

Semaine du 27 Janvier - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. H est le noyau d'une forme linéaire non-nulle équivaut à H admet une droite vectorielle pour supplémentaire.
2. (Énoncer seulement) : Théorème de décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice n° 2 :

(Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$) : On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

1. Décomposez P et Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer le PPCM et le PGCD des polynômes P et Q .

Exercice n° 3 :

(Application) : Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx$$

Semaine du 27 Janvier - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Caractérisation de P irréductible.
2. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Exercice n° 2 :

(Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$) : On considère les polynômes $P = X^3 + 1$ et $Q = X^4 + X^2 + 1$.

1. Décomposez P et Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer le PPCM et le PGCD des polynômes P et Q .

Exercice n° 3 :

(Application) : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)^3} dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^3+1)} dx$$

Semaine du 27 Janvier - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions précédentes :

1. En dimension n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.
2. Si $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B}$ avec $A \wedge B = 1$, alors $A_1 = CA$ et $B_1 = CB$.

Exercice n° 2 :

(Arithmétiques dans $\mathbb{K}[X]$) : Soient $A = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ et $B = 2X^4 - X^3 + 5X^2 - X + 3$.

1. Calculer le PGCD de A et B ,
2. En déduire les décompositions de A et B en produit de facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$.
3. Donner la forme factorisée du PPCM de A et B .

Exercice n° 3 :

(Application) : Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2(x+1)} dx$$