定理 1：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，则 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充分必要条件是：对任何点列 $\{x_n'\}(x_n'\in I)$ 和 $\{x_n''\}(x_n''\in I)$，只要满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，就成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0$.

例 1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续 但在 $(a,1)\,(a>0)$ 上一致连续.

证：只需取 $x_n'=\dfrac{1}{2n}$， $x_n''=\dfrac{1}{n}$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2n}\right)=0$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(2n-n)=\infty$.

故知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

在 $(a,1)\,(a>0)$ 上，对 $\forall\varepsilon>0$, 由于

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right|\le\frac{1}{a^2}|x_1-x_2|<\varepsilon$$

只要取 $\delta=a^2\varepsilon$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right|\le\frac{1}{a^2}|x_1-x_2|<\varepsilon$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(a,1)\,(a>0)$ 上一致连续.

例 2. $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续，但是在 $[0,\mathrm{A}]$ 上一致连续.（A 为任意有限正数）.

证：只需取 $x_n'=\sqrt{n+1}$， $x_n''=\sqrt{n}$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1-n)=1$

故 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.

在[0 ,A]上，对$\forall\varepsilon>0$，由于

$$\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|(x_1+x_2)(x_1-x_2)\right|\le 2\mathrm{A}\left|x_1-x_2\right|<\varepsilon$$

只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{A}}$，当$\left|x_1-x_2\right|<\delta$时，就有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|(x_1+x_2)(x_1-x_2)\right|\le 2\mathrm{A}\left|x_1-x_2\right|<\varepsilon$$

所以$f(x)=x^2$在[0 ,A]上一致连续.

定理 2： $f(x)$在(a,b)上连续，则$f(x)$在(a,b)上一致连续的充要条件是：$f(a+0)$与$f(b-0)$存在.

证明：(1) 某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续.

(2) 某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续.

证明： 若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{A}$（有限数），则函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

按一致连续的定义可得：

(1). $\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续，但在$(a,1)$ $(a>0)$上一致连续.

证：只需取$x_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，　$x_n''=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}$，　就有

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n'-x_n''\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}-\frac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}\right)=0$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})-\sin(2n\pi-\frac{\pi}{2})\right)=2$.

故知 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

(2). $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续, 但在 $[0,A]$ 上一致连续

证：只需取 $x_n'=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$， $x_n''=\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$， 就有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}\right)=0$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-(-1))=2$

故 $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

(3). $\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

(4). $\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

若 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 I 上有界，则 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

2010 级期末考试试题

以下结论中错误的是：（D）

(A). $f(x)=\arctan x$ 在 $(-1,1)$ 上一致连续.

(B). $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

(C). $f(x)=x^2$ 在 $(-1,1)$ 上一致连续.

(D). $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

2019 级期中考试试题

设 $f(x)$、$g(x)$ 都在 $\mathbf{R}$ 上一致连续，则 $f(g(x))$ 在 $\mathbf{R}$ 上（　　A　　）

(A) 连续且一致连续.

(B). 连续但不一致连续.

(C). 一致连续但不连续.

(D). 无法判别.

2019 级期末考试试题

以下四个函数中，在指定的区间上不一致连续的是（　B　）.

A. $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

B. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上.

C. $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

D. $f(x)=\ln x$ 在 $(1,2)$ 上.

2020 级期末考试试题(校本部)

以下命题中错误的是（　B　）

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

(B) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

如：$\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续且有界，但 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

(C) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(D) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

2020级期末考试试题(开发区)

函数$f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在以下哪个区间不一致连续？（　A　）

（A）$(0,1)$.　　（B）$(1,2)$.　　（C）$[2,3]$.

（D）$[3,+\infty)$).