第一章　函数，极限与连续

§1.1　集合与函数

§1.1.1 集合及其运算

§1.1.2 实数集与确界存在定理

§1.1.3 映射与函数

§1.1.4 函数的初等性质与运算

§1.1.5 逆映射与反函数

§1.1.6 初等函数与一些重要的非初等函数

习题 1.1（A 组）（B 组）

§1.2　数列极限

§1.2.1 数列极限的概念

§1.2.2 数列极限的性质

§1.2.3 夹挤原理与单调有界收敛定理

习题 1.2（A 组）（B 组）

§1.3　实数理论

§1.3.1 区间套定理

§1.3.2 致密性定理（Bolzano-Weistrass 定理）

§1.3.3 Cauchy 收敛原理

习题 1.3（A 组）（B 组）

第一章　函数，极限与连续

微积分的主要研究对象是以实数为自变量的函数，极限是研究微积分的重要工具和思想方法，连续性是通过极限来描述的函数的一种基本变化性态，连续性也是函数的一种分析性质．函数，极限与连续是本章的基本内容，也是微积分的理论与基础，十分重要．

§1.1　集合与函数

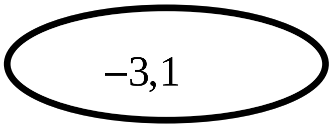
读者在中学已经学过了集合与函数的一些基本知识，为了加深入对函数概念的理解，本节将在集合与映射的基础上，进一步介绍函数的相关性质．

§1.1.1 集合及其运算

集合理论是现代数学的基石．集合是具有某种确定性质的对象的全体，组成集合的对象成为该集合的元素．一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素．用 $a\in A$ 表示 a 是 A 的元素，读作“a 属于 A”，用 $a\notin A$ 表示 a 不是 A 的元素，读作“a 不属于 A”．含有有限个元素的集合称为有限集，含有无穷多个元素的集合称为无限集，不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$．常用的数集有自然数集 $\mathbf{N}$，正整数集 $\mathbf{N}^*$，整数集 $\mathbf{Z}$ 有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$，复数集 $\mathbf{C}$，显然它们都是无限集．

组成集合的元素不仅可以是数，也可以是任何研究对象．例如，调研某班同学的学习情况，可以将该班同学组成一个集合，每个同学就是这个集合的元素．调研某地区人口组成分布，可以将该地区人口构成一个集合，每一个人就是该集合的元素．

集合的表示法一般有三种，分别为列举法，描述法，韦恩图法．列举法是把集合的所有元素一一列举出来，写在一个花括号内．例如方程 $x^2+2x-3=0$ 的解集可以表示为 $\{-3,1\}$．第二种方法是描述法，将集合中元素 x 具有的确定性质 $P(x)$ 指明，表示为 $\{x\,|\,P(x)\}$．例如方程 $x^2+2x-3=0$ 的解集也可以表示为 $\{x\,|\,x^2+2x-3=0\}$，又如空间中与直线 l 异面的直线的全体为 $\{m\,|\,m与l异面\}$．第三种方法是韦恩图法，将集合用图形表示出来，经常用矩形，圆或椭圆表示集合，如图 1-1.



A

图 1-1

在研究集合与函数时，为了叙述方便，我们常会运用两个全称量词.

（1）$\forall$，读作：任意；　　　（2）$\exists$，读作：存在.

下面我们讨论集合间的关系与运算.

设 A,B 是两个集合，若 $\forall x\in A$，均有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”．显然，$A\subseteq A$，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$. 我们规定空集是任何集合的子集.

若 A 是 B 的子集且 B 也是 A 的子集，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$．若 A 是 B 的子集，且 A 与 B 不相等，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\underset{\neq}{\subset}B$.

集合有四种常用的运算关系，包括交集，并集，差集，笛卡尔积.

设 A,B 是两个集合，由属于 A 且属于 B 所有的元素构成的集合称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\bigcap B$，即 $A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A\text{且}x\in B\}$.

由属于 A 或者属于 B 所有的元素构成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\bigcup B$，即 $A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A\text{或}x\in B\}$.

由属于 A 且不属于 B 所有的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\setminus B$，读作“A 挖掉 B”，即 $A\setminus B=\{x\,|\,x\in A\text{且}x\notin B\}$.

两个集合的交，并，差用韦恩图表示为图 1-2

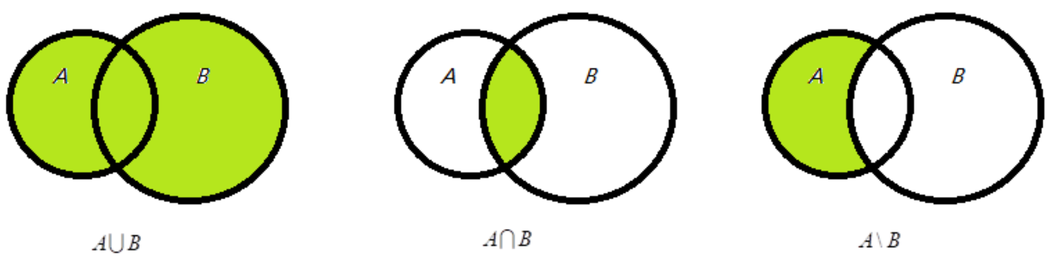


图 1-2

特别地，当 $B\subseteq A$ 时，则称 $A\setminus B$ 为集合 B 在集合 A 中的补集，记作 $\mathrm{C}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$，也就是说补集是差集的特殊情形，例如 $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ 表示无理数集．在微积分里，讨论集合的运算时，经常会

在某一个集合 X 中进行，也全集， 在指明全集 X 的情况下，A 的补集 $X\setminus A$ 也表示为 A^c，显然 $(A^c)^c=A$.

集合的运算法则满足如下规律：设集合 A,B,C 是全集 X 的子集，则

（1）交换律　$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$.

（2）结合律　$A\bigcup(B\bigcup \mathrm{C})=(A\bigcup B)\bigcup \mathrm{C}$，$A\bigcap(B\bigcap \mathrm{C})=(A\bigcap B)\bigcap \mathrm{C}$.

（3）分配律　$A\bigcup(B\bigcap \mathrm{C})=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup \mathrm{C})$，$A\bigcap(B\bigcup \mathrm{C})=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap \mathrm{C})$.

（4）幂等律　$A\bigcup A=A$，$A\bigcap A=A$.

（5）吸收律　$A\bigcup\varnothing=A$，$A\bigcap\varnothing=\varnothing$，

$$A\bigcup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A\Leftrightarrow A\bigcap B=B.$$

（6）对偶律　$(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$，$(A\bigcap B)^c=A^c\bigcup B^c$.

上述结论都可以利用集合相等的定义来验证，即左边集合是右边集合的子集，右边集合也是左边集合的子集，读者可以自己练习，我们以对偶律为例.

证明：　$\forall x\in(A\bigcup B)^c$，则 $x\notin A\bigcup B$，从而 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，即 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$，可得 $x\in A^c\bigcap B^c$，所以 $(A\bigcup B)^c\subseteq A^c\bigcap B^c$.

反之，$\forall x\in A^c\bigcap B^c$，则 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$，从而 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，即 $x\notin A\bigcup B$，则 $x\in(A\bigcup B)^c$，所以 $A^c\bigcap B^c\subseteq(A\bigcup B)^c$.

综上所述，$(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$.

于是 $(A^c\bigcup B^c)^c=(A^c)^c\bigcap(B^c)^c$，即 $(A^c\bigcup B^c)^c=A\bigcap B$，所以 $(A\bigcap B)^c=A^c\bigcup B^c$.　▌

在本节的最后我们讨论集合的笛卡尔积.

设 A,B 是两个集合，由 A 中的任一元素 x 与 B 中的任一元素 y 构成的有序组为 (x,y)，所有这样的有序组构成的集合称为 A 与 B 的笛卡尔积，记作 $A\times B$，即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$，$n$ 个 A 的笛卡尔积 $A\times A\times\cdots\times A$ 也记作 A^n.

例如 $[-1,1]\times[0,2]$ 表示平面中的正方形，又如 $\mathbf{R}^2$ 表示平面直角坐标系，$\mathbf{R}^3$ 表示空间

直角坐标系，$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维 Euclidean（欧几里得）空间，$\mathbf{Q}^2$ 表示平面中的有理点集.

§1.1.2 实数集与确界存在定理

本节首先介绍实数集的一些重要性质.

1.有理运算的封闭性：每一个有理数都可以写成两个整数的商，有理数与有理数的四则运算（加、减、乘、除）仍为有理数.

2.实数运算的封闭性：实数与实数的加、减、乘、除，乘方结果仍为实数，非负实数的开方运算结果仍为实数.

3.实数的有序性：任意两个实数 a,b，$a<b$，$a=b$，$a>b$ 有且只有一个成立.

对任何三个实数 a,b,c，若 $a\leqslant b$，则 $a+c\leqslant b+c$，且当 $c\geqslant 0$ 时，有 $ac\leqslant bc$.

4.有理数集、无理数集在实数集中的稠密性：任意两个实数之间，必存在一个有理数（或无理数），因此任意两个实数之间必存在无穷多个有理数，无穷多个无理数，也就是无穷多个实数.

5.实数集的完备性：每一个实数都可以在数轴上找到对应的点，每一个数轴上的点也都对应一个实数，实数集与数轴上的点一一对应，该性质也称为实数集的连续性.（图 1-3）.

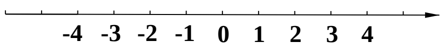


图 1-3

微积分讨论的变量都是实变量，即变量的在实数中取值，在实数集中，区间是使用最多的一类数集，我们有如下记号：

闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；　　开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

半开半闭区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；

无穷区间 $(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，

$$(-\infty,a)=\{x\,|\,x<a\}，(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a\}，(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

除了区间之外，邻域也是在极限理论中常用的概念. 设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$.

称区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，它表示到点 a 距离小于 δ 的实数的全体. 称 $U(a,\delta)\setminus\{a\}$ 为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{\mathrm{o}}{U}(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<0,\text{或}a<x<a+\delta\},$$

有时也称区间$(a-\delta,a)$为点a的左δ邻域，区间$(a,a+\delta)$为点a的右δ邻域.

下面考虑数集的有界性.

定义 1.1（有界性）　设A为非空的实数集.

若$\exists M\in\mathbf{R}$，使得$\forall x\in A$，有$x\leqslant M$，则称A有上界，称M为A的一个上界.

若$\exists m\in\mathbf{R}$，使得$\forall x\in A$，有$x\geqslant m$，则称A有下界，称m为A的一个下界.

若A既有上界又有下界，则称A有界. 容易证明：集合A有界当且仅当$\exists M>0$，使得$\forall x\in A$，有$|x|\leqslant M$.

若集合A不是有界的，则称A无界，即$\forall M>0$，$\exists x\in A$，使得$|x|>M$.

例如，区间$[0,1]$，区间$(-1,1]$为有界的，自然数集$\mathbf{N}$有下界，但无上界，有理数集$\mathbf{Q}$既无上界，也无下界.

例 1.1.1 证明：集合$\{n\sin\frac{n\pi}{2}\mid n\in\mathbf{N}\}$无界.

证明：$\forall M>0$，取$n_M=2[M]+1$，其中$[M]$表示不超过M的最大整数，从而

$$\left|n_M\sin\frac{n_M\pi}{2}\right|=n_M>M,$$

即$\{n\sin\frac{n\pi}{2}\mid n\in\mathbf{N}\}$无界.

显然，若数集A有上界，则其上界不唯一，那么是否存在一个“最小”的上界呢？如果存在，那么这个上界就十分重要，我们首先给出定义.

定义 1.2（确界） 设A是非空实数集. 若A有上界，称A的最小上界为A的上确界. 记为$\sup A$. 若A有下界，称A的最大上界为A的上确界. 记为$\inf A$.

从定义中可以看出，一方面，上确界也是A的上界；另一方面，上确界是最小的上界，即比上确界小的实数都不再是A的上界，那么这个上界就是最小的上界，于是有

$$\xi=\sup A\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\forall x\in A,x\leqslant\xi,\\(2)\forall\varepsilon>0,\exists x\in A,\text{使得}x>\xi-\varepsilon.\end{cases}$$

读者可以自己尝试写出下确界的充要条件.

例 1.1.2　（1）　区间$[0,3]$的上确界为3，下确界为0.

（2）区间$(-1,1)$的上确界为1，下确界为-1.

（3）区间$(0,+\infty)$无上界，其下确界是0.

（4）　数集$\{0,1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{3},\cdots,1-\frac{1}{n},\cdots\}$的上确界是 1，下确界 0.

（5）$E=(0,1)\bigcap \mathbf{Q}^c$的上确界为 1，下确界为 0.

易见，如果数集A有最大值，则最大值必为上确界，反之如果数集A有上确界，却不一定有最大值，因为$\sup A$可能在A中，也可能不在A中，如果$\sup A\in A$，则$\sup A$为A的最大值.

从几何直观上，不难理解确界的存在性，但其严格的证明已经超出了工科同学学习微积分的范畴，在有些院校数学系的数学分析课程里会利用戴德金分割给出证明，有兴趣的同学可以自己查阅相关的教材，本教材不加证明的给出以下的定理，它也是实数系基本定理之一.

定理 1.1（确界存在定理）　有上（下）界的非空实数集必有上（下）确界.

例 1.1.3　已知函数$f(x)$定义域为D，值域为E，若E有界，证明：

$$\sup\{-f(x)\,|\,x\in D\}=-\inf\{f(x)\,|\,x\in D\}.$$

证明：因为值域E有界，根据确界存在定理，$\inf\{f(x)\,|\,x\in D\}$存在，设$\inf\{f(x)\,|\,x\in D\}=a$. 所以

$$\begin{cases}(1)\forall x\in D, f(x)\geqslant a,\\(2)\forall \varepsilon>0,\exists x\in D,使得 f(x)<a+\varepsilon,\end{cases}$$

从而

$$\begin{cases}(1)\forall x\in D,-f(x)\leqslant -a,\\(2)\forall \varepsilon>0,\exists x\in D,使得-f(x)>-a-\varepsilon,\end{cases}$$

由上确界的定义，$\sup\{-f(x)\,|\,x\in D\}=-a$，即

$$\sup\{-f(x)\,|\,x\in D\}=-\inf\{f(x)\,|\,x\in D\}.$$

§1.1.3 映射与函数

定义 1.3　（映射）设X,Y为两个非空集合. 如果按照某种法则f，　对于每个$x\in X$，都

存在唯一的 $y\in Y$ 与之对应， 则称 f 称为从 X 到 Y 的一个映射，记为

$$f\text{：}X\to Y \quad \text{或} \quad f\text{：}x\mapsto y=f(x),\ x\in X\ .$$

y 称为 x 在 f 下的像，x 称为 y 在 f 下的原像．X 称为 f 的定义域， 记为 $D(f)$．若 $A\subseteq X$，称 $\{f(x)\,|\,x\in A\}$ 为 A 在 f 下的像集，记作 $f(A)$．$f(X)$ 称为 f 的值域，也记为 $R(f)$，显然有 $f(X)\subseteq Y$．如果 $B\subseteq Y$，称 $\{x\,|\,f(x)\in B\}$ 为 B 在 f 下的原像集，记作 $f^{-1}(B)$，显然 $f^{-1}(B)\subseteq X$．

例如图 1-4 中， $f(X)=\{p,q,s\}$， $f^{-1}(\{q,r\})=\{c,d\}$．

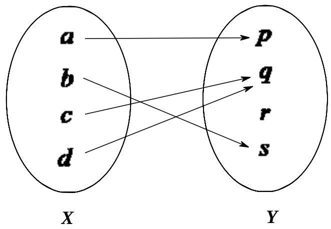


图 1-4

映射有两个基本要素，即定义域和对应法则．如果两个映射 f,g 的定义域相同，且 $\forall x\in D(f)$， $f(x)=g(x)$，则称两个映射相等，记作 $f=g$．

映射的概念十分广泛，在现代数学中，几乎每一个数学分支都可以看到映射的身影．例如微积分中的一元函数，多元函数，向量值函数，线性代数中的线性算子，线性变换，概率统计中的概率密度，泛函分析中的泛函等都是特殊的映射．下面我们看几个具体的例子．

例 1.1.4 记 S 是某个班的学生全体，每个学生都有一个学号，于是每个学生与他的学号之间的对应关系(记为 f)便可以看作 S 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个映射：

$$f:S\to\mathbf{N}.$$

例 1.1.5 设 $A=\mathbf{N}^*,B=\{1,3,5,7,\cdots\}$，令

$$f\text{：}n\mapsto 2n-1,n\in A\text{，}$$

则 f 是一个映射.

例 1.1.6 设 $A=[0,+\infty),B=\mathbf{R}^3$，令

$$f: t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{bmatrix}, t \in A,$$

则 f 是一个映射，在几何上，它表示了是三维空间的一条螺旋线.

例 1.1.7 设 $A=\mathbf{R}^2, B=\mathbf{R}\times\{0\}$，令

$$f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in A,$$

则 f 是一个映射，在几何上，它表示了平面 $\mathbf{R}^2$ 到 x 轴上的投影.

例 1.1.8 设集合 A 非空，且

$$f: x \mapsto x, x \in A,$$

则 f 是一个映射，我们称其为恒同映射，记作 I_A，所以 $I_A(x)=x, x\in A$.

一般地，一个集合到自身的映射在数学中也称为变换.

如果一个映射定义域和值域都是非空的实数集，即得到了函数的概念.

定义 1.4 （**函数**）设 X,Y 为两个非空实数集，称映射 $f: X \to Y$ 为定义在 X 上一个一元函数，记为 $y=f(x)$. x 称为 f 的自变量，y 称为 f 的因变量，X 称为 f 的定义域，常用 $D(f)$ 表示，$f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$ 称为值域，常用 $R(f)$ 表示.

例如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\ln(3x-1)$ 的定义域 $D(f)=(\frac{1}{3},1]$. 若定义域是数轴上的区间，则称为定义区间，定义域有时需要考虑实际意义，例如若自变量是时间，则其应是非负实数，不加说明时，我们考虑的都是使得函数有意义的所有自变量的集合，也称为自然定义域.

函数的实质就是描述自变量与因变量之间的对应关系. 我们只要知道对应规则 f 以及定义域 $D(f)$，整个函数也就确定了，因此有时也简称为函数 f. 这里应当注意，一般情况下 $f(x)$ 表示一个函数，但有时 $f(x)$ 也指函数 f 在点 x 处的函数值，需要从上下文中加以区别. 函数的表示方法主要有三种：列表法，图示法和解析法. 列表法就是将自变量与因变量的关系列成表格，对应关系从表格中可以直接得到. 图示法是用图形的方法表示对应关系，例如气象站用仪表记录下的温度曲线表示气温随时间变化的函数关系，就是图示法. 在

微积分中我们更多的采用解析法，即用 $y=f(x)$ 的形式表示出函数间的对应关系，$y=f(x)$ 也称为函数的解析式，称点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D(f)\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像，一般图像是平面中的一条曲线（图 1-5）.

