$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0 \qquad x\to0,\quad a^x-1\sim x\ln a$$

1. 设 $a>0$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$

解：
$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})=\lim_{n\to\infty} n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})=\lim_{n\to\infty} n^2a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)=\lim_{n\to\infty} n^2a^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\ln a=\ln a$$

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$

解：
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\lim_{n\to\infty} n(3^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n}})=\lim_{n\to\infty} n2^{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n2^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3}{2}$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1$$

4. 设常数 $a>0$，且 $a\neq1$，确定 p 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$ 存在

解：

$$\lim_{x\to+\infty} x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^pa^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^pa^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^pa^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x(x+1)}\ln a=\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x^p}{x(x+1)}\ln a=\begin{cases}0, & p<2\\ \ln a, & p=2\end{cases}$$

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$　　　$x\to 0$，$e^x-1\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$　　　$x\to 0$，$\ln(1+x)\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

6. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}=2017$，求 α，β

解：

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad(x\to 0)\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta-1\sim\beta\frac{1}{n}\quad(n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta-1\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta\beta\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta}=2017$$

$$\Rightarrow\alpha-\beta+1=0,\ \beta=\frac{1}{2017}\Rightarrow\alpha=-\frac{2016}{2017}$$