第三章　一元函数积分学及其应用

一元函数积分学包含不定积分和定积分，尽管名字相近，但二者有着本质区别. 本章利用微分逆运算的思想来引入不定积分的概念，并介绍计算不定积分的方法. 通过三个实例，抽象、提炼出定积分的概念和基本性质，重点介绍微积分基本定理，即 Newton-Leibniz 公式，以及定积分的计算方法和微元法思想在求解实际问题中的应用，简要介绍反常积分的定义和收敛准则.

§3.1　不 定 积 分

3.1.1　原函数与不定积分的概念

我们知道，减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，开方是乘方的逆运算，那么，微分的逆运算是什么呢？在第二章中，我们知道，如果一个函数 $f(x)$ 可微，则 $f(x)$ 的微分为 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$. 所谓逆运算是指，是否可以通过 $g(x)\mathrm{d}x$ 的表达式求得其对应的是哪个函数的微分.这里的“哪个函数”，就自然引出了“原函数”的概念，原函数可以理解为求微分之前原来的函数.

定义 3.1　如果在某区间 I 上，$F'(x)=f(x)$ 或者 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，那么称 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 I 上的一个**原函数**，或者说 $F(x)$ 是微分形式 $f(x)\mathrm{d}x$ 的一个原函数.

由 Lagrange 中值定理知道，$f(x)$ 在区间 I 上若有原函数，则必有无穷多个，且任意两个原函数之间只相差一个常数.因此，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$(C 为任意常数)就是 $f(x)$ 所有原函数的一般表达式.在本章中，若不加特殊说明，字母 C 代表任意常数.

定义 3.2　设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在某区间 I 上的一个原函数，则函数族 $F(x)+C$ 表示 $f(x)$ 在 I 上的一切原函数，称此函数族为 $f(x)$ 的**不定积分**，或者叫做微分形式 $f(x)\mathrm{d}x$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中，x 称为**积分变量**，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，而 $\int$ 称为**积分符号**.

为简便起见，以后一般不再注明被积函数的适用区间.应该注意，不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的全体原函数，它不是一个函数，而是一族函数，在几何上，它是一族曲线，称为积分曲线族. 显然，曲线族中的任一条积分曲线可由另一条积分曲线沿 y 轴方向平移而得到. 不定

积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形即为如图 3-1 所示的积分曲线族.曲线族中各条曲线在横坐标相同的点处的切线相互平行.

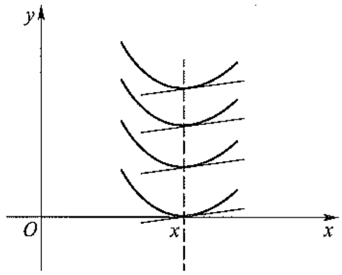

图 3-1

根据不定积分的定义,可得下列性质:

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$$

或

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x.$$

在不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的定义中,$f(x)\mathrm{d}x$ 本来就是整个不定积分记号中不可分离的一部分,但是由上面的性质可知,积分号下的 $f(x)\mathrm{d}x$ 与微分表达式的符号是一致的,于是又得到下面的不定积分性质:

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$$

或

$$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C.$$

可见,不定积分运算与微分运算,在相差一个常数意义下互为逆运算.下面定理给出了原函数存在的一个充分条件,具体的证明将在定积分部分给出.

定理 3.1 若函数 $f(x)$在区间 I 上连续,则 $f(x)$在 I 上存在原函数 $F(x)$,即

$$F'(x)=f(x),\quad x\in I.$$

注意,函数 $f(x)$在区间 I 上连续,仅是 $f(x)$在 I 上存在原函数的充分条件. 若函数 $f(x)$在区间 I 上不连续,$f(x)$在 I 上也可能存在原函数.本章如无特别说明,一般都假设被积函数是连续的,由此来保证原函数的存在性.

3.1.2 基本积分公式与积分运算法则

若 $F'(x)=f(x)$,则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,因此,有了一个导数公式,就有一个对应的不定积分公式.由常用的求导基本公式,立即得到下面的基本积分公式表:

(1) $\int k\,\mathrm{d}x=kx+C$ (k 为常数).

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ ($\alpha\neq-1$).

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C.$

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$ ($a>0$,且 $a\neq1$).

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C.$

(6) $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C.$

(7) $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C.$

(8) $\int \sec^{2}x\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\tan x+C.$

(9) $\int \csc^{2}x\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x=-\cot x+C.$

(10) $\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x=\sec x+C.$

(11) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$. (12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

(13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$. (14) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$.

(15) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$.

以上 15 个公式是求不定积分的基础，每一个公式都可以这样来验算：将等式右端的函数微分，得到左端的被积表达式.

根据定义，很容易验证以下的运算法则.

定理 3.2(积分的线性运算法则) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的不定积分都存在，则对不全为 0 的任意常数 k_1 与 k_2，函数 $k_1 f(x)+k_2 g(x)$ 的不定积分也存在，且有

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx.$$

上述定理说明函数线性组合的不定积分等于函数不定积分的线性组合.这是因为

$$\begin{aligned}\left[k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx\right]' &= k_1 \left[\int f(x) dx\right]' + k_2 \left[\int g(x) dx\right]' \\ &= k_1 f(x) + k_2 g(x).\end{aligned}$$

这说明 $k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$ 和 $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx$ 一样，都是 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 的原函数，从而 $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$.

上式右端有两个积分号，形式上含两个任意常数，但是由于任意常数之和仍然是任意常数，所以实际上只含一个任意常数.之所以 k_1 与 k_2 不能全为 0，是因为如果 k_1 与 k_2 全为 0，则等式右端为 0，而左端是 0 的不定积分，$\int 0 dx = C$.

利用上述法则及基本积分公式，可以计算一些较简单函数的不定积分. 计算时，将被积函数分解为若干个易求积分的简单函数(例如基本积分公式表中的函数)的线性组合，分别求出各个简单函数的不定积分，再按照上述法则进行线性组合即可.

例 3.1.1 求 $\int \frac{2x e^x - \sqrt{x} + 1}{x} dx$.

解 $\int \frac{2x e^x - \sqrt{x} + 1}{x} dx = 2\int e^x dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{1}{x} dx = 2e^x - 2\sqrt{x} + \ln|x| + C$.

例 3.1.2 求 $\int \frac{x^3+1}{\sqrt{2x}} dx$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{\sqrt{2x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x^3+1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int x^{\frac{5}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{7}(x^3+7)\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

例 3.1.3 求 $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$.

解 $$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x^4-1+2}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan x+C.$$

例 3.1.4 求 $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$.

解 $$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int(\csc^2 x+\sec^2 x)dx$$
$$=-\cot x+\tan x+C.$$

不定积分理论的基本问题是原函数的存在性和对各种函数求它们的原函数. 在微积分理论发展的早期,对于各种初等函数,寻求其原函数曾经是热门话题.当时人们曾认为,凡能用式子表示的函数一定有可以用式子表示的原函数. 直到 19 世纪末,挪威数学家 M. S. Lie(李)建立了连续变换群理论并用以研究微分方程以后,人们才知道初等函数的原函数并不都能用初等函数表示,一些简单的初等函数,如 e^{x^2}, e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1+x^3}$, $\frac{e^x}{x}$, $\sin x^2$, $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$等,其原函数虽然存在,但都不能用初等函数表示. 因而求不定积分要比求导数困难得多. 下面给出一些常用的求不定积分的方法.

3.1.3 不定积分的计算

利用基本积分公式和运算法则只能求解很少一部分的不定积分,本节将介绍求解不定积分的三种主要方法.

1. 第一类换元法(凑微分法)

不定积分的计算

定理 3.3(第一类换元法) 设 $\int f(x)dx=F(x)+C$, $u=\varphi(x)$ 是可微函数,则有换元公式

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F(\varphi(x))+C. \tag{3.1.1}$$

证明 由一阶微分的形式不变性,有

$$dF(\varphi(x))=f(u)du=f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

$F(\varphi(x))$是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$的一个原函数,所以

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F(\varphi(x))+C.$$

从形式上看,上述方法是将被积表达式凑成 $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$,再令 $u=\varphi(x)$,则 $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=f(u)du$,将中间变量 u 视为积分变量,求积分 $\int f(u)du$,因此第一类换元法又称为凑微分法. 求解的关键在于会不会"凑"出中间变量 u,因此读者必须要提高对基

本积分公式的熟悉程度.

例 3.1.5 求 $\int e^{2x}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=2x$,则 $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$,于是

$$\int e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

例 3.1.6 求 $\int(3x+1)\mathrm{d}x$.

解 $\int(3x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+1)\mathrm{d}(3x+1)=\frac{1}{6}(3x+1)^2+C.$

本题也可以直接利用运算法则分别计算 $3x$ 和 1 的不定积分,再求和,与上面的结果只相差一个常数.

例 3.1.7 求 $\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x$.

解 $\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\cos(3x+4)\mathrm{d}(3x+4)=\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C.$

例 3.1.5、例 3.1.6 和例 3.1.7 可归纳为如下公式:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b),\quad a\neq 0.$$

例 3.1.8 求 $\int x\cos x^2\mathrm{d}x$.

解 通过观察我们发现 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$,而被积函数也正好是 x^2 的余弦. 因此想到令 $u=x^2$,则 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$,于是

$$\int x\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\cos x^2\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\cos u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin x^2+C.$$

例 3.1.9 求 $\int\frac{3x^2}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{3x^2}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}(x^3+1)=\ln|x^3+1|+C.$

例 3.1.8 和例 3.1.9 可归纳为如下公式:

$$\int x^{n-1}f(ax^n+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b),\quad n\in\mathbf{N}_+,a\neq 0.$$

例 3.1.10 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+\ln^2 x}=\arctan(\ln x)+C.$

例 3.1.10 可归纳为如下公式:

$$\int\frac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x).$$

例 3.1.11 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\arctan\sqrt{x}+C.$$

例 3.1.12 求$\displaystyle\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})$$
$$=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})=\arctan^2\sqrt{x}+C.$$

一般地，我们有

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x}).$$

例 3.1.13 求$\displaystyle\int\cot x\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int\cot x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$$

同理可得，$\displaystyle\int\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$.

一般地，我们有

$$\int\cos x f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x),$$
$$\int\sin x f(\cos x)\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x).$$

其他常用的凑微分法还有以下类型：

(1) $\displaystyle\int e^x f(e^x)\mathrm{d}x=\int f(e^x)\mathrm{d}(e^x)$.

(2) $\displaystyle\int\sec^2 x f(\tan x)\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$.

$\displaystyle\int\csc^2 x f(\cot x)\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$.

(3) $\displaystyle\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$.

$\displaystyle\int\frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int f(\arccos x)\mathrm{d}(\arccos x)$.

(4) $\displaystyle\int\frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$.

$\displaystyle\int\frac{f(\operatorname{arccot} x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int f(\operatorname{arccot} x)\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)$.

例 3.1.14　求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\ (a \neq 0)$.

解　$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a)-\int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right]$$
$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例 3.1.15　求 $\int \sec x\,\mathrm{d}x$.

解　$$\int \sec x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

类似地可算出 $\int \csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

例 3.1.16　求 $\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

例 3.1.17　求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\ (a\neq 0)$.

解　$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

例 3.1.18　求 $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{(\sqrt{2})^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C.$$

例 3.1.19　求 $\int\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2+2^2}\mathrm{d}(x+1)=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$$

例 3.1.20 求 $\int \frac{4x+9}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{4x+9}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{4x+4}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x + \int \frac{5}{(x+1)^2+4}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln(x^2+2x+5) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

例 3.1.21 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \arcsin(2x-1) + C.$$

例 3.1.22 求 $\int(\sin^3 x + \sin^2 x)\mathrm{d}x$.

解

$$\int(\sin^3 x + \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\,\mathrm{d}x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= -\int(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x) + \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x - \int \cos 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\int \mathrm{d}(\cos x) + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x)$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

对形如 $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$ 及 $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$（$n$ 是正整数）的不定积分，根据后面的分部积分，可得如下的递推公式：

$$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x.$$

例 3.1.23 求 $\int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,\mathrm{d}(\tan x) = \int(\tan^2 x + 1)\mathrm{d}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C.$$

对形如 $\int \frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x$ 及 $\int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x$（$n \geqslant 2$，$n$ 是正整数）的不定积分，根据后面的分部积分，可得如下的递推公式：

$$\int \frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2} x}\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 2),$$

$$\int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2}x}\mathrm{d}x \quad (n\geqslant 2).$$

一般地,对形如 $\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\mathrm{d}x\left(\text{或}\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\mathrm{d}x\right)$ 的积分,其中 n,m 是正整数,若 n 为奇数,则利用 $\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$, $\sin^{n-1}x=(1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$,化为将 $\cos x$ 视为积分变量的积分.若 n 为偶数,利用 $\sin^n x=(1-\cos^2 x)^{\frac{n}{2}}$,化为 $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ 或 $\int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x$ 形式的积分.