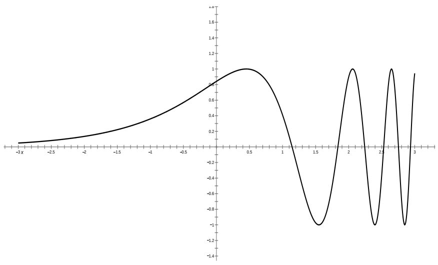


图 1−5

在中学中，我们已经学习过以下五类函数.

（1）多项式函数：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ，$x\in\mathbb{R}$ ，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为 $n+1$ 个常数，称为多项式的系数.

（2）幂函数：$f(x)=x^{\alpha}$，其中 α 为常数.（当 α 是正整数时，定义域是 $\mathbf{R}$，当 α 是负整数时，定义域是 $\mathbf{R}\setminus\{0\}$，α 也可以是分数，甚至是无理数，定义域要具体情况具体分析）.

（3）指数函数：$f(x)=a^x$，$x\in\mathbf{R}$. 其中底数 $a>0$，且 $a\neq1$.

（4）对数函数：$f(x)=\log_a x$，$x\in(0,+\infty)$， 其中底数 $a>0$，且 $a\neq1$.

当底数 $a=\mathrm{e}$ 时表示为：$f(x)=\ln x$，称为自然对数，

当底数 $a=10$ 时表示为：$f(x)=\lg x$，称为常用对数.

（5）三角函数： 正弦函数 $f(x)=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$.

余弦函数 $f(x)=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$.

正切函数 $f(x)=\tan x$，$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$.

余切函数 $f(x)=\cot x$，$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$.

正割函数 $f(x)=\sec x$，$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$.

余割函数 $f(x)=\csc x$，$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$.

下面我们再看几个常用的函数.

例 1.1.9 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 其图像为图 1-6

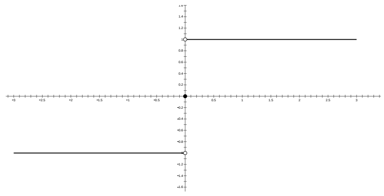


图 1−6

例 1.1.10 取整函数 $y=[x]$. 当 $x\in[n,n+1)$，$[x]=n$， 其中 $n\in\mathbf{Z}$. 其图象(图 1−7)为阶梯状的.

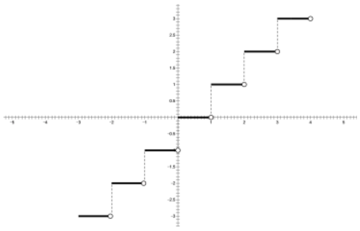


图 1−7

取整函数的符号常与方括号容易产生混淆，一般运用取整函数时应结合上下文或给出说明. 像例 1.1.9， 例 1.1.10 中这样的分段表达的函数称为分段函数.

例 1.1.11 Dirichlet（狄利克雷）函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$

Dirichlet 函数既“简单”又“复杂”，它的值域中只有两个数： 0 和 1， 但我们却无法精确画出它的图像. Dirichlet 函数在微积分中十分重要,很多重要的反例都与它有关.

当函数 f 的定义域为 $\mathbf{N}^*$ 时，函数 $y=f(n),n\in\mathbf{N}^*$ 也称为数列，记作 $a_n=f(n)$，例如等差数列 $a_n=2n-3$，等比数列 $a_n=(\frac{1}{2})^n$，斐波那契数列 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ 等.

§1.1.4 函数的初等性质与运算

下面我们介绍函数的一些初等性质.

（1）单调性

定义 1.5（单调性） 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，且 $I \subseteq D(f)$，若 $\forall x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，均有 $f(x_1) < f(x_2)$（$f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 I 上单调递增（单调递减）.

若函数 $f(x)$ 在 $D(f)$ 单调递增或单调递减，也称 $f(x)$ 是 $D(f)$ 上的单调函数. 例如函数 $y = \mathrm{e}^x$ 与 $y = x^3$ 都在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 函数 $y = \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数，其在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减.

（2）奇偶性

定义 1.6（奇偶性） 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于坐标原点对称. 若 $\forall x \in D(f)$，$f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 若 $\forall x \in D(f)$，$f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如函数 $y = \sec x$，$y = x^{\frac{4}{3}}$ 与 Dirichlet 函数 $y = D(x)$ 均为偶函数，而函数 $y = \tan x$，$y = x^3$ 是奇函数.

中学就讨论过，偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

（3）周期性

定义 1.7（周期性） 设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$，如果存在正数 T，使得任一的 $\forall x \in D(f)$，有 $x \pm T \in D(f)$ 且 $f(x+T) = f(x)$，则称 f 是以 T 为周期的周期函数.

例如，$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

例 1.1.12 函数 $y = x - [x]$ 是以 1 为周期的周期函数.

例 1.1.13 Dirichlet 函数 $y = D(x)$ 是周期函数.

解：因为对任意的正有理数 r，$\forall x \in \mathbf{R}$，$D(x+r) = D(x)$ 成立. 因此 $D(x)$ 是周期函数， 每个正有理数 r 都是它的周期.

若函数 $f(x)$ 是以正数 T 为周期的周期函数，则每个 $nT(n \in \mathbf{N}^*)$ 都是 $f(x)$ 是周期. 通常所说的函数的周期是特指函数的最小正周期. 例如函数 $y = \tan x$ 与 $y = \cot x$ 的最小正周期是 π. 但并不是每个周期函数都有最小正周期，例如 Dirichlet 函数 $y = D(x)$ 就没有最小正周期.

（4）有界性

前面我们介绍了集合的有界性，函数的有界性可以用集合的有界性来定义.

一般地，函数 $f:A\to B$ 有上（下）界是指其值域 $f(A)$ 有上（下）界. 函数 $f:A\to B$ 有界是指其值域 $f(A)$ 有界， 即 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in A$，均有 $|f(x)|\leqslant M$.

例如函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都在 $\mathbf{R}$ 上有界，但 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上无界.

例 1.1.14 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 有下界，无上界， 在 $(1,+\infty)$ 上有界.

前面讲过几类基本的函数后，怎样得到更为复杂的函数呢？这就需要讨论函数的运算. 主要包括函数的四则运算与复合运算.

（1）设两个函数 $f(x),g(x)$ 的定义域的交集为 D，且 D 非空. 在 D 上可以定义其和函数 $f+g$，差函数 $f-g$，积函数 $f\cdot g$ 以及商函数 $\dfrac{f}{g}$，其定义如下：

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\ x\in D,$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in D,$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ x\in D\ （g(x)\neq 0）.$$

（2）若函数 $y=f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 与函数 $u=g(x)$ 的值域 $R(g)$ 交集非空，即 $D(f)\bigcap R(g)\neq\varnothing$，则可以定义 f 与 g 的复合函数 $f\circ g$：

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

复合函数 $f\circ g$ 的自变量为 x，因变量为 y，中间变量为 u . $D(f)\bigcap R(g)$ 为中间变量为 u 的取值集合，对应到 g 的原像集 $g^{-1}(D(f)\bigcap R(g))$ 为 x 的取值集合，对应到 f 的像集 $f(D(f)\bigcap R(g))$ 为 y 的取值集合，从而复合函数 $f\circ g$ 的定义域为 $g^{-1}(D(f)\bigcap R(g))$，值域为 $f(D(f)\bigcap R(g))$.

例 1.1.15 函数 $y=\sin\mathrm{e}^x$ 为正弦函数 $y=\sin u$ 与指数函数 $u=\mathrm{e}^x$ 的复合函数.

例 1.1.16 函数 $y=|x|$ 为幂函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 的复合函数.

例 1.1.17 函数 $y=2^{\cos\sqrt{1+x^2}}$ 是由指数函数 $y=2^u$，余弦函数 $u=\cos v$，幂函数 $v=\sqrt{w}$，一次函数 $w=1+z$，二次函数 $z=x^2$ 构成的复合函数.

§1.1.5 逆映射与反函数

根据映射 $f:X\to Y$ 的定义，每个 $x\in X$，它在 Y 中的像 y 是唯一的，但每一个像 y 在 X 中的原像却不一定唯一，如果原像是唯一的，我们称 f 为单射. 另一方面，每个 $y\in Y$ 在 X 中也不一定存在原像，如果存在原像，我们称 f 为满射. 下面我们讨论这几类特殊的映射.

定义 1.8（单射，满射，一一映射） 设 X,Y 为两个非空集合，$f:X\to Y$ 为一个映射.

若 $\forall x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为单射；若 $\forall y\in Y$，存在唯一的 $x\in X$，使得 $y=f(x)$，则称 f 为满射；既是单射又是满射的映射称为一一映射.

从图 1-8 可知，单射不一定是满射，满射也不一定是单射，$f:X\to Y$ 是满射当且仅当 $f(X)=Y$.

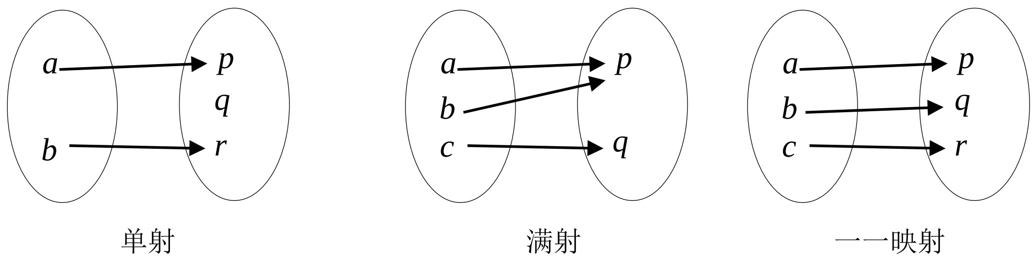


图 1-8

若 $f:X\to Y$ 是一一映射，那么将对应关系反过来从 Y 到 X 也构成一个一一映射，我们把这个映射称为 f 的逆映射，记作 $f^{-1}:Y\to X$，也就是说 $y=f(x)$ 当且仅当 $x=f^{-1}(y)$.

例 1.1.18 试构造一个从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一一映射.

解 令

$$f(n)=\begin{cases}0, & n=0,\\ k, & n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\\ -k & n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$$

则 f 是从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个一一映射.

例 1.1.19 试构造一个从 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一一映射.

解　令

$$f(n)=\begin{cases}0, & x=\dfrac{1}{2},\\ 1, & x=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{n-2}, & x=\dfrac{1}{n},n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 4,\\ x, & \text{其他的}x\in(0,1).\end{cases}$$

则 f 是从 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一一映射.

定义 1.9（反函数） 若函数 $f:X\to Y$ 是一一映射，称其逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 为 f 的反函数.

若函数 $y=f(x)$ 具有反函数，则其反函数为 $x=f^{-1}(y)$. 在 $y=f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量. 在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是因变量. 函数 f 与 f^{-1} 的定义域与值域是互换的. 在同一个坐标系 xOy 内，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示的是同一条曲线，具有相同的图像.

在微积分中，反函数的使用习惯与中学有所不同. 中学讲解反函数时需要将 x 与 y 互换，得到的结论为：在同一个坐标系 xOy 内，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 从本质上看，函数研究的是对应关系， 哪一个变量作为自变量并不十分重要. 在微积分中，后续讲解反函数求导公式时，x 与 y 不互换有其自身的优势.

在本教材中当函数与反函数同时出现时， 我们沿用微积分中的习惯，x 与 y 不进行互换，单独出现某一个函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 时，我们仍使用 x 作自变量，y 作因变量.

当函数 f 单调递增（单调递减）时，$\forall y\in R(f)$，恰有一个 $x\in D(f)$ 使得 $f(x)=y$，所以 f 的反函数 f^{-1} 存在，且 f^{-1} 也是单调递增（单调递减）的. 例如指数函数 $y=a^x$ 与对

数函数 $x=\log_a y$ 具有相同的单调性.

需要注意的是， 当函数 f 具有反函数时， f 不一定是单调函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbf{Q}, \\ -x, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}. \end{cases}$$

显然这个函数不是单调函数， 它的图像也无法明确画出来. 然而， $f(x)$ 有反函数且 $f^{-1}(x)=f(x)$.

下面介绍一类重要的反函数，即反三角函数.

（1）反正弦函数：称 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数为反正弦函数，记作

$x=\arcsin y, y\in[-1,1]$.

（2）反余弦函数：称 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$ 的反函数为反余弦函数，记作

$x=\arccos y, y\in[-1,1]$.

（3）反正切函数：称 $y=\tan x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数为反正切函数，记作

$x=\arctan y, y\in(-\infty,+\infty)$.

（4）反余切函数：称 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$ 的反函数为反余切函数，记作

$x=\operatorname{arc}\cot y, y\in(-\infty,+\infty)$.

反三角函数有如下性质：

（1）反正弦函数 $f(x)=\arcsin x$，定义域为 $[-1,1]$， 值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. $f(x)=\arcsin x$ 是奇函数，也是增函数.

（2）反余弦函数 $f(x)=\arccos x$， 定义域为 $[-1,1]$， 值域为 $[0,\pi]$. $f(x)=\arccos x$ 是减函数，既不是奇函数也不是偶函数.

（3）反正切函数 $f(x)=\arctan x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. $f(x)=\arctan x$ 是奇函数，也是增函数，后面章节还会讲到曲线 $f(x)=\arctan x$ 具有两条水平渐近线.

（4）反余切函数 $f(x)=\operatorname{arc}\cot x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$ ，值域为 $(0,\pi)$.

$f(x)=\operatorname{arc}\cot x$ 是减函数，既不是奇函数也不是偶函数.

反三角函数的图像如下图图 1-9.

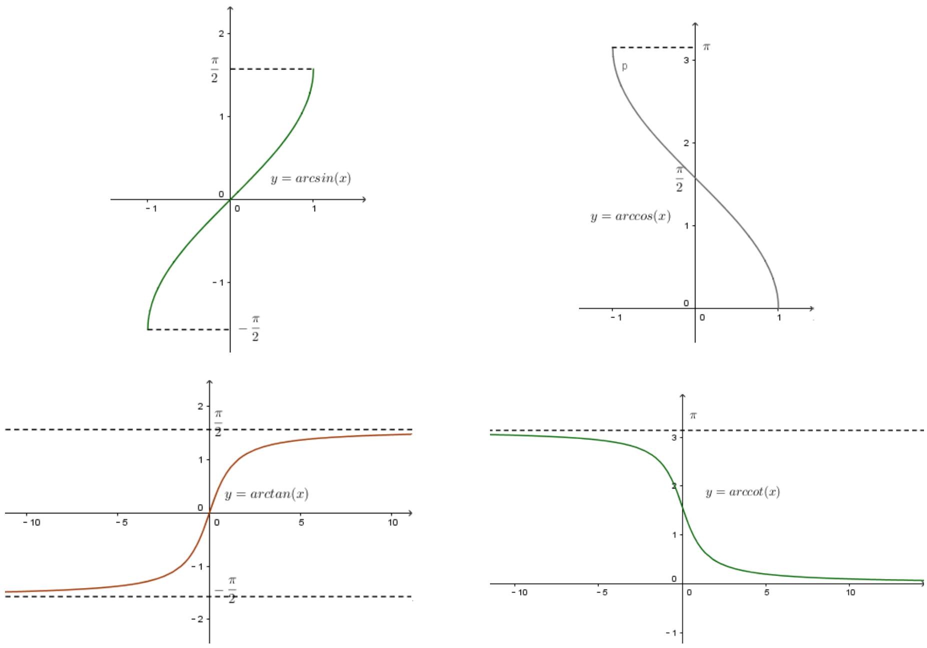


图 1-9

例 1. 1. 20 证明： $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证明：令 $\arccos x=t$ ，则 $\cos t=x, t\in[0,\pi]$，从而 $\sin(\dfrac{\pi}{2}-t)=x$ 且 $\dfrac{\pi}{2}-t\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，所以 $\dfrac{\pi}{2}-t=\arcsin x$ ，于是 $\dfrac{\pi}{2}-\arccos x=\arcsin x$ ，即 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

类似还可以证明： $\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\dfrac{\pi}{2}$ ， $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ ，

$\operatorname{arc}\cot(-x)=\pi-\operatorname{arc}\cot x$ 等.

§1. 1. 6 初等函数与一些重要的非初等函数

定义 1. 9（基本初等函数） 多项式函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数统称为基本初等函数.

定义 1. 10（初等函数） 由基本初等函数经过有限次的四则运算与复合运算得到的函数称为初等函数.

每个初等函数都有一个自然定义域.

例 1. 1. 21 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}\cdot 2^x$ ， 则其自然定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

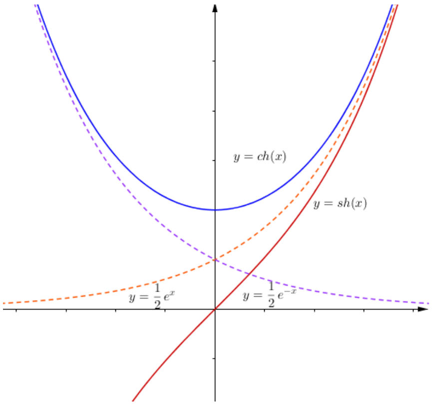
在工程领域有一类被广泛使用的函数，它们是由指数函数构成的初等函数，就是所谓的双曲函数， 主要包括：

双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$，

双曲余弦 $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$，

双曲正切 $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in (-\infty, +\infty)$，

它们的图像如图 1-10 所示.



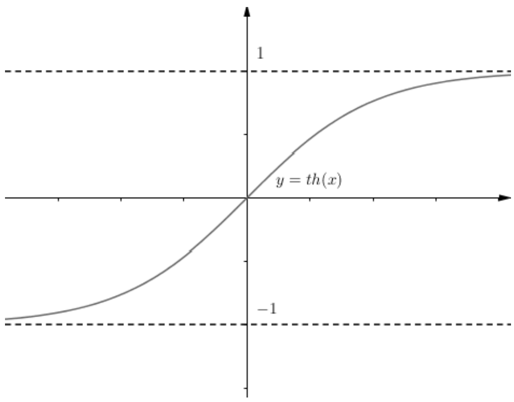


图 1-10

双曲余弦函数的图像也称为悬链线，它可以由后续要讲的微分方程推出，在建筑、桥梁领域已广泛使用，例如吊桥悬锁的形状就是悬链线.

双曲函数有许多与三角函数类似的恒等式，请读者证明：

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y，\quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y，$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1，\quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x，\quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x，\quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

双曲正弦函数的反函数称为反双曲正弦函数，记作 $y = \operatorname{arsh} x$． 从而 $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$， 于是 $(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$，解得 $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$，从而反双曲正弦的表达式为 $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

类似地，反双曲余弦函数的表达式为 $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), x \in [1, +\infty)$ ，反双曲正切

的表达式为$\operatorname{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1)$.

下面介绍一些常用的、重要的非初等函数.

