1.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，(其中 $g(x)$ 具有二阶导数)，$g(0)=0$，$g'(0)=1$，（1）求 a 的值使 $f(x)$ 连续；（2）求 $f'(x)$；（3）讨论 $f'(x)$ 连续性。

解：(1) $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(g'(x)-\cos x)=0$ （4 分）

$$\left(a=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0\right)$$

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\sin x}{2}=\frac{g''(0)}{2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\frac{1-\cos x}{2x}\right)=\frac{1}{2}g''(0)$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}g''(0) & x=0\end{cases}$$ （8 分）

（3） $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x+x(g''(x)+\sin x)-(g'(x)-\cos x)}{2x}$$

$$=\frac{g''(0)}{2}=f'(0),$$

因此 $f'(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 连续。 （10 分）

$$\lim_{x\to0} f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(g'(x)-g'(0))+g'(0)x-x\cos x-(g(x)-\sin x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{g'(0)-\cos x+x\sin x-g'(x)+\cos x}{2x}$$

$$=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{2}g''(0)=f'(0)$$

2．设 $f(x)=x+x^3|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为（　　）。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

3．（10 分）设 $x_1=14$，　$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，

（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ；　（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}$

解：（1）用单调有界原理可证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}=\lim_{x\to2}\left(\frac{4(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{\frac{4(\sqrt{x+2}-2)-x+2}{x-2}}{x-2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{4(\frac{1}{2\sqrt{x+2}})-1}{2(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{2(x-2)\sqrt{x+2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{4-x-2}{2(x-2)\sqrt{x+2}(2+\sqrt{x+2})}}=e^{-\frac{1}{16}}$$

4. 若$f(x)$在x_0点n阶可导，可推出$f(x)$在x_0点附近$n-1$阶以下可导。

这是因为

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

5.（2012 级期中试题）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2+\sin^6 x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}}{\dfrac{x\ln(1+x)-x^2}{x^3}+\dfrac{\sin^6 x}{x^3}}$，　其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^6 x}{x^3}=0,$$

所以 原极限$=-\dfrac{1}{3}$.

6. [习题 2.9(A)第 5 题]设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(99)}(0)$.

解；因为 $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{x^{97}}{97!}+o(x^{97})$

则有 $f(x)=x^2\sin x = x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-\cdots+\frac{x^{99}}{97!}+o(x^{99})$

$$f(x)=x^2\sin x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(99)}(0)}{99!}x^{99}+o\left(x^{99}\right)$$

$$\frac{f^{(99)}(0)}{99!}=\frac{1}{97!},\quad f^{(99)}(0)=98\times 99$$

考虑 $f^{(98)}(0)=?$ ， $f^{(100)}(0)=?$

7. [习题 2.9(A)第 7 题] 设 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，又已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ 存在，证明当 $x\neq 0$ 时， $f(x)>0$.

证明: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x^2=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0=f'(0)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2>0\quad ,x\neq 0,$$

ξ 介于 x 与 0 之间.

8．设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，x_1，x_2，x_3 是 (a,b) 内相异的三点，证明：$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$

证明：令 $x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，由泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2，\xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间}$$

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2，\xi_1\text{介于}x_1\text{与}x_0\text{之间}$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2，\xi_2\text{介于}x_2\text{与}x_0\text{之间}$$

$$f(x_3)=f(x_0)+f'(x_0)(x_3-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_3)(x_3-x_0)^2，\xi_3\text{介于}x_3\text{与}x_0\text{之间}$$

所以 $$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=3f(x_0)++\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2$$

$$+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2+\frac{1}{2}f''(\xi_3)(x_3-x_0)^2$$

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)>3f(x_0)$$

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

9．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$|f''(\xi)|\geq 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

证明：由泰勒公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)(\frac{a+b}{2}-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{a+b}{2}-a)^2=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2$$

$$\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

同理 $f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-b)^2$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)(\frac{a+b}{2}-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{a+b}{2}-b)^2=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(a-b)^2$$

$$\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

$$0=f(a)-f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

$$4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}=\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\le\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$$

于是将$|f''(\xi_1)|$，$|f''(\xi_2)|$中较大者设为$|f''(\xi)|$，则有

$$|f''(\xi)|\ge 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$