对于形如 $\int \sin^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x$ 的积分,其中 n,m 是正整数,若 n,m 中至少有一个是奇数,不妨设 n 为奇数,则利用 $\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$, $\sin^{n-1}x=(1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$,化为将 $\cos x$ 视为积分变量的积分.若 n,m 均为偶数,利用 $\sin^n x=(1-\cos^2 x)^{\frac{n}{2}}$,化为 $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ 形式的积分.

例 3.1.24 求 $\int \frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}\mathrm{d}x &=\int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^3 x\cos^3 x}\mathrm{d}x\\ &=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x+\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x+\int \frac{2}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}+\int \frac{2}{\sin 2x}\mathrm{d}(2x)\\ &=\frac{1}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}+2\ln|\csc 2x-\cot 2x|+C.\end{aligned}$$

例 3.1.25 求 $\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x &=\frac{1}{2}\int (\sin 5x-\sin x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{10}\int \sin 5x\,\mathrm{d}(5x)-\frac{1}{2}\int \sin x\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C.\end{aligned}$$

形如 $\int \sin ax\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int \sin ax\sin bx\,\mathrm{d}x$ 或 $\int \cos ax\cos bx\,\mathrm{d}x\,(a,b\neq 0,a\neq b)$ 的积分,利用三角函数的积化和差公式,化为 $\int \sin cx\,\mathrm{d}x$ 或 $\int \cos cx\,\mathrm{d}x$ 形式的积分.

现在介绍计算有理函数的不定积分方法.

设有理函数

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

这里 $P(x)$, $Q(x)$ 分别是 n,m 次多项式.若 $n<m$,则称 $R(x)$ 为真分式.当 $n\geqslant m$ 时,$R(x)$

总可以分解为多项式与真分式之和，而多项式的原函数简单易求，因此假定下面讨论的 $R(x)$ 为真分式.

根据代数学的理论，真分式能分解为下面 4 种最简分式之和：

(1) $\dfrac{A}{x-a}$.　(2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$.　(3) $\dfrac{Bx+D}{x^2+px+q}$.　(4) $\dfrac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}$.

其中，$k=2,3,\cdots$，且 $p^2-4q<0$.

诸如上述各常数 A,B,D 可用待定系数法求得.具体方法是：当 $Q(x)$ 有 k 重一次实因子 $(x-a)^k$ 时，对应 $R(x)$ 的分解式中含有如下形式的项：

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

当 $Q(x)$ 含有 k 重二次实因子 $(x^2+px+q)^k$ (这里 $p^2-4q<0$) 时，对应 $R(x)$ 的分解式中含有如下形式的项：

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+D_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

这样，有理函数 $R(x)$ 的不定积分 $\int R(x)\mathrm{d}x$，就转化为求其所分解成的多项式与各部分分式的原函数之和.

例 3.1.26　求 $\displaystyle\int\frac{x+4}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$.

解　令 $\dfrac{x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}$，得 $A(x+3)+B(x+2)=x+4$，于是 $\begin{cases}A+B=1,\\3A+2B=4,\end{cases}$ 解得 $A=2,B=-1$.故

$$\int\frac{x+4}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=2\ln|x+2|-\ln|x+3|+C.$$

例 3.1.27　求 $\displaystyle\int\frac{2x^2-x-1}{(x+1)(x^3+1)}\mathrm{d}x$.

解　设 $\dfrac{2x^2-x-1}{(x+1)(x^3+1)}=\dfrac{2x^2-x-1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$. 将此式右边通分后，比较等式两边分式的分子，得

$$2x^2-x-1=(A+C)x^3+(B+2C+D)x^2+(C+2D-B)x+(A+B+D).$$

于是，有 $A+C=0,B+2C+D=2,C+2D-B=-1,A+B+D=-1$，解得

$$A=-1,\quad B=\frac{2}{3},\quad C=1,\quad D=-\frac{2}{3},$$

即有 $\dfrac{2x^2-x-1}{(x+1)(x^3+1)}=\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{\frac{2}{3}}{(x+1)^2}+\dfrac{x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$，故所求积分

$$\int\frac{2x^2-x-1}{(x+1)(x^3+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{-1}{x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{2}{3}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+\int\frac{x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=-\ln|x+1|-\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx$$

$$=-\ln|x+1|-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=-\ln|x+1|-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$$

$$=-\ln|x+1|-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

由此例可知,前三类最简分式的不定积分

$$\int\frac{A}{x-a}dx,\quad\int\frac{A}{(x-a)^k}dx,\quad\int\frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx$$

很容易求出. 而第四类最简分式的不定积分为

$$\int\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+\left(D-\frac{pB}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^k}dx+\left(D-\frac{pB}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}+\left(D-\frac{pB}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

$$=\frac{B}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+\left(D-\frac{pB}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

其中 $t=x+\frac{p}{2}$,$a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$,对于不定积分 $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$ 可用后面的分部积分法计算. 因此有理函数的积分问题全部得以解决.

下面介绍求三角函数有理式的不定积分的一种方法.

由 $u(x)$,$v(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于 $u(x)$,$v(x)$ 的有理式,并用 $R(u(x),v(x))$ 表示. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 是三角函数有理式的不定积分,一般通过变换 $t=\tan\frac{x}{2}$,可化为有理函数的不定积分. 这是因为

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

所以 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

例 3.1.28 求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x&=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{2}\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C\\&=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

注 上面所用的变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 对三角函数有理式的不定积分虽然总是有效的，但并不意味着在任何场合都是简便的. 比如，我们看下面的例子.

例 3.1.29 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\ (ab\neq0)$.

解 由于

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int\frac{\sec^2x}{a^2\tan^2x+b^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a^2\tan^2x+b^2},$$

故令 $t=\tan x$，就有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}&=\int\frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2+b^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(at)}{(at)^2+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan\frac{at}{b}+C\\&=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C.\end{aligned}$$

感兴趣的读者可以尝试用变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 求解来进行比较. 一般来说，当 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 时，可令 $u=\sin x$；当 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 时，可令 u

$=\cos x$；当 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$时，可令 $u=\tan x$.

2. 第二类换元法

第一类换元法是通过变量代换 $\varphi(x)=u$ 将积分 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 转化为$\int f(u)\mathrm{d}u$. 现介绍另一种换元法，它是通过变量代换 $x=\varphi(t)$ 将积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 转化成积分 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{def}} \int g(t)\mathrm{d}t,$$

在求出$\int g(t)\mathrm{d}t$ 之后，再用 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代回原变量，就得到$\int f(x)\mathrm{d}x$，这种积分方法称为**第二类换元法**.

定理 3.4(第二类换元法) 设 $f(x)$是连续函数，$x=\varphi(t)$有连续导数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}, \tag{3.1.2}$$

其中，$t=\varphi^{-1}(x)$是 $x=\varphi(t)$的反函数.

证明 由假设知上式两边的积分都存在，只需证明其导数相等，因为 $\varphi'(t)\neq 0$，故 $x=\varphi(t)$存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且$[\varphi^{-1}(x)]'=\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$，在等式两边分别对 x 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(x).$$

这便证明了此换元法的正确性. □

例 3.1.30 求 $\int(ax+b)^m\mathrm{d}x\ (m\neq -1,a\neq 0)$.

解 令 $u=ax+b$，则 $\mathrm{d}u=a\,\mathrm{d}x$，故

$$\text{原式}=\int u^m\ \frac{1}{a}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\ \frac{1}{m+1}u^{m+1}+C=\frac{1}{a(m+1)}\ (ax+b)^{m+1}+C.$$

对这个例子来说，将原式凑成$\dfrac{1}{a}\int(ax+b)^m\mathrm{d}(ax+b)$，就可以看作是第一类换元法. 下面的例子我们能更清楚地看到两类换元法的本质区别.

例 3.1.31 求 $\int\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\sin t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t}{\sin t\cos t}\mathrm{d}t=\int\csc t\,\mathrm{d}t=\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

例 3.1.32 求 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^3 t\sec^2 t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int\tan^3 t\sec t\,\mathrm{d}t=\int\tan^2 t\,\mathrm{d}(\sec t)$$

$$=\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}(\sec t)=\frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t+C$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

例 3.1.33 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$.

解 当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则借助图 3-2 的辅助直角三角形，便于求出 $\sec t=\frac{x}{a}$, $\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$,

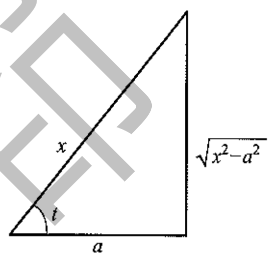

图 3-2

$$\text{原式}=\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

当 $x<-a$ 时，令 $x=-u$，则 $u>a$，于是

$$\text{原式}=-\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}}=-\ln\left|\frac{u}{a}+\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a}\right|+C_1=-\ln\left|\frac{-x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

以上所用的代换称为三角代换. 一般来说，被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ 等形式时，常分别作三角代换 $x=a\sin t$, $x=a\tan t$, $x=a\sec t$ 等. 这种代换的目的是为了去掉根号，根号里是两个数的平方差或和，如果这个和或差是某个数的平方，则正好可以把根号去掉，而这三个数也正好对应直角三角形的三条边. 读者可根据具体的题目，按照与图 3-2 类似的方式找出 x, a 和 t 的对应关系. 当被积函数中根号里不具有这样的结构时，由于根号的特殊性，通常考虑把整个根号里的式子当作一个整体来处理.

例 3.1.34 求 $\int\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解　为去掉根号，令$\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\dfrac{t^2-1}{2}$，$\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(t^2+3)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+3t\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\sqrt{2x+1}+C.$$

一般地，若被积函数中含$\sqrt[n]{ax+b}\,(a\neq0)$，可令$\sqrt[n]{ax+b}=t$.

例 3.1.35　求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.

解　令 $x=t^6$，

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.$$

一般地，若被积函数中含$\sqrt[m]{ax+b}$和$\sqrt[n]{ax+b}\,(a\neq0)$，可令$\sqrt[k]{ax+b}=t$，其中 k 是 m 和 n 的最小公倍数.

例 3.1.36　求 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$.

解　令$\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=t$，解得 $x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，则

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=\int\frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\arctan t+C$$

$$=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

被积函数中含$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\,(ad-bc\neq0)$时，可令$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，去掉根号.

例 3.1.37　求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\ (x>1)$.

解　令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arccos t+C_1=\arccos\frac{1}{x}+C.$$

$x=\dfrac{1}{t}$称为倒代换，利用它可以将分母中的变量转化到分子中去. 本例也可利用变换 $x=\sec t$ 进行计算.

3. 分部积分法

前面所讲的换元积分法，实际上是与微分学中的复合函数微分法相对应的一种积分法，而下面要介绍的分部积分法是与乘积的微分法相对应的一种积分法.

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$都有连续导数，则

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u,$$

移项得

$$u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u,$$

两边求不定积分，得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u. \tag{3.1.3}$$

也即

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int vu'\mathrm{d}x. \tag{3.1.4}$$

此公式称为不定积分的分部积分公式. 分部积分公式常用于求两个不同类型函数的乘积的积分. 尤其当$\int u\mathrm{d}v$ 不易计算，而$\int v\mathrm{d}u$ 容易计算时，便可用分部积分公式.

例 3.1.38 求 $\int x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

解 $\int x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=-\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}+C.$

例 3.1.39 求 $\int x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=\int x^3\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x^3\mathrm{e}^x-3\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x+6\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\&=x^3\mathrm{e}^x-3x^2\mathrm{e}^x+6x\mathrm{e}^x-6\mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

例 3.1.40 求 $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.\end{aligned}$$

例 3.1.41 求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int\ln x\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\int\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{d}(\ln x)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

例 3.1.42 求 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx &= \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,dx\\ &= \int \arctan x\,dx - \int \arctan x\,d(\arctan x)\\ &= x\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C.\end{aligned}$$

例 3.1.43 求 $\int e^x \sin x\,dx$.

解
$$\begin{aligned}\int e^x\sin x\,dx &= \int \sin x\,d(e^x) = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx\\ &= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx.\end{aligned}$$

令 $\int e^x\sin x\,dx = I$，则上式变为 $I = e^x\sin x - e^x\cos x - I$，于是

$$2I = e^x\sin x - e^x\cos x,$$

$$I = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + C.$$

即 $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + C$.

例 3.1.44 求 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{\ln x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx &= \int \ln x\,d\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln x - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln x - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C.\end{aligned}$$

例 3.1.45 求 $\int x\arctan x\,dx$.

解 令 $u=\arctan x$，$x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = dv$，则

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int\frac{x^2}{2}d(\arctan x)\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\end{aligned}$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例 3.1.46 求 $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解 $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x=x\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

例 3.1.47 求 $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

解 $\int \ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$

例 3.1.48 求 $\int \frac{\ln x}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\ln x}{(x-2)^2}\mathrm{d}x=-\int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{2-x}\ln x+\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)}$

$$=\frac{1}{2-x}\ln x+\frac{1}{2}\int \frac{x-(x-2)}{x(x-2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2-x}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{2}{x}\right|+C.$$

例 3.1.49 求 $\int \frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

解法 1 $\int \frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^2}$

$$=\frac{x}{\ln x}+\int x\cdot\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^2}=\frac{x}{\ln x}+C.$$

解法 2 $\int \frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x'\cdot\ln x-x\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{\ln x}\right)'\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln x}+C.$

一般地,下列情形时可用分部积分法.