（1）隐函数

函数 $y=f(x)$ 的解析式将 y 随 x 的变化关系显示的表达出来，我们也称这样的函数为显函数. 有时，因变量 y 随自变量 x 的变化关系无法用显示的表达式表示出来，例如在方程 $x^5+x^3y+e^y=1$ 中，给定 $x=1$，得到 $y+e^y=0$，因为 $y+e^y$ 关于 y 单调递增，且随着 y 的变化可以取遍 $(-\infty,+\infty)$ 的所有值，从而必存在唯一的 y_1 使得 $y_1+e^{y_1}=0$，这样 $x=1$ 与 $y=y_1$ 就对应起来. 同样的，每给定 x，表达式 $x^5+x^3y+e^y$ 关于 y 单调增加，且随着 y 的变化可以取遍 $(-\infty,+\infty)$ 的所有值， 则必存在唯一的 y 使得 $x^5+x^3y+e^y=1$，这样就确定了一个函数关系 $y=y(x)$，但是其解析式无法得到，我们称这样的函数关系为隐函数.

（2）参数方程确定的函数

自变量 x 与因变量 y 的对应关系由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases} t\in I$ 给出， 其中 $x=\varphi(t)$ 在 I 上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，这样代入第二个表达式就确定了 y 是 x 的函数 $y=\psi\circ\varphi^{-1}(x)$. 有的参数方程易于消去参数 t 而化为显函数，然而有的参数方程却得不到其显函数的形式，比方下面的例子.

例 1.1.22（旋轮线）设半径为 a 的动圆在 x 轴无滑动的滚动，圆周上一定点的轨迹称为旋轮线. 旋轮线又称摆线，也称最速下降曲线，它是著名的数学家 John Bernoulli（约翰·伯努利）提出的公开问题的解，它开启了数学家们对变分法的研究.

用中学三角函数的知识容易推出该曲线的参数方程，表达式为$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ 其中常数 $a>0$，t 为参数，它的图像如图 1-11.

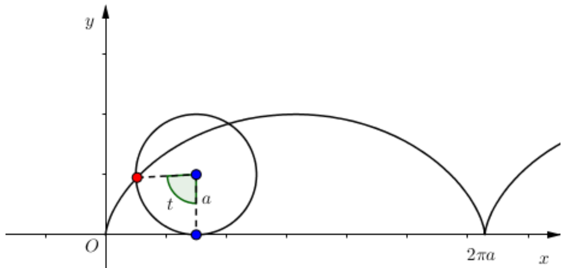


图 1-11

最速下降曲线在建筑学中已有广泛的应用，例如故宫大殿的屋檐就是按照最速下降曲线来设计的.

习题 1．1

（A 组）

1．对于非空实数集 A，$\sup A$ 与 $\max A$ 有什么联系与区别？

2．用 ε 语言叙述：“a 不是数集 A 的上确界”.

3．求下列数集的确界.

（1）有限个实数构成的集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$；

（2）$\{x \mid x \in \mathbf{Q}, x^2 < 2\}$；

（3）$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - 3 < 0\}$；

（4）$\{x_n \mid x_n = [1 + (-1)^n]\dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\}$.

4．下列各组中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否为同一函数？并说明理由.

（1）$f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$；

（2）$f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}, g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$；

（3）$f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$.

5．求下列函数的定义域.

（1）$y = \sqrt{x^2 - 4x - 5} + \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$；　　（2）$y = \lg \tan x$；

（3）$y = \arccos(\sin x - \cos x)$；　　（4）$y = \cot(\arcsin x)$.

6．设函数 $f(x) = \dfrac{2-3x}{1+x}$，求 $f(2+\dfrac{1}{x})$，$f(f(x))$ 的表达式.

7．设函数 $f(x) = 2^x, g(x) = x\ln x$，求 $f \circ g$ 以及 $g \circ f$.

8．已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ 求 $f \circ g$ 以及 $g \circ f$.

9．作出下列函数的图像．

（1） $y=x^{\frac{3}{2}}$；　（2） $y=\cos x-|\cos x|$；　（3） $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$；

（4） $y=\arcsin|x-1|$；　（5） $y=\ln(2-x)$；　(6) $y=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0 \\ 2^{|x-1|}, & x<0 \end{cases}$

10．判断下列函数的奇偶性．

（1） $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　（2） $y=x\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$；

（3）黎曼函数 $R(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},\text{其中}m,n\in\mathbf{Z},m\text{与}n\text{互质},n>0, \\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}. \end{cases}$

11．下列哪些函数是周期函数？如果是，则求出其最小正周期．

（1） $y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$；　（2） $y=|\tan x|$；

（3） $y=x\sin x$；　（4） $y=|\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}|$．

12．设函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ 对称，其中 $a\neq b$，证明：$f(x)$ 是周期函数．

13．求下列函数的反函数．

（1） $y=\ln(x-1)+2$；　（2） $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$；

（3） $y=1+\cos^3 x, x\in[0,\pi]$；　（4） $y=\sin x, x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$；

（5） $y=\begin{cases} 1-2x^2, & x<-1, \\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2, \\ 12x-16, & x>2. \end{cases}$

14. 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 都是一一映射，证明：$g\circ f:X\to Z$ 也是一一映射，并且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

(B 组)

1．设 A,B 均为非空有界数集，且 $A\cap B$ 非空，证明：

（1） $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$；　（2） $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$；

（3） $\inf(A\cap B)\geqslant\max\{\inf A,\inf B\}$；　（4） $\sup(A\cap B)\leqslant\min\{\sup A,\sup B\}$．

2．设 A,B 均为非空有界数集，定义 $A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$，$AB=\{xy\mid x\in A,y\in B\}$.

证明：（1）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；（2）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；

（3）当 $A,B\subseteq\mathbf{R}_+$ 时，有 $\inf AB=\inf A\inf B$，$\sup AB=\sup A\sup B$.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称．证明：$f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

4．证明：$y=\sin|x|$，$y=\sin x^2$ 不是周期函数.

5．设函数 $f(x)$ 为奇函数，且存在反函数，证明：$f^{-1}(x)$ 也为奇函数.

6．证明下列恒等式：

（1）$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$；（2）$\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y=2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2}\mathrm{ch}\dfrac{x-y}{2}$.

（3）$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$；　　（4）$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$.

7．设 $a,b\in\mathbf{R}$．证明：$\max\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$，$\min\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x-\dfrac{1}{x})$ 的表达式.

9. 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$ 的表达式.

§1.2　数列极限

数列极限深入地研究了变量间的变化关系，是微积分的重要工具和思想方法. 本节我们介绍数列极限的定义，数列极限的性质，夹挤原理与单调有界收敛定理.

§1.2.1 数列极限的概念

在上一节我们已经讨论过，数列可以看作定义在正整数集上的函数，也就是说每一个正整数 n，都有一个确定的函数值 $a_n=f(n)$. 以正整数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 为下标的一列实数按照下标从小到大的顺序排成一列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

称为一个实数列，记为 $\{a_n\}$，a_n 称为数列的第 n 项或通项．微积分中讨论的数列都约定为

具有无穷多项的数列，不讨论有限项的数列.

我们来看几个具体的例子：

（1）$\{\frac{1}{n}\}$　（2）$\{\frac{1}{2^n}\}$　（3）$\{\frac{\sin n}{n}\}$　（4）$\{(-1)^n\}$　（5）$\{2n-3\}$.

考察上面几个数列的例子可以发现，当数列的下标n由小变大时，几个数列呈现出不同的变化状态：n越来越大时，数列（1），数列（2），数列（3）的项会和实数0“要多接近可以有多接近”，只要下标n充分的大. 以数列（1）为例，如果希望$|\frac{1}{n}-0|<\frac{1}{10^6}$，只要$n>10^6$，也就是说随着下标$n$的增大，$\frac{1}{n}$和实数$0$的距离要多小可以有多小.

数列$\{a_n\}$中的项和某一个实数A的距离随着下标n的增大，呈现出“要多小可以有多小”的变化趋势，我们称为数列$\{a_n\}$无限趋近于A.

值得注意的是，数列$\{a_n\}$无限趋近于A，并不意味着$\{a_n\}$是单调趋近于A的，例如上面的数列（3），$\{\frac{\sin n}{n}\}$是“摆动的”趋于实数0.

定义 1.11（数列极限的描述性定义）$\{a_n\}$为一数列，A为一实数，若随着n的增大，a_n无限趋近于A，则称$\{a_n\}$的极限为A，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$或$a_n\to A\,(n\to\infty)$.

数列$\{a_n\}$存在极限，我们也称$\{a_n\}$收敛，否则称$\{a_n\}$发散.

数列（4）$\{(-1)^n\}$中，虽然有无穷多项都取到了1和-1，但随着下标n的增大，它的值没有和某一个实数保持“要多近有多近”的趋势， 第$2n-1$项取到-1，第$2n$项就变成了1，因此其不存在极限，也就是说数列$\{(-1)^n\}$发散.

数列（5）中，$2n-3$随着下标n的不断增大，其值要多大可以有多大，虽然它不是无限趋近某一个实数，但也呈现出了一定的变化趋势，这样的数列我们称之为“无穷大量”，在后面几节再讨论.

极限思想在早在我国古代就已产生. 三国时期魏国数学家刘徽（约公元 225-295 年）用“割圆术”求圆周率π，实际就是将单位圆的周长看作它的各内接正多边形周长所构成的数列当边数无限增大时的极限，也就是说用内接正六边形周长，内接正十二边形周长，内接正二十四边形周长，……，来近似圆的周长（如图 1-12）. 刘徽说：“割之弥细，所失弥小，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，这正是极限思想的萌芽. 刘徽得到的圆周率π的近似值为3.14.

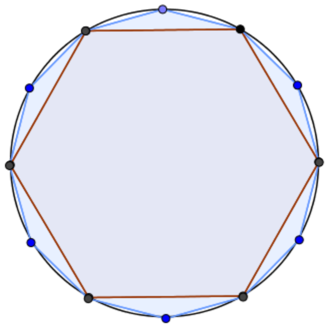


图 1-12

除刘徽外，我国著名的数学家祖冲之（公元 429-500 年）也曾研究过圆周率 π. 祖冲之算出圆周率 π 的真值在 3.1415926 和 3.1415927 之间，相当于精确到小数第 7 位，简化成 3.1415926，祖冲之因此入选世界纪录协会，他是世界第一位将圆周率值计算到小数第 7 位的科学家. 祖冲之还给出圆周率 π 的两个分数形式：$\dfrac{22}{7}$（约率）和 $\dfrac{355}{113}$（密率），其中密率精确到小数第 7 位. 祖冲之对圆周率数值的精确推算值，对于中国乃至世界是一个重大贡献，后人将“约率”用他的名字命名为“祖冲之圆周率”，简称“祖率”.

极限的概念如果仅仅停留在描述性阶段是非常不够的. 因为上述的数列较简单，容易通过观察看出数列的变化发展趋势，并求出极限. 但是遇到复杂的数列就无能为力了，例如 $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$，用描述性定义很难判断它是否存在极限. 在 Newton（牛顿）和 Leibniz（莱布尼茨）创立微积分的时候，人们对极限的概念仍然是模糊不清的，以至于微积分中出现的很多问题不能给出合理的解释，因此微积分常受到人们的攻击与怀疑. 经过众多数学家百折不挠的努力，直到十九世纪下半叶，由数学家 Weistrass 给出了精确定义，使微积分成为了一门严密的数学分支.

在描述性定义中，随着 n 的增大，a_n 无限趋近于 A 表示的意思是的 a_n 和 A 的距离“要多小可以有多小”，也就是说，任意给定一个正数 ε，当 n 充分大后，a_n 充分靠后的项与 A 距离都可以小于预先给定的正数 ε，即 $|a_n-A|<\varepsilon$，于是我们从极限的描述性定义，提炼出极限的精确定义.

定义 1.12 （数列极限的精确定义） $\{a_n\}$ 为一数列，A 为一实数. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，使得当 $n>N$ 时，均有 $|a_n-A|<\varepsilon$，则称 $\{a_n\}$ 的极限为 A.

定义 1.12 也称为极限的 $\varepsilon-N$ 定义. 对这个定义我们再做几点说明：

（1）关于ε. 这里的ε既有确定性，也有任意性. 任意$\varepsilon>0$，在给定之前是任意的，给哪一个正数都可以，但给定之后就是一个固定的数，我们看是否存在满足条件的正整数N时，ε是固定的，不变的. 如果想取的再小一点，那就下次给定的时候取的小一点. 我们要描述的是a_n和A的距离“要多小可以有多小”，所以只需要对较小的正数ε讨论即可.

（2）关于N. 事先给定一个正数ε，存在一个正整数N，它之后的项对应的值与A的距离小于ε，不难看出这里的N的取法不是唯一的，若有一个正整数N是满足定义的，那么比这个N大的正整数也都满足定义，从而N与ε之间不构成函数关系. 其次，正数ε每次给的不同，存在的正整数N也会发生变化，通常N会随着ε的变化而变化，常用N_ε表示它们的依赖关系. 在下文中会在不同的场合遇到这种表示方法，都表示依赖关系.

（3）“当$n>N$时，均有$|a_n-A|<\varepsilon$”，表示N之后的项都满足$|a_n-A|<\varepsilon$，不能说有“无穷多项均满足均有$|a_n-A|<\varepsilon$”，这两种表述显然是不等价的，前文提到的数列（4）就是很好的反例.

（4）$|a_n-A|<\varepsilon$也可以用邻域的语言写为$a_n\in U(A,\varepsilon)$. 用邻域的写法容易看出其几何意义. 事实上，数列$\{a_n\}$就是数轴上的一列点，几何上也称$\{a_n\}$为点列，任意$\varepsilon>0$，就是以A为中心，ε为半径画一个小区间，点列$\{a_n\}$中第$N+1$个点起，之后所有的点都落在小区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内，也就是说在开区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$之外的点至多有有限个.

（5）用定义证明$\{a_n\}$的极限为A，不能通过求极限来说明，应当用定义 1.12 去证明，具体说来就是任意$\varepsilon>0$，去寻找一正整数N，要求N之后的项都满足$|a_n-A|<\varepsilon$，把满足这个条件的N找到了，证明也就结束了. 用定义证明极限需要对不等式较为熟悉.

我们看几个具体的例题.

例 1.2.1　设常数q满足$0<|q|<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，要使$|q^n-0|<\varepsilon$，只需$n>\log_{|q|}\varepsilon$. 取$N=[|\log_{|q|}\varepsilon|]+1$，于是当$n>N$时，有$n>\log_{|q|}\varepsilon$，从而有$|q^n-0|<\varepsilon$，由极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

例 1.2.2　设$a_n=\dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

证明：因为$|a_n-2|=\dfrac{n+8}{n^2-3}$，所以当$n\geqslant 8$时，有

$$|a_n-2|=\frac{n+8}{\frac{1}{2}n^2+(\frac{1}{2}n^2-3)}\leqslant\frac{2n}{\frac{1}{2}n^2}=\frac{4}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$，取$N=\max\{8,\ [\frac{4}{\varepsilon}]+1\}$，当$n>N$时， $|a_n-2|\leqslant\frac{4}{n}<\varepsilon$，由极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

例 1.2.3　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明：记$a_n=\sqrt[n]{n}-1$. 当$n\geqslant 2$时，

$$n=(1+a_n)^n=1+C_n^1a_n+C_n^2a_n^2+\cdots+C_n^na_n^n$$
$$\geqslant\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2,$$

从而$0<a_n\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$.

$\forall\varepsilon>0$ ，要使$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，只需$\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$，只需$n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$.

取$N=\max\{2,[\frac{2}{\varepsilon^2}+1]+1\}$， 即$N=[\frac{2}{\varepsilon^2}]+2$，于是当$n>N$时，有$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，由极限定义得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 1.2.4 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\mathrm{e}^A$；

（2）若$a_n>0,\ (n=1,2,\cdots)$，且$A>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln A$；

（3）利用（1）与（2）的结论，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$.

证明：(1) $\forall\varepsilon>0$，要使$|\mathrm{e}^{a_n}-\mathrm{e}^A|<\varepsilon$，只需$|\mathrm{e}^{a_n-A}-1|<\varepsilon\mathrm{e}^{-A}$，只需

$$1-\varepsilon\mathrm{e}^{-A}<\mathrm{e}^{a_n-A}<1+\varepsilon\mathrm{e}^{-A},$$

只需

$$\ln(1-\varepsilon\mathrm{e}^{-A})<a_n-A<\ln(1+\varepsilon\mathrm{e}^{-A}).$$

不妨设$\varepsilon<\mathrm{e}^A$，令$\delta=\min\{-\ln(1-\varepsilon\mathrm{e}^{-A}),\ln(1+\varepsilon\mathrm{e}^{-A})\}$， 从而$\delta>0$. 因为

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，所以对上述的正数$\varepsilon$，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，使得当$n > N$时，有$|a_n - A| < \delta$. 于是当$n > N$时，有$|\mathrm{e}^{a_n} - \mathrm{e}^A| < \varepsilon$，由极限定义得$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a_n} = \mathrm{e}^A$.

（2）$\forall \varepsilon > 0$，要使$|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$，只需

$$-\varepsilon < \ln \frac{a_n}{A} < \varepsilon,$$

只需

$$A(\mathrm{e}^{-\varepsilon} - 1) < a_n - A < A(\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1).$$

令$\delta = \min\{A(1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon}), A(\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1)\}$，显然$\delta > 0$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，故$\exists N \in \mathbf{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，有$|a_n - A| < \delta$. 于是当$n > N$时，有$|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$. 由极限定义得$\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln A$.

例 1.2.5 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

解：由例 1.2.3 知，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 再由例 1.2.4（2）得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \ln 1,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

例 1.2.6　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

证明：因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，由极限定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in \mathbf{N}^*$，使得当$n > N_1$时，有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，故对上述的$\varepsilon > 0$，$\exists N_2 \in \mathbf{N}^*$，使得当$n > N_2$时，有

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，当$n > N$时，有

$$|(a_n \pm b_n) - (A \pm B)| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon,$$

由极限定义得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

§1.2.2 数列极限的性质

性质 1 **（唯一性）**若数列$\{a_n\}$收敛，则它的极限是唯一的.

证明： 假设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$， 又有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$，由极限的定义，$\forall \varepsilon > 0$， $\exists N \in \mathbb{N}$，使得当$n > N$时，有$\left|a_n - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，$\left|a_n - B\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 所以，当$n > N$时，

$$|A-B| \leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < \varepsilon,$$

即$\forall \varepsilon > 0$，有$|A-B| < \varepsilon$，从而$\left|A-B\right| \leqslant 0$，即$A = B$.

性质 2 在收敛数列中任意添加、删去有限项，或者任意改变有限项的值，不改变该数列的收敛性与极限值.

证明： 设数列$\{a_n\}$的前k项$a_1, a_2, \cdots, a_k$被改变为$b_1, b_2, \cdots, b_m$，而k项以后的所有项保持不变. 记$b_{m+i} = a_{k+i}, i = 1, 2, \cdots$，即$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$改变后所得到的数列.

