1.8. Línulegar varpanir (Linear Transformations).

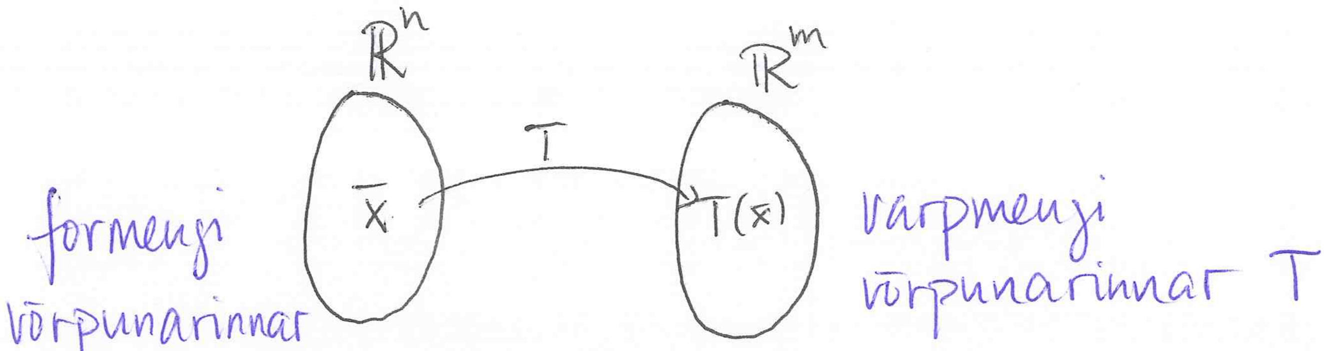
Skoðum nú fylkið A sem fyrirbæri sem virkar á vigur $\bar{x}$ og gefur nýjan vigur $A\bar{x}$.

DÆMI: Fylkið $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ virkar á vigur í $\mathbb{R}^4$ og gefur vigur í $\mathbb{R}^2$. T.d.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nú er það að leysa jöfnuhneppið $A\bar{x} = \bar{b}$ það sama og að spurja: "hvaða vigra $\bar{x}$ færir A í b?".

Vörpun T frá $\mathbb{R}^n$ í $\mathbb{R}^m$ er s.s. regla sem úthlutar sérhverjum vigri $\bar{x}$ í $\mathbb{R}^n$ einum vigri $T(\bar{x})$ í $\mathbb{R}^m$



$$\bar{x} \mapsto A\bar{x}$$

$T(\bar{x})$ kallast myndin af $\bar{x}$

Þeir vigrar sem $T(\bar{x})$ getur búið til kallast myndmengi T.

DÆMI: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\bar{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Skilgreinum vörpun $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ með $T(\bar{x}) = A\bar{x}$.

$$T(\bar{x}) = A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

Tekur inn vigur í $\mathbb{R}^2$

skilar vigri í $\mathbb{R}^3$.

a) Reiknum $T(\bar{u}) = A\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 \\ 6-5 \\ -2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$

b) Finnið $\bar{x}$ þ.a. $T(\bar{x}) = \bar{b}$

Leysum $T(\bar{x}) = A\bar{x} = \bar{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

Setjum upp aukið fylki

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lausn $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ Prófa lausn: Reikna $A\bar{x}$ fá $\bar{b}$.

c) Eru til fleiri en eitt $\bar{x}$ hvers mynd A er $\bar{b}$?

S.s. eru fleiri en ein lausn á $A\bar{x} = \bar{b}$?

Jöfnuhneppið í b) gefur aðeins eina lausn, svo svarið er <u>nei</u>.

d) Er $\bar{c}$ í myndmengi T? S.s. hefur $A\bar{x} = \bar{c}$ lausn? Setjum upp aukið fylki

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

neðsta línan segir okkur að engin lausn er til.

Svarið er <u>nei</u> $\bar{c}$ er ekki í myndmengi T.

DÆMI: Skoðum $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$ þ.s. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$T(\bar{x}) = A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vörpunin T færir sérhvern punkt í (x,y,z)-rúminu í xy-planið.

