

一般情况下，在求  $f(x)$  的 **Taylor** 公式时，需要计算  $f(x)$  的各阶导数，这往往是一项比较繁杂的计算工作。因此经常用间接方法求一些函数的 **Taylor** 公式。这种方法的理论根据是下述定理：

定理：（Taylor 多项式唯一性定理）设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有直至  $n$  阶的导数，如果多项式  $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$  满足条件

$$f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n] = o[(x - x_0)^n] \quad (x \rightarrow x_0)$$

则必有

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \quad \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

这就是说满足本定理条件的多项式  $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$  必定是  $f(x)$  在点  $x_0$  的  $n$  阶 **Taylor** 多项式，即具有唯一性。

例如在求  $e^{x^2}$  的麦克劳林展开式时，就可以用  $x^2$  代替  $e^x$  展开式中的  $x$  得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$$