

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

PROJET M2

Construction de foncteurs dérivés

Auteur :

Alix MATHIEU

Encadrant :

Christine HUYGHE

**UNIVERSIT^e DE
FRANCHE-COMT^e**

12 décembre 2024

Table des matières

Introduction et préliminaires	1
0.1 Introduction	1
0.2 Préliminaires	1
1 Modules projectifs, injectifs et plats	5
1.1 Modules projectifs et injectifs	5
1.1.1 Généralités	5
1.1.2 Structure des projectifs	9
1.1.3 Structures des injectifs	9
1.1.4 Écriture d'un module en lien avec les projectifs/injectifs	11
1.1.5 Un résultat un peu plus précis	13
1.1.6 Résolutions projectives et injectives	14
1.2 Modules plats et fidèlement plats	21
1.2.1 Définitions	21
1.2.2 Premières propriétés	23
1.2.3 Quelques exercices et exemples	25
2 Éléments d'algèbre homologique	29
2.1 Homologie et Cohomologie	29
2.1.1 Catégorie des complexes de A -modules	29
2.1.2 Homologie et cohomologie	31
2.1.3 Suite exacte d'homologie ou de cohomologie	34
2.2 Foncteurs dérivés de foncteurs d'une variable	36
2.2.1 Foncteurs dérivés droits d'un foncteur additif covariant	36
2.2.2 Foncteurs dérivés gauches d'un foncteur additif covariant	38
2.2.3 Foncteurs dérivés droits d'un foncteur additif contravariant	39
2.3 Foncteurs Ext et Tor	40
2.3.1 Foncteurs Ext	40
2.3.2 Foncteurs Tor	45
2.4 Applications des foncteurs Tor aux modules plats	49
2.4.1 Caractérisation des modules plats par les idéaux de type fini	49
2.4.2 Caractérisation des modules plats par équations linéaires	51
2.4.3 Module plat limite inductive filtrante de modules libres de type fini	54
2.4.4 Quelques exercices/exemples d'applications	55
Bibliographie	59

Introduction et préliminaires

0.1 Introduction

La notion de foncteur dérivé est conçue pour donner un cadre général aux situations où une suite exacte courte donne naissance à une suite exacte longue. Considérons un foncteur $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ entre deux catégories abéliennes \mathbf{A} et \mathbf{B} , on suppose ici que F est exact à gauche, c'est-à-dire que pour une suite exacte courte d'objets de la catégorie \mathbf{A} :

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow F(M_1) \rightarrow F(M_2) \rightarrow F(M_3)$$

Il est alors naturel de se demander si on peut prolonger cette suite en une suite exacte, et si on peut le faire de façon canonique. Les foncteurs dérivés du foncteur F seront alors, pour tout $i \geq 1$, les foncteurs $R^i F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, tels que la suite suivante soit exacte :

$$0 \rightarrow F(M_1) \rightarrow F(M_2) \rightarrow F(M_3) \rightarrow R^1 F(M_1) \rightarrow R^1 F(M_2) \rightarrow R^1 F(M_3) \rightarrow R^2 F(M_1) \rightarrow \dots$$

F est donc exact à droite si et seulement si le foncteur $R^1 F$ est trivial. Les foncteurs dérivés mesurent donc dans un certain sens le défaut d'exactitude de F .

Le but du projet est donc d'arriver à construire ces foncteurs dérivés et d'observer certains exemples particuliers. Après quelques préliminaires, je me concentrerai dans le chapitre 1 à certains types de modules qui rendent exacts certains foncteurs ($\text{Hom}_A(M, -)$, $\text{Hom}_A(-, M)$, $M \otimes_A -$), puis dans le chapitre 2 à la construction de ces dits foncteurs dérivés (et en particulier au cas des foncteurs Ext et Tor).

0.2 Préliminaires

Dans cette section, on donnera deux définitions de catégories qui apparaîtront tout au long du document, une proposition mettant en lien les modules avec les modules libres et enfin un théorème (le diagramme du serpent) qui est à la base de théorèmes importants dans le document.

