بخش اول: درونیابی لاگرانژ و اسپلاین

در این بخش، هدف یافتن تابعی است که دقیقاً از مجموعه نقاط داده شده شامل $(۱,۱), (۲,۳), (۳,۵), (۴,۸), (۵,۵), (۶,۲)$ عبور کند. برای این منظور از دو روش درونیابی لاگرانژ و اسپلاین مکعبی (Cubic Spline) استفاده شد. همان‌طور که در نتایج خروجی کد پایتون مشخص است، هر دو روش با موفقیت پیاده‌سازی شده و خطای ارزیابی آن‌ها در گره‌های داده شده برابر صفر است.

۱. ضابطه توابع به دست آمده

الف) درونیابی لاگرانژ:

از آنجا که ۶ نقطه داده شده است، چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ یک چندجمله‌ای واحد از درجه ۵ خواهد بود. ضابطه دقیق این تابع پس از محاسبه و ساده‌سازی به فرم زیر به دست آمد:

$$P(x) = ۰٫۱۷۵x^۵ - ۲٫۹۵۸x^۴ + ۱۸٫۳۷۵x^۳ - ۵۲٫۰۴۱x^۲ + ۶۸٫۴۵x - ۳۱٫۰ \tag{۱}$$

ب) درونیابی اسپلاین مکعبی:

برخلاف روش لاگرانژ، اسپلاین مکعبی از چندجمله‌ای‌های تکه‌ای از درجه ۳ تشکیل شده است که در مرز بازه‌ها، یعنی گره‌ها، دارای مشتقات اول و دوم پیوسته هستند. ضابطه دقیق این توابع برای هر بازه محاسبه شد؛ به عنوان نمونه، ضابطه این تابع در بازه اول $[۱, ۲]$ به صورت زیر است:

$$S_۰(x) = -۰٫۱۸۶x^۳ + ۰٫۵۵۹x^۲ + ۱٫۶۲۶x - ۱٫۰ \tag{۲}$$

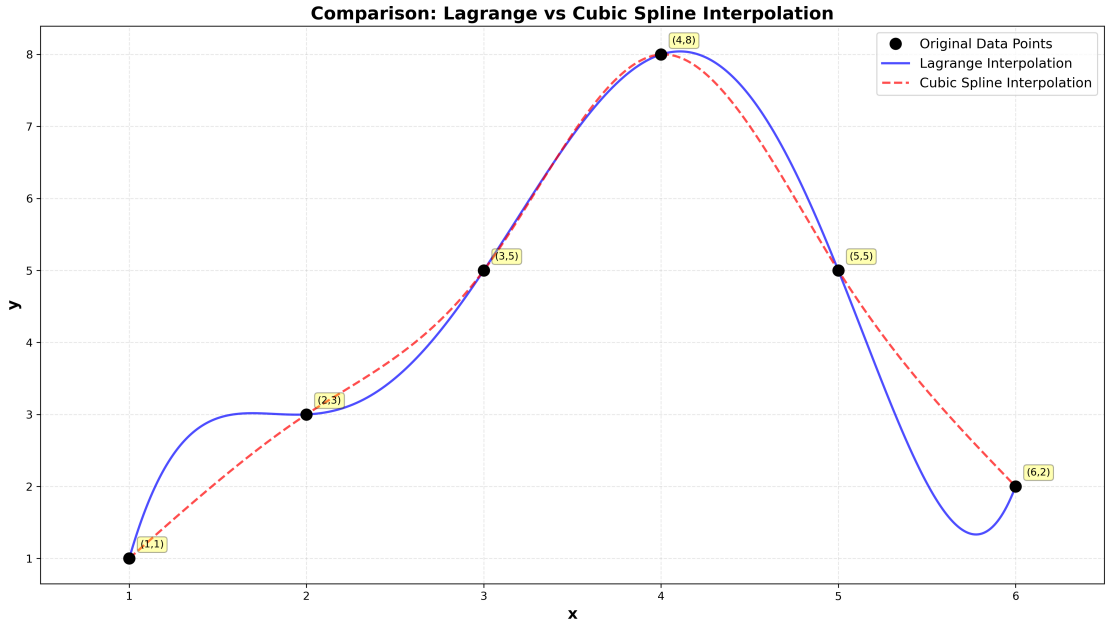
(توابع مربوط به سایر بازه‌ها نیز به طور کامل در خروجی کد درج شده‌اند).