若数列$\{a_n\}$有极限A，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$ （不妨设$N \geqslant k$），当$n > N$时，有

$$\left|a_n - A\right| < \varepsilon.$$

由于$b_{m+i} = a_{k+i}$，且

$$k + i > N \Leftrightarrow m + i > m + N - k.$$

取$N_1 = m + N - k$，当$n > N_1$时，就有$\left|b_n - A\right| < \varepsilon$， 即$\{b_n\}$收敛于$A$.

另一方面，数列$\{a_n\}$也可看作$\{b_n\}$改变后所得到的数列，所以若$\{b_n\}$收敛，则$\{a_n\}$收敛. 从而若$\{a_n\}$发散， 则$\{b_n\}$必发散.

定义 1.13 **（子列）**设$\{a_n\}$是一个数列，$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 是一列自然数， 称数列$\{a_{n_k}\}$为$\{a_n\}$的子列.

例如， $\{2n\}$与$\{2n-1\}$都是自然数列$\mathbf{N}$的子列.

子列的指标为k，即子列的第一项为a_{n_1}，子列的第二项为a_{n_2}，依次类推. n_k表示子列的第k项在原数列的位置，一般有$n_k \geqslant k$，且$n_k \geqslant n_l \Leftrightarrow k > l$.

性质 3 数列$\{a_n\}$收敛于A当且仅当它的任何子列都收敛于A.

证明：必要性：数列$\{a_n\}$也为其自身的子列，必要性显然成立.

充分性：设$\{a_{n_k}\}$为$\{a_n\}$的一个子列. 由于$\{a_n\}$收敛于A， $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，有$|a_n - A| < \varepsilon$. 而$n_k \geqslant k$，故当$k > N$时，有$n_k > N$，从而$|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. 即$\{a_{n_k}\}$收敛于$A$.

例 1.2.7 证明数列$\{(-1)^n\}$发散.

证明： 记$a_n = (-1)^n$，则$a_{2n} = 1$， $a_{2n-1} = -1$. 即数列$\{(-1)^n\}$有两个子列分别收敛到1和-1. 由性质 3， 数列$\{(-1)^n\}$发散.

上例说明， 有界数列不一定收敛. 然而我们有

性质 4 **（有界性）**收敛数列必有界，即$\exists M > 0$，使得$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$|a_n| \leqslant M$.

证明：设$\{a_n\}$收敛于A. 对$\varepsilon = 1$，$\exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，$|a_n - A| < 1$，所以$|a_n| < |A| + 1$. 取$M = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |A| + 1\right\}$，从而$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$|a_n| \leqslant M$.

例 1.2.8 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^2 = A^2$.

证明： 由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，根据性质 4，$\exists M > 0$，使得$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$|a_n| \leqslant M$.

另一方面由极限的定义， $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，当$n > N$时，有$|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{M + |A|}$. 于是当$n > N$时

$$
\begin{aligned}
|{a_n}^2 - A^2| &= |a_n + A| \cdot |a_n - A| \\
&\leqslant (M + |A|)\,|a_n - A| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^2 = A^2$.

性质 5 **（保号性）** 设数列$\{a_n\}$收敛于A，数列$\{b_n\}$收敛于B.

（1）若$A > B$，则$\exists N \in \mathbb{N}$，使得当$n > N$时，有$a_n > b_n$.

（2）若$\exists N \in \mathbf{N}^*$，当$n > N$时，有$a_n \geqslant b_n$，则$A \geqslant B$.

证明：(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 且 $A > B$，对 $\varepsilon = \frac{1}{2}(A-B)$，$\exists N_1 \in \mathbf{N}^*$，当 $n > N_1$ 时，有

$$a_n - A > -\varepsilon = \frac{1}{2}(B-A),$$

即

$$a_n > \frac{1}{2}(A+B).$$

同时 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，故 $\exists N_2 \in \mathbf{N}^*$，使得当 $n > N_2$ 时，有

$$b_n - B < \varepsilon = \frac{1}{2}(A-B),$$

即

$$b_n < \frac{1}{2}(A+B).$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$a_n > \frac{1}{2}(A+B) > b_n.$$

(2) 假设 $A < B$，由 (1) 知，$\exists N_1 \in \mathbf{N}^*$，当 $n > N_1$ 时 $a_n < b_n$，则当 $n > \max\{N_1, N\}$ 时，$a_n < b_n$ 且 $a_n \geqslant b_n$，矛盾！故 $A \geqslant B$.

定理 1.2（四则运算法则） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则

(1) 对任意实数 c，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = cA$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.　　(4) 若 $b_n \neq 0$，$B \neq 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

证明：(1) 的证明留给读者作为练习. (2) 在例 1.2.6 中已给出证明.

下面证明 (3) 和 (4).

(3) 因为 $\{a_n\}$ 为收敛数列，所以 $\exists M > 0$，使得 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，$|a_n| \leqslant M$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，由极限定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，当 $n > N$ 时，同时有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}, \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是当 $n > N$ 时，有

$$|a_n b_n - AB| \leqslant |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB|$$

$$=|a_n|\cdot|b_n-B|+|a_nB-AB|$$

$$<M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}|B|$$

$$<\varepsilon,$$

由极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=AB$.

（4） 根据（3），只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}$.

由于$B\neq 0$，由极限定义， 对于$\varepsilon_0=\frac{|B|}{2}$，$\exists N_1\in\mathbf{N}^*$，当$n>N_1$时，有$|b_n-B|<\frac{|B|}{2}$，所以当$n>N_1$时$|b_n|>\frac{|B|}{2}$，即$|\frac{1}{b_n}|<\frac{2}{|B|}$. 另一方面，再由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbf{N}^*$

当$n>N_2$时，有$|b_n-B|<\frac{B^2}{2}\varepsilon$. 从而当$n>\max\{N_1,N_2\}$时，

$$|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}|=|\frac{B-b_n}{Bb_n}|<\frac{1}{|B|}\cdot\frac{2}{|B|}\cdot\frac{B^2}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}$. ∎

例 1.2.9　求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}$.

解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$，根据极限的四则运算法则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{1-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}{2+3\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-2\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ .$$

例 1.2.10 设实数a,b满足$0<|a|<1,0<|b|<1$，求$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$.

解：因为

$$1+a^2+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}，\quad 1+b+b^2+\cdots+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}，$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}\quad .$$

§1.2.3 夹挤原理与单调有界收敛定理

讨论了极限的定义与性质，我们来讨论极限存在的两个充分条件.

定理 1.3（**夹挤原理**）　设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足条件：　$\exists n_0\in\mathbf{N}^*$，当$n>n_0$时有

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\quad .$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

证明：由于当$n>n_0$时

$$a_n-A\leqslant b_n-A\leqslant c_n-A，$$

从而

$$|b_n-A|\leqslant\max\{|a_n-A|,|c_n-A|\}.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}^*$，当$n>N_1$时，　有

$$|a_n-A|<\varepsilon，\ |c_n-A|<\varepsilon.$$

从而当$n>\max\{n_0,N_1\}$时，有$\left|b_n-A\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$. $\blacksquare$

例 1.2.11　求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$.

解：　$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有

$$0\leqslant\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}=\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}<\frac{4}{\sqrt{n}}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{n}}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=0$.

例 1.2.12　设常数$a>0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证明：当$a\geqslant 1$时，$\forall n\geqslant a$，$1\leqslant\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{n}$．又由例 1.2.3 知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，应用夹挤原得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当$0<a<1$时，$\dfrac{1}{a}>1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1\ .$$

例 1.2.13 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$是m个正数，求$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

解：记$a=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\{a_k\}$，则

$$a\leqslant(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(ma^n)^{\frac{1}{n}}=am^{\frac{1}{n}}.$$

由例 1.2.12 知$\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}=1$，应用夹挤原理知

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\{a_k\}.$$

定义 1.14　（单调数列）对于数列$\{a_n\}$，如果$\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有$a_n\leqslant a_{n+1}$　$(a_n\geqslant a_{n+1})$，则称数列$\{a_n\}$单调递增(单调递减）. 单调递增的数列与单调递减的数列统称为单调数列.

定理 1.4（单调有界收敛定理）单调递增(减)且有上（下）界的数列必收敛，极限为数列的上（下）确界.

证明：设数列$\{a_n\}$单调递增且有上界．根据确界存在定理，$\{a_n\}$存在上确界，记$A=\sup\limits_{n\geq 1}\{a_n\}$．$\forall\varepsilon>0$，由于$A-\varepsilon$不再是$\{a_n\}$的上界，于是$\exists N\in\mathbf{N}^*$，使得$A-\varepsilon<a_N\leqslant A$．注意到$\{a_n\}$单调递增，从而当$n>N$时，有$A-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant A$，故当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.　∎

单调有界收敛定理是实数系的一个非常重要的结论，在今后将有许多应用.

例 1.2.14 证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$　存在.

证明：记 $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$. 首先证明数列 $\{a_n\}$ 单调递增. $\forall n\in\mathbf{N}^*$，由二项式定理，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{1}{n^k}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\\
&< 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})\\
&= (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\\
&= a_{n+1},
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\\
&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\
&\leqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\\
&= 3-\frac{1}{n}<3,
\end{aligned}
$$

所以数列 $\{a_n\}$ 有上界. 由定理 1.4，数列 $\{a_n\}$ 收敛，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 存在.

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的值困扰了很多数学家，1727 年由数学家欧拉（Euler）使用字母 e 表示其值，即定义 $\mathrm{e}:=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$（符号 $:=$ 表示被定义，即等号左边的量被等号右边的量定义，有时也表示为 $\triangleq$）. 因为 $2<(1+\dfrac{1}{n})^n<3$，由极限的保号性，可知 e 是介于 2 和 3 之间的实数， 它就是初等数学中读者早已熟悉的自然对数的底数. 学过第二章之后可以证明：e 是一个无理数，它的近似值为 $\mathrm{e}\approx 2.71828$.

例 1.2.15 证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ 存在.

证明：令 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$，显然 $\{a_n\}$ 单调递增．又因为

$$a_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界，根据单调有界收敛定理，极限 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ 存在.

例 1.2.16　设常数 $a > 1$，证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

证明：　记 $x_n = \frac{n}{a^n}$，因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{a},$$

且 $\frac{1}{a} < 1$，由极限的保号性，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，当 $n > N$ 时，有 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$，即 $x_{n+1} < x_n$．又因为 $x_n > 0$，于是 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，在等式 $x_{n+1} = \frac{n+1}{na} x_n$ 两端令 $n \to \infty$，得 $A = \frac{A}{a}$，解得 $A = 0$，即 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

例 1.2.17 设常数 $c > 0$，$a_1 = \sqrt{c}$，　且 $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$．证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限值.

证明：　$a_2 = \sqrt{c + a_1} = \sqrt{c + \sqrt{c}} > \sqrt{c} = a_1$，假设 $a_n > a_{n-1}$，　则

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} > \sqrt{c + a_{n-1}} = a_n \quad .$$

根据数学归纳法知道，数列 $\{a_n\}$ 单调递增．又因为

$$a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1 \quad .$$

假设 $a_n < \sqrt{c} + 1$，则

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c} + 1.$$

再次由数学归纳法得数列 $\{a_n\}$ 有上界，根据单调有界收敛定理，$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在．设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，在等式 $a_{n+1}^2 = c + a_n$ 两端令 $n \to \infty$，得 $A^2 = c + A$，解得 $A = \frac{1}{2} \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}}$．由保号性应有

$A \geqslant 0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2} + \sqrt{c + \dfrac{1}{4}}$.

习题 1. 2

(A 组)

1. 在数列极限的定义中，ε 是不是一个任意小的正数？正整数 $N = N(\varepsilon)$ 是否为 ε 的函数？

2. 下列说法中，哪些与$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$等价. 如果等价，请证明，如果不等价，请举出反例.

（1）对于无限多个正数$\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n \geqslant N$，就有$|a_n - A| < \varepsilon$；

（2）$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n \geqslant N$，就有$|a_n - A| < \varepsilon$；

（3）$\forall \varepsilon \in (0,1), \exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n > N$，就有$|a_n - A| < \varepsilon$；

（4）$k > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n > N$，就有$|a_n - A| < k\varepsilon$；

（5）$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n > N$，就有$|a_n - A| < \varepsilon^{\frac{2}{3}}$；

（6）$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbf{N}^*$，只要$n > N_k$，就有$|a_n - A| < \dfrac{1}{2^k}$；

（7）$\exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n > N$，就有$|a_n - A| < \dfrac{1}{n}$；

（8）$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n > N$，就有$|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{n}$；

（9）$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*$，只要$n > N$，就有$|a_n - A| < \sqrt{n}\varepsilon$；

3. 利用极限的定义证明以下极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 1}{n^3 - n + 1} = 2$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 4}) = 0$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$；　（4）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ ；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \dfrac{\pi}{2}$.

4. 已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. 反之何时成立？

5. 讨论以下命题是否正确，如果不正确，请举反例.

（1）若数列$\{2x_n-y_n\}$与$\{3x_n+4y_n\}$都收敛，则数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都收敛；

（2）若数列$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，则$\{x_n+y_n\}$与$\{x_ny_n\}$均发散；

（3）若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均发散，则$\{x_n+y_n\}$与$\{x_ny_n\}$均发散；

（4）若数列$\{x_n\}$，$\{x_ny_n\}$都收敛，则$\{y_n\}$也收敛；

（5）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则对任何数列$\{y_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$；

（6）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$或$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

6. 若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$满足：$x_n\leqslant A\leqslant y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

7. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2-n-1}{3n^3+n^2+2}$； （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n}{2^{n-2}+(-1)^{n-1}}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}$； （4）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)})$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+n-2})$； （6）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2})$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)})$； （8）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k^2}$；

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})$； （10）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2}$；

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

8. 证明：数列$\{x_n\}$收敛于A当且仅当它的两个子列$\{x_{2n}\},\{x_{2n-1}\}$均收敛于A

9. 利用单调有界收敛定理，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求极限值.

（1）$a_1=\sqrt{2},a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$； （2）$a_1>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{3}{a_n})$；

（3）$a_1>0,a_{n+1}=\sin a_n$； （4）$a_1=1,a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{1+a_n}$.

10. 利用单调有界收敛定理，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$极限存在.

（1）$a_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots\cdots(1+\frac{1}{2^n})$；

（2）$a_n=(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1+\frac{1}{n^2})$.

11. 设数列$\{a_n\}$单调递增，$\{b_n\}$单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，证明：$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均收敛，且它们的极限值相等.

12. 求极限：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-3})^{2n}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n^2})^{3n^2+2n}$.

13. 求极限（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+n})$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$.

14. 证明不等式：$\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}}$.

15. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+2}$.

（B组）

1. 用$\varepsilon-N$语言叙述：“$\{a_n\}$不收敛于A”. 并讨论下列哪些说法与“$\{a_n\}$不收敛于A”等价：

（1）$\exists\varepsilon_0>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$；

（2）$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$，只要$n\geq N$，就有$|a_n-A|\geqslant\varepsilon$；

（3）$\exists\varepsilon_0>0$，使得$\{a_n\}$中除有限项外，都满足$|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$；

（4）$\exists\varepsilon_0>0$，使得$\{a_n\}$中有无穷多项满足$|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$.

2. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$. 反之成立吗？

3. 已知$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}=A$，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{-\frac{1}{n}}$.

4. 已知 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$. 证明：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$；（2）若 $0<a<1$，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（3）利用（1）（2）的结论求极限： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

5. 利用单调有界收敛定理证明数列 $\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 的极限存在，并证明不等式：

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

6. 证明： $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.（其极限值称为 Euler 常数, 记为 $\gamma\approx 0.577\cdots$）

7. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足： $a_1=a>0,b_1=b>0,a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，证明： $\{a_n\}$， $\{b_n\}$ 均收敛，且它们的极限值相等.

8. 设数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1=1,a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

§1.3　实数理论

实数理论的产生源于人类对微积分的理论基础严格化的追求，人类早期对实数的认识仅仅局限于应用，对无理数的本质是不清楚的，并没有严格的定义. 微积分诞生后，随着对变量与函数的认识逐渐清晰，出于严密化的需要，先后诞生了极限理论、实数理论. 实数理论的建立，使得分析学的基础形成了一个完整的体系，标志着第一次数学革命真正意义上得到了解决.

实数理论应从实数的建立（戴德金分割）讲起，然后依次介绍确界存在定理、单调有界收敛定理、区间套定理、致密性定理（Bolzano-Weistrass）、Cauchy 收敛原理、聚点定理、海涅-玻莱尔有限覆盖定理（Heni-Borel），可以证明这些定理都是等价的. 作为非数学专业的微积分教材，我们以确界存在定理为基础，略去戴德金分割、聚点定理、有限覆盖定理，有兴趣的读者可以查阅相关资料.

§1.3.1 区间套定理

定义 1.15（闭区间套）设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一系列的闭区间，如果满足

$$（1）\forall n\in\mathbf{N}^*,[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]；（2）\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0，$$

则称$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$为一个闭区间套.

定理 1.5（区间套定理）设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$为一个闭区间套，则存在唯一的$\xi$，使得$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$，即$\forall n\in\mathbf{N}^*,\xi\in[a_n,b_n]$.

证明：首先证明存在性. 因为$\forall n\in\mathbf{N}^*,[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$，则数列$\{a_n\}$单调递增有上界$b_1$，数列$\{b_n\}$单调递减有下界$a_1$，根据单调有界收敛定理，$\lim_{n\to\infty}a_n,\lim_{n\to\infty}b_n$存在，又因为$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$. 设$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi$，则$\xi$为数列$\{a_n\}$的上确界，也为数列$\{b_n\}$的下确界，即$\forall n\in\mathbf{N}^*,\xi\in[a_n,b_n]$.

其次证明唯一性. $\forall\xi_1,\xi_2\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，有$\forall n\in\mathbf{N}^*,|\xi_1-\xi_2|\leqslant b_n-a_n$，因为$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以$\xi_1=\xi_2$，从而存在唯一的$\xi$，使得$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$. ▮

例 1.3.1 已知函数$f(x)$单调递增，且$f(a)>a$，$f(b)<b$，证明：存在$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$.

证明：设$[a_1,b_1]=[a,b]$. 考察$x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，若$f(x_1)=x_1$，则取$\xi=x_1$；若$f(x_1)>x_1$，取$[a_2,b_2]=[x_1,b_1]$；若$f(x_1)<x_1$，取$[a_2,b_2]=[a_1,x_1]$.

继续做下去，如果在有限步可以取到ξ，则题目得证，否则一直进行下去可以得到一系列闭区间$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$，满足

（1）$\forall n\in\mathbf{N}^*,[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$；

（2）$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$；

（3）$\forall n\in\mathbf{N}^*,f(a_n)>a_n,f(b_n)<b_n$.