(1) 一般而言,求两类不同函数乘积的不定积分时,如果不是用凑微分法,就一定是用分部积分法.

(2) 单独的对数函数或反三角函数积分时,用分部积分法.

通过以上例题,请读者总结一下,对下列类型的不定积分:

$$\int x^n \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x,\quad \int x^n\sin ax\,\mathrm{d}x,\quad \int x^n\cos ax\,\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x,\quad \int x^n\ln x\,\mathrm{d}x,\quad \int x^n\arcsin x\,\mathrm{d}x,$$

其中 n 是正整数,a,b 是实数,应当如何选取 u 和 $\mathrm{d}v$?

例 3.1.50 求 $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$,$n$ 为大于 1 的正整数,$a\neq 0$.

解 $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int x\,\mathrm{d}\left[\frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}\right]\\
&=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\\
&=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.
\end{aligned}
$$

于是，

$$
I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right].
$$

此式为递推公式.用此式能把求 I_n 变为求 I_{n-1}，再把求 I_{n-1} 变为求 I_{n-2}，如此继续下去，最后得积分 $I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$，从而可求出 I_n.

例 3.1.51 设函数 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0,\end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的不定积分，则应满足

$$
g(x)=\begin{cases}\cos x+C_1, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}x^2+C_2, & x<0,\end{cases}
$$

又 $g(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$，即 $1+C_1=C_2$，令 $C_1=C$，则 $C_2=1+C$. 所以

$$
g(x)=\begin{cases}\cos x+C, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}x^2+1+C, & x<0.\end{cases}
$$

求不定积分的方法和公式很多，为了使用的方便，把常用的积分方式汇集成表，称为基本积分公式表(见 3.1.2 小节). 求积分时，我们可以根据被积函数的类型，直接或经过简单变形，在表中查得所需结果.在计算机上，借助数学软件 Mathematica 和其他一些数学软件的符号运算功能，可以实现大部分初等函数的积分运算. 但是求不定积分的基本方法还必须掌握.

习题 3.1

(A)

1. 下列等式是否正确？为什么？

(1) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　(2) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

(3) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$.　　(4) $\mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}f(x)$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^2}$.　　(2) $\int x\sqrt{x}\,dx$.

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.　　(4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$.

(5) $\int 5x^3\,dx$.　　(6) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$.

(7) $\int (x^2-3x+2)\,dx$.　　(8) $\int (x^2+1)^2\,dx$.

3. 一曲线通过点$(e^2,3)$且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

4. 求下列不定积分：

(1) $\int e^{5t}\,dt$.　　(2) $\int (3-2x)^3\,dx$.

(3) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}})\,dx\ (ab\neq 0)$.　　(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$.

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$.　　(6) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

(7) $\int x\cos x^2\,dx$.　　(8) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}\,dx$.

(9) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\,dx$.　　(10) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

(11) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$.　　(12) $\int \cot^2 x\,dx$.

(13) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.　　(14) $\int \sec x(\sec x-\tan x)\,dx$.

(15) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$.　　(16) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$.

(17) $\int \cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\,d\theta$.

5. 求下列不定积分：

(1) $\int x\sin x\,dx$.　　(2) $\int x^2\ln x\,dx$.

(3) $\int e^{-x}\cos x\,dx$.　　(4) $\int x\cos\frac{x}{2}\,dx$.

(5) $\int x^2\arctan x\,dx$.　　(6) $\int x\tan^2 x\,dx$.

(7) $\int x\sin x\cos x\,dx$.　　(8) $\int x\ln(x-1)\,dx$.

(9) $\int \cos(\ln x)\,dx$.　　(10) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$.

(11) $\int e^x\sin^2 x\,dx$.　　(12) $\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$.

6. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.　　(2) $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$.　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.　　(6) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

(7) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$.　　(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

7. 用适当方法求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.　　(4) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)dx$.

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$.　　(6) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$.

(7) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$.　　(8) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$.

(9) $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$.　　(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{16-x^4}$.

(11) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

(B)

1. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，求 $\displaystyle\int xf'(x)dx$.

2. 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

3. 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\displaystyle\int x^3 f'(x)dx$.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，求 $\displaystyle\int\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f'(x)}\right]dx$.

5. 设 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\displaystyle\int xf'(x)dx$.

§ 3.2　定积分的定义与初等性质

首先，我们通过三个引例来抽象出定积分的定义.

引例 1　曲边梯形的面积

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f(x)\geqslant 0$. 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的平面图形(图 3-3)，称为曲边梯形. 下面讨论曲边梯形的面积.

在初等数学里，圆面积是用一系列边数无限增多的内接(或外切)正多边形面积的极限来定义的. 现在我们仍用类似的办法来定义曲边梯形的面积.

在区间 (a,b) 内任取 $n-1$ 个分点，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

将$[a,b]$分割成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$,并记第 i 个小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,用直线 $x=x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形(图 3-4).用 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第 i 个小曲边梯形的面积,则要求的曲边梯形面积

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

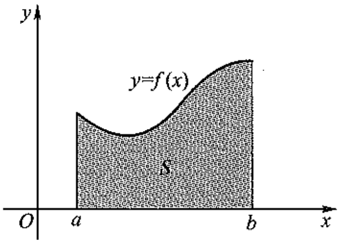

图 3-3

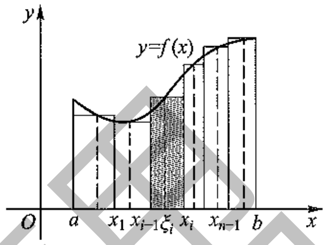

图 3-4

当每个小区间的长度都很小时,由函数 $y=f(x)$的连续性可以知道,在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上函数值的变化都很小,因此小曲边梯形可近似地看作矩形,从而我们在区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,用 $f(\xi_i)$作为该近似矩形的高,得到

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

上述 n 个小矩形面积之和就是曲边梯形面积的近似值,即

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$,由上述三个过程易知,随着 $\lambda\to 0$,从几何直观上看,和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 将无限地接近曲边梯形面积 S,因此很自然地将 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 在 $\lambda\to 0$ 时的极限作为曲边梯形的面积,即

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

引例 2　非均匀细棒的质量

设有一根质量分布不均匀的细棒,现将其置于 x 轴上,左、右端点的坐标分别为 a 和 b(图 3-5).细棒上点 x 处的线密度为 $\rho(x)$(假定 $\rho(x)$连续),下面求其质量.

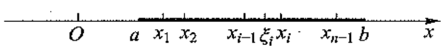

图 3-5

在(a,b)内任意插入 $n-1$ 个分点,

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将细棒分成 n 个小段$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，第 i 段的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，设第 i 个小段上细棒的质量为 $\Delta m_i(i=1,2,\cdots,n)$，则细棒质量 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i$.

当 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$都很小时，$\rho(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的变化也很小，因此可近似地认为在$[x_{i-1},x_i]$上质量是均匀分布的，线密度为 $\rho(\xi_i)$（ξ_i 是$[x_{i-1},x_i]$上的任意一点），从而

$$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i)\Delta x_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

将 n 个小段质量的近似值相加，即得细棒质量的近似值，即

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$.显然，当 $\lambda\to 0$ 时，从物理直观上看，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\Delta x_i$ 会无限地接近 m，因此

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i)\Delta x_i.$$

引例 3 变速直线运动的位移

设某质点作变速直线运动，速度 v 是时间 t 的函数，即 $v=v(t)$，$t\in[a,b]$，$v(t)>0$ 且连续，求在这段时间内质点经过的位移.仔细体会前面两个引例，都蕴含了一种化整为零的思想. 因此，我们还是从划分区间入手，在(a,b)内任意插入 $n-1$ 个分点，

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

将$[a,b]$分成 n 个小区间$[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$，第 i 个小区间的长度 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，设质点在第 i 个小区间上的位移是 ΔS_i，则总位移 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

当 $\Delta t_i(i=1,2,\cdots,n)$都很小时，$v(t)$在$[t_{i-1},t_i]$上的变化就很小，可近似地认为在$[t_{i-1},t_i]$上速度是不变的，都等于 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$处的速度，因而

$$\Delta S_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

将上述 n 个部分位移相加，即得所要求的位移的近似值，即

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i.$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，令 $\lambda\to 0$，从物理直观上看，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$ 的极限就是所求位移. 因此

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i.$$

从上面的引例中我们可以看出，虽然问题来自不同的领域，但最终都归结为计算一个特定形式的和式的极限. 从右到左观察上面的和式，刚好对应了分割 Δt_i、近似 $v(\tau_i)\Delta t_i$、求和 $\sum\limits_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$、取极限这样一个过程.在科学技术中还有许多同样类型的数学问题，解决这类

问题的思想方法概括说来就是“分割、近似、求和、取极限”. 这就是产生定积分概念的背景.

定义 3.3　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，任取 $[a,b]$ 的一个分割 Δ：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把 $[a,b]$ 分成 n 个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作积分和 $S_n(f;\Delta)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. 如果不论对 $[a,b]$ 采用何种分割，也不论在 $[x_{i-1},x_i]$ 上如何选取 ξ_i，只要当 $\lambda\to 0$ 时，$S_n(f;\Delta)$ 都以同样的一个常数 I 为极限，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，$[a,b]$ 称为**积分区间**，a 和 b 分别称为**积分下限**和**积分上限**，$\int$ 称为**积分符号**.


定积分的概念

事实上，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个极限，这个极限一旦存在，是与 $[a,b]$ 的分割无关的，也与 $[x_{i-1},x_i]$ 上选取 ξ_i 的方式无关. 如果由于分割点 x_i 与小区间上 ξ_i 的取法不同而导致积分和式的极限不同或极限不存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积. 例如，Dirichlet 函数：

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

请读者自己思考 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积的原因.

显然，定积分值与积分变量的符号无关.

观察定积分的定义，在任取 $[a,b]$ 的一个分割中，蕴含了 $a<b$ 的假设，而在实际应用和理论分析中并无这样的假设，为此，作如下的补充定义：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

对照定积分的定义，可知前面讨论的三个问题中，曲边梯形的面积、非均匀细棒的质量和变速直线运动的位移可分别表示为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$，这三个引例揭示了**定积分的几何意义和物理意义**.

例 3.2.1　证明：常值函数 $f(x)=C$ 在任何区间 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=C(b-a).$$

证明　对于 $[a,b]$ 的任意分割 Δ 和相应的 ξ_i，都有

$$S_n(f;\Delta)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}C\Delta x_i=C(b-a),$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}C(b-a)=C(b-a).$$ □

以下引理指出了函数可积的一个必要条件.

引理 3.1(可积的必要条件)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,则对任意给定的 $N>0$,任意给定的分割 Δ:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

$f(x)$ 至少在其中的一个子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 上无界. 先在 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n,i\neq j)$ 上任意选定 ξ_i,然后在 $[x_{j-1},x_j]$ 上适当选取 ξ_j,使

$$|f(\xi_j)\Delta x_j|>N+\left|\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\Delta x_i\right|,$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\geqslant|f(\xi_j)\Delta x_j|-\left|\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\Delta x_i\right|>N.$$

定积分的性质、可积准则

这说明对于任意分割 Δ,总可以通过适当选取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,使 $|S_n(f;\Delta)|$ 任意大.因此,$\lambda\to 0$ 时积分和不可能有极限,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积,这与假设矛盾. 因此,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界. □

这个引理仅给出了可积的必要条件.由此引理可知,凡是无界函数均不可积.但有界函数也未必可积,例如前面讨论过的 Dirichlet 函数虽然有界,但在任何有界闭区间 $[a,b]$ 上都不可积.那么哪些有界函数一定可积呢? 下面给出几类可积函数.

定理 3.5(可积的充分条件)　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足下列条件之一:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,且只有有限个间断点.

(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

上述定理证明较复杂,从略.

根据定积分的定义,可积函数积分和的极限值与区间分割及 ξ_i 的取法无关. 因而对于某些可积函数,可选取适当的分割和适当的 ξ_i,作出积分和,再求极限得定积分值.

例 3.2.2　求 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$. $\left(\text{提示}:\sum_{i=1}^{n}i^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.\right)$

解　函数 $f(x)=x^3$ 在 $[0,1]$ 上连续,因而在 $[0,1]$ 上可积.将 $[0,1]$ 进行 n 等分,分点 $x_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$.选取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则对应的积分和

$$S_n(f;\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}=\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\Delta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4},$$

故

$$\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

用这种直接求积分和的极限的方法计算定积分是很不方便的，在很多情况下是难以求出的. 常用的计算方法将在后续各节介绍.

下面，我们在定积分定义的基础上讨论它的各种性质，这些性质对于定积分的计算和应用都是非常重要的.

