1. 设$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，下列选项中正确的有几个（　　）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)^2}{f(x)}=0$　　**(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(f(x)\right)}{f(x)}=1$

(3) 若$\lim\limits_{u\to 0} g(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=A$

(4) 若$g(0)=A$，则$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$存在

(5) 若$\lim\limits_{u\to 0} g(u)\neq g(0)$，则$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$存在

(A) 3 个　**(B)** 2 个　**(C)** 1 个　**(D)** 0 个

(3) 若$\lim\limits_{u\to 0} g(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=A$

$$g(u)=\begin{cases} u\sin\dfrac{1}{u}, u\neq 0 \\ 1,\ u=0 \end{cases}\qquad \lim_{u\to 0} g(u)=0$$

$$f(x)=0\qquad \lim_{x\to 0} g(f(x))=1$$

(4) 若$g(0)=A$，则$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$存在

$$g(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 1,\ x=0 \end{cases}\qquad g(0)=1$$

$$f(x)=x$$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x))=\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}$$

(5) 若$\lim\limits_{u\to 0} g(u)\neq g(0)$，则$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$存在

$$g(u)=\begin{cases} 1, u\neq 0 \\ 0, u=0 \end{cases}\qquad \lim_{u\to 0} g(u)=1\neq g(0)=0$$

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\qquad \lim_{x\to 0} g(f(x))=\lim_{x\to 0} g\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\text{不存在}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

解:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-e^{x\ln(\sin x)}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln(\sin x)}\frac{e^{x\ln x-x\ln(\sin x)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x-x\ln(\sin x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x-\ln(\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{6x^2}=\frac{1}{6}$$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x}\ln\left(1+\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}-1\right)}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(e^x-1)\cos\sqrt{x}}{\sin x(e^x-1)\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(e^x-1)\cos\sqrt{x}}{x^2}$$

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\qquad \cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2}+o(x)$$

$$x-(e^x-1)\cos\sqrt{x}=x-\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

$$=x-x+\frac{x^2}{2}-o(x^2)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}-o(x^3)+o(x^2)=\frac{x^3}{4}+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}-1}{\sin x}=0\ ,\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=1$$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有二阶连续导数，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}=$$

(A) $f'(x_0)$ **(B)** $f''(x_0)$ **(C)** $-f''(x_0)$ **(D)** $-f'(x_0)$

解:

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(\Delta x)^2$，$\xi_1$ 介于 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间

$f(x_0-\Delta x)=f(x_0)-f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(\Delta x)^2$， ξ_2 介于 x_0 与 $x_0-\Delta x$ 之间

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{2}f''(\xi_1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\right)=f''(x_0)$$

5 . $\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^n}{5})^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^n}{5})^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(\frac{2^n+3^n}{5})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2^x+3^x}{5})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2^x+3^x}{5}}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{5}=\ln 3$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2^n+3^n}{5})^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)}=3$$

6．已知 $f(a)=2$，$f'(a)=3$。求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$．

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)}$

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right)$$

$$=\frac{1}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=\frac{f'(a)}{f(a)}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = e^{\frac{3}{2}}$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=a\neq 0$成立的充要条件是（　　）

(A)　与k无关　　　　**(B)**　$k>1$

(C)　$k>0$　　　　**(D)**　$k\neq 1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{k-1}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{(k-1)\frac{1}{x}}=a\neq 0$$

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 $n(n\geq 2)$ 阶可导, 并且

$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

(1). 当 n 为偶数时，x_0 必为极值点. 若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 x_0 为极大值点；若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 x_0 为极小值点.

(2). 当 n 为奇数时，x_0 不是极值点.

定理 2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，且

$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

(1). 当 n 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(2). 当 n 为偶数时，$(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $(x_0, f(x_0))$ 的拐点.

当 $n=3$ 时，

$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0\Rightarrow\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$$

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}<0\Rightarrow\frac{f''(x)}{x-x_0}<0$$

1．（2017 级期末考试试题）设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$，则（　　）.

A. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

B. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

C. $f(2)$ 不是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

D. $f(2)$ 不是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

解：设 $f(x)=(x-2)^3g(x)$，$g(x)=(x-1)^2(x-3)^4$

$g(2)\neq 0$，　$g(x)=g(2)+g'(2)(x-2)+\cdots$

$f(x)=g(2)(x-2)^3+g'(2)(x-2)^4+\cdots$

则 $f'(2)=f''(2)=0$，　$f'''(2)=6g(2)\neq 0$

答案：C

2．设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$，则（　　）

(A)　$f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B)　$f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C)　$(1, f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点.

(D)　$f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(1, f(1))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点.

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f''(x)=0=f''(1)$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}>0\Rightarrow x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta),f''(x)>0$，

所以$(1,f(1))$不是曲线$f(x)$的拐点．$f'(x)$在$(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$上是单调增加的，

又因为$f'(1)=0$，所以 $x<1$，$f'(x)<0$；$x>1$，$f'(x)>0$．

答案：B

3．设$f(0)=0$，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，则$x=0$是（　　　　）

(A)　驻点非极值点.

(B)　驻点且极小值点.