根据区间套定理，存在唯一的ξ，使得$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$. 因为函数$f(x)$单调递

增，所以 $f(a_n)\leqslant f(\xi)\leqslant f(b_n)$，又因为 $f(a_n)>a_n, f(b_n)<b_n$，故

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ a_n\leqslant f(\xi)\leqslant b_n,$$

由 ξ 的唯一性可知 $f(\xi)=\xi$.

§1.3.2 致密性定理（Bolzano-Weistrass 定理）

前面讨论极限的性质时知道，收敛数列必为有界数列，反之有界数列不一定为收敛数列，但我们有

定理 1.6 （致密性定理，又名 Bolzano-Weistrass 定理）有界数列必有收敛子列.

证明：我们利用区间套定理证明. 设 $\{x_n\}$ 为有界数列，a,b 分别为其下界与上界，即 $a\leqslant x_n\leqslant b\ \ (n=1,2,\cdots)$，我们的目标是证明 $\{x_n\}$ 存在收敛的子数列.

令 $[a_1,b_1]=[a,b]$，则 $[a_1,b_1]$ 包含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，将 $[a_1,b_1]$ 二等分，则 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}],[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ 至少有一个包含数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，令其为 $[a_2,b_2]$. 重复上面步骤一直如此做下去， 可以得到一列闭区间 $[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$，它们满足下列条件：

（1） $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$；

（2） $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}$；

（3） $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$[a_n,b_n]$ 包含数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

根据区间套定理，存在唯一的 ξ，使得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$.

由于每个区间 $[a_n,b_n]$ 都包含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，取 $x_{n_1}\in[a_1,b_1]$，$x_{n_2}\in[a_2,b_2]$ 且 $n_2>n_1$，……，$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$ 且 $n_k>n_{k-1}$，从而得到数列 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$|x_{n_k}-\xi|\leqslant b_k-a_k\leqslant\frac{b-a}{2^{k-1}},$$

由夹挤原理得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$，即子数列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 ξ. ▌

例 1.3.2 若 $\{a_m\},\{b_m\}$ 均为有界数列，则存在单调递增的正整数列 $\{n_k\}$，使得

$\{a_{n_k}\},\{b_{n_k}\}$均收敛.

证明：因为$\{a_m\}$为有界数列，根据 Bolzano-Weistrass 定理，$\{a_m\}$存在收敛子列$\{a_{m_l}\}$. 因为$\{b_{m_l}\}$为$\{b_m\}$的子列，且$\{b_m\}$有界，所以再由 Bolzano-Weistrass 定理，$\{b_{m_l}\}$存在收敛子列$\{b_{m_{l_k}}\}$. 又因为$\{a_{m_{l_k}}\}$为$\{a_{m_l}\}$的子列，且$\{a_{m_l}\}$收敛，根据数列极限和子列极限的关系知$\{a_{m_{l_k}}\}$收敛. 记$n_k = m_{l_k}$，显然$\{n_k\}$为单调递增的正整数列，且$\{a_{n_k}\},\{b_{n_k}\}$均收敛.

§1.3.3 Cauchy 收敛原理

在介绍 Cauchy 收敛原理之前，我们先引入 Cauchy 列的概念.

定义 1.16（Cauchy 列） 若数列$\{x_n\}$满足：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，使得当$n, m > N$时，有$|x_n - x_m| < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$为 Cauchy 列.

在上面的定义中，不妨设$m \geqslant n$，令$p = m - n$，则$p \in \mathbf{N}^*$. 从而$\{x_n\}$为 Cauchy 列的定义也可以表述为：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，使得当$n > N$时，$\forall p \in \mathbf{N}^*$有$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

数列$\{x_n\}$为 Cauchy 列表示的意思是任意给定正数ε，无论所给的ε多么小，数列$\{x_n\}$充分靠后的项彼此之间的距离都可以小于ε. 不难理解，如果$\{x_n\}$是收敛列，那么$\{x_n\}$充分靠后的项都和极限值充分“接近”，那么它们彼此也应十分“接近”，$\{x_n\}$应该是 Cauchy 列；反之数列$\{x_n\}$是 Cauchy 列，充分靠后的项彼此之间充分“接近”，如果实数轴是没有“漏洞”的（数学中称之为“完备性”），那么$\{x_n\}$充分靠后的项应该和某一个实数十分“接近”，即$\{x_n\}$应为收敛列，这就是我们下面要介绍的 Cauchy 收敛原理.

定理 1.7（Cauchy 收敛原理） 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$为 Cauchy 列.

证明：必要性. 设数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 由极限的定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，当$n > N$时，有$|x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是，当$n, m > N$时，

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - A| + |x_m - A| < \varepsilon,$$

因此$\{x_n\}$为Cauchy列.

充分性．设数列$\{x_n\}$为Cauchy列，分两步进行：(1) 证明$\{x_n\}$有界，(2) 证明$\{x_n\}$收敛.

(1) 对$\varepsilon=1$，由Cauchy列的定义，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当$n>N$时，有$|x_n-x_{N+1}|<1$，于是$|x_n|<|x_{N+1}|+1$．令$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,|x_{N+1}|+1\}$，则$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有$|x_n|\leqslant M$，即$\{x_n\}$有界.

(2) 由Bolzano-Weistrass定理，$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$．往证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$．因为$\{x_n\}$为Cauchy列，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}^*$，当$n,m>N_1$时，有$|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$．又因为$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$，对上述的$\varepsilon$，$\exists K\in\mathbf{N}^*$，使得$n_K>N_1$，且当$k\geqslant K$时，有$|x_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取$N=\max\{n_K,N_1\}$，当$n>N$时，有

$$|x_n-A|\leqslant|x_n-x_{n_K}|+|x_{n_K}-A|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. ▌

Cauchy收敛原理指出，在实数系中Cauchy列必收敛，这称为实数系的完备性．在许多情况下，用Cauchy收敛原理判定数列的收敛性在理论上是非常重要的.

例 1.3.3　设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$，证明数列$\{a_n\}$收敛.

证明：$\forall p\in\mathbf{N}^*$，因为

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p}}{n+p}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1},$$

所以$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，当$n>N$时，$\forall p\in\mathbf{N}^*$，有$\left|a_{n+p}-a_n\right|\leqslant\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，从而

$\{a_n\}$ 为 Cauchy 列，根据 Cauchy 收敛原理知 $\{a_n\}$ 收敛.

例 1.3.4 设 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$，证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

证明：$\forall n \in \mathbf{N}^*$，因为

$$
\begin{aligned}
|a_{2n} - a_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&> \frac{n}{2n} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

所以存在 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\forall N \in \mathbf{N}^*$，只要 $n > N$，就有

$$|a_{2n} - a_n| \geqslant \varepsilon_0,$$

所以 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列，根据 Cauchy 收敛原理知 $\{a_n\}$ 发散.

需要指出的是，确界存在定理、单调有界收敛定理、区间套定理、致密性定理、Cauchy 收敛原理都是等价的，我们已经讨论过的内容之间的逻辑关系如下：

$\boxed{\text{确界存在定理}} \Rightarrow \boxed{\text{单调有界收敛定理}} \Rightarrow \boxed{\text{区间套定理}} \Rightarrow \boxed{\text{致密性定理}} \Rightarrow \boxed{\text{Cauchy 收敛原理}}$

下面通过 Cauchy 收敛原理证明确界存在定理.

例 1.3.5 设非空数集 E 有上界，证明：E 存在上确界.

证明：设 b_1 为 E 有上界，取 a_1 不是 E 的上界，则 $a_1 < b_1$，得到区间 $[a_1, b_1]$. 若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 是 E 的上界，则取 $[a_2, b_2] = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$，否则取 $[a_2, b_2] = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. 重复上面步骤，可以得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$，它们满足下列条件：

（1）　$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$；

（2）　$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$；

（3）　$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$b_n$ 为 E 有上界，a_n 不是 E 的上界.

由(1)和(2)知，$\forall p \in \mathbf{N}^*$，$|b_{n+p} - b_n| \leqslant b_n - a_n$. $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = [|\log_2 \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}|] + 2$，当 $n > N$ 时，$\forall p \in \mathbf{N}^*$，有 $|b_{n+p} - b_n| < \varepsilon$，即 $\{b_n\}$ 为 Cauchy 列，由 Cauchy 收敛原理知 $\{b_n\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty} b_n = \xi$，再由（2）可得，$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi$. 下证 $\xi = \sup E$.

$\forall x \in E$，由（3）知，b_n 为 E 的上界，故 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，$x \leqslant b_n$，再由极限的保号性可得 $x \leqslant \xi$，所以 ξ 是 E 的上界．另一方面，$\forall \varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，由保号性，$\exists N \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_N > \xi - \varepsilon$，又因为 a_N 不是 E 的上界，故 $\exists x_\varepsilon \in E$，使得 $x_\varepsilon > a_N$，从而 $x_\varepsilon > \xi - \varepsilon$，即 $\xi - \varepsilon$ 不是 E 的上界，所以 $\xi = \sup E$．

习题 1．3

(A 组)

1. 用 $\varepsilon - N$ 语言叙述：“数列 $\{a_n\}$ 不是柯西列”．

2. 利用柯西收敛原理证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

（1）$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{2^k}$；　（2）$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k!}{k(k+1)}$；　（3）$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{1}{k}$．

3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

（1）$a_n = \cos \dfrac{2n\pi}{3}$；　（2）$a_n = \sqrt[n]{1+3^{(-1)^n \cdot n}}$；　（3）$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$．

4. 证明：有界数列 $\{a_n\}$ 不收敛，则 $\{a_n\}$ 存在两个收敛子列，分别收敛到两个不等的实数。

5. 区间套定理中可否把闭区间改为开区间？区间长度趋近于 0 的条件去掉，定理是否还成立？请举例说明.

(B 组)

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$\forall p \in \mathbb{N}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$，问 $\{a_n\}$ 是否是柯西列？研究例子：

（1）$a_n = \sqrt{n}$；（2）$a_n = \ln n$；（3）$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$．

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q |a_n - a_{n-1}|$，其中 $q \in (0,1)$ 为常数．证明：$\{a_n\}$ 收敛.

3. 利用区间套定理证明单调收敛有界定理.
4. 利用柯西收敛准则证明单调有界收敛定理.
5. 利用单调有界收敛定理证明确界存在定理.

6. （有限覆盖定理）若闭区间 $[a,b]$ 被一组开区间 $D = \{(a_\lambda, b_\lambda)\}$ 覆盖，即

$(a,b)\subseteq\bigcup_{\lambda}(a_\lambda,b_\lambda)$，则从$D$中必可选出有限个开区间$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots(a_m,b_m)$，使得这有限个开区间也覆盖$[a,b]$.

（1）试利用区间套定理证明有限覆盖定理；
（2）试用有限覆盖定理证明 Bolzano-Weistrass 定理.

§1.4　函数极限

本节我们讨论函数极限，函数极限是研究函数最重要的工具之一. 从第§1.2 节中知道， 数列$\{a_n\}$的极限就是考察当正整数n无限增大时，$\{a_n\}$的变化趋势. 类似地，函数$f(x)$的极限就是考察当自变量x无限趋近于某个点x_0，或趋于∞时， 函数值$f(x)$的变化趋势.

数列极限的下标n是正整数，且是离散变化的，与数列极限不同的是， 函数的自变量x是实数，且是连续变化的. 数列极限只有一种极限过程，即$n\to\infty$，而函数极限有多种极限过程，自变量x既可以无限趋近点x_0，又可以趋于∞，既可以从x_0的单侧（左侧或右侧）趋近于x_0，又可以从x_0的两侧趋近于x_0，还可以趋于$+\infty$或$-\infty$. 然而，不同形式的函数极限在本质上相通的，它们都具有相似的性质.

§1.4.1 函数极限的概念

1. 当$x\to x_0$时的极限.

仿照数列极限的定义，我们给出$x\to x_0$时函数极限的定义.

定义 1.17 （函数极限）设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，若存在实数A，使$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数$f(x)$在点x_0处的极限为A，或称当x趋近于x_0时，$f(x)$趋近于A. 记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或$f(x)\to A\ (x\to x_0)$.

用邻域的语言函数极限的定义可以写成：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{当}\ x\in\mathring{U}(x_0,\delta)\ \text{时，有}\ f(x)\in U(A,\varepsilon).$$

定义 1.17 描述了当自变量 x 越来越趋近 x_0 的过程中，函数值 $f(x)$ 的变化趋势．从定义中可以看出，这个过程中 x 不等于 x_0 而趋近于 x_0，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限是否存在，与函数 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义及 $f(x)$ 在 x_0 点取什么值无关.

从几何上看(图 1-13)，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则对任意正数 ε，存在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 内， 曲线 $y=f(x)$ 的图形夹在水平直线 $y=A+\varepsilon$ 与 $y=A-\varepsilon$ 之间.

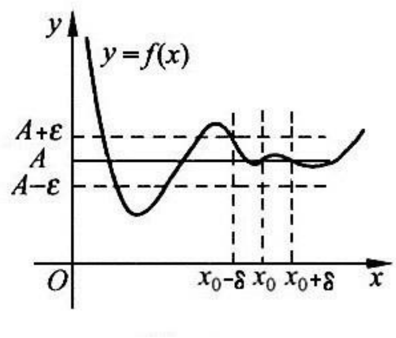


图 1-13

下面我们讨论几个具体的例子.

例 1.4.1 设 x_0 为一实数，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证明：因为

$$
\begin{aligned}
|\cos x-\cos x_0| &= |2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}| \\
&\leqslant |2\sin\frac{x-x_0}{2}| \\
&\leqslant |x-x_0|,
\end{aligned}
$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon$，只需 $|x-x_0|<\varepsilon$. 取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，有 $|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon$，由函数极限的定义知 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

利用本例的证明方法，不难推广证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

例 1.4.2 证明 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证明：因为 $|x\sin\dfrac{1}{x}-0|\leqslant|x|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，

当$0<|x|<\delta$时，有$|x\sin\frac{1}{x}-0|<\varepsilon$，由函数极限的定义知，$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

注意所给函数在$x_0=0$处并无定义，但这不妨碍我们讨论函数在点$x_0=0$处的极限（图1-14）.

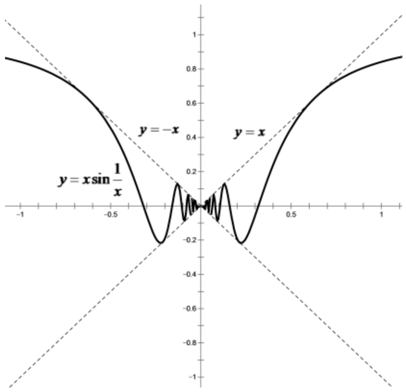


图 1-14

例 1.4.3　证明$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=-1$.

解：不妨设$|x-1|<\frac{1}{2}$，此时$x>\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}-(-1)|&=2|\frac{x-1}{x}|\\&\leqslant 4|x-1|.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，要使$|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}-(-1)|<\varepsilon$，只需$4|x-1|<\varepsilon$，即$|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$，又因为不妨设$|x-1|<\frac{1}{2}$，所以取$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{4},\frac{1}{2}\}$，当$0<|x-1|<\delta$时，有$|\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}-(-1)|<\varepsilon$，因此$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=-1$.

函数极限的定义中，$x\to x_0$时x可以从x_0的两侧趋近于x_0，如果限制自变量x只能在x_0的一侧变化，就得到“单侧极限”的概念.

定义 1.18 （单侧极限）

（1）设函数f在x_0的右邻域内定义，若存在实数A，使$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当

$0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$， 则称 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限为 A，或称当 x 趋近于 ${x_0}^+$ 时，$f(x)$ 趋近于 A，记作 $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x)=A$，或 $f(x)\to A\ (x\to {x_0}^+)$.

（2）设函数 f 在 x_0 的左邻域内定义，若存在实数 A，使 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$， 则称 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限为 A，或称当 x 趋近于 ${x_0}^-$ 时，$f(x)$ 趋近于 A，记作 $\lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x)=A$，或 $f(x)\to A\ (x\to {x_0}^-)$.

习惯上，也用 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 表示点 x_0 处的左右极限，即

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to {x_0}^+} f(x)，\quad f(x_0-0)=\lim_{x\to {x_0}^-} f(x).$$

由上述定义不难得到：

定理 1.8 （函数极限存在的充要条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：$\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x)=A$.

证明：必要性显然，只证充分性.

因为 $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 又因为 $\lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x)=A$，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$ 当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. ∎

例 1.4.4 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在.

证明：因为 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1,\ \ \lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$，由定理 1.8 知 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在.

例 1.4.5 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调，证明：$\forall x_0\in(a,b)$，$\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x)$ 均存在.

证明：不妨设 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增，则当 $x\in(a,x_0)$ 时，$f(x)<f(x_0)$. 设 $E_{x_0}=\{f(x)|x\in(a,x_0)\}$，则 E_{x_0} 非空有上界，由确界存在定理，$\sup E_{x_0}$ 存在，记 $\sup E_{x_0}=A$.

由确界的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_1\in(a,x_0)$，使 $f(x_1)>A-\varepsilon$. 取 $\delta_{x_0}=x_0-x_1$，当

$0 < x_0 - x < \delta_{x_0}$ 时， 有 $x_1 < x < x_0$，因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增，所以 $f(x_1) < f(x)$，从而

$$A - \varepsilon < f(x_1) < f(x) \leqslant A,$$

即 $|f(x) - A| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，所以 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 存在，同理可证 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在.

2. 当 $x \to \infty$ 时的极限.

仿照数列极限的定义，我们给出 $x \to \infty$ 时函数极限的定义.

定义 1.19 （函数极限）

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a) \bigcup (a, +\infty)$ 内有定义，其中 a 为某一正实数. 若存在实数 A，使 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > a$，当 $|x| > M$ 时， 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时，$f(x)$ 存在极限 A. 记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

（2） 设 f 在 $(a, +\infty)$（或 $(-\infty, -a)$ ）内有定义， 其中 a 为某一正实数. 若存在实数 A，使 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > a$，当 $x > M$（或 $x < -M$ ）时， 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$） 时， $f(x)$ 存在极限 A. 记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ （或 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$）.

仿照定理 1.8 的证明过程及定义 1.19，不难得到：

定理 1.9 （函数极限存在的充要条件） $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是：$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

从几何上看(图 1-15)，如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，则对任意正数 ε，存在 $M > 0$，在区间 $(M, +\infty)$ 内， 曲线 $y = f(x)$ 的图形夹在水平直线 $y = A + \varepsilon$ 与 $y = A - \varepsilon$ 之间.

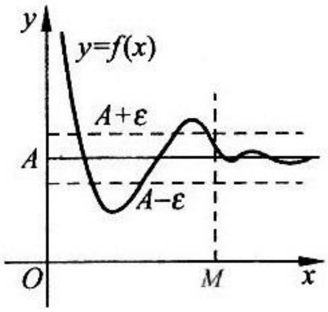


图 1-15

例 1.4.5 设常数 $a \in (0,1)$，证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，不妨设$\varepsilon\in(0,1)$，要使$|a^x-0|<\varepsilon$，只需$x>\log_a^{\varepsilon}$. 取$M=\log_a^{\varepsilon}$，当$x>M$时，有$|a^x-0|<\varepsilon$，由函数极限的定义，有$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$.