性质 3.1 若在$[a,b]$上 $f(x)=1$，则 $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

性质 3.2(线性运算规则) 若函数 $f(x)$和 $g(x)$都在$[a,b]$上可积，则对任意常数 α 和 β，函数 $\alpha f(x)+\beta g(x)$在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 任取$[a,b]$的一个分割 Δ：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

并在$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，则相应的积分和

$$\sum_{i=1}^n[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i+\beta\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i.$$

由 $f(x)$和 $g(x)$的可积性知，右边两项在 $\lambda\to 0$ 时分别以 $\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 为极限，从而左边极限存在，这说明 $\alpha f(x)+\beta g(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$ □

由上述性质可知，计算较复杂函数的定积分时，可分项计算. 例如，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ (由几何意义可知定积分值是单位圆面积的四分之一)，故由例 3.2.1 和性质 3.2，有

$$\int_0^1(4+2\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=4\int_0^1\mathrm{d}x+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=4\times 1+2\times\frac{\pi}{4}=4+\frac{\pi}{2}.$$

由定积分的定义，易得下面性质：

性质 3.3 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，且 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

性质 3.4(单调性) 若函数 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上均可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由性质 3.2 可知，函数 $g(x)-f(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

又因 $g(x)-f(x)\geqslant 0$，由性质 3.3，$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0$，从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

□

性质 3.5　若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，且 M 与 m 分别是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证明　在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant m$，故由性质 3.4、性质 3.2 和性质 3.1 知，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b m\mathrm{d}x = m\int_a^b \mathrm{d}x \geqslant m(b-a).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

□

性质 3.6　若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$上可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明　关于$|f(x)|$在$[a,b]$上可积性的证明较为复杂，这里从略，以下只证不等式成立.由于

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|,\quad x\in[a,b],$$

由性质 3.4 及性质 3.2 可知，

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

此式即所要证明的不等式.　□

性质 3.4、性质 3.5 和性质 3.6 常用于比较定积分的大小和估计定积分的大致范围. 如果需要建立严格不等式，则要从性质 3.3 改起(其证明留作习题)：

若函数 $f(x)$在$[a,b]$上非负、连续，且不恒为零，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

基于上述结论，可以得到性质 3.4、性质 3.5 和性质 3.6 的严格不等式形式. 例如，对于性质 3.4，可以改写为

若函数 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上均连续，$f(x)\leqslant g(x)$，且不恒等，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.3　比较 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 的大小.

解　易知，$x\in[0,1]$时，$x\geqslant x^2$，且等号仅在 $x=0,1$ 两个点成立，故

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x > \int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$$

例 3.2.4　证明:不等式

$$\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

成立.

证明　易证$\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增.故最小值为 1,最大值为$\sqrt{2}$.则由性质 3.5,有

$$\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$ □

性质 3.7(对区间的可加性)　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,$c\in(a,b)$,$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上也可积,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　$f(x)$在$[a,b]$的子区间上的可积性证明从略.以下只证可加性.

因为 $f(x)$在$[a,b]$上可积,所以积分和的极限与分割方式无关,故总可将 c 作为一个分割点.这样,$f(x)$在$[a,b]$上的积分和等于 $f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上的积分和 $\sum\limits_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与$\sum\limits_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i$ 之和,即

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

令 $\lambda\to 0$,取极限,便得到所要证明的积分等式. □

由性质 3.7 可知,计算分段表示的可积函数的定积分时,可分区间计算. 例如,对函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^2 1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+1.$$

性质 3.7 可推广为设 $f(x)$在包含 a,b,c 的有界闭区间 I 上可积,则不论 a,b,c 的相对位置如何,总有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

例如,设 $a<b<c$,则由性质 3.7,

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3.8 设 $f(x)$, $g(x)$在$[a,b]$上均可积,则 $f(x)g(x)$在$[a,b]$上也可积.

证明留给读者.

性质 3.9(积分中值定理) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot(b-a).$$

证明 因 $f(x)$在$[a,b]$上连续,故在$[a,b]$上可积.设 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值分别为 M 和 m,则由性质 3.5,

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

故

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

由连续函数的介值定理知,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot(b-a).$$ □

当 $f(x)\geqslant 0$ 时,积分中值定理具有简单的几何意义:对于如图 3-6 所示的曲边梯形,总存在一个高为 $f(\xi)$,底长为 $b-a$ 的矩形,使矩形面积等于曲边梯形的面积.

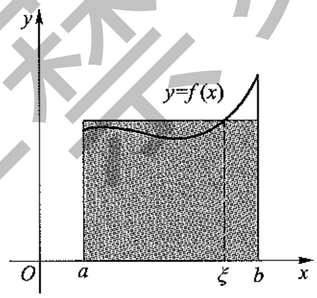

图 3-6

我们也常把 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$在$[a,b]$上的平均值.

习题 3.2

(A)

1. 按定积分定义证明: $\int_a^b 2\mathrm{d}x=2(b-a)$.

2. 通过对积分区间作等分分割,并取适当的点集$\{\xi_i\}$,把定积分看作是对应的积分和的极限,来计算下

列定积分：

(1) $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$. (2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

3. 已知某物体以速度 $v(t)=3t+5$ m/s 做直线运动，试用定积分表示物体在 $T_1=1$ s 到 $T_2=3$ s 期间所运动的距离，并用定积分求出该距离.

(B)

1. 利用定积分定义计算下列定积分：

(1) $\int_a^b \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$. (2) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(0<a<b)$.(提示：取 $\xi_i=\sqrt{x_{i-1}x_i}$.)

2. 利用定积分表示下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

3. 比较定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$. (2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{d}x$.

4. 证明下列不等式：

(1) $\frac{1}{2}<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2) $2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}<\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x<2\mathrm{e}^2$.

(3) $\ln(n!)>\int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x$，其中正整数 $n\geqslant 2$.

5. 证明：(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负、连续，且不恒为零，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

(2) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0, x\in[a,b]$.

(3) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均连续，$f(x)\leqslant g(x)$，且不恒等，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

§ 3.3 Newton-Leibniz 公式

虽然定积分定义为积分和的极限，但一般来说直接用定义来验证函数的可积性并计算定积分值是很困难的事. 本节介绍的 Newton-Leibniz 公式，在原函数存在的前提条件下，成功地解决了判定可积性与计算定积分值的问题. 这一公式，无论在理论上或者是在实际应用中，都具有重要的意义.

Newton-Leibniz 公式

定理 3.6（Newton-Leibniz 公式） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.如果存在函数 $F(x)$，它在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且满足

$$F'(x)=f(x),\quad \forall x\in(a,b),$$

那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证明　任取$[a,b]$的一个分割：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

由微分中值定理知，存在$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

从而

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

显然 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个特殊积分和，由于 $f(x)$ 可积，令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，在上式两边取极限，便有

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda\to 0}[F(b) - F(a)] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

为了书写方便，我们引入记号

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

于是，Newton-Leibniz 公式可以写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

为了方便起见，不管$a<b$还是$a>b$，我们都用记号$[a,b]$表示介于a与b之间（连同a，b在内）的所有实数的集合，并仍称之为闭区间.

例 3.3.1　计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）.　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　由于 $\arctan x$ 是$\dfrac{1}{1+x^2}$的一个原函数，$\tan x$，$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$和 $\arcsin x$ 分别是$\dfrac{1}{\cos^2 x}$，x^n 和$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的原函数，根据 Newton-Leibniz 公式，有

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$.

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$.

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则对任何 $x\in[a,b]$ 可以定义

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

这里为了避免与积分上限相混淆，改用 t 表示积分变量. 换句话说，对每个固定的积分上限 x，都有一个积分值与其对应，因此，我们可以把定积分看作积分上限的函数.

定理 3.7 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上连续.

证明 可积函数是有界的. 设

$$|f(t)|\leqslant K,\quad \forall t\in[a,b].$$

对任意 $x_0\in[a,b]$，我们有

$$|\Phi(x)-\Phi(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^x |f(t)|\mathrm{d}t\right|\leqslant K|x-x_0|.$$

由此得到

$$\lim_{x\to x_0}[\Phi(x)-\Phi(x_0)]=0,$$

即证得 $\Phi(x)$ 在点 x_0 的连续性. 由 x_0 的任意性知，$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处连续. □

定理 3.8 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，$x_0\in(a,b)$. 如果 f 在点 x_0 处连续，那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在点 x_0 处可导，并且

$$\Phi'(x_0)=f(x_0).$$

证明 因为函数 f 在点 x_0 处连续，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$|t-x_0|<\delta,$$

就有

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是，只要

$$x\in[a,b],\quad 0<|x-x_0|<\delta,$$

就有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|&=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t-f(x_0)\right|\\&=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x [f(t)-f(x_0)]\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x [f(t)-f(x_0)]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{|x-x_0|}\cdot\varepsilon|x-x_0|=\varepsilon.\end{aligned}$$

这证明了

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0).$$ □

用类似的办法可以证明：对于 $a<b$ 的情形，如果函数 f 在闭区间$[a,b]$上可积，在点 a 处右连续（在点 b 处左连续），那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就在点 a 右侧可导（在点 b 左侧可导），并且

$$\Phi'_+(a)=f(a)\quad(\Phi'_-(b)=f(b)).$$

因此，如果函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就在闭区间$[a,b]$上连续可微，并且

$$\Phi'(x)=f(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

对于以积分下限为变元的函数

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$$

也有相应的结果. 只要 f 在$[a,b]$上可积，这样的函数就在$[a,b]$上连续. 如果 f 在点 $x_0\in(a,b)$处连续（在点 a 处右连续，或在点 b 处左连续），那么 Ψ 就在点 x_0 处可导（在点 a 右侧可导，或在点 b 左侧可导），并且

$$\Psi'(x_0)=-f(x_0)$$

$$(\Psi'_+(a)=-f(a)\quad 或\quad \Psi'_-(b)=-f(b)).$$

因此，如果函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，那么函数 Ψ 就在闭区间$[a,b]$上连续可微，并且

$$\Psi'(x)=-f(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

所有这些结果都可以仿照前面的讨论予以证明.

我们还可以考察如下形式的函数的可微性：

$$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

设函数 $u(x)$和 $v(x)$在闭区间$[a,b]$上可微，并且满足条件

$$A\leqslant u(x)\leqslant B,\quad A\leqslant v(x)\leqslant B,\quad \forall x\in[a,b].$$

如果函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，那么函数

$$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

就在闭区间$[a,b]$上可微. 事实上，我们可以取 $c\in(A,B)$而把函数 $F(x)$表示为

$$F(x)=\int_c^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t-\int_c^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

上式右端的每一项都是可微函数的复合. 因而函数 $F(x)$在闭区间$[a,b]$上可微，并且根据复合函数的求导法则可得

$$F'(x)=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x).\tag{3.3.1}$$

利用上面讨论的结果，我们重新再来考察 Newton-Leibniz 公式. 前面在介绍 Newton-Leibniz 公式的时候，为了便于证明，附加了“原函数存在”这一额外的条件. 其实，根据上述

讨论，我们能够作出这样的判断：任何连续函数都必定具有原函数.

我们将这一重要结论写成定理的形式.

定理 3.9 设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

原函数存在定理

就是 f 在$[a,b]$上的一个原函数. 由此可知，函数 f 在闭区间$[a,b]$上的任何一个原函数 Ψ 都可以表示成如下的形式：

$$\Psi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C,$$

这里的 C 是一个常数.

根据定理 3.9，任何连续函数都具有原函数，这就证明了前面的定理 3.1.

定理 3.9 实际上蕴含了 Newton-Leibniz 公式. 事实上，设 f 在$[a,b]$上连续，F 是 f 的任何一个原函数，则根据定理 3.9 应有

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C.$$

由此可得

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

也就是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

例 3.3.2 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 2x, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

求 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2x\,\mathrm{d}x$$

$$=(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+x^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+\frac{3}{4}\pi^2.$$

例 3.3.3 计算下列函数的导数：

(1) $\int_a^x t^2\cos t\,\mathrm{d}t$.　　(2) $\int_x^1 \arctan t^2\,\mathrm{d}t$.

(3) $\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$.　　(4) $\int_{\sin x}^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x t^2\cos t\,\mathrm{d}t=x^2\cos x$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^1 \arctan t^2\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \arctan t^2\,\mathrm{d}t = -\arctan x^2$.

(3) 设 $u=\sqrt{x}$，根据复合函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^u \sin t^3\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin u^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}.$$

(4) 由定积分的性质，

$$\int_{\sin x}^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\sin x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2x\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-\sin^2 x}\cos x.$$

例 3.3.4 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+2t)\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

解 这是$\dfrac{0}{0}$型未定式.由 L'Hospital 法则和复合函数的求导法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+2t)\,\mathrm{d}t}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\ln(1+2x^2)}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2x^2}{4x^3} = 1.$$

例 3.3.5 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,(a<x\leqslant b)$，$F(a)=f(a)$，证明：$F(x)$在$[a,b]$上单调增加.