۲. تحلیل نمودار و مقایسه دو روش

با توجه به نمودار رسم شده، شکل ۱، تفاوت‌های بنیادین رفتار این دو روش به وضوح قابل مشاهده است:

- **رفتار نوسانی لاگرانژ:** چندجمله‌ای لاگرانژ، یعنی منحنی پیوسته آبی، به دلیل داشتن درجه بالا، درجه ۵، تمایل به نوسانات شدیدتری بین نقاط دارد. این موضوع به خصوص در بازه انتهایی بین $x = ۵$ و $x = ۶$ مشهود است، جایی که منحنی دچار یک افت شدید به سمت پایین شده است. این رفتار نوسانی در لبه‌ها، نمودی از پدیده رونگه (Runge's Phenomenon) در درونیابی چندجمله‌ای است.

- **پایداری اسپلاین:** در مقابل، اسپلاین مکعبی، یعنی خط‌چین قرمز، به دلیل ماهیت تکه‌ای و محدود بودن درجه توابع به عدد ۳، رفتار بسیار نرم‌تر، طبیعی‌تر و پایدارتری از خود نشان می‌دهد. این روش بدون ایجاد نوسانات کاذب بین نقاط، مسیر هموارتری را برای اتصال گره‌ها طی کرده است و برای برازش این نوع داده‌ها انتخاب بهتری محسوب می‌شود.



شکل ۱: مقایسه رفتار توابع درونیابی لاگرانژ و اسپلاین مکعبی بر روی نقاط داده شده

بخش دوم: مصورسازی و تحلیل داده‌های زمان اجرای الگوریتم‌ها

در این بخش، هدف بررسی رفتار و زمان اجرای سه الگوریتم مختلف (Alg.1, Alg.2, Alg.3) بر روی مجموعه‌داده‌هایی با اندازه‌های متفاوت، از ۱۰۰KB تا ۶۰۰KB، است. داده‌ها از یک فایل Excel خوانده شده و تحلیل‌های آماری به همراه مصورسازی‌های گرافیکی روی آن‌ها انجام پذیرفته است.

۱. تحلیل آماری و رفتار الگوریتم‌ها

بر اساس نتایج استخراج‌شده، می‌توان رفتار هر یک از الگوریتم‌ها را از منظر پیچیدگی زمانی و مقیاس‌پذیری (Scalability) ارزیابی کرد:

- **الگوریتم Alg.1:** این الگوریتم بهترین عملکرد را از خود نشان می‌دهد. زمان اجرای آن برای داده ۱۰۰KB برابر ۵۰ms بوده و با شیب بسیار ملایمی رشد می‌کند. میانگین زمان اجرای آن نیز ۶۲٫۵ms است. این امر نشان‌دهنده مقیاس‌پذیری عالی این الگوریتم برای داده‌های بزرگ‌تر است.
- **الگوریتم Alg.2:** این الگوریتم دارای سربار اولیه (Initial Overhead) نسبتاً بالایی است و از ۲۰۰ms شروع می‌شود؛ با این حال، شیب رشد آن کند است. میانگین زمان اجرای این الگوریتم در بازه بررسی‌شده

دقیقاً برابر ۲۵۰/۰ms محاسبه شد.

- **الگوریتم Alg.3:** اگرچه این الگوریتم در حجم داده‌های کم عملکرد بهتری نسبت به Alg.2 دارد، اما به دلیل داشتن شیب رشد تند، به سرعت دچار افت عملکرد می‌شود و برای داده‌های بزرگ، مانند ۶۰۰KB با زمان ۶۰۰ms، بدترین انتخاب ممکن است.

