A卷

一、选择题：每小题 3 分，共 24 分，下列每题给出的三个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=$（A）.

A. e^3.　　B. $e^{\frac{1}{3}}$.　　C. 1.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}=e^3$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=$（B）.

A. 0.　　B. $\frac{1}{6}$.　　C. $\frac{1}{5}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}$

3、设 $f(x)=xe^{-x}$，则 $f^{(2019)}(0)=$（A）.

A. 2019.　　B. $\frac{1}{2019}$.　　C. 0.

解：$f(x)=xe^{-x}=x\left(1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\cdots+\dfrac{x^{2018}}{2018!}-\cdots\right)$

$$=x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\cdots+\frac{x^{2019}}{2018!}-\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2019)}(0)}{2019!}x^{2019}+\cdots$$

$$\frac{1}{2018!}=\frac{f^{(2019)}(0)}{2019!}$$

4、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x>0\end{cases}$，则在点 $x=0$ 处（A）.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.　　B. $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.　　C. $f(x)$ 不可导.

解：

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}$$

5、设 $\begin{cases}x=\tan t\\ y=\sec t\end{cases}$（$0<t<\dfrac{\pi}{2}$），则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$（C）.

A. $\cos t$.　　B. $\cos^2 t$.　　C. $\cos^3 t$.

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sec t\tan t}{\sec^2 t}=\sin t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\cos t\cdot\frac{1}{\sec^2 t}=\cos^3 t$$

6、定积分 $\int_0^{2\pi}\sin^4 x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x=$（C）.

A. $\dfrac{\pi}{32}$.　　B. $\dfrac{\pi}{16}$　　C. $\dfrac{\pi}{8}$.

解：令 $x=\pi+t$

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=4\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$$

7、以下三个反常积分中，发散的是（B）.

A. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x$.　　C. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b+\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^0x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^bx\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}b^2=+\infty$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$$

8、方程$x^5+x-1=0$，（A）.

A. 只有一个实根.　　B. 只有三个实根.　　C. 有五个实根.

解：$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5+x-1)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+x-1)=+\infty$

$$f(x)=x^5+x-1\Rightarrow f'(x)=5x^4+1>0$$

二、选择题：每小题 4 分，共 16 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f'(0)>0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=$（ B ）.

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 不存在.

解：$$\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ln x}=e^0=1$$

2、 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则（B）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$

C. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$　　D. $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

3. 设存在常数 $L>0$，使得 $|f(x_2)-f(x_1)|\le L|x_2-x_1|^2$

（$\forall x_1, x_2\in(a,b)$），则（D）.

A. $f(x)$ 在 (a,b) 内有间断点

B. $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，但有不可导点.

C. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$f'(x)\ne 0$

D. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$f'(x)\equiv 0$

解：$\forall x_0\in(a,b)$，$|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|^2$

$$0\le\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\lim_{x\to x_0}\frac{L|x-x_0|^2}{|x-x_0|}=0$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$

4、方程 $y''-3y'+2y=1+e^x\cos 2x$，则其特解形式为（D）（高数、微积分）

A. $y=b+e^x A\cos 2x$.

B. $y=b+e^{x}\left(\left(a_0x+a_1\right)\cos 2x+\left(c_0x+c_1\right)\sin 2x\right)$.

C. $y=b+xe^{x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$.

D. $y=b+e^{x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$.

4、以下四个函数中，在指定的区间上不一致连续的是（　B　）.

（工数）

A. $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

B. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上.

C. $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

D. $f(x)=\ln x$ 在 $(1,2)$ 上.

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）（正确的涂 T，错误的涂 F）

1、设 $f(x)$ 可积，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 必为 $f(x)$ 的一个原函数.

（F）

2、设非负函数 $f(x)$ 有连续的导数，由曲线 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面的面积微元为：$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\mathrm{d}x$.

（F）　　$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\mathrm{d}s$

3、设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 仍以 T 为周期.

（T）

解：　$f(x+T)=f(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$

4、设$x\to a$时，$f(x)$与$g(x)$分别是$x-a$的n阶与m阶无穷小，$n<m$，那么$f(x)+g(x)$是$x-a$的n阶无穷小.

（T）

解：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^n}=k_1$，$k_1\neq 0$ ；$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{(x-a)^m}=k_2$，$k_2\neq 0$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^m}(x-a)^{m-n}=k_1$$

5、设$x_n\le z_n\le y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

（F）

解：$x_n=\sqrt{n^2-1}$，$z_n=n$，$y_n=\sqrt{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=0$$