1．用微元法推出：由平面图形$0\le a\le x\le b$，$0\le y\le f(x)$，绕y轴旋转所得的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

并计算正弦曲线$y=\sin x$在$0\le x\le \pi$的一段与x轴围成的图形绕y轴旋转所得的旋转体的体积.

解：任取$[a,b]$的一个分割Δ：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

并记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则曲边梯形在$x_{i-1}\le x\le x_i$一段的平面图形绕$y$轴旋转所得的旋转体(柱壳)的体积

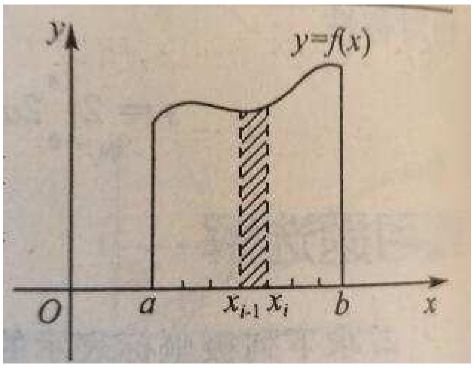
$$\Delta V_i\approx 2\pi x_i\cdot f(x_i)\cdot\Delta x_i$$

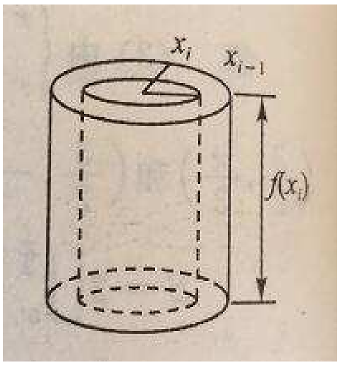
（近似值取为侧面积$2\pi x_i f(x_i)$与厚度的Δx_i乘积），于是

旋转体的体积

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

这种计算方法称为“柱壳法”.





$$V=2\pi\int_0^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2$$

$$\begin{aligned}V=V_1-V_2&=\pi\int_0^1[\pi-\arcsin y]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(\arcsin y)^2\mathrm{d}y\\&=\pi^2\int_0^1(\pi-2\arcsin y)\mathrm{d}y=2\pi^2\end{aligned}$$

2．设 $f(x)$ 连续，$f(1)=1$ 且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

解：令 $2x-t=u$

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=-\int_{2x}^x(2x-u)f(u)\mathrm{d}u=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u$$

求导

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[2f(2x)-f(x)]-[4xf(2x)-xf(x)]=\frac{x}{1+x^4}$$

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^4}$$

令 $x=1$，$\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\frac{3}{4}$　　$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$

3．计算 $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$

解：　原式 $=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{12}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}(1+x^4)=\frac{1}{6}(1-\sqrt{2})$$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则下列结论正确的是（　A　　）

(A)　当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

证：　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$

令 $t=-u$ ，因为 $f(x)$ 是奇函数，

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x)$$

(B)　当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

$f(x)=\cos x$ ，$F(x)=\sin x+1$

(C)　当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

$f(x)=\cos x+1$ ，　$F(x)=\sin x+x$

(D)　当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

$f(x)=x$ ，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$

5．设连续函数 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则以下命题中正确的是（　A　　）

(A) 若 $F(x)$ 是周期函数，则 $f(x)$ 也是周期函数.

证：　$F(x+T)=F(x)$ ，　$F'(x+T)=F'(x)\Rightarrow f(x+T)=f(x)$

(B) 若 $f(x)$ 是周期函数，则 $F(x)$ 也是周期函数.

$f(x)=\cos x+1$ ，　$F(x)=\sin x+x$

(C)　若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 也是奇函数.

$f(x)=\sin x$ ，　$F(x)=-\cos x$

(D)　若 $F(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 也是奇函数.

$F(x)=\sin x$ ，　$f(x)=\cos x$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，对任何 $a>0$，求证：

$$\int_0^a\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x$$

证明：

$$\int_0^a\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^a-\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x$$

7. 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，$x>0$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

解： $t=\frac{1}{u}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln u}{1+u}\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x \ln t\mathrm{d}\ln t=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

8. 设 $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=A$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x$

解：令 $x=2t$，则

$$A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{4(t+1)^2}2\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t=2A$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\cos 2x}{x+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{-1}{\frac{\pi}{2}+1}-1+2A\right]=\frac{1}{2(\pi+2)}+\frac{1}{4}-\frac{A}{2}$$

9．设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶连续可导，且 $f(0)=0$，证明：在 $[-1,1]$ 上至少存在一点 η，使 $f''(\eta)=3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$，

ξ 介于 0 和 x 之间

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}[f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x \qquad \textbf{(1)}$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，故一定存在最大值 M 和最小值 m，使得

$$m\le f''(x)\le M$$

故有 $$\frac{m}{3}=\frac{m}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{M}{3}$$

即 $$m\le\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x\le M$$

于是由介值定理可知，存在 $\eta\in[-1,1]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x \qquad \textbf{(2)}$$

由**(1), (2)**知

$$f''(\eta)=3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

10．若 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 二阶导数连续，且 $f(3)=0$，证明 $\exists\xi\in[2,4]$ 使 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

证明：

$$3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=3\int_2^4[f(3)+f'(3)(x-3)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-3)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x\text{，}\xi_1\text{介于}3\text{和}x\text{之间}$$

由 $f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续，必存在最大值 M 和最小值 m，使 $m\le f''(x)\le M$，从而

$$\frac{3}{2}m\int_0^4(x-3)^2\mathrm{d}x\le\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x\le M\frac{3}{2}\int_2^4(x-3)^2\mathrm{d}x$$

即

$$m\le\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x\le M$$

由 f'' 得连续性及介值定理，$\exists\xi\in[2,4]$ 使 $f''(\xi)=\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x$，

即

$$f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$$

11. $\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$　n 为正整数.

证明：令 $x=t+\frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

12. $\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ n为正偶数.

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$,

令$x=t+\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

13. $\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=0$ n为正奇数.

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$,

令$x=t+\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

所以$\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=0$

14．若$f(x)$、$g(x)$都在$[a,b]$上可积，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

证明：对任一实数t，考虑二次三项式

$$t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[tf(x)+g(x)\right]^2\mathrm{d}x\ge 0$$

故其判别式$\Delta\le 0$， 即

$$\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\le 0$$

从而 $$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

（此不等式称为柯西-施瓦茨不等式）

15． $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算$\int_0^\pi f(x)dx$

解： $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi x\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \pi f(\pi) - \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t - \int_0^\pi (x-\pi+\pi)\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x - \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2$$