证明 由积分中值定理，对任意 $x\in(a,b]$，

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x-a}f(\xi_x)(x-a)=f(\xi_x),\quad \xi_x\in[a,x].$$

由 $f(x)$的连续性，

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(\xi_x)=f(a),$$

因此 $F(x)$在 $x=a$ 处连续，从而在$[a,b]$上连续.由定义知 $F(x)$在(a,b)内可导，且

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}f(x)-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi_x)],\quad a\leqslant\xi_x\leqslant x.$$

由 $f(x)$的单调性，可证 $a<\xi_x<x$，有 $f(\xi_x)<f(x)$，进而有 $x\in(a,b)$时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$在$[a,b]$上单调增加. □

习题 3.3

(A)

1. 用 Newton-Leibniz 公式计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.　　(4) $\int_{-1}^{3}|2-x|\mathrm{d}x$.

(5) $\int_{0}^{1}(3x^2-4x^3)\mathrm{d}x$.　　(6) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(7) $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 5, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant 2)$.

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=\int_{x^2}^{\sin x}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.　　(2) $y=\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

(3) $y=\int_0^{\sin x}xf(t)\mathrm{d}t$.　　(4) $y=\int_{\sin x}^{\arctan x}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$.

(5) $y=\int_0^{x^3}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.　　(6) $y=\int_{2x}^{1}\sin(1+t^2)\mathrm{d}t$.

(7) $y=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

5. 求由方程 $x^3-\int_0^{y^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+y=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6. 求由参数方程 $x=\int_0^{t^2}\sin u\mathrm{d}u$，$y=\int_0^{t^2}\cos u\mathrm{d}u$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7. 设 $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，$x\in(-\infty,+\infty)$，求曲线 $y=F(x)$ 在拐点处的切线方程.

(B)

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\tan t-\sin t)\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}t^3\,\mathrm{d}t}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}t\ln t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

2. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $f(x)>0$. 证明：函数 $F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

3. 证明：若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\cdot(b-a)$.

§ 3.4　定积分的计算

根据 Newton-Leibniz 公式，计算连续函数 $f(x)$的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，一般是把它转化

为求 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上的增量 $F(b)-F(a)$. 若 $f(x)$ 比较复杂，则需要一次或多次应用不定积分的换元积分法和分部积分法，才可求得 $F(x)$，然后再代入积分上、下限，求出定积分值. 这样计算固然可行，但往往不够方便. 由于连续函数的原函数一定存在，因此连续函数的定积分计算与不定积分计算有着密切的联系.相应于不定积分的换元积分法与分部积分法，本节所要介绍的是定积分的换元积分法与分部积分法.

3.4.1　定积分的换元法

定积分的换元法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对变换 $x=\varphi(t)$，若有常数 α,β 满足：(1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$.(2) 在以 α 和 β 为端点的闭区间上，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$.(3) $\varphi(t)$ 有连续的导数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{3.4.1}$$

公式(3.4.1)称为定积分的换元公式.

事实上，由条件知，(3.4.1)式两边的被积函数分别在 $[a,b]$ 和 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上连续，所以(3.4.1)式两边的定积分都存在，并且两边被积函数的原函数存在，故(3.4.1)式两边的定积分都可由 Newton-Leibniz 公式来计算. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

另一方面，由复合函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}F(\varphi(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

即 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数. 因而有

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

所以(3.4.1)式成立.

显然，当 $a>b$ 时，公式仍成立.

例 3.4.1　求 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $x=\sin t$，当 t 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，x 由 0 增加到 1，故取 $[\alpha,\beta]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 并注意到在第一象限中 $\cos t\geqslant 0$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

例 3.4.2　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

解　令 $x=\cos t$，则有 $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$，当 t 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，x 由 1 减少到 0. 则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,dt = -\int_1^0 x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

例 3.4.3 求 $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解 令 $x=\tan t$，当 t 由 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，x 由 0 增加到 1. 于是由 $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ 可得

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos t + \sin t}{\cos t}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt. \end{aligned}$$

对最末第二个定积分作变换 $u=\frac{\pi}{4}-t$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(\cos u)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\,du,$$

它与上面第三个定积分相消，故得

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\,dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

例 3.4.4 设 f 在 $[-a,a]$ 上可积，证明：

(1) 若 f 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

(2) 若 f 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

证明 由 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx$，在右边第二个积分中，令 $x=-t$，则

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)\,dx &= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^0 f(-t)\,d(-t) \\ &= \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx. \end{aligned}$$

(1) 若 f 为奇函数，则 $f(x) = -f(-x)$，故

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

(2) 若 f 为偶函数，则 $f(x) = f(-x)$，故

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$ □

根据上述结果，可以简化某些定积分的计算，例如：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+|x|}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+x^2} dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx = \ln 2.$$

例 3.4.5 求 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x} dx$.

解 令 $x=\pi-u$,则有

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u)\sin u}{1+\sin^2 u} du = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin u}{1+\sin^2 u} du - \int_0^{\pi} \frac{u\sin u}{1+\sin^2 u} du,$$

故

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} dx.$$

令 $\cos x=t$,则有

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x} dx = \pi\int_0^{1} \frac{1}{2-t^2} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$$

例 3.4.6 求 $I=\int_0^2 (2x+1)\sqrt{2x-x^2}\, dx$.

解 $I=\int_0^2 [2(x-1)+3]\sqrt{1-(x-1)^2}\, dx$,令 $x-1=u$,则有

$$I=\int_{-1}^{1} (2u+3)\sqrt{1-u^2}\, du = \int_{-1}^{1} 3\sqrt{1-u^2}\, du = \frac{3\pi}{2}.$$

例 3.4.7 设 $f(x)$连续,证明:

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

(2) $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx$.

证明 若要证明一个定积分与另一个定积分相等,且两个积分区间相同,一般使用变换 $x+t=a+b$;若证明一个定积分等于另一个定积分,且另一个定积分的积分区间为$[0,1]$,一般使用变换 $x=a+(b-a)t$.

(1) 令 $x+t=a+b$,则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_b^a f(a+b-t)(-dt) \\ &= \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx.\end{aligned}$$

(2) 令 $x=a+(b-a)t$,则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(a+(b-a)t)(b-a)dt = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt \\ &= (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx.\end{aligned}$$

□

3.4.2　定积分的分部积分法

定积分的分部积分法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$在$[a,b]$上具有连续导数，则

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u,$$

得

$$\int_a^b \mathrm{d}(uv)=\int_a^b u\mathrm{d}v+\int_a^b v\mathrm{d}u,$$

故

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u. \tag{3.4.2}$$

即

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=uv\Big|_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x.$$

公式(3.4.2)称为**定积分的分部积分公式**.

与不定积分的分部积分法类似，公式(3.4.2)常用于求两类不同类型的函数之积的定积分. 适当选择 u 与 v 是使用公式(3.4.2)的关键.

例 3.4.8　求 $\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

解　$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{9}(2\mathrm{e}^3+1).$$

例 3.4.9　求 $\int_0^1\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解　令$\sqrt{x}=t$，则有

$$\int_0^1\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t=t^2\arctan t\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\pi}{4}-1+\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

例 3.4.10　证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，并计算 I_n，其中 n 是正整数.

证明　令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$时，$t=0$. $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

由此得递推公式

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

因为 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$，所以当 n 为正偶数时，有

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

又 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$，所以当 n 为大于 1 的奇数时，有

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1.$$

因此

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ 为正偶数}),\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n\text{ 为大于 1 的奇数}).\end{cases}$$

习题 3.4

(A)

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.　　(2) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$.

(3) $\int_0^{\ln 5}\sqrt{e^x-1}\,dx$.　　(4) $\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

(5) $\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$.　　(6) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,dx$.

(7) $\int_{-1}^2[x]\max\{1,e^{-x}\}dx$.　　(8) $\int_{-1}^1\frac{t\,dt}{\sqrt{5-4t}}$.

(9) $\int_0^1 te^{-t^2}dt$.　　(10) $\int_1^e\ln x\,dx$.

(11) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin t\,dt$.　　(12) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin\sqrt{x}\,dx$.

(13) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.　　(14) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$.

(15) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(16) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(17) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

(18) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

3. 计算下列定积分：

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(3) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{|\ln x|}{x}\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^1 3x^2\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

4. 设 f 为连续函数，求证：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

5. 利用函数的奇偶性计算下列定积分：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sin^2 x]\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_{-1}^{1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$.

(4) $\int_{-2}^{2} x^3\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}\cos x\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，以 T 为周期，证明：

(1) $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ (a 为任意实数).

(2) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

7. 设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$. 证明：

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 为偶函数.

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

(B)

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

(3) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

2. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明当 $n\geqslant 2$ 时，$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$ 成立. 并由此计算 I_n.

(2)证明：当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{2(n+1)}<I_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$.

3. 设 f 在$[0,+\infty)$上连续，对任何 $a>0$，求证：

$$\int_0^a\left[\int_0^{2x}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x.$$

4. 证明 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，并求其值.

5. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，求 $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，$x>0$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

7. 设 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=A$，求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x$.

§ 3.5　微元法，定积分在几何学与物理学中的应用

什么样的问题能用定积分来表示？如果一个问题可以用定积分表示，如何来确定它的被积表达式呢？现在我们来讨论这两个问题.

3.5.1　总量的可加性与微元法

前面我们曾用定积分的方法解决了曲边梯形的面积、非均匀细棒的质量和变速直线运动的位移等问题.这些问题的实际背景虽然不同，但它们有一个共同特点：在某区间上非均匀且连续分布的总量 Q 对区间具有可加性，即分布在$[a,b]$上的总量 Q 等于分布在各子区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$)上的部分量 ΔQ_i 之和，也就是说，$Q=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta Q_i$. 一般地，具有可加性的量就可以考虑用定积分表示.

如何写出被积表达式呢？我们对定积分的四步：分割、代替(近似)、求和、取极限进行分析，发现其关键是分割后求出近似代替. 以我们熟知的求曲边梯形的面积为例，这一步要求第 i 个小区间$[x_{i-1},x_i]$上小曲边梯形面积 ΔS_i 的近似值. 由于函数 $f(x)$连续，当自变量的增量 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$很小时，函数 $f(x)$的变化就很小，近似认为在$[x_{i-1},x_i]$上 $f(x)$是不变的，都等于在任意一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$处的函数值 $f(\xi_i)$(即以不变代变的思想)，故 $\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$.再对上述过程进行概括和抽象，省略下标 i. 给任意的 $x\in(a,b)$一个增量 $\mathrm{d}x$，其中 $\mathrm{d}x$ 很小，得到$[a,b]$上的一个子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，由于 $\mathrm{d}x$ 很小，函数 $f(x)$在子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上的变化也很小，近似看成 $f(x)$不变，都等于小区间左端点的函数值 $f(x)$，因此$[x,x+\mathrm{d}x]$上曲边梯形的面积

$$\Delta S\approx f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.5.1}$$

上式中右边 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是被积表达式. 那么 ΔS 与被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 究竟相差多少呢？设函数 $S(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，$x\in[a,b]$(见图 3-7)，该函数的几何意义是区间$[a,x]$上曲边

梯形的面积.(3.5.1)式左边的量 ΔS 是面积函数 $S(x)$ 在 x 处的增量 $\Delta S=S(x+\mathrm{d}x)-S(x)$，而(3.5.1)式中右边的量 $f(x)\mathrm{d}x$ 恰好是面积函数 $S(x)$ 在 x 处的微分 $\mathrm{d}S=S'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$，由微分定义知

$$\Delta S=\mathrm{d}S+o(\mathrm{d}x)=f(x)\mathrm{d}x+o(\mathrm{d}x),$$

因此被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是面积函数的微分.通常称面积的微分为面积微元，也就是微元的本质是微分.

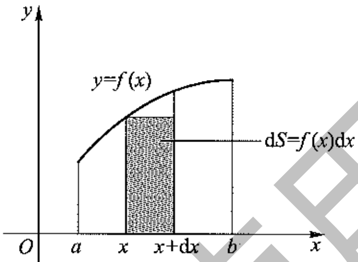

图 3-7

将上述分析归纳总结，可得

假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，Q 是由 $y=f(x)$ 确定的在 $[a,b]$ 上非均匀且连续分布的量，并且 Q 对区间 $[a,b]$ 具有可加性，通常可用定积分表示 Q.写出 Q 的积分表达式的步骤：

第一步，任取 $[a,b]$ 的一个子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，求出 Q 在相应子区间上的部分量 ΔQ 的近似值，

$$\Delta Q\approx f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)\mathrm{d}x$ 是 Q 的微元(或微分) $\mathrm{d}Q$，满足 $\Delta Q-\mathrm{d}Q=o(\mathrm{d}x)$.通常应用“以不变代变”或“以直线代曲线”的原则求得 Q 的微元 $\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$.

第二步，在 $[a,b]$ 上以微元 $\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$ 作为被积表达式写出定积分，就得到所求量 Q 的精确值

$$Q=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这种方法称为**微元法**.

结合本章定积分的三个引例理解以上说明，不难看出，微元法实质上就是分割、代替(近似)、求和与取极限的概括与简化.下面用微元法来解决一些具体的几何学问题和物理学问题.

