3．利用极限定义证明以下极限：

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$　　　$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

证明：$\forall\varepsilon>0$，

$$\text{由于}\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\arctan\frac{1}{n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\quad\arctan\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}<\tan\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\tan\varepsilon}=\cot\varepsilon\Rightarrow N=[\cot\varepsilon]$$

当$n>N$，就有$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$，由极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$

性质 3　数列$\{a_n\}$收敛于A当且仅当它的任何子列都收敛于A.

8. 证明：数列$\{x_n\}$收敛于A当且仅当它的两个子列$\{x_{2n}\}$，$\{x_{2n-1}\}$均收敛于A

设$\{x_n\}(n=1,2,\dots)$是数列，则下列结论中不正确的是(　　)

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$；

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n-1}=a$；

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n-1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

10. 利用单调有界收敛定理，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$极限存在.

(1) $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$　　$\ln(1+x)\le x\quad,\quad x\ge0$

证明：因为

$a_n<a_{n+1}$，故a_n单调递增，又因为

$$\ln a_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}<1$$

所以 $a_n < e$，即a_n有上界，根据单调有界收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

(2) $a_n = \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln(1+x) \le x \quad , \quad x \ge 0$

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

证明：因为

$a_n < a_{n+1}$，故a_n单调递增，又因为

$$\ln a_n = \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \le \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

所以$a_n < e^{\frac{\pi^2}{6}}$，即$a_n$有上界，根据单调有界收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

12. 求极限

（**2**）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{3n^2+2n}$

解

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n} = e$，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{3n^2+2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2\cdot\frac{3n^2+2n}{2n^2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

13. 求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$

$$\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n} = \sqrt[n]{1+\sin^2 n}$$

$$\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{1+\sin^2 n} \le \sqrt[n]{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n} = 1$$

14. 证明不等式 $\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，

并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$$

$$a_n{}^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}=1\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1}$$

$$a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

应用夹逼定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=0$