例 1.4.6　证明$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，不妨设$\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$，要使$|\arctan x-(-\dfrac{\pi}{2})|<\varepsilon$，只需$\arctan x+\dfrac{\pi}{2}<\varepsilon$，只需$\arctan x<\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}$，只需$x<-\tan(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon)$，即$x<-\cot\varepsilon$. 取$M=\cot\varepsilon$，当$x<-M$时，有$|\arctan x-(-\dfrac{\pi}{2})|<\varepsilon$，根据函数极限的定义，有$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

类似可以证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

例 1.4.7　证明$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=1$.

证明：注意到

$$\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1\right|=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$<\frac{2}{x^2-1},$$

不妨设$|x|>\sqrt{2}$，从而有

$$\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1\right|<\frac{2}{|x|}.$$

$\forall\varepsilon>0$，取$M=\max\{\sqrt{2},\dfrac{2}{\varepsilon}\}$，当$|x|>M$时，有$\left|\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}-1\right|<\varepsilon$，由函数极限的定义，有$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=1$.

§1.4.2 函数极限的性质

在上一小节中我们给出了函数极限的六种形式，本小节中我们将讨论函数极限的性质，为叙述方便，主要以$x\to x_0$的情形叙述，其他极限过程下，函数极限具有类似的结论.

性质 1（唯一性） 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值是唯一的.

性质 2（局部有界性）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则存在 $\delta > 0$，及 $M > 0$，当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $|f(x)| < M$.

性质 1 与性质 2 可仿照数列极限的情形证明，我们把它留给读者完成.

性质 3 （局部保号性）设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

（1）若 $A > B$，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $f(x) > g(x)$.

（2）若存在 $\rho > 0$，使得当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \rho)$ 时，有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $A \geqslant B$.

证明：（1）由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，对 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(A - B)$，$\exists \delta_1 > 0$，当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_1)$ 时，有 $|f(x) - A| < \dfrac{1}{2}(A - B)$，从而 $f(x) > \dfrac{1}{2}(A + B)$. 又因为 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，对上述的 $\exists \delta_2 > 0$，当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_2)$ 时，有 $|g(x) - B| < \dfrac{1}{2}(A - B)$，从而 $g(x) < \dfrac{1}{2}(A + B)$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $f(x) > g(x)$.

（2）假设 $A < B$，由（1）知，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $g(x) > f(x)$，与已知矛盾. 故 $A \geqslant B$. ▌

若在性质 3 中取 $g(x) \equiv B$，有

当 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > B$ 时，存在 $\delta > 0$，使得 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$，有 $f(x) > B$. 反之，若存在 $\rho > 0$，使得当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \rho)$ 时，$f(x) \geqslant B$，则 $A \geqslant B$.

与数列情形完全类似，函数极限也有四则运算法则与夹挤原理，它们的证明留给读者练习.

定理 1.10（四则运算法则）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则

（1）对任意实数 c，$\lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = cA$.　（2）$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$.　　（4）当 $B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

例 1.4.8 设 $x_0 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$，求 $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x$.

解：
$$\lim_{x \to x_0} \tan x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin x_0}{\cos x_0}.$$

类似有 $\lim\limits_{x\to x_0}\sec x=\sec x_0$， $\lim\limits_{x\to t_0}\cot x=\cot t_0$， $\lim\limits_{x\to t_0}\csc x=\csc t_0$ （$t_0\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$）.

定理 1.11（夹挤原理）设函数 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $x=x_0$ 的某去心邻域内定义，且在该邻域内满足 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$， 则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$.

性质 1，性质 2， 性质 3 与定理 1.10， 定理 1.11 的极限过程 $x\to x_0$ 可以换成其它五种极限过程的任一种，其证明也是完全类似的.

例 1.4.9（两个重要极限之一） 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

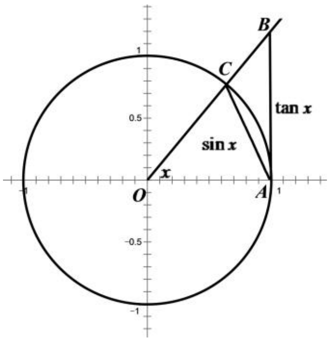


图 1-16

证明：如图 1-16 所示，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$$\Delta OAC\text{ 的面积}<\text{扇形 }OAC\text{ 的面积}<\Delta OAB\text{ 的面积},$$

即

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x,$$

所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $\sin x<x<\tan x$ ，由此可得 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

又因为 $y=\cos x, y=\frac{\sin x}{x}, y=1$ 均为偶函数，所以

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\quad x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}).$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$（例 1.4.1），根据夹挤原理得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

例 1.4.10（两个重要极限之二） $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$.

证明： 先证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$. 当 $x\geqslant 1$ 时，

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leqslant (1+\frac{1}{x})^x \leqslant (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$， 所以$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} = \mathrm{e}$，从而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} &= \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}\cdot(1+\frac{1}{[x]}) \\ &= \mathrm{e}\times 1 \\ &= \mathrm{e},\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} &= \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}\cdot(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1} \\ &= \mathrm{e},\end{aligned}$$

由夹挤原理得$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$.

下面证明$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$.

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{x})^x &= (1-\frac{1}{-x})^{-(-x)} \\ &= (\frac{-x}{-x-1})^{-x} \\ &= (1+\frac{1}{-x-1})^{-x-1}\cdot(1+\frac{1}{-x-1}) \\ &= (1+\frac{1}{-x-1})^{-x-1}\cdot(1+\frac{1}{-x-1}).\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t = \mathrm{e}$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当$t>M$时，有$|(1+\frac{1}{t})^t-\mathrm{e}|<\varepsilon$，于是当$x<-(M+1)$时，有$-x-1>M$，从而$|(1+\frac{1}{-x-1})^{-x-1}-\mathrm{e}|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{-x-1})^{-x-1}=\mathrm{e}$. 又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{-x-1})=1$，根据极限的四则运算法则，有$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$.

根据定理 1.9，有$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$.

例 1.4.11 已知常数$a>1$，证明：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0$.

证明：（1）根据例 1.2.16，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{a^{[x]}}=0$.

当 $x\geqslant 1$ 时，有 $0<\dfrac{x}{a^x}\leqslant 2\cdot\dfrac{[x]}{a^{[x]}}$，由夹挤原理推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=0$.

（2）由例 1.2.4， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$，于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln[x]}{[x]}=0$.

当 $x\geqslant 1$ 时，

$$0<\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{\ln 2+\ln[x]}{x}\leqslant\frac{\ln 2}{x}+\frac{\ln[x]}{[x]},$$

从而由夹挤原理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，进而得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x}=\dfrac{1}{\ln a}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

在本小节的最后，我们讨论复合函数的极限.

定理 1.12（复合函数的极限） 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$， $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且当 $x\neq x_0$ 时，$g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

证明：因为 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|u-u_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(u)-A|<\varepsilon.$$

又 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，对上述的 $\delta_1>0$，存在 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|g(x)-u_0|<\delta_1.$$

由于当 $x\neq x_0$ 时， $g(x)\neq u_0$，故当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时， $0<|g(x)-u_0|<\delta_1$，所以当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(g(x))-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

从定理的证明过程中可以看出，当 $0<|u-u_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(g(x))-A|<\varepsilon$，所以要想得到 $|f(u)-A|<\varepsilon$ 这个结论，只要满足 $0<|g(x)-u_0|<\delta_1$ 即可， 所以本定理中“当 $x\neq x_0$ 时， $g(x)\neq u_0$”这个条件是必不可少的！如果没有这个条件，很容易举出相应的反例， 请读者思考.

在极限 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 中，函数 $f(u)$ 在 $u=u_0$ 处可以没有定义，但如果函数 $f(u)$ 在 $u=u_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，条件“当 $x\neq x_0$ 时， $g(x)\neq u_0$”就可以去掉，我们有如下的定理：

定理 1.13（复合函数的极限） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(u_0)$.

证明：因为 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|u-u_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.①$$

因为 $u=u_0$ 时，不等式①也成立，所以当 $|u-u_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$.

又 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，对上述的 $\delta_1>0$，存在 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|g(x)-u_0|<\delta_1,$$

从而 $|f(g(x))-f(u_0)|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(u_0)$.

对于其他极限过程下的函数极限，均有对应的复合函数的极限运算法则，这里不再赘述. 复合函数的极限运算法则为我们求极限时的变量代换提供了理论基础.

例 1.4.12 求下列极限（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x}$ （3）$\lim\limits_{x\to 0}\sin(2x+1)$.

解：（1）
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

因为 x 不等于 0 而趋近于 0 时，函数 $t=\dfrac{x}{2}$ 也不等于 0 而趋近于 0，所以根据定理 1.12 知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}.$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$.

因为 x 不等于 0 而趋近于 0 时，函数 $t=\tan x$ 也不等于 0 而趋近于 0，所以根据定理 1.12 知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x}=1$.

（3）因为 $\lim\limits_{x\to0}(2x+1)=1$，且 $\lim\limits_{u\to1}\sin u=\sin1$，所以根据定理 1.13 知，$\lim\limits_{x\to0}\sin(2x+1)=\sin1$.

在后面的例题中，我们不再赘述的定理 1.12、定理 1.13 的应用过程，而直接写出极限结果.

例 1.4.13 求极限 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$，从而 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$.

下面讨论的极限十分重要，它们在后面几节中有重要的应用.

例 1.4.14 求下列极限（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$　（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解：（1）令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$，于是 $x\to0$ 时，有 $x\to0$，有 $t\to0$（这个结论需要用到第 6 节的反函数连续性定理，后面补充证明），于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\times1=1$.

（3）令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$，于是 $x\to0$ 时，有 $x\to0$，有 $t\to0$（这个结论需要用到第 6 节的反函数连续性定理，后面补充证明），于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=1.$$

§1.4.3 函数极限的存在准则

与数列极限类似，在本小节我们讨论函数极限存在的两个准则：归结原则与 Cauchy 收敛原理.

归结原则也称为海涅（Heni）定理，讨论的是数列极限与函数极限的关系.

定理 1.14（归结原则） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ $x=x_0$ 的去心邻域内，任意一个收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

证明：必要性. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，对上述的 $\delta>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，$|x_n-x_0|<\delta$. 因为 $\{x_n\}$

在 $x=x_0$ 的去心邻域内，故 $x_n \neq x_0$，从而当 $n>N$ 时，$0<|x_n-x_0|<\delta$，于是 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$，根据数列极限的定义，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

充分性. 假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$，于是 $\exists \varepsilon_0>0$，$\forall \delta>0$，$\exists x_\delta$：$0<|x_\delta-x_0|<\delta$，但 $|f(x_\delta)-A|\geqslant \varepsilon_0$.

对 $\delta=1$，$\exists x_1$：$0<|x_1-x_0|<1$，但 $|f(x_1)-A|\geqslant \varepsilon_0$，

对 $\delta=\dfrac{1}{2}$，$\exists x_2$：$0<|x_2-x_0|<\dfrac{1}{2}$，但 $|f(x_2)-A|\geqslant \varepsilon_0$，

……，

对 $\delta=\dfrac{1}{n}$，$\exists x_n$：$0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$，但 $|f(x_n)-A|\geqslant \varepsilon_0$.

……，

于是我们得到 $x=x_0$ 的去心邻域内，收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$，矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$. ∎

定理 1.14 常用于证明函数极限是否存在.

例 1.4.15 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明：取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}, y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1,$$

于是由定理 1.14 可知，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

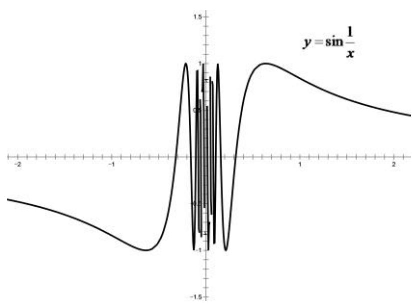


图 1-17

由图 1-17 可以看出，当 $x\to 0$ 时，曲线 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间振荡，不趋近

于任何数.

例 1.4.16 证明：任意实数 x_0， $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

证明：在 $x=x_0$ 的去心邻域内，取 $\{x_n\}\subseteq \mathbf{Q}$，$\{y_n\}\subseteq \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$，但

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n)=\lim_{n\to\infty} 1 = 1，\ \lim_{n\to\infty} D(y_n)=\lim_{n\to\infty} 0 = 0，$$

于是由定理 1.14 可知， $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

例 1.4.17　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x_0}$.

证明：根据例 1.2.4，任取 $x=x_0$ 去心邻域内的数列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{x_0}$，根据定理 1.14 可得 $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x_0}$.

例 1.4.18　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0\ (x_0>0)$.

证明：根据例 1.2.4，任取 $x=x_0$ 去心邻域内的数列 $\{x_n\}\,(x_n>0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x_0$，根据定理 1.14 可得 $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$.

例 1.4.19 设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$.

证明：　由例 1.4.18 知，$\lim\limits_{x\to a} \ln x = \ln a$. 应用定理 1.13 有

$$\lim_{x\to x_0} \ln u(x) = \ln a，$$

于是 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\cdot \ln u(x) = b\cdot \ln a$.

再由例 1.4.18， $\lim\limits_{u\to u_0} \mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{u_0}$，应用定理 1.13 有

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{[v(x)\cdot \ln u(x)]} = \mathrm{e}^{b\cdot \ln a} = a^b.$$

例 1.4.19 给出了幂指型函数求极限的规则，不难看出，极限过程 $x\to x_0$ 也可以换成其它五种极限过程的任一种，根据例 1.4.19，我们还可以考虑下面的例子.

例 1.4.20 设常数 $\alpha\neq 0$， $x_0>0$，求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} x^{\alpha}$

解： $\lim\limits_{x\to x_0} x^{\alpha} = \lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x_0} = {x_0}^{\alpha}$.

例 1.4.21 设常数 $a\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{x+a}{x-a})^x$.

解：　由于$(\frac{x+a}{x-a})^x=\left[(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}$，且

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}}=\mathrm{e}，\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2ax}{x-a}=2a，$$

于是$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\mathrm{e}^{2a}$.

例 1.4.22 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：因为$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{-x^2}}$，且

$$\lim_{x\to+\infty}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\mathrm{e}，\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{-x^2}=-\frac{1}{2}，$$

所以$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

下面讨论的极限十分重要，它们在后面几节中有重要的应用.

例 1.4.23 设常数$a>0$，且$a\neq1$，$\alpha\neq0$. 求下列极限

$$（1）\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}\quad（2）\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}\quad（3）\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

解：（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\ln a}=\frac{\ln\mathrm{e}}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$，特别地，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

（2）令$t=a^x-1$，则$x=\log_a(1+t)$，且当$x\to0$时，有$t\to0$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.$$

特别地，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$.

（3）令$t=\alpha\ln(1+x)$，则$t=\alpha\ln(1+x)$当$x\to0$时，有$t\to0$，于是由（1）（2）可得

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}$$

$$=\alpha.$$

最后我们讨论 Cauchy 收敛原理.

定理 1.15（Cauchy 收敛原理）

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证明：必要性. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是当 $x_1,x_2\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\varepsilon.$$

充分性. 由条件：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

设 $\{x_n\}$ 为 $x=x_0$ 去心邻域内收敛于 x_0 的点列，于是对上述的 $\delta>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，有 $0<|x_n-x_0|<\delta$. 即 $x_n\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，因此当 $m,n>N$ 时，$x_m,x_n\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，从而 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 于是 $\{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 列，根据数列极限的 Cauchy 收敛原理，$\{f(x_n)\}$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=B$.

下面说明极限值 B 不依赖数列 $\{x_n\}$ 的选取.

设 $\{y_n\}$ 也为 $x=x_0$ 去心邻域内收敛于 x_0 的点列，根据上面的论断，$\{f(y_n)\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=C$，只需证明 $B=C$ 即可.

设数列 $\{z_n\}$ 满足 $z_{2n-1}=x_n,z_{2n}=y_n$，则数列 $\{z_n\}$ 为 $x=x_0$ 去心邻域内收敛于 x_0 的点列，于是 $\{f(z_n)\}$ 收敛，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_{2n-1})$，故 $B=C$.

也就是说，存在实数 B，对于任意一个 $x=x_0$ 去心邻域内收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=B$，根据定理 1.14，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在. ▌

将定理 1.14、定理 1.15 的极限过程 $x\to x_0$ 换成其它极限过程的任何一种，结论仍然成立，读者学完本章第 5 节无穷大量后，可以尝试写出对应的结论，并证明它们，本小节不再赘述.

习题 1．4

（A 组）

1. 用 ε 语言分别叙述："$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$"与"$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\neq A$".

2. 用函数极限的定义证明下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$；　（2）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0$；　（4）$\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$；

（5）$\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-a})=0$；　（6）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$；

（7）$\lim\limits_{x\to x_0}\cos\dfrac{1}{x}=\cos\dfrac{1}{x_0}\ (x_0\neq 0)$

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

4. 讨论下列函数在点 $x=0$ 处的极限是否存在.

（1）$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$；　（2）$f(x)=\begin{cases}2x, & x>0,\\ a\sin x+b\cos x, & x<0.\end{cases}$

5. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，证明：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=A^2$；（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$.

6. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}(5-3x)(3x-5)$；　（2）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$；　（4）$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3}$；　（6）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-\arctan x}{x+\arctan x}$；

（7）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；　（8）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})$　；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}(p,q>0)$　；（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$；　　（12）$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[x]^2+4}{x^2+4}$.

7. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan x)^{\cot x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}$.

8. 确定 a,b 的值，使下列各式成立.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$.

(B 组)

1. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}$（$m\in\mathbf{N}^*$）；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$（$m,n\in\mathbf{N}^*$）；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}$（$m\in\mathbf{N}^*$）；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$；（$m,n\in\mathbf{N}^*$）；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$；（$m,n\in\mathbf{N}^*$）；

2. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

3. 试举出一个函数 $f(x)$，它只在一点处存在极限，在其余点处都没有极限.

4. 若 $\forall x\in(-1,1)$，有 $|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx|\leqslant|\sin x|$，证明 $|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k|\leqslant 1$.

§1.5　无穷小量与无穷大量

本小节我们介绍极限概念中两个重要的量：无穷小量与无穷大量，它们的产生是为了语言表达上的简洁，也为计算极限带来了方便.

§1.5.1 无穷小量的概念与性质

定义 1.20　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，记作

$$f(x)=o(1)\ \ (x\to x_0).$$

对于其他极限过程，包括数列极限都可以定义无穷小量，本节我们仅也以 $x\to x_0$ 的情形为例.