3.5.2　平面图形的面积

平面图形的面积

例 3.5.1　求由抛物线 $y^2=2px$ 和 $x^2=2py(p>0)$ 所围平面图形的面积.

解　联立两抛物线方程,可求得它们的交点坐标分别为$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0\end{cases}$和$\begin{cases}x_2=2p,\\y_2=2p,\end{cases}$如图 3-8 所示.任取$[0,2p]$中一子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,利用以不变代变的思想,该子区间上相应面积$\Delta S$近似等于以$\mathrm{d}x$为底,高为$\sqrt{2px}-\dfrac{x^2}{2p}$的小矩形的面积,即

$$\Delta S\approx \mathrm{d}S=\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)\mathrm{d}x.$$

而小矩形的面积即为面积微元.于是

$$S=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}p^2$$

或

$$S=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2py}-\frac{y^2}{2p}\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}p^2.$$

一般地,假设函数$f(x)$,$g(x)$均在$[a,b]$上连续,且$f(x)\leqslant g(x)$,由$y=f(x)$,$y=g(x)$及直线$x=a$,$x=b$所围平面图形的面积(图 3-9)S为

$$S=\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x.$$

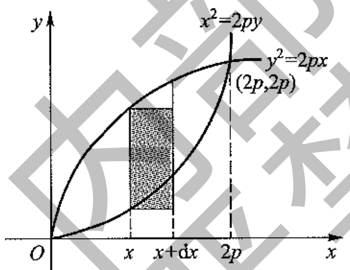

图 3-8

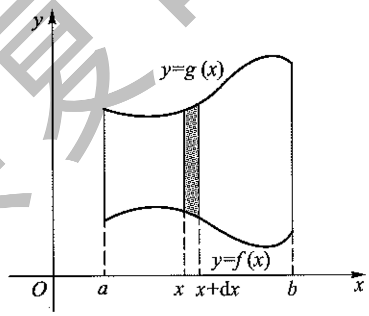

图 3-9

例 3.5.2　求抛物线$y^2=2x$与直线$x-y=4$所围平面图形的面积.

解　先求抛物线与直线的交点.由

$$\begin{cases}y^2=2x,\\y=x-4\end{cases}$$

可知交点为$A(2,-2)$和$B(8,4)$(见图 3-10).把所围图形视为由$x=y+4$与$x=\dfrac{y^2}{2}$所围成的,我们得到

$$S=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=18.$$

例 3.5.3　求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$所围平面图形的面积.

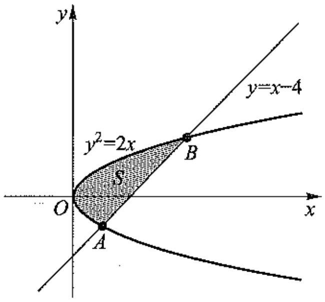

图 3 - 10

解 由对称性，所求面积 S 为图形在第一象限内的部分面积的 4 倍：

$$S=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x.$$

根据椭圆的参数方程 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$ 应用定积分的换元积分法，令 $x=a\cos t$，则 $y=b\sin t$，且 $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$x(0)=a$，于是

$$4\int_0^a y\,\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

有些平面图形的边界曲线更适于用极坐标表示．设曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，且 $r(\theta)\geqslant 0$ 连续，下面来求 $r=r(\theta)$ 与射线 $\theta=\alpha$ 及 $\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 所围曲边扇形(图 3 - 11)的面积 S.

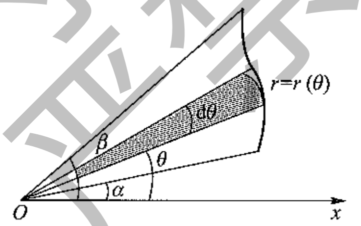

图 3 - 11

在$[\alpha,\beta]$上任取一个子区间$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$，利用以不变代变的思想，在小区间上 $r=r(\theta)$ 是变化的，但由于 $\mathrm{d}\theta$ 很小，因而 $r=r(\theta)$ 的变化很小，近似不变，都视为等于小区间左端点 θ 处的函数值 $r(\theta)$，所以小区间上小曲边扇形的面积 ΔS 就近似地等于以 $r(\theta)$ 为半径的小圆扇形的面积 $\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$，即

$$\Delta S\approx \mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

于是有

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^{2}(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{3.5.2}$$

例 3.5.4 求双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$所围平面图形的面积($a>0$).

解 先要弄清楚这曲线的大致情形(分布范围、对称性、是否封闭等). 把曲线方程写成

$$r=a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

在$[-\pi,\pi]$范围内,当且仅当$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}$或者$|\theta|\geqslant\frac{3\pi}{4}$时$\cos 2\theta\geqslant 0$. 对这样的$\theta$有

$$0\leqslant r=a\sqrt{\cos 2\theta}\leqslant a.$$

我们判定曲线分布在对顶的两扇形之中:

$$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant a;\quad |\theta|\geqslant\frac{3\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant a.$$

如果点(r,θ)在曲线上,那么点$(r,-\theta)$和点$(\pm r,\pm\theta)$也都在曲线上. 因而曲线关于极轴和垂直于极轴的直线对称,关于极点中心对称.显然$\theta=\pm\frac{\pi}{4}$和$\theta=\pm\frac{3\pi}{4}$时曲线通过极点.这曲线由两支封闭的曲线组成(图 3-12).经过以上的分析,我们判定:所求图形的面积S为它在$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$范围内部分面积的4倍:

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}r^{2}\mathrm{d}\theta=2a^{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a^{2}\sin 2\theta\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=a^{2}.$$

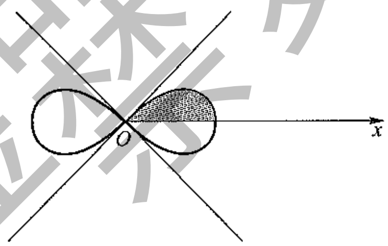

图 3-12

例 3.5.5 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$所围平面图形的面积($a>0$).

解 容易看出,这曲线关于极轴对称并且是封闭的. 所求的面积S为它在上半平面部分面积的2倍(见图 3-13):

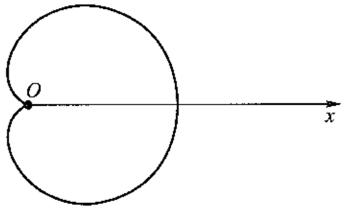

图 3-13

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

3.5.3　立体体积

立体体积、曲线弧长
与旋转体侧面积

平行截面面积为已知的立体的体积可以用定积分计算.

如图 3－14 所示，有一立体介于过点 $x=a$，$x=b$ 且垂直于 x 轴的两平面之间.若用垂直于 x 轴的平面族截取该立体，截面面积 $S(x)$ 为一已知的连续函数.在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，利用以不变代变的思想，相应立体 ΔV 可近似成以 $S(x)$ 为底，以 $\mathrm{d}x$ 为高的薄柱体体积，即体积微元为

$$\mathrm{d}V=S(x)\mathrm{d}x,$$

于是该立体的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x. \tag{3.5.3}$$

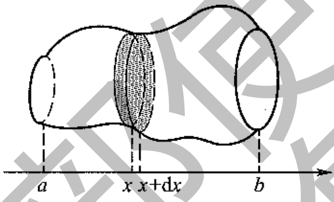

图 3－14

由此公式可知，如果两个等高的立体在等高处截面的面积恒相等，则两立体的体积必然相等.早在我国南北朝时期，这一原理就被大数学家祖冲之和他的儿子祖暅所发现和应用，并被后人称为“祖暅原理”.

例 3.5.6　设有一正劈锥体(图 3－15)，其底是以 a 为半径的圆，高为 h，顶为平行且等于底圆直径的线段，求它的体积.

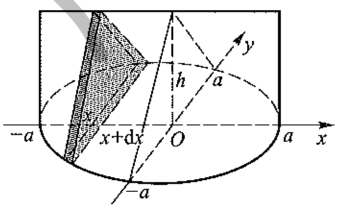

图 3－15

解　取底圆的平面为 xOy 平面，圆心 O 为原点，并使 x 轴与正劈锥的顶平行，则底圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$.过 x 轴上的点 $x(-a\leqslant x\leqslant a)$ 作垂直于 x 轴的平面，截正劈锥得等腰三角形，其面积

$$S(x)=h\cdot y=h\sqrt{a^2-x^2},$$

于是所求体积为

$$V=\int_{-a}^{a} h\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=2h\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2 h.$$

公式 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$ 常常用来计算旋转体的体积.

设连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 与直线 $x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周形成一旋转体(图 3－16),由于垂直于 x 轴(旋转轴)的截面都是圆,因此在 x 处截面面积为

$$S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x),$$

从而得体积微元

$$\mathrm{d}V_x=\pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

于是所求旋转体的体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{3.5.4}$$

如果旋转体是由连续曲线 $x=g(y)(g(y)\geqslant 0)$ 与直线 $y=c,y=d(c<d)$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周形成的(图 3－17),则类似地可得其旋转体的体积为

$$V_y=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y. \tag{3.5.5}$$

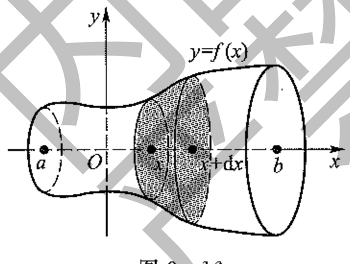

图 3－16

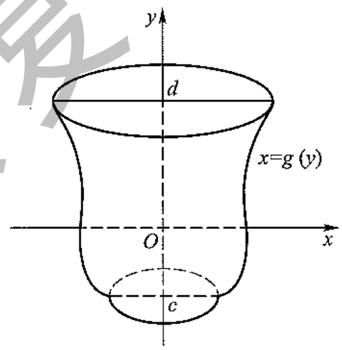

图 3－17

例 3.5.7　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$(如图 3－18)围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解法 1　由对称性可知,所求体积是第一象限图形绕 x 轴旋转一周所得体积的 2 倍,所以

$$V=2\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

解法 2　椭圆的参数方程是 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,由解法 1 已知旋转体的体积 $V=$

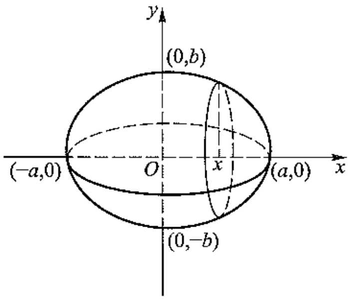

图 3-18

$2\pi\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x$. 应用定积分的换元积分法，令 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，且 $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$x(0)=a$，于是

$$V=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2\sin^2 t(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=2\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 3.5.8　求半径为 r 的圆绕同平面内圆外一条直线旋转而成的圆环体的体积，设圆心到直线的距离为 $R(R\geqslant r)$.

解　建立如图 3-19 所示的直角坐标系，则圆的方程为

$$x^2+(y-R)^2=r^2.$$

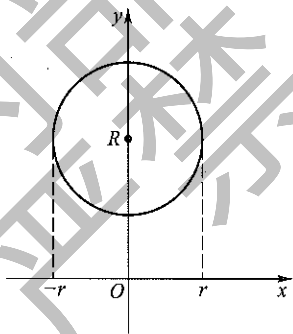

图 3-19

所求圆环体的体积可以看作是上半圆下的曲边梯形和下半圆下的曲边梯形各绕 x 轴旋转一周，得到的两个旋转体体积的差，故有

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-r}^{r}(R+\sqrt{r^2-x^2})^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-r}^{r}(R-\sqrt{r^2-x^2})^2\,\mathrm{d}x\\&=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=4\pi R\cdot\frac{\pi r^2}{2}=2\pi^2Rr^2.\end{aligned}$$

3.5.4 曲线的弧长

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，下面来求曲线 $y=f(x)$ 由点 $A(a,f(a))$ 到点 $B(b,f(b))$ 的一段曲线弧 AB 的长 s（图 3-20）.

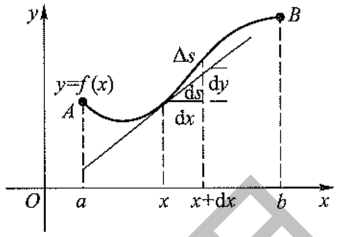

图 3-20

任取 $[a,b]$ 的一个子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，在该区间上，所求曲线弧长的微元本质就是弧长的微分 $\mathrm{d}s$，因此可用曲线在点 $(x,f(x))$ 处的切线上相应的直线段近似代替曲线段 Δs，也就是说以直线代曲线，所以

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

于是，得到弧长公式

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.5.6}$$

类似地，当曲线 $f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示时，其中 $x'(t)$，$y'(t)$ 连续，则弧长公式为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.5.7}$$

当曲线由极坐标 $r=r(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 表示时，其中 $r'(\theta)$ 连续，可以改写为参数形式

$$x=r(\theta)\cos\theta,\quad y=r(\theta)\sin\theta,\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta.$$

于是我们得到极坐标表示的曲线的弧长公式

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.5.8}$$

例 3.5.9 求悬链线 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=a>0$ 的一段的弧长.