DÆMI $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Línulega vörpunin

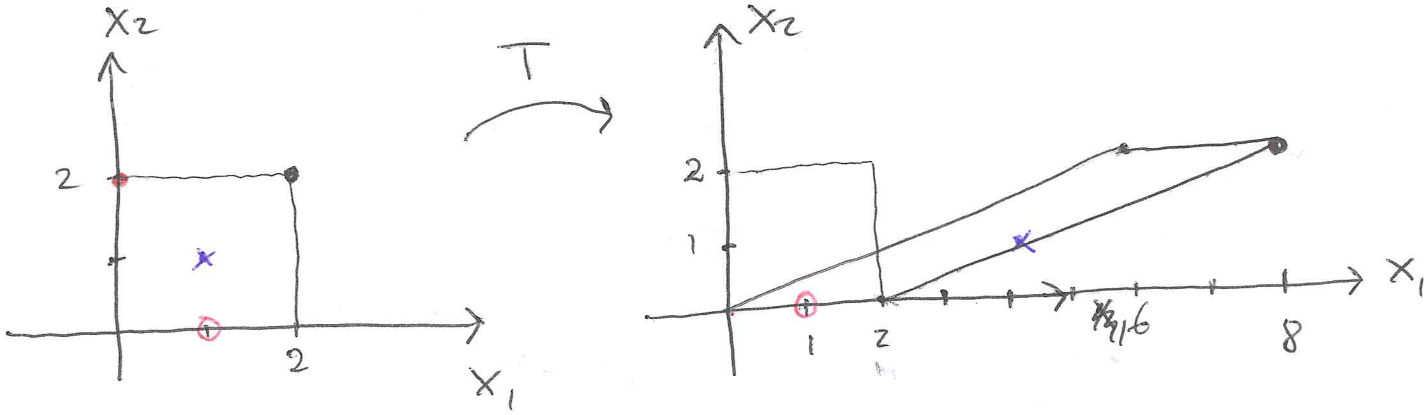
$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ skilgreind með $T(\bar{x}) = A\bar{x}$

kallast skekking (shear).

$\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\bar{y}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$



<u>Skilgreining</u> Vörpun T kallast línuleg ef:

(i) $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ f. öll $\bar{u}, \bar{v}$ í formengi T.

(ii) $T(c\bar{u}) = cT(\bar{u})$ f. fasta c og öll $\bar{u}$ í formengi T.

Við skoðum hvort vörpun uppfylli bæði skilyrði með að sannreyna að

$$T(a\bar{u}+b\bar{v}) = aT(\bar{u}) + bT(\bar{v}).$$

Ath ef T er línuleg vörpun er $T(\bar{0}) = \bar{0}$.

Allar fylkjavarpanir, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, eru línulegar því

$$T(a\bar{u}+b\bar{v}) = A(a\bar{u}+b\bar{v})$$

$$= aA\bar{u} + bA\bar{v} = aT(\bar{u}) + bT(\bar{v}).$$

Th 5 í 1.4.

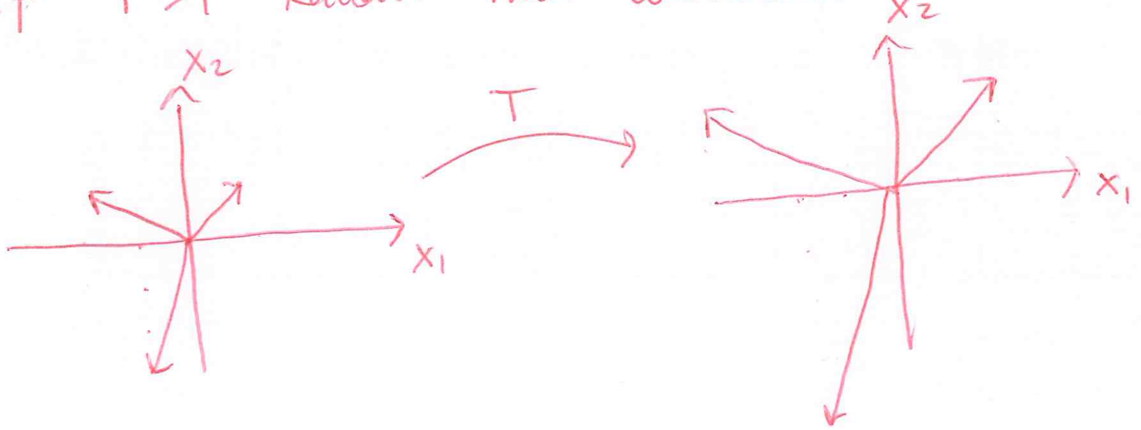
<u>DÆMI</u>: Skoðum vörpunina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\bar{x}) = r\bar{x}$ þ.s. r er fasti. Vörpunin er línuleg því

$$T(a\bar{u}+b\bar{v}) = r(a\bar{u}+b\bar{v}) = a \cdot r\bar{u} + br\bar{v} = aT(\bar{u}) + bT(\bar{v})$$

