A 卷

一、选择题（共 45 分，每小题 3 分）

1、设 $f(x)=\dfrac{\tan x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}$，则（ C ）

(A) $x=0$是振荡间断点.　　(B) $x=0$是无穷间断点.

(C) $x=0$是可去间断点.　　(D) $x=0$是跳跃间断点.

解：$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{|x|}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{-x}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{|x|}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

2、$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=$（ A ）

(A) $\dfrac{1}{2}$.　　(B) $-\dfrac{1}{2}$.　　(C) 0.　　(D) ∞.

解：$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

3、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b)=0$，则常数（ A ）

(A) $a=1$，$b=1$.　　(B) $a=1$，$b=-1$.

(C) $a=-1$，$b=1$.　　(D) $a=-1$，$b=-1$.

解：$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0\Rightarrow\ a=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=1$$

4、设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$所确定，则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$（ B ）

(A) $6t+5$.　　(B) $\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$.

(C) $(6t+2)(1+t)^2$.　　(D) $-(6t+2)(1+t)^2$.

解：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(3t+2)(1+t)=3t^2+5t+2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(6t+5)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+t}}\right)=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

5、设函数$y=y(x)$由方程$x^3-ax^2y^2+by^3=0$所确定，$y(1)=1$，$x=1$是$y=y(x)$的驻点，则常数（ C ）

(A) $a=3$，$b=2$.　　(B) $a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{3}{2}$.

(C) $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$.　　(D) $a=-2$，$b=-3$.

解：　由 $y(1)=1\Rightarrow 1-a+b=0$

$$3x^2-2axy^2-2ax^2yy'+3by^2y'=0$$

由$x=1$是$y=y(x)$的驻点$\Rightarrow 3-2a=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$

6、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$，则（ C ）

(A) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

(B) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，但不可导.

(C) $f(x)$ 仅在点 $x=0$ 处可导.

(D) $f(x)$ 处处可导，且 $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$.

解： $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

7、设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有三阶连续导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则（ D ）

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值.

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极小值.

(C) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的一个极大值.

(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

解： $$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$$

$$f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f'''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$=\frac{1}{2}f'''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 $n\,(n\ge 2)$ 阶可导, 并且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(n)}(x_0)\ne 0$, 则

(1). 当 n 为偶数时，x_0 必为极值点. 若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 x_0 为极大值点；若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 x_0 为极小值点.

(2). 当n为奇数时，x_0不是极值点.

定理 2. 设函数$f(x)$在$x=x_0$处n阶可导，且

$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

(1). 当n为奇数时，$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；

(2). 当n为偶数时，$(x_0,f(x_0))$不是曲线$(x_0,f(x_0))$的拐点.

8、设$f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$，则$f^{(2020)}(0)=$（　B　）

(A)　4^{2018}.　　(B)　4^{2019}.　　(C)　4^{2020}.　　(D)　4^{2021}.

解：$f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$

$$f^{(2020)}(x)=\frac{1}{4}\cdot 4^{2020}\cos\left(4x+2020\cdot\frac{\pi}{2}\right)\qquad \left(\cos x\right)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2020)}(0)=4^{2019}$$

9、定积分$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=$（　D　）

(A)　$\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$.　　(B)　$\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$.　　(C)　0.　　(D)　$\dfrac{1}{2}\ln 2$.

解：$\dfrac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{x}{1+x^2}$

$$\int_0^1\frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}(1+x)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$$

10、定积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=$（ D ）

(A) $\frac{1}{3}$.　　(B) $\frac{\pi}{3}$.　　(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.　　(D) $\frac{4}{3}$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x d(\tan x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)d(\tan x)$

$$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

11、定积分$\int_0^1 \arcsin x\,dx=$（ D ）

(A) $\frac{\pi}{3}-1$.　　(B) $1-\frac{\pi}{4}$.　　(C) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}-1$.

解：$\int_0^1 \arcsin x\,dx=x\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=\frac{\pi}{2}-1$$

12、定积分$\int_0^{6\pi}(\sin x+\sin^2 x)\cos^4 x\,dx=$（ D ）

(A) $\frac{3}{2}$.　　(B) $\frac{3\pi}{4}$.　　(C) $\frac{3}{4}$.　　(D) $\frac{3\pi}{8}$.

解：$\int_0^{6\pi}(\sin x+\sin^2 x)\cos^4 x\,dx=3\int_0^{2\pi}(\sin x+\sin^2 x)\cos^4 x\,dx$

令$x=\pi+t$　　$=3\int_{-\pi}^{\pi}(-\sin t+\sin^2 t)\cos^4 t\,dx$

$$=6\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos^4 t\,dt=6\int_0^{\pi}\cos^4 t\,dt-6\int_0^{\pi}\cos^6 t\,dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\,dt$$

$$=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi$$

13、设 D 是由抛物线 $y=x(1-x)\ (0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成的平面图形，则 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V=$（　A　）

(A) $\frac{\pi}{6}$.　　(B) $\frac{\pi}{4}$.　　(C) $\frac{\pi}{3}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

解：

$$V=2\pi\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$$

14、设曲线 $y=y(x)$ 在其上任一点 (x,y) 处的切线斜率是 $-\frac{2x}{y}$（$y\neq 0$ 时），则此曲线是（　C　）

(A) 摆线.　　(B) 抛物线.　　(C) 椭圆.　　(D) 双曲线.

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x}{y}\Rightarrow\ y\mathrm{d}y=-2x\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ \int y\mathrm{d}y=-2\int x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=-2\frac{1}{2}x^2+c\Rightarrow x^2+\frac{1}{2}y^2=c$$

15、(工数) 以下命题中错误的是（　B　）

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

(B) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

如：$\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续且有界，但 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

(C) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(D) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

15、（高数、微积分）

设 $f(x)$ 连续、单调增加，$f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x xf(x-t)\,\mathrm{d}t$，则（　B　）

（A） $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少. （B） $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

（C） $F'(x)\equiv 0$.　　（D） $F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上变号.

解： 令 $x-t=u$

$$F(x)=\int_0^x xf(x-t)\,\mathrm{d}t=-x\int_x^0 f(u)\,\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\lim_{x\to 0}F(x)=0=F(0)$$

$x>0$， $F'(x)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)>0$