无穷小量指的是某一个极限过程下，极限等于 0 的量，也就是说一个量是否为无穷小量，要依赖其极限过程，例如 $f(x)=\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小量，但不是当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时的无穷小量．显然 $f(x)\equiv 0$ 是某一极限过程下的无穷小量，但反之不成立．某些初学者将无穷小量认为是“很小很小的正数”，或将无穷小量认为是数字 0，都是不对的．定义中 $o(1)$ 是一个形式的记号．根据无穷小量的定义，不难得到如下的结论.

定理 1.16 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 当且仅当 $f(x)=A+o(1)\ \ (x\to x_0)$

证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-A)=0$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-A)=0$ 当且仅当 $f(x)-A=o(1)\ \ (x\to x_0)$，于是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 当且仅当 $f(x)=A+o(1)\ \ (x\to x_0)$. ∎

根据极限的四则运算法则，我们可以得到

定理 1.17 $o(1)+o(1)=o(1)\ \ (x\to x_0)$，$o(1)-o(1)=o(1)\ \ (x\to x_0)$，

$$o(1)\cdot o(1)=o(1)\ \ (x\to x_0).$$

定理 1.17 中的符号都是形式的记号，根据定理 1.17，我们还可以得到在同一个极限过程下，有限个无穷小量的加法、减法、乘法均为无穷小量，但除法运算就不一定了，例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{x}=0$，也就是说两个无穷小量的商等于多少是未定的，我们也称这样的极限形式为未定式.

例 1.5.1 设函数 $f(x)=o(1)\ \ (x\to x_0)$，函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 的去心邻域内有界，证明：

$$f(x)\cdot g(x)=o(1)\ \ (x\to x_0).$$

证明：因为函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 的去心邻域内有界，存在 $M>0$ 及 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|g(x)|\leqslant M$，于是

$$|f(x)\cdot g(x)|\leqslant M|f(x)|.$$

因为 $f(x)=o(1)\ \ (x\to x_0)$，在上述不等式两端令 $x\to x_0$，由夹挤原理，有

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$，即 $f(x)\cdot g(x)=o(1)\ (x\to x_0)$.

例 1.5.1 的结论也经常被称为“有界变量乘以无穷小量仍为无穷小量”.

§1.5.2 无穷小量的比较与等价无穷小替换

容易看出，函数 $f(x)=1-\cos x$ 与 $g(x)=x$ 都是当 $x\to 0^+$ 时的无穷小量，因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x=\frac{1}{2}\times 0=0 \quad \text{（例 1.4.12）},$$

由保号性，$\exists\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}<1$，即 $f(x)<g(x)$，这表明 $f(x),g(x)$ 趋近于 0 的“速度”有差别，为了描述这一事实， 我们引入下面概念.

定义 1.21　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且在 $x=x_0$ 的去心邻域内， $g(x)\neq 0$.

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时， $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量， $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))\,(x\to x_0)$.

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，且 $c\neq 0$，则称当 $x\to x_0$ 时，　$f(x)$ 是与 $g(x)$ 同阶的无穷小量. 特别地， 若 $c=1$，则称当 $x\to x_0$ 时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量，记作

$$f(x)\sim g(x)\,(x\to x_0).$$

（3）若 $\exists k\in\mathbf{N}^*$，使得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=c$，且 $c\neq 0$，则称当 $x\to x_0$ 时， $f(x)$ 是 k 阶无穷小量.

定义 1.21 中的极限过程 $x\to x_0$ 也可以换成其它几种极限过程： $x\to {x_0}^{\pm}, x\to\infty$ 及 $x\to\pm\infty$. 对单侧极限过程 $x\to {x_0}^{\pm}$，也可以考虑 $k>0$ 但 k 不是整数时的 k 阶无穷小量：

若 $\lim\limits_{x\to {x_0}^{\pm}}\dfrac{f(x)}{|x-x_0|^k}=c$，且 $c\neq 0$，则称当 $x\to {x_0}^{\pm}$ 时， $f(x)$ 是 k 阶无穷小量.

根据例 1.4.11，若常数 $a>1$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$，于是有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^{-x}}{\frac{1}{x}}=0$，从而

$$a^{-x}=o(\frac{1}{x})\ (x\to+\infty),$$

类似地，$\frac{1}{x}=o(\frac{1}{\log_a x})\ (x\to+\infty)$.

值得注意的是，无穷小量阶的比较首先讨论的对象是两个无穷小量，如果不是无穷小量，不能进行阶的比较. 另外，并不是任何两个无穷小量都可以比阶，例如 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$，但是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

下面我们列出几个常用的等价无穷小.

设常数 $\alpha\neq0$，$a>0$ 且 $a\neq1$. 根据例 1.4.12，例 1.4.14，例 1.4.23，我们有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x\cdot\ln a}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{\frac{x}{\ln a}}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1,$$

于是当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$a^x-1\sim x\ln a$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

等价无穷小量在极限的运算中十分常见，我们有如下的定理：

定理 1.18（等价无穷小替换） 若当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $f_1(x)$ 是等价无穷小量，$g(x)$ 与 $g_1(x)$ 是等价无穷小量，且在 $x=x_0$ 的去心邻域内，$f_1(x)\neq0, g_1(x)\neq0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

证明：由已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{g_1(x)}=1$ 及保号性可知，在 $x=x_0$ 的去心邻域内 $g(x)\neq0$. 于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{g_1(x)}{g(x)}.$$

因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $f_1(x)$ 是等价无穷小量，$g(x)$ 与 $g_1(x)$ 是等价无穷小量，所

以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{f_1(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g_1(x)}{g(x)}=1$，于是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$. $\blacksquare$

直观上看，计算 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，直接将分子、分母分别替换成它们各自的等价无穷小量，这样就可以使计算得到简化.

例 1.5.2 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\arctan 5x}$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^4}-1}{1-\cos x^2}$ （3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\cdot\ln(1+x^2)}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\arctan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^4}-1}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2x^4}{\frac{1}{2}(x^2)^2}=2$.

（3）
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\cdot\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}{x^2\cdot x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^2\cdot x^2}$$
$$=\frac{1}{8}.$$

在使用等价无穷小替换时，要注意两点：

（1）从定理 1.18 的证明过程中可以看出，等价无穷小替换的量要在极限点附近的去心邻域内不等于 0，否则无法作除法. 下面的做法是典型的错误：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

错误的原因是：当 $x\to 0$ 时，$x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 等价替换了 $\sin(x^2\sin\dfrac{1}{x})$，但是 $x\to 0$ 的过程中 $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 是有可能等于 0 的，请读者思考正确的过程.

（2）从定理 1.18 的证明过程中还可以看出，等价无穷小替换在乘除运算中可以使用，幂指运算中不能使用，加减运算中要依据情况使用. 例如以下两种做法都是正确的：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}$$

$$=1-(-1)$$

$$=2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}$$

$$=2.$$

又例如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$是正确的，

但做法$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$是错误的.

在加减运算中，什么情况下可以使用等价无穷小替换呢？我们留给读者思考.

§1.5.3 无穷大量

以上的几节我们讨论的都是极限存在的情形，本小节我们讨论极限不存在的特殊情形，也就是无穷大量.

定义 1.22 （无穷大量）

（1）设$\{a_n\}$是一个数列. 若$\forall M>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当$n>N$时，有$|a_n|>M$，则称数列$\{a_n\}$为当$n\to\infty$时的无穷大量，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，或$a_n\to\infty$（$n\to\infty$）.

（2）设$\{a_n\}$是一个数列. 若$\forall M>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当$n>N$时，有$a_n>M$，则称数列$\{a_n\}$为当$n\to\infty$时的正无穷大量，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，或$a_n\to+\infty$（$n\to\infty$）.

（3）设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义. 若$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时，有$|f(x)|>M$，则称$f(x)$为当$x\to x_0$时的无穷大量，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，或$f(x)\to\infty$（$x\to x_0$）.

对于其它几种极限过程：$x\to x_0^{\pm}$，$x\to\infty$及$x\to\pm\infty$，同样可以定义无穷大量、正无穷大量、负无穷大量. 读者可以尝试写出这些定义.

需要强调的是，无穷大量是极限不存在的特殊情况，尽管我们仍然记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，这里只是借用了极限的符号.

定理 1.19 无穷大量的倒数为无穷小量，非零的无穷小量的倒数为无穷大量.

证明：以 $x \to x_0$ 的情况为例.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则 $\forall \varepsilon > 0$，对 $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$，$\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$，从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$，且在 $x = x_0$ 的某去心邻域内 $g(x) \neq 0$，则 $\forall M > 0$，对 $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$，$\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $|g(x)| < \dfrac{1}{M}$，又 $g(x) \neq 0$，所以 $\left|\dfrac{1}{g(x)}\right| > M$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \infty$. ▌

无穷大量的证明过程和数列极限、函数极限的证明是十分类似的，在本小节中不再一一举例. 特别强调的是，一个函数是否为无穷大量，一定要指明其极限过程.

例 1.5.3 函数 $f(x) = \ln x$ 是当 $x \to 0^+$ 时的负无穷大量，是当 $x \to +\infty$ 时的正无穷大量，也是当 $x \to 1$ 时为无穷小量.

例 1.5.4 函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 是当 $x \to +\infty$ 时的正无穷大量，是当 $x \to -\infty$ 时的无穷小量.

例 1.5.5 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小量，是当 $x \to 0^+$ 时的正无穷大量，也是当 $x \to 0^-$ 时的负无穷大量.

习题 1．5

(A 组)

1. 一个函数是否是无穷小（大）量是否依赖于极限过程？是否一定要指明极限过程？

2. 当 $x \to 0^+$ 时，确定下列无穷小量的阶，并按照阶的从低到高排列出来.

$$\sin x^2，\ 2\sqrt{x}+x^3，\ \mathrm{e}^{x^3}-1，\ \ln(1+x^{\frac{2}{3}})，\ \sin(\tan x)，\ 1-\cos x^2，\ \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}.$$

3. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = o(x^m)$，$g(x) = o(x^n)$，其中 m, n 为正整数, 且 $m > n$. 证明:

（1） $f(x)+g(x)=o(x^n)$；（2） $f(x)\cdot g(x)=o(x^{m+n})$.

4. 用定义证明下列数列为无穷大量.

（1） $a_n=\ln n$；　　（2） $a_n=(-1)^n n!$.

5．举出满足条件的数列：

（1）无界数列，但是不趋于无穷；

（2）有界数列，但不收敛；

（3）发散数列，但含有若干收敛子列.

6. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，$a_n\geqslant b_n$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$.

7. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，数列 $\{b_n\}$ 有界，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$.

8. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A>0$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=+\infty$.

9. 求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sin\sqrt{x}}$；　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{x}$；（$a>0$，且 $a\neq 1$）

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos kx^2}}{x^4}$；（$k\neq 0$）　　（6） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$；

（7） $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\sin\frac{1}{x}}-1)$；　　（8） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$；

（9） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$；　　（10） $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$.

10. 求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^3 6x}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 9}{x-9}$；　　（4） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$；

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$；　　（6） $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x}{x}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

11. 设常数 $a>0$，且 $a\neq 1$，确定 p 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$ 存在.

（B 组）

1. 某种极限过程下，分别考虑以下的量是不是无穷小量？是不是无穷大量？并举例说明.
（1）恒等于零的函数；
（2）两个无穷小量之和；
（3）两个无穷小量之积；
（4）两个无穷大量之和；
（5）两个无穷大量之积；
（6）一个无穷小量与一个无穷大量之和；
（7）一个无穷小量与一个无穷大量之积；
（8）无穷多个无穷小量之和；
（9）无穷多个无穷小量之积.
2. 某种极限过程下, 考虑以下问题, 并举例说明.
（1）是否存在与零函数同阶的无穷小量？
（2）所有的无穷小量中，是否有阶数最高（最低）的无穷小量？
（3）是否任意两个无穷小量都可以比阶？
3. 证明：数列 $\{a_n\}$ 是无穷大量当且仅当其任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也是无穷大量.
4. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 当且仅当任意一个趋于 ∞ 的点列 $\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.
5. 求下列极限.
（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$；
（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；
（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$；　　（6）$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}), m,n\in\mathbf{N}^*$；
（7）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}, m,n\in\mathbf{N}^*$；　　（8）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n}{n})^n, |x|<1$.

§1.6　函数的连续性

连续函数是微积分的主要研究对象之一. 本节我们利用函数的极限讨论函数的连续与间断的概念，连续函数的基本性质、初等函数的连续性，闭区间连续函数的性质以及函数的一致连续性.

§1.6.1 函数的连续与间断

自然界中的变化可以分为渐变和突变. 例如正常情况下，气温随时间的变化是渐变的，即在很短的时间间隔内，气温的变化会很小. 而当寒潮来袭时，气温会骤降，短时间内气温出现突变. 在数学上，这种渐变与突变我们用连续与间断来刻画.

定义 1.23（函数在一点的连续性） 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的 $\varepsilon-\delta$ 语言为： $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 由定义 1.23，函数在一点连续的定义蕴涵两个要点：

（1）函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 及其附近有定义.

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且与 $f(x_0)$ 相等.

根据例 1.4.1，例 1.4.8，例 1.4.17，例 1.4.18，例 1.4.20 可得

例 1.6.1 函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 在各自的定义域内的每一点处均连续.

例 1.6.2 设常数 $\alpha\neq 0$，$a>0$，且 $a\neq 1$. 函数 $y=x^{\alpha}$，$y=a^{x}$，$y=\log_a^x$ 在各自的定义域内的每一点处均连续.

类似于函数的单侧极限，也可以考虑函数的单侧连续性.

定义 1.23（函数在一点的单侧连续性）

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处左连续.

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处右连续.

由定理 1.8 不难得到：

定理 1.20 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处既左连续又右连续.

例 1.6.3 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是左连续的，不是右连续的，在

$x \neq 0$ 的点处均连续.

例 1.6.4 函数 $f(x)=[x]$ 在整点处是右连续的，不是左连续的.

解：设 $n\in \mathbf{Z}$，则 $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=\lim\limits_{x\to n^+} n=n$，又 $f(n)=n$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=n$ 处右连续，$\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=\lim\limits_{x\to n^-} n=n-1$，于是函数 $f(x)$ 在 $x=n$ 处不是左连续的.

定义 1.24（函数在区间上的连续性）若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处均连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且在点 $x=a$ 处右连续，点 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

区间 (a,b) 内连续函数的全体构成的集合记作 $C(a,b)$，区间 $[a,b]$ 内连续函数的全体构成的集合记作 $C[a,b]$.

下面我们讨论间断的概念.

定义 1.25 （间断）若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断.

定义 1.26 （间断点的分类） 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在，则称点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，否则称点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

第一类间断点又分为跳跃型和可去型. 设点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，我们有：

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

（2）若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，或者函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处没有定义，则称点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

“可去”的意思是如果我们重新定义 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的值，即定义 $f(x_0):=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，这样点 $x=x_0$ 就成为函数 $f(x)$ 的一个连续点，也就是说可去间断点处可以通过补充或修改函数在该点的定义，使得函数在该点连续.

例 1.6.5 点 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 与 $g(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 可去间断点.

例 1.6.6 证明：点 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的跳跃间断点.

证明：因为 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，所以点 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的跳跃间断点.

例 1.6.7 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调，则 $f(x)$ 如果有间断点，一定是第一类的.

证明：　根据例 1.4.5，函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调，则 $\forall x_0\in(a,b)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 均存在，从而如果 $x_0\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 的间断点，那么 $x=x_0$ 是第一类的.

第二类间断点的分类比较复杂，这里仅介绍两类特殊的情形. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则称点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点. 函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处左、右极限均不存在，其图形在 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间往复振荡，这样类型的第二类间断点我们也称为振荡间断点.

例 1.6.8 证明：点 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点.

证明：因为 $\lim\limits_{x\to0+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以点 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点.

下面讨论函数的四则运算与复合运算的在一点处的连续性. 根据函数极限四则运算法则（定理 1.10）和复合函数的极限运算法则（定理 1.13），可以分别得到如下的定理.

定理 1.21 设函数 $f(x),g(x)$ 均在点 $x=x_0$ 处连续，则

（1）函数 $cf(x)$（c 为常数），$f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

（2）当 $g(x_0)\neq0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

定理 1.22 设函数 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，函数 $f(u)$ 在点 $u=g(x_0)$ 处连续，则复合函数 $(f\circ g)(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

§1.6.2 闭区间连续函数的性质

本小节我们讨论闭区间连续函数的性质，包括零点存在定理(介值定理)，反函数连续性

定理，有界性定理与最大最小值定理.

定理 1.22（零点存在定理）设函数 $f(x)\in C[a,b]$，$f(a)\cdot f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

证明：不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$. 设 $[a_1,b_1]=[a,b]$，则 $f(a_1)<0, f(b_1)>0$.

考察 $x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，若 $f(x_1)=0$，则取 $\xi=x_1$；若 $f(x_1)<0$，取 $[a_2,b_2]=[x_1,b_1]$；若 $f(x_1)>0$，取 $[a_2,b_2]=[a_1,x_1]$.

继续做下去，如果在有限步可以取到 ξ，则定理得证，否则一直进行下去可以得到一系列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$，满足

（1）$\forall n\in\mathbf{N}^*,[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$；

（3）$\forall n\in\mathbf{N}^*, f(a_n)<0, f(b_n)>0$.

根据区间套定理，存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，易得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

因为函数 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 处连续，因此 $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，根据归结原则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi)$. 因为 $\forall n\in\mathbf{N}^*, f(a_n)<0$，由极限的保号性，有 $f(\xi)\leqslant 0$，同理 $f(\xi)\geqslant 0$，于是 $f(\xi)=0$. ▌

很多读者在初等数学阶段就已经很熟悉零点存在定理，但其严格的证明需要用到实数理论，在证明的过程中容易提炼出“二分法”求根的思想与方法.

定理 1.23（介值定理）设函数 $f(x)\in C[a,b]$，则介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个实数 c，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.

证明：令 $F(x)=f(x)-c$，则 $F(x)\in C[a,b]$，且

$$F(a)\cdot F(b)=(f(a)-c)\cdot(f(b)-c)<0,$$

由零点存在定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=c$. ▌

我们利用了零点存在定理证明了介值定理，如果介值定理中的c为0，就回到了零点定理，所以零点存在定理与介值定理是等价的.

例 1.6.9 设 m 为正奇数，$a_1,\cdots,a_m$ 为实数．证明：多项式 $f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ 至少有一个零点.

证明：因为 $f(x)=x^m(1+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m})$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty，\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty，$$

故 $\exists M>0$，使得 $f(-M)<0$，且 $f(M)>0$．由零点存在定理，$\exists\xi\in(-M,M)\subseteq(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

例 1.6.10（不动点定理） 设函数 $f(x)\in C[a,b]$，其值域 $J(f)\subseteq[a,b]$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证明：令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)\in C[a,b]$，且

$$F(a)\cdot F(b)=(f(a)-a)\cdot(f(b)-b).$$

因为 $J(f)\subseteq[a,b]$，所以 $f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$，故 $F(a)\cdot F(b)\leqslant 0$，由零点存在定理知，$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

在实际生活中很容易能找到不动点定理对应的例子，例如龙卷风的风眼.

