3. 确定常数a，使得下列函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0\\ 3x+a\ , & x\ge 0\end{cases}$

确定常数a，使得函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0\\ 3x+a\ , & x\ge 0\end{cases}$在$[-1,+\infty)$上连续

解：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(3x+a)=a\,,$$

$f(0)=a$,

$a=1$

P64 页

11. (4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$上一致连续.

证明：对$\forall\varepsilon>0$, 由于

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\left|\sqrt{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}\right|\le\left|\sqrt{\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\left|\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right|}\right|=\left|\sqrt{|x_1-x_2|}\right|<\varepsilon$$

只要取$\delta=\varepsilon^2$, 当$|x_1-x_2|<\delta$时, 就有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\left|\sqrt{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}\right|\le\left|\sqrt{\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\left|\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right|}\right|=\left|\sqrt{|x_1-x_2|}\right|<\varepsilon$$

所以$f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$上一致连续.

P64 页

14. (2) $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$ 上非一致连续.

证:只需取 $x_n=e^{-n}$， $y_n=e^{-(n+1)}$， 就有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e-1}{e^{n+1}}\right)=0$$

但 $\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$

故 $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$ 上非一致连续.

(4) $f(x)=x\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续.

证:只需取 $x_n=\pi\sqrt{n^2+1}$， $y_n=n\pi$， 就有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0$$

但
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|f(x_n)-f(y_n)\right|&=\lim_{n\to\infty}\left|\pi\sqrt{n^2+1}\sin\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\sin n\pi\right|\\
&=\lim_{n\to\infty}\left|\pi\sqrt{n^2+1}\sin\pi\sqrt{n^2+1}\right|\\
&=\pi\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n^2+1}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)\right|\\
&=\pi\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n^2+1}\sin(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n})\right|\\
&=\pi\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|\\
&=\frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)\neq 0$ 或 不存在

故 $f(x)=x\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续.

$\sin(\alpha-n\pi)=\pm\sin\alpha$

§1.3　实数理论

定理 1.1 (确界存在定理)　有上(下)界的非空实数集必有上(下)确界.

定理 1.4（单调有界收敛定理）单调递增(减)且有上(下)界的数列必收敛，极限为数列的上(下)确界.

定义 1.16　设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一系列的闭区间，如果满足

（1）$\forall n\in \mathbf{N}_+, [a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则称$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$为一个闭区间套.

定理 1.5（区间套定理）设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$为一个闭区间套，则存在唯一的$\xi$，使得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$，即$\forall n\in \mathbf{N}_+, \xi\in[a_n,b_n]$.

定理 1.6(致密性定理,又名 Bolzano-Weistrass 定理)有界数列必有收敛子列.

定义 1.17 若数列$\{x_n\}$满足：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbf{N}_+$，使得当$n,m>N$时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为 Cauchy 列.

定理 1.7(Cauchy 收敛原理)　数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$为 Cauchy 列.

确界存在定理 $\Rightarrow$ 单调有界收敛定理 $\Rightarrow$ 区间套定理 $\Rightarrow$ 致密性定理 $\Rightarrow$ Cauchy 收敛原理

定理:(有限覆盖定理) 若闭区间 $[a,b]$ 被一组开区间 $D=\{(a_\lambda,b_\lambda)\}$ 覆盖，即 $[a,b]\subseteq\bigcup_\lambda(a_\lambda,b_\lambda)$，则从中必可选出有限个开区间 (a_1,b_1)，(a_2,b_2)，$\cdots$，(a_m,b_m)，使得这有限个开区间也覆盖 $[a,b]$.

定义. 设 E 是数轴上的非空数集，a 是数轴上一定点(可以属于 E,也可以不属于 E)，若 $\forall\delta>0$，$\overset{0}{U}(a,\delta)$ 都含有 E 中点，则称 a 是 E 的一个聚点

定理: (聚点定理) 数轴上有界无限点集 E 至少有一个聚点

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ （$a,b,c>0$）

2．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

3．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3}\right)}$

$a^x-1\sim x\ln a$， $x\to 0$

$$=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{x}}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}$$

解：

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\tan\frac{1}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+n\tan\frac{1}{n}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(n\tan\frac{1}{n}-1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}}=e^{\frac{1}{3}}$$

$\tan x-x\sim\dfrac{1}{3}x^3$ ， $(x\to 0)$

$\tan\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{n^3}$ ，$(n\to\infty)$

解：$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\dfrac{2}{e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^4}}{\dfrac{1}{e^{\frac{4}{x}}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$$

4. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin^2 x}\ln\left(1+\cos x-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

5. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^2e^{\frac{1}{x-1}}$

解：$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^2e^{\frac{1}{x-1}}=0$，

令 $t=\dfrac{1}{x-1}$， $x\to1^+$， $t\to+\infty$， $\lim\limits_{x\to1^+}(1-x)^2e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1}(1-x)^2e^{\frac{1}{x-1}}$不存在

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{2}{x}}=$（　　　　）

A. ∞.　　　　**B.** 1.

C. e^2.　　　　**D.** e^{-2}.

7. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则（　　　　）

(A)　$f(x)$ 连续.

(B)　有间断点 $x=1$.

(C)　有间断点 $x=-1$.

(D)　有间断点 $x=0$.

解：(B)　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$　$\Rightarrow$　$f(x)=\begin{cases}1+x, |x|<1\\ 1, x=1\\ 0, x=-1\\ 0, |x|>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$ ，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

8. 设 $f(x)=\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的__________.

A．可去间断点　　　　B．跳跃间断点

C．无穷间断点　　　　D．振荡间断点

解：A $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x(x+1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x(x+1)\ln x}=\dfrac{1}{2}$

9. 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的（　　）

(A) 可去间断点.　　　　(B) 跳跃间断点.

(C) 无穷间断点.　　　　(D) 振荡间断点.

解：(B)　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$

10. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sqrt[3]{x}}}{x^k}=c$（$c$ 为非零常数，k 为常数），则 ________.

A. $k=\dfrac{1}{3}, c=1$；　　　　B. $k=\dfrac{1}{3}, c=-1$；

C. $k=1, c=1$；　　　　D. $k=1, c=-1$.

解：B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sqrt[3]{x}}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}(e^{x-\sqrt[3]{x}}-1)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}(x-x^{\frac{1}{3}})}{x^k}=c$

11. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=5$，则

A. $a=0, b=1$　　　　B. $a=1, b=-4$

C. $a=0, b=-4$　　　　D. $a=1, b=1$.

12. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\tan 3x}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\tan 3x}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=2$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)x}{3x}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$（$x\to 0$）