1. 设函数$f(x)\in C[0,2a]$，且$f(0)=f(2a)$. 证明$\exists\xi\in[0,a]$使得$f(\xi)=f(\xi+a)$

证明：令$F(x)=f(x)-f(x+a)$，则$F(x)\in C[0,a]$

$F(0)=f(0)-f(a)$， $F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

若$f(0)=f(a)$，取$\xi=0$，即证结论成立. 否则$F(0)\cdot F(a)<0$，由零点定理，存在$\xi\in(0,a)$，使$F(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=f(\xi+a)$

2. 设$a_{2m}<0$，证明：实系数多项式

$x^{2m}+a_2x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}=0$至少有两个零点

证明：令$f(x)=x^{2m}+a_2x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$，

因为 $f(x)=x^{2m}\left(1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_{2m-1}}{x^{2m-1}}+\frac{a_{2m}}{x^{2m}}\right)$ 所以

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty，\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty，$$

故$\exists M>0$，使得$f(-M)>0$， 且 $f(M)>0$. 又因为$f(0)=a_{2m}<0$

在闭区间$[-M,0]$和$[0,M]$分别利用零点存在定理，得

$\exists\xi_1\in(-M,0)\subseteq(-\infty,+\infty)$，使得$f(\xi_1)=0$.

$\exists\xi_2\in(0,M)\subseteq(-\infty,+\infty)$， 使得$f(\xi_2)=0$.

故证

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}-1}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3}}{-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{4}}{-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}=\frac{4}{9}-\frac{4}{16}=\frac{7}{36}$$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ （$x\to0$） $1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}=-\left(\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}-1\right)\sim-\left(\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}n2^{\frac{1}{n}}\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}n2^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3}{2}$$

$x\to0$， $a^{x}-1\sim x\ln a$

$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-1)-\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{2}-1)$

$$=\lim_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-1)-\lim_{n\to\infty}n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n}\ln3-\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n}\ln2=\ln\frac{3}{2}$$

5．设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是（　　）

（A）若 x_n 发散，则 y_n 必发散.

（B）若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

（C）若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.

（D）若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

解：（D）$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} \cdot x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

（A）$x_n = n$，$y_n = \dfrac{1}{n^2}$

（B）$x_n : 1,0,2,0,3,0,4,0,\cdots$，　$y_n : 0,1,0,2,0,3,0,4,\cdots$

（C）$x_n = \dfrac{1}{n^2}$，$y_n = n$

6. 设 $f(x) = \dfrac{\tan x}{|x|} \arctan \dfrac{1}{x}$，则（　　）

(A) $x=0$ 是振荡间断点.　　(B) $x=0$ 是无穷间断点.

(C) $x=0$ 是可去间断点.　　(D) $x=0$ 是跳跃间断点.

7. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x+2} - ax - b) = 0$，则常数（　　）

(A) $a=1$，$b=1$.　　(B) $a=1$，$b=-1$.

(C) $a=-1$，$b=1$.　　(D) $a=-1$，$b=-1$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0 \Rightarrow a=1$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=1$$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\cdot\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪一个区间内有界？______

A．$(-1,0)$；　　B．$(0,1)$；

C．$(1,2)$；　　D．$(2,3)$．

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\xi)=\xi$；(2) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值大于1

证明：（1）由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=1$ 及 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

令 $F(x)=f(x)-x$，$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，

$$F(1)=f(1)-1=-1<0,$$

由连续函数零点定理知存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使 $F(\xi)=0$，

即 $f(\xi)=\xi$

(2)　由 $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=1>0$，

由保号性定理知 $\forall x\in\left(\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\delta\right)$ 时，

有 $f(x)>1$，　故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值大于 1