例 2.7.3 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且 $g(a)=1, g(b)=0$，证明：必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right].$$

要证明：

$$f'(\xi)=g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]\Rightarrow\varphi'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]=0\Rightarrow$$

$$\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\left[f(a)-f(b)\right]$$

$$\Rightarrow\varphi(x)=f(x)-g(x)\left[f(a)-f(b)\right]$$

$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $g(a)=1, g(b)=0$

$$\varphi(a)=f(a)-g(a)\left[f(a)-f(b)\right]=f(b)$$

$$\varphi(b)=f(b)-g(b)\left[f(a)-f(b)\right]=f(b)$$

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]=0$$

$$f'(\xi)=g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]$$

七．2010 年期中考试试题（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，(a, b) 可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$

证：要证明 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}\Rightarrow\varphi'(\xi)=f'(\xi)(b-\xi)-(f(\xi)-f(a))$

$$\varphi'(x)=f'(x)(b-x)-(f(x)-f(a))$$

对 $\varphi(x)=(f(x)-f(a))(b-x)$ 用罗尔定理

欲证$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0 \Rightarrow \varphi'(x)=xf'(x)+f(x)$，对$\varphi(x)=xf(x)$用罗尔定理

(1) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=f(x)g(x)$

(2) $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(3) $f(x)+f'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=e^{x}f(x)$

(4) $\lambda f(x)+f'(x) \Rightarrow \varphi(x)=e^{\lambda x}f(x)$

(5) $nf(x)+xf'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=x^{n}f(x)$

(6) $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$

(7) $f(\xi)\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=0 \Rightarrow \varphi(x)=[\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t]^2$

(8) $g(\xi)\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\int_{\xi}^{0} g(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \varphi(x)=\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t\int_x^{0} g(t)\mathrm{d}t$

七．2011 年期中考试试题（10 分）设$f(x)$在$[0, 1]$连续，$(0, 1)$可导，$f(1)=0$，证：存在$x_0\in(0, 1)$使$nf(x_0)+x_0 f'(x_0)=0$，n为正整数。

证明：令$F(x)=x^n f(x)$

则$F(x)$在$[0, 1]$连续，$(0, 1)$可导，$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，至少存在$x_0\in(0, 1)$使$F'(x_0)=0$，即

$$nx_0^{n-1}f(x_0)+x_0^n f'(x_0)=x_0^{n-1}(nf(x_0)+x_0 f'(x_0))=0$$

又$x_0^{n-1}\neq 0$，故$nf(x_0)+x_0 f'(x_0)=0$

1. 设 $f_n(x)=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$，求证：$f_n^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$

解：$n=1$，$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ 成立

假设$n=k$成立，即 $\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$

现证$n=k+1$成立，

$$\left(x^k e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}=\left(x\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)\right)^{(k+1)}=\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}\cdot x+(k+1)\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}+(k+1)\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{n^6+n^5}-\sqrt[6]{n^6-n^5}\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{n^6+n^5}-\sqrt[6]{n^6-n^5}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left((n^6+n^5)^{\frac{1}{6}}-(n^6-n^5)^{\frac{1}{6}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}(n^6-n^5)^{\frac{1}{6}}\left(\left(1+\frac{2n^5}{n^6-n^5}\right)^{\frac{1}{6}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2n^5}{n^6-n^5}=\frac{1}{3}$$