一、（共 40 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的（ B ）

A. 跳跃间断点.　　B. 可去间断点.

C. 无穷间断点.　　D. 振荡间断点.

解：$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1}=f(0)$

2. 设函数 $f(x)=x\cos x$，则 $f^{(2021)}(0)=$（ A ）

A. 2021.　　B. -2021.

C. $2021!$.　　D. $-(2021!)$.

解：$f(x)=x\cos x=x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+\dfrac{x^{2020}}{2020!}-\cdots\right)$

$$=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\cdots+\frac{x^{2021}}{2020!}-\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2021)}(0)}{2021!}x^{2021}+\cdots$$

$$\frac{1}{2020!}=\frac{f^{(2021)}(0)}{2021!}$$

3. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\cot\dfrac{y}{x}$ 的通解是（ A ）

A. $\cos\dfrac{y}{x}=Cx$.　　B. $\cos\dfrac{x}{y}=Cx$.

C. $\cos\dfrac{y}{x}=\dfrac{C}{x}$.　　D. $\cos\dfrac{x}{y}=\dfrac{C}{x}$.

4. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1-\frac{x^2}{2}$ 的等价无穷小是（ D ）

A. 0.　　B. $-\frac{x^2}{4}$.

C. $\frac{x^3}{6}$.　　D. $-\frac{x^4}{8}$.

解：　$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x^2}-1-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

5. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=$（ D ）

A. $\ln(1+\sqrt{2})$.　　B. $2\ln(1+\sqrt{2})$.

C. $\sqrt{2}-1$.　　D. $2\sqrt{2}-2$.

解：令 $A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+xA$$

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+A\int_0^1 x\mathrm{d}x$$

$$A=\sqrt{2}-1+A\frac{1}{2}\quad\Rightarrow A=2\sqrt{2}-2$$

令 $x=\tan t$　$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan t}{\sec t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\sec t\mathrm{d}t=\sec t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0 \\ e^x-1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（ B ）

A. 不连续.　　　　B. 连续，不可导.

C. 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.　　　　D. 可导，且 $f'(0)=1$.

解： $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ ， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0=f(0)$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-\cos\Delta x}{(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$$

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，则 $y''(0)=$（ A ）

A. -2.　　　　B. 2.

C. -3.　　　　D. 3.

解：

$$e^y+6xy+x^2-1=0$$

$$e^y y'+6y+6xy'+2x=0 \quad , \quad y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}$$

$$y''=-\frac{(6y'+2)(e^y+6x)-(6y+2x)(e^y y'+6)}{(e^y+6x)^2}$$

$$x=0\Rightarrow y=0 \qquad y'(0)=0 \qquad y''(0)=-2$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{2}{x}}=$（ C ）

A. ∞.　　　　B. 1.

C. e^2.　　　　D. e^{-2}.

解: $$\lim_{x\to 0}(1+\ln(1+x))^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^2$$

9. 设函数 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$，则（ C ）

A. 函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$，曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.

B. 函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$，曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.

C. 函数 $f(x)$ 没有极值点，曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.

D. 函数 $f(x)$ 没有极值点，曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.

解: $$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},\qquad f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=0\Rightarrow\quad x=0\text{是驻点}$$

$$f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow x=0\text{是二阶导数不存在的点}$$

10. 下列各定积分不等于零的是（ C ）

A. $\int_{-1}^{1}\cos x\ln\frac{2-x}{2+x}\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^{1}\frac{x\cos^3 x}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x$.

C. $\int_{0}^{\frac{9\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

解: $$\int_0^{\frac{9\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+4\pi}\sin^9 x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x+2\int_0^{2\pi}\sin^9 x\,\mathrm{d}x$$

令 $x=\pi+t$

$$\int_0^{2\pi}\sin^9 x\,\mathrm{d}x=-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^9 t\,\mathrm{d}t=0$$