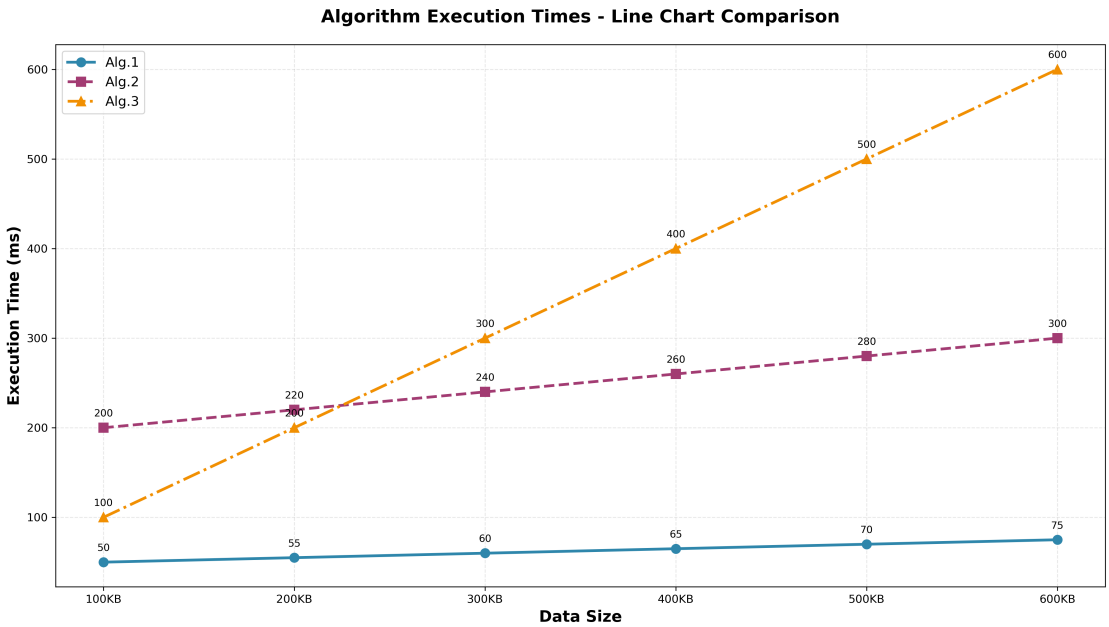
نکته قابل توجه دیگر این است که به دلیل رشد کاملاً خطی و فواصل منظم داده‌ها، در هر سه الگوریتم، مقدار میانگین (Mean) دقیقاً با مقدار میانه (Median) برابر است.

۲. بررسی نمودارها

برای درک بهتر رفتار الگوریتم‌ها، سه نوع نمودار مختلف رسم شده است.

الف) نمودار خطی (Line Chart):

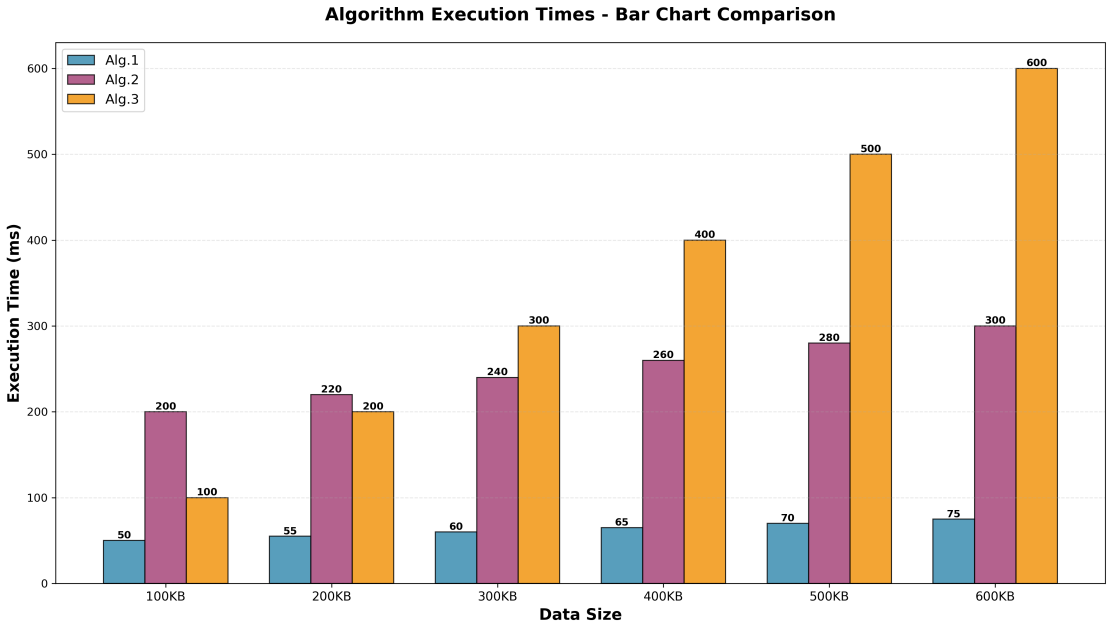
در شکل ۲ روند رشد زمان اجرا به خوبی قابل مشاهده است. تلاقی خطوط Alg.2 و Alg.3 در نقطه ۲۰۰KB نشان می‌دهد که از این نقطه به بعد، الگوریتم Alg.2 به دلیل داشتن شیب کمتر، با وجود سربار اولیه بیشتر، از نظر زمانی مقرون‌به‌صرفه‌تر می‌شود.



