1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^n+4^n}{5^n+n}}$

解： $\dfrac{4}{5}=\sqrt[n]{\dfrac{4^n}{5^n}}\le\sqrt[n]{\dfrac{3^n+4^n}{5^n+n}}\le\sqrt[n]{\dfrac{3^n+4^n}{5^n}}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}$

$$\frac{4^n}{5^n}\le\frac{3^n+4^n}{5^n+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{5^n+n}}=\frac{4}{5}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5}{x+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2(2x^2+5)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{10}{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}=2,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4+\dfrac{10}{x^2}}{\left(-1-\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}=-2$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}=e^{\frac{1}{2}}$$

令 $x=\dfrac{1}{t}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{\ln(1+t)}{t^2}\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$

P133 页

4. 设函数 $g(x)$ 在点 a 处连续，证明函数 $f(x)=(x-a)g(x)$ 在点 a 处可导，并求 $f'(a)$.

解：

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x+a)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta xg(\Delta x+a)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}g(\Delta x+a)=g(a)$$

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\text{为有理数}\\ -x^2, x\text{为无理数}\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\pm x^2\right)=0=f(0)$ 故在点 $x=0$ 处连续.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\pm x^2\right)}{x}=0$ 故在点 $x=0$ 处可导.

1. 长方形的长x以$2\mathrm{cm/s}$的速率增加，宽y以$3\mathrm{cm/s}$的速率增加。则当　$x=12\mathrm{cm}, y=5\mathrm{cm}$时，长方形对角线增加的速率为 _____ .

解：设长方形对角线为z，则

$z^2=x^2+y^2$，它们都是t的函数，两边同时对t求导，有

$$2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

当$x=12\mathrm{cm}, y=5\mathrm{cm}$时，$z=13$. 且$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{cm/s}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3\mathrm{cm/s}$

所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3\mathrm{cm/s}$

2. 设有一个球体，其半径以$0.1\mathrm{m/min}$的速率增加，则当半径为$1\mathrm{m}$时，其体积增加的速率为______和表面积增加的速率为______ .

解：　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0.4\pi$$

$$S=4\pi r^2$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=4\pi\cdot 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=8\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0.8\pi$$