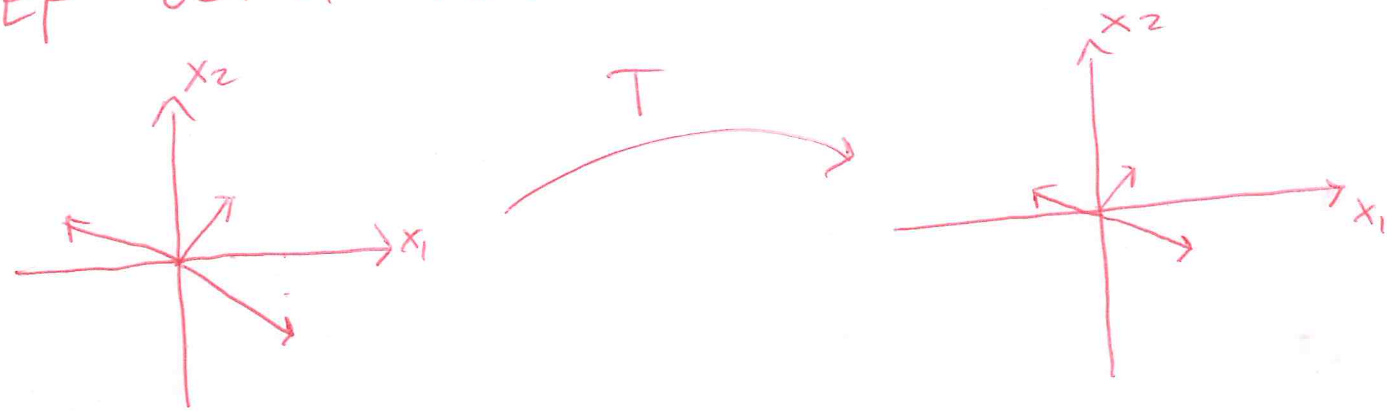
(v) í Algebraic Properties of $\mathbb{R}^n$ bls 27 í 1.3.

Skoðum $T(\bar{x}) = r\bar{x}$ nánar.

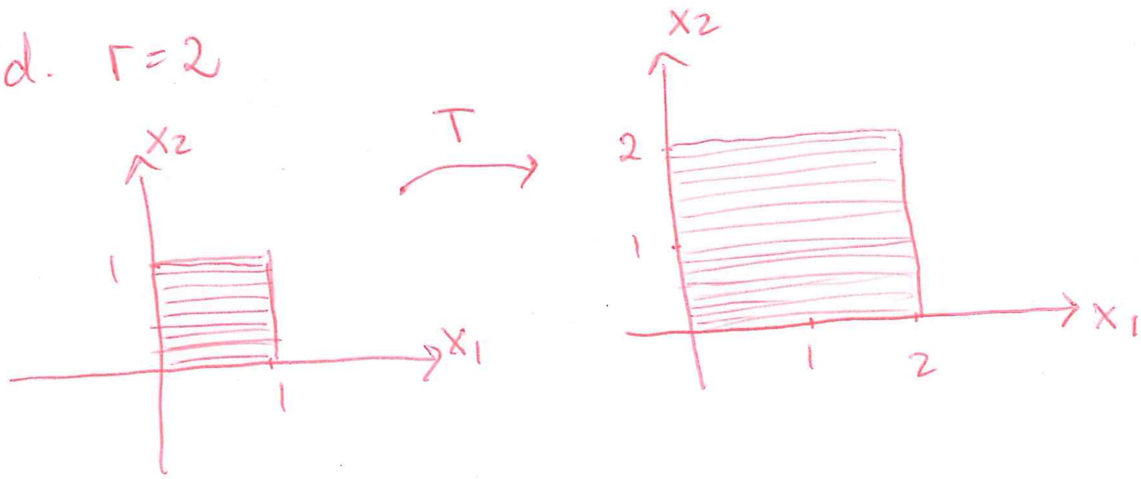
Ef $r > 1$ kallast hún útvíkkun (dilation)



Ef $0 \leq r < 1$ kallast hún samdráttur (contraction)



T.d. $r = 2$



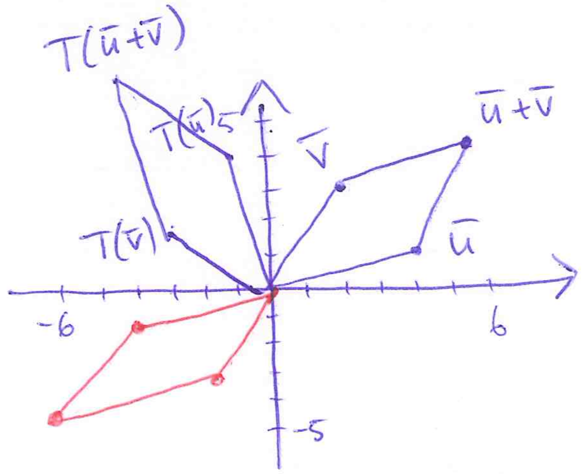
DÆMI: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$ 7

Skoðum myndirnar af $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\bar{u}+\bar{v}$.

$$T(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad T(\bar{u}+\bar{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$



Prófum líka $T(T(\bar{u})) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

og $T(T(\bar{v})) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

og $T(T(\bar{u})+T(\bar{v})) = T(T(\bar{u}+\bar{v})) = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$