解 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$1+y'^2=\dfrac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}{4}$，由弧长公式得到所求弧长为

$$s=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}{2}.$$

例 3.5.10 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$

的一拱($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$)的弧长.

解　将 $x'(t) = a(1-\cos t)$，$y'(t) = a\sin t$ 代入弧长公式，得所求弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, \mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

3.5.5　旋转体的侧面积

设 $f(x)$ 有连续的导数，图 3-21 为由曲线 $y=f(x)$($f(x)>0$)，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体. 在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，利用以直线代曲线的思想，该小区间上对应的小弧段绕 x 轴旋转一周后生成的小圈侧面积 ΔA 近似为

$$\Delta A \approx \mathrm{d}A = 2\pi y\,\mathrm{d}s = 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,$$

这就是旋转体侧面积的微元，可以证明 $\Delta A - \mathrm{d}A = o(\mathrm{d}x)$，于是得到旋转体侧面积 A 的计算公式

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.5.9}$$

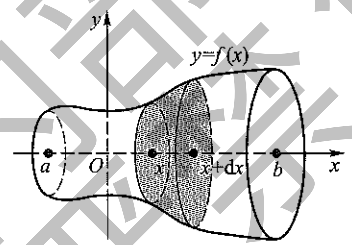

图 3-21

类似地，当曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 表示时，其中 $x'(t)$，$y'(t)$ 连续，则该曲线绕 x 轴旋转一周所得侧面积公式为

$$A = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3.5.10}$$

由极坐标表示的曲线 $r=r(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$，其中 $r'(\theta)$ 连续，绕 x 轴旋转一周所得侧面积公式为

$$A = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.5.11}$$

例 3.5.11　设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点 $O(0,0)$ 作其切线(图 3-22)，求此切线与曲线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周，所得的旋转体的表面积.

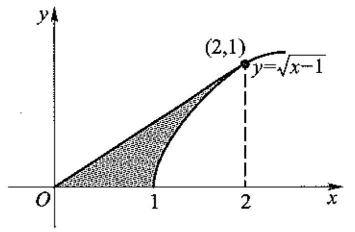

图 3-22

解 设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-1})$，则过原点的切线方程为

$$y=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x.$$

将点$(x_0,\sqrt{x_0-1})$代入，解得$x_0=2$，于是切点为$(2,1)$，切线方程为$y=\frac{1}{2}x$.

由曲线$y=\sqrt{x-1}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$绕$x$轴旋转一周所得旋转面的面积

$$A_1=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

由直线段$y=\frac{1}{2}x\,(0\leqslant x\leqslant 2)$绕$x$轴旋转一周所得旋转面的面积

$$A_2=2\pi\int_0^2\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{5}\,\pi,$$

因此，所求旋转体的表面积为$A=A_1+A_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

3.5.6 变力做功

物理学、力学应用举例

假设物体在变力$F(x)$的作用下，沿x轴由点a移动到点b（图 3-23），这里变力函数$F(x)$连续，方向与x轴平行.

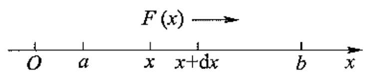

图 3-23

任取$[a,b]$的一个子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，应用以不变代变的思想，由于$\mathrm{d}x$很小，$F(x)$在$[x,x+\mathrm{d}x]$上可视为不变，用$F(x)$在点x的值近似代替$F(x)$在$[x,x+\mathrm{d}x]$上的值，这样$F(x)$在$[x,x+\mathrm{d}x]$上所做的功ΔW近似等于$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$，即

$$\Delta W\approx\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x,$$

$\mathrm{d}W$为功的微元，于是，$F(x)$在$[a,b]$上所做的功为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x. \tag{3.5.12}$$

例 3.5.12 试求把弹簧拉长 a 个长度单位所需做的功.

解 根据 Hooke(胡克)定律,拉长弹簧所用的力与拉长的长度成正比:

$$F=kx,$$

其中 k 为弹性系数. 把弹簧拉长 a 个长度单位所需做的功为

$$W=\int_0^a kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}ka^2.$$

例 3.5.13 一个半球形容器,其半径为 R,容器中盛满水,试将容器中的水全部抽出容器口,需做功多少?

解 建立如图 3-24 所示的直角坐标系,则容器边界的半球面可看作曲线 $y=\sqrt{R^2-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant R)$绕 x 轴旋转而成.

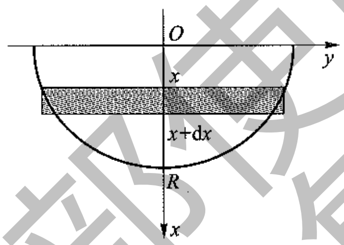

图 3-24

任取$[0,R]$的一个子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,应用以不变代变的思想,与该子区间对应的一薄层水的体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x.$$

将这一薄层水抽到容器口克服重力所做功的微元为

$$\mathrm{d}W=(-x)\cdot(-\rho g\,\mathrm{d}V)=x\rho g\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为水的密度,g 为重力加速度. 于是,所求的功为

$$W=\int_0^R \mathrm{d}W=\rho g\pi\int_0^R x(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\rho g\pi R^4.$$

3.5.7 液体的静压力

在水坝、闸门、船体等工程设计中,常需要计算它们所承受的静水压力,由物理学知,静水压强 p(单位为 Pa)与水深 h(单位为 m)的关系是

$$p=\rho gh,$$

其中 ρ 为水的密度,g 为重力加速度.

若有一面积为 S 的平板,水平地放置在水深为 h 的地方,则平板一侧所受的静水压力为

$$P=p\cdot S=\rho ghS.$$

若平板铅直放置在水中，则由于水深不同导致压强不同，平板一侧所受的静水压力就不能直接利用上述公式计算，下面举例说明它的计算方法.

例 3.5.14　有一等腰梯形闸门，其上底长 10 m，下底长 6 m，高为 20 m. 该闸门所在平面与水面垂直，且上底与水面相齐，求该闸门一侧所受到的静水压力.

解　建立如图 3-25 所示的直角坐标系，则直线段 AB 的方程为

$$y=5-\frac{x}{10}.$$

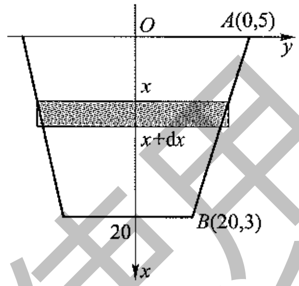

图 3-25

任取$[0,20]$上一个子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，应用以不变代变的思想，该子区间所对应的闸门上的水平细条可近似看作是宽为 $2y$，高为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形，其上各点到水面的距离可近似地看作 x，于是该细条所受到的静水压力的微元为

$$\mathrm{d}P=\rho g x\cdot 2y\,\mathrm{d}x=2\rho g x\left(5-\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x.$$

于是所求的静水压力为

$$P=\int_0^{20}\mathrm{d}P=\int_0^{20}2\rho g x\left(5-\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x=\frac{44}{3}\times10^6\,(\mathrm{N}),$$

其中 $\rho=10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，$g$ 取 10 N/kg.

3.5.8　引力

由物理学知，质量分别为 m_1 和 m_2，相距为 r 的两质点间的引力大小为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2},$$

其中 G 为引力常数，引力方向沿着两质点的连线方向.

如果要计算一根细棒（视为有质量无体积）对一质点的引力，由于细棒上各点与质点的距离是变化的，且各点与该质点的引力的方向也是变化的，所以不能直接应用上述公式计算. 下面举例说明它的计算方法.

例 3.5.15　设长度为 l，质量为 m 的均匀细棒，其垂直平分线上距此棒距离为 a 处，有 1 单位质量的质点 P. 试求细棒对质点的引力.

解　建立如图 3-26 所示的直角坐标系,将细棒置于 x 轴上,取细棒中点为坐标原点 O,则细棒位于区间 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$ 上,质点 P 位于点 $(0,a)$ 处. 在 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$ 上任取 $[x,x+\mathrm{d}x]$,应用以不变代变的思想,该小区间上细棒质量为 $\frac{m}{l}\mathrm{d}x$,而其对质点 P 的引力大小的微元为

$$\mathrm{d}F=G\cdot 1\cdot\frac{m}{l}\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{Gm}{l(a^2+x^2)}\mathrm{d}x.$$

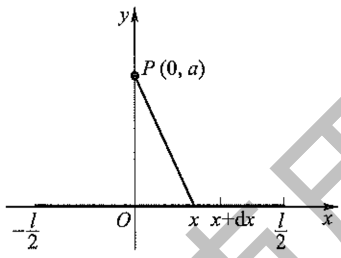

图 3-26

值得注意的是,该引力方向是由点 P 指向点 $(x,0)$ 的连线方向,所以对不同的小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,由于引力方向不同,故不具有可加性.为此,可将 $\mathrm{d}F$ 沿 x 轴与 y 轴方向分解为 $\mathrm{d}F_x$ 与 $\mathrm{d}F_y$. 注意到对称性,有 x 轴方向上的分力

$$F_x=0,$$

而

$$\mathrm{d}F_y=\mathrm{d}F\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2+x^2}}=-G\frac{ma}{l}\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

于是

$$F_y=-\frac{Gma}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2Gma}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{2Gma}{l}\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\bigg|_0^{\frac{l}{2}}=-\frac{2Gm}{a\sqrt{4a^2+l^2}}.$$

上式中的负号表示 F_y 指向 y 轴的负方向.

3.5.9　函数的平均值

在实际问题中,常常使用平均值的概念,其中最常用的是算术平均值,即对于离散变量 u 的 n 个值 $u_1,u_2,\cdots,u_n$,有

$$\overline{u}=\frac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i.$$

但在许多实际问题中,要求计算连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.这样的平均值应该怎样理解和计算呢?

先把区间$[a,b]$等分为 n 个子区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$),并将 n 个点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的函数值 $f(\xi_i)$($i=1,2,\cdots,n$)的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)$ 作为 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上的平均值 $\overline{y}$ 的近似值. 显然 n 越大其近似程度越好. 因而定义 $y=f(x)$ 在$[a,b]$上的平均值为

$$\overline{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i).$$

因为每个子区间的长度 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$,所以上式可写成

$$\overline{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

因为 $y=f(x)$连续,所以可积,从而得到

$$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这就是$[a,b]$上连续函数 $y=f(x)$所取一切值的平均值计算公式.

例 3.5.16 求全波整流电流 $I(t)=I_0|\sin\omega t|$($I_0>0$)的平均值 $\overline{I}$.

解 全波整流电流的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$,求周期函数的平均值指的是求一个周期上的平均值,于是

$$\overline{I}=\frac{1}{T}\int_0^T I_0|\sin\omega t|\,\mathrm{d}t=\frac{\omega I_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{I_0}{\pi}(-\cos\omega t)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{2}{\pi}I_0.$$

习题 3.5

(A)

1. 求下列曲线所围成图形的面积:

(1) $y^2=2x$ 与 $x=5$.　　(2) $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$.

(3) $y=x^2$ 与 $y=2x+3$.　　(4) $9x^2+y^2=1$.

(5) $y=\ln x$,y 轴与 $y=\ln a$,$y=\ln b$ ($b>a>0$).

2. 计算 Archimedes(阿基米德)螺线 $r=a\theta(a>0)$上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

3. 一蓄满水的圆柱形水桶高为 5 m,底圆半径为 3 m,试问要把桶中的水全部吸出需做多少功?

4. 一物体以速度 $v(t)=2t^2$(m/s)做直线运动,介质的阻力 F(N)与速度 v 的关系为$F=0.7\,v^2$. 试求在时刻 $t=0$ s 到 $t=2$ s 这段时间内阻力所做的功.

5. 做变速直线运动的物体的速度为 $v(t)=1-t^2$(m/s),初始位置为 $x_0=1$,求它在前 2 s 内所走的路程及 2 s 末所在的位置.

6. 一点在直线上从时刻 $t=0$ s 以速度 $v=t^2-4t+3$(m/s)开始运动,求:

(1) 在 $t=4$ s 时的位置.

(2) 在 $t=4$ s 时运动的路程.

7. 试求由 $y=\frac{1}{x}$，$y=x$，$x=2$ 所围成的图形的面积.

8. 求曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应从 a 到 b 的一段弧长.

9. 求下列极坐标表示的曲线所围图形的面积：

(1) $r=2a\cos\theta$.　　　　(2) $r=2a(2+\cos\theta)$.

10. 求由抛物线 $(y-2)^2=x-1$ 和此抛物线相切于纵坐标 $y_0=3$ 处的切线以及 x 轴所围成图形的面积.

11. 求由曲线 $y=\ln x$，$y=0$，$y=2$ 和 y 轴所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转得到的旋转体的体积.

(B)

1. 求圆 $r=3\cos\theta$ 与心形线 $r=1+\cos\theta$ 所围成的平面图形的面积.

2. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 绕 x 轴旋转构成旋转体的体积.

3. 一平面经过半径为 R 的圆柱的底圆中心，并与底面交成角 α. 计算这平面截圆柱所得立体的体积.

4. 一水平横放的底圆半径为 R 的圆柱形桶内盛半桶密度为 ρ 的液体，求桶的一个端面所受的压力.