(C)　驻点且极大值点.

(D)　不可导点.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{x}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0=f'(0)$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2>0\Rightarrow x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta),f(x)>0=f(0)$

答案：B

4. 设$f(x)$在x_0处可导，且$f'(x_0)>0$，则存在$\delta>0$，使得

(   )

(A) $f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$单调上升.

(B) $f(x)>f(x_0)$， $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

(C) $f(x)>f(x_0)$， $x\in(x_0, x_0+\delta)$.

(D) $f(x)<f(x_0)$， $x\in(x_0, x_0+\delta)$.

解：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)>0$

$$\Rightarrow x\in(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)\ ,\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

$$\Rightarrow x\in(x_0, x_0+\delta), f(x)>f(x_0).$$

答案：C

如果$f(x)$在x_0点附近可导且$f'(x)$在x_0点连续

$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)>0\Rightarrow x\in(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta), f'(x)>0$，又因为$f'(x_0)>0\Rightarrow x\in(x_0-\delta, x_0+\delta), f'(x)>0\Rightarrow f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$单调上升.

5.（2013 年期中）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，下列命题正确的是（　B　）

（A）若$\{x_n\}$ 收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛

（B）若$\{x_n\}$ 单调，则$\{f(x_n)\}$收敛

（C）若$\{f(x_n)\}$ 收敛，则$\{x_n\}$收敛

（D）若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛

（B）证：因为$\{x_n\}$ 单调，则$\{f(x_n)\}$单调有界，则$\{f(x_n)\}$收敛.

（A）$x_1=1$ ，$x_2=-\dfrac{1}{2}$ ， $x_3=\dfrac{1}{3}$， $x_4=-\dfrac{1}{4}$， $\cdots$ ，

$$f(x)=\begin{cases}1+\arctan x\,, x\geq 0\\ \arctan x\in,\ x<0\end{cases}$$

（C）$x_n=n$

（D）$x_n=n$

答案：B

6. （2014 年期中）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，$f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)\ (n=1,2,\dots)$，则下列结论正确的是(　　　)

（A）若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　（B）若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

（C）若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　（D）若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

证：$f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-2)^2$

$$f(1)=f(2)-f'(2)+\frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$f'(2)=f(2)-f(1)+\frac{f''(\xi_1)}{2}>0$$

$$u_n=f(n)=f(2)+f'(2)(n-2)+\frac{f''(\xi_n)}{2}(n-2)^2\to+\infty\ (n\to\infty)$$

(A)　$f(x)=-\ln x$，$u_1>u_2$，　$u_n\to-\infty\quad(n\to\infty)$

(B)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$u_1>u_2$，　$u_n\to 0\quad(n\to\infty)$

(C)　$f(x)=x^2$，$u_1<u_2$，　$u_n\to+\infty\quad(n\to\infty)$

答案：D

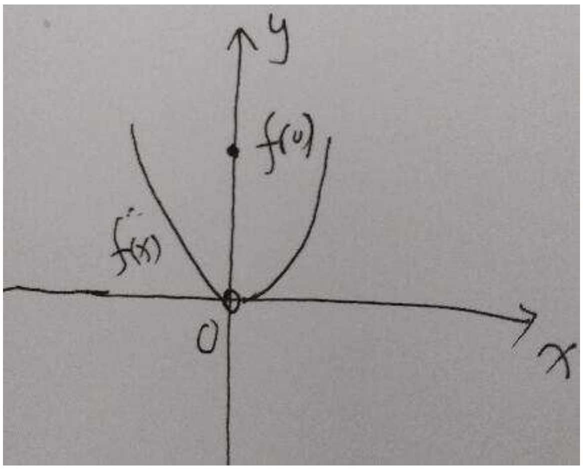
7. 对于定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$，下列命题中正确的是________.

A. 如果当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

B. 如果 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值，则存在 $0<\delta\le 1$，使得 $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调增加，在 $(0,\delta)$ 内单调减少；

C. 如果 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值；

D. 如果 $f(x)$ 为偶函数且可导，则 $f'(0)=0$.



$$f(-x)=f(x)\Rightarrow -f'(-x)=f'(x)\Rightarrow -f'(0)=f'(0)\Rightarrow f'(0=0$$

答案：D

8. 设偶函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0)\neq 0$，则 $x=0$_____.

A. 一定不是 $f(x)$ 的驻点；　　B. 一定不是 $f(x)$ 的极值点；

C. 一定是 $f(x)$ 的极值点；　　D. 不能确定是否为 $f(x)$ 的极值点.

答案：C

9. 证明 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ （$0<a<b$）

证：　要证 $\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}-\ln b+\ln a>0$

令 $f(x)=\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}-\ln x+\ln a$，（$x>a$），$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}-\ln x+\ln a$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x+a-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}>0,$$

所以 $x>a$，$f(x)$单调增加；又因为$f(a)=0$且$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，因此 $x>a$，$f(x)>f(a)=0$．又因为$b>a$，所以 $f(b)>0$，即

$$\frac{b-a}{\sqrt{ab}}-\ln b+\ln a>0\Rightarrow\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$