下面我们介绍反函数连续性定理. 为了叙述方便，本小节用 $\langle a,b\rangle$ 表示以 a 为左端点、b 为右端点的开区间，或闭区间，或半开半闭区间.

引理 1.1 设函数 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$，则 $f(x)$ 的值域 $J(f)$ 构成一个区间.

证明：要证明 $J(f)$ 构成一个区间，只需证 $\forall y_1,y_2\in J(f)$，且 $y_1<y_2$，有 $[y_1,y_2]\subseteq J(f)$.

由于 $J(f)$ 是 f 的值域，故 $\exists x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$ 使得 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$. 又因为 $\langle a,b\rangle$ 也是一个区间，所以 $[x_1,x_2]\subseteq\langle a,b\rangle$（或 $[x_2,x_1]\subseteq\langle a,b\rangle$），于是 $f(x)\in C[x_1,x_2]$（或 $f(x)\in C[x_2,x_1]$），由介值定理，区间 $[y_1,y_2]$ 中每个点都在 $f(x)$ 的值域内，即

$[y_1, y_2]\subseteq J(f)$，所以$J(f)$构成一个区间. ▌

显然，引理 1.1 的逆命题是不成立的，但如果加上条件“函数$f(x)$单调”，那么逆命题就是成立的.

引理 1.2 设函数 $f(x)$ 在 $\langle a,b\rangle$ 上单调，且值域 $J(f)$ 构成一个区间，则 $f(x)\in C\langle a,b\rangle$.

证明：以 $f(x)$ 在$\langle a,b\rangle$上单增为例，用反证法证明.

假设 $f(x)$ 在$\langle a,b\rangle$不连续，$x_0\in\langle a,b\rangle$为其间断点，不妨设$x_0\in(a,b)$，根据例 1.6.7 可知，点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在，设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$.

因为$f(x)$在$\langle a,b\rangle$上单增，所以当$a<u<x_0<v<b$时，有

$$f(u)<f(x_0)<f(v),$$

令$u\to x_0^-, v\to x_0^+$，可得$A\leqslant f(x_0)\leqslant B$. 因为点$x=x_0$为函数$f(x)$的第一类间断点，于是$A,B$至少有一个不等于$f(x_0)$，不妨设$f(x_0)\neq B$.

当$a<x<x_0$时，$f(x)<f(x_0)$；当$x_0<x<b$时，取v满足：$x_0<v<x$，从而$f(v)<f(x)$，令$v\to x_0^+$，有$f(x)\geqslant B$，从而区间$(f(x_0),B)$不在值域$J(f)$中，这与$J(f)$构成一个区间的条件矛盾！因此$f(x)\in C\langle a,b\rangle$. ▌

有了以上两个引理，我们可以证明反函数连续性定理.

定理 1.24 （反函数连续性定理）设函数$y=f(x)$在$\langle a,b\rangle$上单调、连续，其值域为J，则其反函数$x=f^{-1}(y)$在J上连续.

证明：由于$f(x)$在$\langle a,b\rangle$上连续，根据引理 1.1 有，$f(x)$的值域J构成一个区间. 又因为函数$y=f(x)$在$\langle a,b\rangle$上单调，故其反函数$x=f^{-1}(y)$在J上单调，又因为其值域$\langle a,b\rangle$是一个区间，根据引理 1.2 知，$x=f^{-1}(y)$为J上的连续函数.

▌

根据例 1.6.1，结合定理 1.24，我们可以得到

例 1.6.11 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arc}\cot x$ 在其各自定义域内的每个点处都是连续的.

到此为止，我们就完整的证明了所有的基本初等函数都是它们各自的定义域上的连续函数. 根据定义 1.10，初等函数都是由基本处等函数通过有限次四则运算与复合运算而成的，应用定理 1.21，定理 1.22 可得：

定理 1.25　每一个初等函数均为其定义区间上的连续函数.

在定理 1.25 中，指明的是定义区间，而不是定义域，是因为我们不考虑函数在定义域上的“孤立点”处的连续性. 如果某一个定义域内的点，其某个去心邻域内没有定义域的其他点，这个点就是定义域的孤立点.

本小节最后，我们介绍有界性定理与最大最小值定理.

定理 1.26 （**有界性定理**）设函数 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明：假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists x_n\in[a,b]$，$|f(x_n)|>n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$. 由 $\{x_n\}\subseteq[a,b]$，得 $\{x_n\}$ 有界，由 Bolzano-Weistrass 定理，$\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$，由极限的保号性 $\xi\in[a,b]$.

因为 $\{f(x_{n_k})\}$ 是 $\{f(x_n)\}$ 的子数列，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$.

由于 $f(x)\in C[a,b]$，所以 $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$，又因为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$，根据归结原则，有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi)$，矛盾！ ▌

证明了闭区间连续函数的有界性之后，我们进一步要说明闭区间连续函数最大最小值的存在性.

定理 1.27（**最大最小值定理**）设函数 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\exists\xi,\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)\leqslant f(x)\leqslant f(\eta),\ x\in[a,b].$$

证明：只证明最小值的存在性，同理可证最大值的存在性.

因为函数 $f(x)\in C[a,b]$，由定理 1.26 知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，根据确界存在定理，其下确界存在，设 $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$. 由下确界的定义，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$m \leqslant f(x_n) < m + \frac{1}{n},$$

由此可知$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = m$. 由$\{x_n\} \subseteq [a,b]$，得$\{x_n\}$有界，由 Bolzano-Weistrass 定理，$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，由极限的保号性$\xi \in [a,b]$.

因为$\{f(x_{n_k})\}$是$\{f(x_n)\}$的子数列，所以$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = m$.

由于$f(x) \in C[a,b]$，所以$\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$，又因为$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，根据归结原则，有$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$. 由极限的唯一性，有$f(\xi) = m$，即$f(\xi) = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，所以$f(\xi)$是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值. ▌

证明最大最小值定理之后，有界性定理自然就没有实际的用途了，但读者要明确其中的逻辑关系，我们是先证明了有界性定理，进一步证明了最大最小值定理，这其中的逻辑次序是不可改变的.

例 1.6.12 设函数$f(x) \in C[a,b]$，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$为$n$个实数. 证明：$\exists \theta \in [a,b]$，使得

$$f(\theta) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

证明：因为函数$f(x) \in C[a,b]$，所以$\exists \xi, \eta \in [a,b]$，使得

$$f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta), x \in [a,b],$$

又$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$，于是$f(\xi) \leqslant \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leqslant f(\eta)$，根据介值定理，$\exists \theta \in [a,b]$，使得

$$f(\theta) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

§1.6.3 函数的一致连续性

前面我们讨论了函数在一个区间上的连续性. 例如，函数$f(x)$在区间I上连续，就是指函数$f(x)$在I的每个点x_0处连续（端点单侧连续），即

$$\forall x_0 \in I, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

也就是说，

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\text{当} |x - x_0| < \delta \text{时，有} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

从定义中看出，这里的δ通常依赖x_0与ε，且取法不唯一，为了叙述方便，我们假定这里所讨论的δ是满足上述不等式中“最大的”，即$\forall x_0 \in I$，$\forall \varepsilon > 0$，取

$$\delta_{x_0,\varepsilon} = \sup\{\delta \mid \text{当} |x - x_0| < \delta \text{时，有} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} .$$

对于点$x = x_0$来说，$\delta_{x_0,\varepsilon}$相当于一个“标准”，只要x与x_0的距离小于$\delta_{x_0,\varepsilon}$时，$f(x)$与$f(x_0)$的距离就小于ε．但区间I中不同的点x_0，其“标准”$\delta_{x_0,\varepsilon}$一般不同，甚至随着x_0的变化，其“标准”可能会变得越来越“严格”，例如函数$f(x) = \dfrac{1}{x}$.

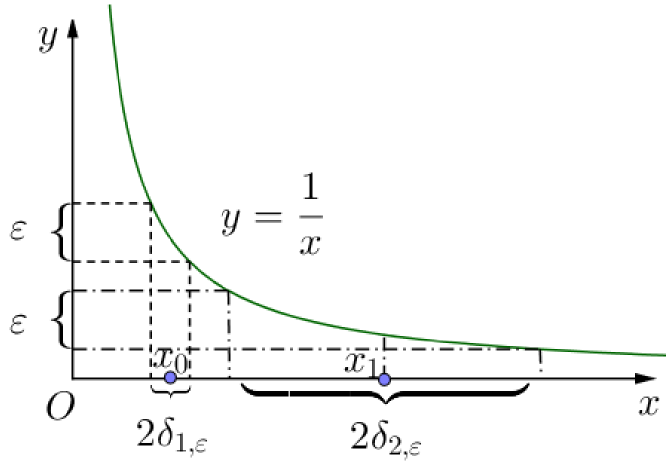


图 1-18

如图 1-18，函数$f(x) = \dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$连续，于是$\forall x_0 \in (0,+\infty)$，$\forall \varepsilon > 0$，不妨设$\varepsilon < \dfrac{1}{x_0}$，要使$\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$，只需$\dfrac{1 - x_0\varepsilon}{x_0} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1 + x_0\varepsilon}{x_0}$，只需$\dfrac{x_0}{1 + x_0\varepsilon} < x < \dfrac{x_0}{1 - x_0\varepsilon}$，也就是说，使得$\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$的$x$构成的区间长度为$\dfrac{x_0}{1 - x_0\varepsilon} - \dfrac{x_0}{1 + x_0\varepsilon} = \dfrac{2{x_0}^2\varepsilon}{1 - {x_0}^2\varepsilon^2}$，这也就意味着即使取相同的$\varepsilon$，对于不同的点$x_0$，取到的$\delta_{x_0,\varepsilon}$也会不同，当$x_0$越接近0时，所取到的$\delta_{x_0,\varepsilon}$会越来越小，也就是说使不等式$\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$成立的标准越“苛刻”．

我们讨论的连续函数中是否有这样一类连续函数，其对于不同的点，能够找到一个相同的δ_ε，也就是找到一个不依赖于x_0的δ_ε，它们对每个点的连续性都有一个公共的标准，

这就是本节课要讨论的函数的一致连续性.

这里的“一致”是“公平性”的体现，我们在生活中也有许多“一致”的例子. 例如大学本科阶段的课程以60分为及格就是“一致”的体现，不论哪位同学，只要期末总评成绩大于等于60分，那么就是及格，这个及格线对所有同学是一致的，如果根据不同的同学设置不同的及格线，那么及格线就是不一致的，就会导致不同的同学其及格标准可能会越来越苛刻.

下面我们给出一致连续的定义.

定义 1.27（一致连续） 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上定义. 若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_{\varepsilon}>0$，使得 $\forall x, y \in I$，只要 $|x-y|<\delta_{\varepsilon}$，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续反映的是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个整体性质.

例 1.6.13 证明函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明： $\forall x, y \in(-\infty,+\infty)$，有

$$
\begin{aligned}
|\cos x-\cos y| &= \left|2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\right| \\
&\leqslant 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \\
&\leqslant |x-y| .
\end{aligned}
$$

$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，$\forall x, y \in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x-y|<\delta$，就有 $|\cos x-\cos y|<\varepsilon$，所以函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

由一致连续的定义我们容易知道，函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，则 $f(x)$ 在区间 I 上连续，但反之不一定成立，也就是说一致连续性质比连续性质对函数的要求“高”，那么除了定义，如何判断函数的一致连续性呢？下面我们给出判别函数在某一区间一致连续的充要条件.

定理 1.28（一致连续的充要条件） 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续当且仅当任意两个数列 $\{x_n\},\{y_n\} \subseteq I$，当 $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n-y_n)=0$ 时，均有 $\lim\limits_{n \to \infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

证明：必要性. 因为函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，所以 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_{\varepsilon}>0$，使得 $\forall x, y \in I$，只要 $|x-y|<\delta_{\varepsilon}$，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

任意两个数列 $\{x_n\},\{y_n\} \subseteq I$，若 $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n-y_n)=0$，则对上述的 $\delta_{\varepsilon}>0$，$\exists N \in \mathbf{N}^{*}$，当 $n>N$ 时，$|x_n-y_n|<\delta_{\varepsilon}$，从而 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$，于是 $\lim\limits_{n \to \infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

充分性. 采用反证法. 假设函数 $f(x)$ 在区间 I 上非一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x_\delta, y_\delta\in I$，虽然 $|x_\delta-y_\delta|<\delta$，但是 $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geqslant\varepsilon_0$.

对 $\delta=1$，$\exists x_1,y_1\in I$，虽然 $|x_1-y_1|<1$，但是 $|f(x_1)-f(y_1)|\geqslant\varepsilon_0$.

对 $\delta=\dfrac{1}{2}$，$\exists x_2,y_2\in I$，虽然 $|x_2-y_2|<\dfrac{1}{2}$，但是 $|f(x_2)-f(y_2)|\geqslant\varepsilon_0$.

………,

对 $\delta=\dfrac{1}{n}$，$\exists x_n,y_n\in I$，虽然 $|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$，但是 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$，

………,

于是我们得到了两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq I$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))\neq0$，与已知矛盾！故函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续. ▌

例 1.6.14　证明：函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证明：取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则 $x_n,y_n\in(0,1)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\dfrac{1}{x_n}-\sin\dfrac{1}{y_n})=1$，根据定理 1.28，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

讨论函数的一致连续性时要指明区间，例如函数 $f(x)=x^2$ 在任何有界区间上都是一致连续的，但是在 $(-\infty,+\infty)$ 上却是非一致连续的，读者可以尝试证明.

对于定义在闭区间上的连续函数，其连续性与一致连续性是等价的，这就是下面的定理.

定理 1.29（**康托定理，**Cantor）　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明：假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致连续，根据定理 1.28，$\exists\varepsilon_0>0$，及两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq[a,b]$，$|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$，但是 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$.

由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有界，根据例 1.3.2 可知，$\{x_n\},\{y_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\},\{y_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，则 $x_0\in[a,b]$，又 $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\dfrac{1}{n_k}\leqslant\dfrac{1}{k}$，于是 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}-y_{n_k})=0$，从而

$\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$.

又因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，根据归结原则，有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)，\ \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0)，$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$，与 $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾！于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. ▌

例 1.6.15　设函数 $f(x)\in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，根据 Cauchy 收敛原理，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M \geqslant a$，使得当 $x, y \in [M,+\infty)$ 时，有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

另一方面, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, M+1]$ 连续，由定理 1.29 知，函数 $f(x)$ 在区间 $[a, M+1]$ 上一致连续，故对上述的 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta_1 > 0$，$\forall x, y \in [a, M+1]$，只要 $|x-y| < \delta_1$，就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{1, \delta_1\}$，$\forall x, y \in [a,+\infty)$，当 $|x-y| < \delta$ 时，要么 $x, y \in [a, M+1]$，要么 $x, y \in [M,+\infty)$，两种情况下均有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$，故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

习题 1.6

（A 组）

1. 思考下列问题，并说明原因.

（1）若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，是否有 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的邻域内有定义？

（2）若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，是否有 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的邻域内连续？

（3）若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处均不连续，那么 $f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处是否也不连续？

2. 研究下列函数在点 $x = 0$ 处的连续性.

（1）$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$　　（2）$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

（3） $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$.　　　　（4） $f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. 确定常数 a，使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

（1） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0,\\ 3x+a, & x\geqslant 0.\end{cases}$；　（2） $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0.\end{cases}$

4. 指出下列函数的间断点及其类型.

（1） $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$　（2） $f(x)=[|\sin x|]$.　（3） $f(x)=\operatorname{sgn}(|x|)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 证明：$|f(x)|, f^2(x)$ 也在点 $x=x_0$ 处连续. 反之成立吗？

6. 设函数 $f(x)\in C[0,2a]$，且 $f(0)=f(2a)$. 证明：$\exists\xi\in[0,a]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

7. 设 $a_{2m}<0$，证明：实系数多项式 $x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$ 至少有两个零点.

8. 设 $a<b<c$，证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}$ 在区间 (a,c) 内恰有两个零点.

9. 设 $f(x)\in C[a,b)$, 且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

10. 设函数 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有最小值.

11. 证明下列函数在给定区间上一致连续

（1） $f(x)=x^2$，$x\in(1,3)$；　　（2） $f(x)=\ln x$，$x\in(2,+\infty)$；

（3） $f(x)=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；　（4） $f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

12. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 且在 $[b,c]$ 上一致连续，证明：$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上一致连续.

13. 若函数 $f(x),g(x)$ 在 I 上一致连续，k_1,k_2 为常数. 证明：$k_1f(x)+k_2g(x)$ 在 I 上一致连续.

14. 证明下列函数在给定区间上非一致连续.

（1） $f(x)=x^2$，$x\in[0,+\infty)$；　　（2） $f(x)=\ln x$，$x\in(0,+\infty)$；

（3） $f(x)=\sin x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$；　（4） $f(x)=x\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

15. 已知函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上一致连续，且 $f(x), g(x)$ 有界，证明：$f(x)g(x)$ 在 I 上一致连续.

（B 组）

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$，确定 $f(x)$ 的间断点.

2. 若连续函数在有理点处的函数值为 0，则此函数恒为 0.

3. 设函数 $f(x)\in C[0,1], f(0)=f(1)$, 试证：

（1）$\exists\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{2})$；（2）$\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{n})$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x^2)=f(x)$. 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，证明：$f(x)$ 恒为常数.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足：$\exists L>0, \forall x, y\in I$, $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$.

（1）证明：$f(x)$ 在 I 上一致连续.

（2）若 $L\in(0,1)$, 且 $a_1\in\mathbf{R}$, $a_{n+1}=f(a_n)$，证明：$\{a_n\}$ 收敛，且其极限值为函数 $f(x)$ 唯一的不动点.

6. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{\sin x}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的连续性.

7. 已知函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$. 若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，求常数 a, b.

8. 试举出一个函数 $f(x)$，它只在 $x=0,1,2$ 三点连续，其余的点均为第二类间断点.

9. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，并且存在反函数，证明：$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调.

10. 证明：不存在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$，使得 $f(f(x))=\mathrm{e}^{-x}$.

11. 已知函数 $f(x)\in C(a,b)$.

（1）证明：$f(x)$ 在 (a,b) 一致连续的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to a+}f(x), \lim\limits_{x\to b-}f(x)$ 均存在

（2）利用（1）证明函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

（3）若 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，证明： $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

12. 设 n 为正整数，证明： $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

13. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续， $g(u)$ 在 (a,b) 上一致连续，且 $\forall x\in I$ ，有 $f(x)\in(a,b)$. 证明： $g(f(x))$ 在区间 I 上一致连续.

14. 已知函数 $f(x)$ 在上 $[0,+\infty)$ 连续，

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ ，证明： $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续；

（2）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=0$ ，证明： $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非一致连续.