5. 一长为 28 m，质量为 20 kg 的均匀链条被悬挂于一建筑物的顶部，问需做多大的功才能把链条全部拉上建筑物的顶部？

6. 设某个物体做初速度为 v_0，加速度为 a 的匀加速直线运动，经过时间 t，物体的位移与时间的关系式为 $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$，试推导这关系式.

7. 在原点有一个带电量为 $+q$ 的点电荷，它的周围形成一个电场. 求单位正电荷在该电场中从距原点 a 处沿射线方向移至距原点 $b(a<b)$ 处时，电场力 F 对它所做的功.

8. 长为 L 的船静止在平静的水面上，立于船头的人的质量为 m，船的质量为 M. 不计水的阻力，问人从船头走到船尾的过程中，船的位移为多大？

§3.6 反常积分

在前面，我们讨论了作为积分和的极限的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 为了构造积分和，就要限制积分区间 $[a,b]$ 是有界的；为了积分和具有极限，又必须限制被积函数 f 是有界的.

本节定义的反常积分将从两方面突破原有的限制. 我们将讨论无穷区间的反常积分以及无界函数的反常积分（瑕积分）.

3.6.1 无穷区间的反常积分

反常积分

定义 3.4 设对任何大于 a 的实数 b，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上均可积，则称极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty]$ 上的**反常积分**(或广义积分),记为 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当此极限存在时,称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称为发散.

类似地,定义反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 c 为任一实常数(通常取 $c=0$). 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是$\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛.

为了方便,设 $F(x)$是连续函数 $f(x)$的原函数,记 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$,$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$,则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]\\&=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty},\end{aligned}$$

也就是说,同定积分的计算类似,可按 Newton-Leibniz 公式计算反常积分. 注意,在这里"代积分上限"就是取极限,即 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$,只要 $F(+\infty)$存在,反常积分就收敛. 同理

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b},$$

只要 $F(-\infty)$存在,反常积分就收敛,而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

必须 $F(-\infty)$和 $F(+\infty)$都存在,反常积分才收敛.

例 3.6.1 设质量为 m 的火箭从地面发射. 试求这火箭飞离地球引力范围所需做的功.

解 记地球的半径为 R,则在离地心距离为 r 的地方,火箭所受到的地球引力 F 应满足

$$\frac{F}{mg}=\frac{\dfrac{1}{r^2}}{\dfrac{1}{R^2}}.$$

由此得到

$$F=\frac{mgR^2}{r^2}.$$

于是,这火箭飞离地球引力范围所需做的功为

$$W=\int_R^{+\infty}\frac{mgR^2}{r^2}\mathrm{d}r=\lim_{r\to+\infty}mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)=mgR.$$

如果火箭达到速度 v 之后就熄火，靠惯性继续飞行，为使这火箭能飞离地球引力范围，它的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 至少要等于克服地球引力所需的功 mgR：

$$\frac{1}{2}mv^2=mgR.$$

由此可知，速度 v 至少为

$$v=\sqrt{2gR}.$$

以

$$g=9.81\ \mathrm{m/s^2},\quad R=6\ 371\ \mathrm{km}$$

代入上式，我们求得

$$v=11.2\ \mathrm{km/s}.$$

这是物体从地面飞出地球引力范围所必须具有的速度.人们把这个速度叫做第二宇宙速度.

例 3.6.2 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，$\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 的敛散性，若收敛，求反常积分值.

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}(\arctan b-\arctan 0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}(\arctan 0-\arctan a)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例 3.6.3 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性，若收敛，求反常积分值.

解
$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

例 3.6.4 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$（$p$ 为任意实数）的敛散性，若收敛，求反常积分值.

解 当 $p\neq1$ 时，
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{1}{p-1}, & p>1;\end{cases}$$

当 $p=1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty.$

所以，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，当 $p\leqslant1$ 时发散；当 $p>1$ 时收敛，其值为 $\frac{1}{p-1}$.

注 在讨论反常积分时，有关积分法诸如换元法和分部积分法都是适用的. 应该指出：若反常积分通过适当的变量代换能化成定积分，则反常积分是收敛的.

例如，计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$ 时，设 $x=\tan t$，则

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\tan t(\tan^2 t+1)}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln 2.$$

3.6.2　无界函数的反常积分

一般地，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近无界，则称 x_0 是 $f(x)$ 的瑕点.

定义 3.5　设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，a 为瑕点.若对任意的 $\varepsilon>0$ 且 $a+\varepsilon<b$，称极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

为无界函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的**反常积分**(或瑕积分)，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

若这个极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，若极限不存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 b 为瑕点，则定义无界函数的反常积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x.$$

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)$，$(c,b]$ 内连续，$x=c$ 为 $f(x)$ 的瑕点，则定义无界函数的反常积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b}f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 ε_1 和 ε_2 是彼此无关的正数，这里只有当上式中两个极限同时存在时，反常积分才是收敛的.

为计算方便，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，若 $x=a$ 是 $f(x)$ 的瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

其中 $F(a)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$.同理若 $x=b$ 是 $f(x)$ 的瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

其中 $F(b)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$.

例 3.6.5　讨论反常积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的敛散性，若收敛，求反常积分值.

解法 1　被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,1)$ 上连续，$x=1$ 为其瑕点.

根据其定义求得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

解法 2 令 $x=\sin t$，$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

该题说明，若反常积分收敛，作换元积分时，有时可将反常积分化为定积分.

例 3.6.6 讨论反常积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$ 的敛散性，若收敛，求反常积分值.

解 因为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}$，在 $x=1$ 的附近无界，所以 $x=1$ 是瑕点. 于是

$$\text{原式} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$$= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)\Bigg|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

例 3.6.7 讨论反常积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由于 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，故 $x=0$ 为瑕点. 而

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

由

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln x = +\infty,$$

可知反常积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

如误认为 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是定积分，按照定积分方法计算：

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{-1}^1 = 0,$$

显然这是一个错误的结果. 另外，认为被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，对称区间上的积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0$ 也是错误的. 其原因是必须先判别反常积分存在，才能用对称性等方法计算.

一般地，积分 $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\ (a<b,p>0)$，当 $p<1$ 时收敛，$p\geqslant 1$ 时发散，请读者自行证明.

3.6.3 反常积分的收敛判别法

前面已经看到，根据定义可以判断一个反常积分是否收敛，且收敛时可求出其结果. 但

有时计算较复杂，甚至是困难的，而且有些问题只需知道相应积分是否收敛即可. 这就需要直接从被积函数本身的性态来判别反常积分的敛散性. 这里只介绍判断反常积分敛散性的一个基本方法，即所谓的比较判别法.

定理 3.10(无穷区间的比较判别法)　设函数 $f(x)$，$g(x)$在$[a,+\infty)$上都连续，且存在$c\geqslant a$，使得 $x\geqslant c$ 时，有

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$

则

(1) 若$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 若$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明　(1) 因为$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，而$\int_a^{c}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，所以$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.故不妨设 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 在 $x\geqslant a$ 时成立.于是，对任意大于 a 的 b，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x,$$

这表明作为积分上限 b 的函数$I(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在$[a,+\infty)$上有上界，又 $I(b)$单调增加，从而必有

$$\lim_{b\to+\infty}I(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，因此积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 可用反证法从(1)推出(略).　□

例 3.6.8　判别$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x|\cos x|}$ 的敛散性.

解　因为$\dfrac{1}{1+x|\cos x|}\geqslant\dfrac{1}{1+x}$，而$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$ 发散，所以$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x|\cos x|}$ 发散.

比较判别法的关键是找一个已知敛散性的反常积分来作为比较的标准积分，常用$\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 作为比较的标准积分.由此可得比较判别法的极限形式.

定理 3.11(比较判别法的极限形式)　设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上非负连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\lambda f(x)=l$，那么

(1) 当 $0\leqslant l<+\infty$时，且 $\lambda>1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 当 $0<l\leqslant+\infty$时，且 $\lambda\leqslant1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明　当 $0<l<+\infty$时，总存在 $0<\varepsilon<l$，对 $\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\lambda f(x)=l$ 知，存在 $c(c\geqslant$

a),使 $x>c$ 时,

$$l-\varepsilon \leqslant x^{\lambda} f(x) \leqslant l+\varepsilon,$$

即

$$0<\frac{l-\varepsilon}{x^{\lambda}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{l+\varepsilon}{x^{\lambda}}.$$

而 $\int_a^{+\infty} \frac{l+\varepsilon}{x^{\lambda}} \mathrm{d}x$ 当 $\lambda>1$ 时收敛,$\int_a^{+\infty} \frac{l-\varepsilon}{x^{\lambda}} \mathrm{d}x$ 当 $\lambda \leqslant 1$ 时发散,由比较判别法知,当 $0<l<+\infty$ 时,(1) 和(2) 成立.对 $l=0$ 和 $l=+\infty$,可类似证明. □

例 3.6.9 判别 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x}}$ 的敛散性.

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$,知原反常积分收敛.

对于无界函数的反常积分,也有相应的比较判别法,下面只给出一种常用的比较判别法的极限形式:

设在 $(a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$,$x=a$ 为瑕点,若

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^{\lambda} f(x)=l,$$

那么

(1) 当 $0\leqslant l<+\infty$ 时,若 $\lambda<1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 当 $0<l\leqslant+\infty$ 时,若 $\lambda\geqslant 1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

当 $x=b$ 为瑕点时,也有类似结果.

例 3.6.10 判别 $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 在 $(0,1]$ 上,$\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}>0$,且 $x=0$ 是瑕点,由

$$\lim_{x\to 0^+}(x-0)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}=1,$$

知原反常积分收敛.

例 3.6.11 判别 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$ 的敛散性.

解 当 $x>0$ 时,$\frac{1}{\ln(1+x)}>0$,且 $x=0$ 为瑕点,由

$$\lim_{x\to 0^+}(x-0)\frac{1}{\ln(1+x)}=1,$$

知原反常积分发散.

例 3.6.12 讨论反常积分 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx\,(s>0)$ 的敛散性.

解 当 $s<1$ 时，$x=0$ 是瑕点，同时又是无穷区间的反常积分，因此将 $\Gamma(s)$ 写成

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=\Gamma_1(s)+\Gamma_2(s).$$

对于 $\Gamma_1(s)$，当 $0<s<1$ 时，$x=0$ 为瑕点，由于

$$\lim_{x\to0^+}x^{1-s}\cdot(x^{s-1}e^{-x})=\lim_{x\to0^+}e^{-x}=1,$$

所以又当 $1-s<1$，即 $0<s<1$ 时，$\Gamma_1(s)$ 收敛.

当 $s\geqslant1$ 时，$\Gamma_1(s)$ 是定积分.

对于 $\Gamma_2(s)$，因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(x^{s-1}e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0,$$

所以 $\Gamma_2(s)$ 对一切 s 均收敛.

综上所述，$\Gamma(s)$ 当 $s>0$ 时收敛，称函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx\quad(s>0)$$

为 Γ 函数.

Γ 函数有下列性质：

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$$

事实上

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s e^{-x}dx=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s).$$

当 $s=n$ 为正整数时，由于

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1,$$

故可得

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1,$$
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\times1=2!,$$
$$\Gamma(n+1)=n!\ (n\text{ 为正整数}).$$

习题 3.6

(A)

1. 判断下列反常积分的敛散性，且若反常积分收敛，则计算其值.

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2x}$.　　(2) $\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}$.

(3) $\int_0^1\ln^n x\,dx$.　　(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^n x}{x^2}dx\ (n>0)$.

(5) $\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

(6) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$.

(7) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

(8) $\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(9) $\int_{1}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

(10) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(1-x)^2}$.

(11) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

(12) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx$.

(13) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

(14) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

(15) $\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx\ (a>0)$.

(16) $\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|+x)e^{-|x|}dx$.

(17) $\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$.

(18) $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$.

(19) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x}}dx$.

(20) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin x\,dx$.

2. 当 k 为何值时，反常积分 $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，这个反常积分发散？当 k 为何值时，这个反常积分取得最小值？

3. 计算下列反常积分：

(1) $\int_{0}^{2}\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$.

(2) $\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(3) $\int_{0}^{6}(x-4)^{-\frac{2}{3}}dx$.

(4) $\int_{1}^{+\infty}e^{-100x}dx$.

(5) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}dx$.

(6) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

(7) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

(8) $\int_{0}^{2a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}dx\quad(a>0)$.

(B)

1. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\int_{0}^{+\infty}x^n e^{-x}dx\ (n\in\mathbf{N}_+)$.

2. 求积分 $\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|}\cdot x^2\right\}dx$.

3. 举例说明：瑕积分 $\int_{a}^{b}f(x)dx$ 收敛时，$\int_{a}^{b}f^2(x)dx$ 不一定收敛.

4. 设 $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，求 $I=\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_{a}^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$，求常数 a.

6. 证明下列等式：

(1) $\int_{0}^{1}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx,\quad p>0$.

(2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx,\quad 0<p<1$.

第三章部分习题参考答案或提示