است:

- **رفتار نوسانی لاگرانژ:** چندجمله‌ای لاگرانژ، یعنی منحنی پیوسته آبی، به دلیل داشتن درجه بالا، درجه ۵، تمایل به نوسانات شدیدتری بین نقاط دارد. این موضوع به خصوص در بازه انتهایی بین $x = ۵$ و $x = ۶$ مشهود است، جایی که منحنی دچار یک افت شدید به سمت پایین شده است. این رفتار نوسانی در لبه‌ها، نمودی از پدیده رونگه (Runge's Phenomenon) در درونیابی چندجمله‌ای است.

- **پایداری اسپلاین:** در مقابل، اسپلاین مکعبی، یعنی خط‌چین قرمز، به دلیل ماهیت تکه‌ای و محدود بودن درجه توابع به عدد ۳، رفتار بسیار نرم‌تر، طبیعی‌تر و پایدارتری از خود نشان می‌دهد. این روش بدون ایجاد نوسانات کاذب بین نقاط، مسیر هموارتری را برای اتصال گره‌ها طی کرده است و برای برازش این نوع داده‌ها انتخاب بهتری محسوب می‌شود.



شکل ۱: مقایسه رفتار توابع درونیابی لاگرانژ و اسپلاین مکعبی بر روی نقاط داده شده