شکل ۲: نمودار خطی مقایسه زمان اجرای الگوریتم‌ها بر حسب اندازه داده

ب) نمودار میله‌ای (Bar Chart):

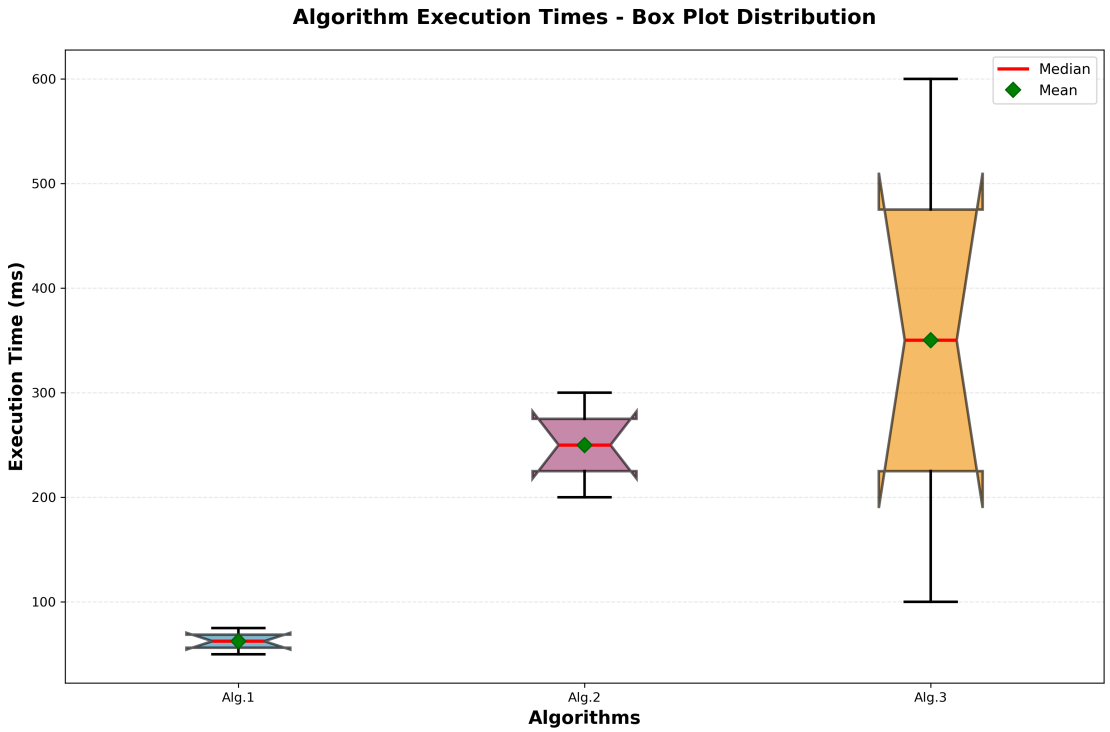
شکل ۳ مقایسه نظیربه‌نظیر الگوریتم‌ها را در هر اندازه داده به صورت مجزا نشان می‌دهد. این نمودار برای مقایسه مستقیم عملکرد الگوریتم‌ها در یک حجم داده مشخص، ابزار بسیار مناسبی است.



شکل ۳: نمودار میله‌ای زمان اجرای الگوریتم‌ها به تفکیک سایز داده‌ها

ج) نمودار جعبه‌ای (Box Plot):

در شکل ۴ توزیع و پراکندگی زمانی الگوریتم‌ها به تصویر کشیده شده است. همان‌طور که مشخص است، الگوریتم Alg.1 به دلیل تغییرات اندک، دارای فشرده‌ترین جعبه، یعنی کمترین واریانس، است. در مقابل، الگوریتم Alg.3 دارای کشیده‌ترین نمودار جعبه‌ای است که نشان از بی‌ثباتی عملکرد آن در مواجهه با تغییرات حجم داده دارد.



شکل ۴: نمودار جعبه‌ای توزیع پراکندگی زمان اجرای الگوریتم‌ها

۳. قابلیت افزودن داده‌های جدید

ساختار کد پیاده‌سازی شده به‌گونه‌ای است که به صورت پویا (Dynamic) داده‌ها را از فایل اکسل می‌خواند. بنابراین در صورت اضافه شدن داده‌های جدید، مانند ردیف مربوط به KB۷۰۰، نیازی به تغییر در منطق کد نیست و تنها با اجرای مجدد، تمامی محاسبات و نمودارها به‌طور خودکار به‌روزرسانی خواهند شد.