1. 对任意的x，总有$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

（A） 存在且一定等于零　　（B） 存在但不一定等于零

（C） 一定不存在　　（D）不一定存在

解：（D）

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}，\quad f(x)=|x|，\quad g(x)=\sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在

$$\varphi(x)=\frac{1}{|x|}，\quad f(x)=\frac{2}{|x|}，\quad g(x)=\frac{3}{|x|}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{|x|}-\frac{2}{|x|}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在

2. $x_n<a_n<y_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$　则a_n收敛

解：错

$$x_n=\sqrt{n^2-1}，\quad a_n=n，\quad y_n=\sqrt{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}=0$$

a_n发散

3. 当$x\to 0$时，函数$f(x)=2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}$是$x$的(　)阶的无穷小量

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=c$　($c\neq 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{1-x^2}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{(1+x^2)(1-x^2)nx^{n-1}}=c\,(=-\frac{4}{3})$$

$n=3$

4. $x=0$是函数$f(x)=\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}$的（　　　）

(A) 跳跃间断点.　　(B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

5. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^2}{x^n}=a$ （ $a\neq0$），求a和n的值

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+\sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^2}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+\sin 2x^2)}-e^2}{x^n}=e^2\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+\sin 2x^2)-2}-1}{x^n}$$

$$=e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2}\ln(1+\sin 2x^2)-2}{x^n}=e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin 2x^2)-2x^2}{x^{n+2}}$$

$$=e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{4x\cos 2x^2}{1+\sin 2x^2}-4x}{(n+2)x^{n+1}}=e^2\lim_{x\to0}\frac{4x\cos 2x^2-4x-4x\sin 2x^2}{(1+\sin 2x^2)(n+2)x^{n+1}}$$

$$=4e^2\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x^2-1-\sin 2x^2}{(n+2)x^n}$$

$$=4e^2\lim_{x\to0}\frac{-4x\sin 2x^2-4x\cos 2x^2}{(n+2)nx^{n-1}}$$

$$=-16e^2\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x^2+\cos 2x^2}{(n+2)nx^{n-2}}=a\Rightarrow n-2=0\Rightarrow n=2,\quad a=-2e^2$$

1．求 $y=\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}$ 的 n 阶导数

解：$y=\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x-3}+\dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}=1+\dfrac{2x+3}{(x-3)(x+1)}$

$$=1+\frac{1}{4}\left(\frac{9}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left(9\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right)=\frac{(-1)^n n!}{4}\left(\frac{9}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

2． $y=\arctan\dfrac{x}{2}$

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{4+x^2}$$