1. 求函数 $y=\frac{x^n}{1+x}$ 的 $n$ 阶导数.

解：当 $n$ 为奇数

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$$

$$\frac{x^n}{1+x}=(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)-\frac{1}{x+1}$$

$$y^{(n)}=\left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(n)}=-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

当 $n$ 为偶数

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$$

$$x^n-1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+x-1)$$

$$\frac{x^n}{1+x}=(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)+\frac{1}{x+1}$$

$$y^{(n)}=\left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

2. 求函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的 $n$ 阶导数.

解：$y'=\left(x^{-1}\ln x\right)'=(-1)x^{-2}\ln x+x^{-2}=(-1)x^{-2}(\ln x-1)$

$$y''=(-1)(-2)x^{-3}(\ln x-1)+(-1)x^{-3}$$

$$=(-1)(-2)x^{-3}(\ln x-1-\frac{1}{2})$$

$$y'''=(-1)(-2)(-3)x^{-4}(\ln x-1-\frac{1}{2})+(-1)(-2)x^{-4}$$

$$=(-1)(-2)(-3)x^{-4}(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!x^{-(n+1)}(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n})$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x\cos x)(x-\sin x\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos x+\sin x\sin x}{3x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}=\frac{4}{3}$$

4. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{2-x}$ 的（　　）

A．跳跃间断点　　B．无穷间断点

C．连续点　　D．可去间断点

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\cos x+1}{\ln(1+x)+x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\cos x+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\cos x+1}{\ln(1+x)+x^2}=1$$