一、选择题　每小题 3 分，共 45 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的（　　）

(A) 可去间断点.　　(B) 跳跃间断点.

(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

2、设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

（　　）

(A) 在点 $x=0$ 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在点 $x=0$ 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 $x=0$.

解：由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数 $\Rightarrow f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

3、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2tx}$，则 $f'(x)=$（　　）

(A) $(1+2x)e^{2x}$.　　(B) $(1+x)e^{x}$.　　(C) xe^{2x}.　　(D) 1.

解：$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2tx}=xe^{2x}$，$f'(x)=(1+2x)e^{2x}$

4、函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在以下哪个区间不一致连续？（　　）

(A) $(0,1)$.　　(B) $(1,2)$.　　(C) $[2,3]$.　　(D) $[3,+\infty)$).

5、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$（　　）

(A) $\ln 2-1$.　　(B) $\ln 2+1$.　　(C) -1.　　(D) 0.

解：$2^{xy}\ln 2(y+xy')=1+y'$

$x=0\Rightarrow y=1$ ，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\ln 2-1$

6、设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 有二阶连续导数，且 $f''(t)\neq 0$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$（　　）

(A) $f''(t)+tf'''(t)$.　(B) 1.　(C) $\frac{t}{f''(t)}$.　(D) $\frac{1}{f''(t)}$.

解：$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f''(t)}$$

7、设函数 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(2020)}(0)=$（　　）

(A) 2019.　　(B) 2020.　　(C) 2021.　　(D) 0.

解：$$f(x)=xe^x=x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2019}}{2019!}+\cdots\right)$$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^{2020}}{2019!}+\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!}x^{2020}+\cdots$$

$$\frac{1}{2019!}=\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!}$$

8、设周期为 4 的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的斜率为（　　）

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) 2.　　(D) -2.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$

$$f'(1)=-2$$

9、函数 $f(x)=\int_0^x \dfrac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为（　　）

(A) $\ln\dfrac{3}{4}$.　　(B) $\ln\dfrac{3}{2}$.　　(C) 0.　　(D) $\ln 3$.

解：$f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$$f(-1)=\int_0^{-1}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\int_0^{-1}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}(t^2-t+1)=\ln 3$$

$$f(1)=\int_0^{1}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\int_0^{1}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}(t^2-t+1)=0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}(t^2-t+1)=\ln\frac{3}{4}$$

10、定积分 $\int_0^{\pi}2e^x\sin x\mathrm{d}x=$（　　）

(A) $-e^{\pi}+1$.　　(B) $-e^{\pi}-1$.　　(C) $e^{\pi}+1$.　　(D) $e^{\pi}-1$.

解：$\int_0^{\pi}2e^x\sin x\mathrm{d}x=2(e^x\sin x\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\mathrm{d}x)=-2\int_0^{\pi}e^x\cos x\mathrm{d}x$

$$=-2(e^x\cos x\big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\sin x\mathrm{d}x)$$

$$\int_0^{\pi}2e^x\sin x\mathrm{d}x=-e^x\cos x\big|_0^{\pi}=e^{\pi}+1$$

11、定积分$\int_{\pi}^{2\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=$（　　）

(A) $\frac{\pi}{2}$.　　(B) $\frac{3\pi}{8}$.　　(C) $\frac{\pi}{4}$.　　(D) $\frac{\pi}{8}$.

解：　令$x=\pi+t$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin^4 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$$

12、定积分$\int_0^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=$（　　）

(A) $\frac{5}{3}$.　　(B) $\frac{10}{3}$.　　(C) 5.　　(D) $\frac{20}{3}$.

解：令$\sqrt{2x+1}=t$

$$\int_0^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}}{t}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2-1)\mathrm{d}t=\frac{10}{3}$$

13、心形线$r=1+\cos\theta$（极坐标系下的方程）所围平面图形的面积为（　　）

(A) $\frac{3\pi}{8}$.　　(B) $\frac{3\pi}{4}$.　　(C) $\frac{3\pi}{2}$.　　(D) 3π.

解：$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi$

14、函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为（　　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3 .

解：$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0 \Rightarrow x=e$$

$0<x<e$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}>0$ ，　$x>e$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}<0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\frac{x}{e}+1)=-\infty$，

$f(e)=1>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{\frac{x}{e}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e}}=0<1$$

当 x 充分大时，$\frac{\ln x+1}{\frac{x}{e}}<1 \Rightarrow \ln x+1<\frac{x}{e} \Rightarrow f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+1<0$

15、微分方程 $\frac{dy}{dx}=\cos x\cdot\csc y$ 的通解为（　　）

(A) $\sin x+\cos y=c$.　　(B) $\sin x-\cos y=c$.

(C) $\cos x-\sin y=c$.　　(D) $\cos x+\sin y=c$.