Définition 0.1. Soit A un anneau. On définit la catégorie $\mathbf{Mod}(A)$ où :

- Les objets sont les A -modules.
- Les morphismes sont les homomorphismes de modules

Définition 0.2. On définit la catégorie \mathbf{Ab} où :

- Les objets sont les groupes abéliens.
- Les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

Proposition 0.3. *Tout A -module est isomorphe au quotient d'un A -module libre.*

Démonstration. Soit M un A -module, considérons $(x_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de M . Notons $\lambda : (a_i)_{i \in I} \in A^{(I)} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i \in M$. Cette application est un morphisme surjectif, et notons K son noyau. On obtient un isomorphisme entre $A^{(I)}/K$ et M . ■

Proposition 0.4 (Diagramme du serpent). *Soient A un anneau, et un diagramme commutatif à lignes exacte de $\mathbf{Mod}(A)$ suivant*

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow a' & & \downarrow a & & \downarrow a'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M'_1 & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \xrightarrow{g_1} & M_1'' \end{array}$$

alors celui-ci induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \ker(a') & \xrightarrow{\varphi} & \ker(a) & \xrightarrow{\psi} & \ker(a'') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{coker}(a') & \xrightarrow{\varphi'} & \text{coker}(a) & \xrightarrow{\psi'} & \text{coker}(a'') \end{array}$$

où φ (resp. ψ) est l'application A -linéaire induite par f (resp. g) et φ' (resp. ψ') l'application qui a la classe de x'_1 (resp. x_1) modulo $\text{Im}(a')$ (resp. $\text{Im}(a)$) fait correspondre la classe de $f_1(x'_1)$ (resp. $g_1(x_1)$) modulo $\text{Im}(a)$ (resp. $\text{Im}(a'')$).

On a de plus que si f est injective (resp. g_1 est surjective), alors φ est injective (resp. ψ' est surjective).

Démonstration. Pour alléger la démonstration de cette preuve, on notera dans la suite x', y', z' (resp. x, y, z ; resp. x'', y'', z'') des éléments de M' (resp. M ; resp. M'') et de même x'_1, y'_1, z'_1 (resp. x_1, y_1, z_1 ; resp. x_1'', y_1'', z_1'') des éléments de M'_1 (resp. M_1 ; resp. M_1'').

- * L'exactitude de $\ker(a') \xrightarrow{\varphi} \ker(a) \xrightarrow{\psi} \ker(a'')$ provient des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \ker(\psi) &\iff g(x) = 0 \text{ et } a(x) = 0 \\ &\iff x = f(x') \text{ et } a(x) = 0 \\ &\iff x = f(x') \text{ et } (a \circ f)(x') = 0 \\ &\iff x = f(x') \text{ et } (f_1 \circ a')(x') = 0 \\ &\iff x = f(x') \text{ et } a'(x') = 0 \text{ car } f_1 \text{ est injective} \\ &\iff x = f(x') \text{ et } x' \in \ker(a') \\ &\iff x \in \text{Im}(\varphi) \end{aligned}$$

De plus, si f est injective, il en est de même pour φ qui en est la restriction à $\ker(a')$

- * L'exactitude de $\text{coker}(a') \xrightarrow{\varphi'} \text{coker}(a) \xrightarrow{\psi'} \text{coker}(a'')$ provient elle des équivalences suivantes où l'on note p, p', p'' les surjections canoniques de

M', M, M'' respectivement sur $\text{coker}(a'), \text{coker}(a), \text{coker}(a'')$:

$$\begin{aligned}
 p(x_1) \in \ker(\psi') &\iff (p'' \circ g_1)(x_1) = 0 \\
 &\iff (p'' \circ g_1)(x_1) = 0 \\
 &\iff g_1(x_1) = a''(x'') \\
 &\iff g_1(x_1) = (a'' \circ g)(x) \text{ car } g \text{ est surjective} \\
 &\iff g_1(x_1) = (g_1 \circ a)(x) \\
 &\iff x_1 - a(x) \in \ker(g_1) \\
 &\iff x_1 - a(x) = f_1(x'_1) \\
 &\iff p(x_1) = p(f_1(x'_1)) \\
 &\iff p(x_1) = \varphi'(p'(x'_1)) \\
 &\iff p(x_1) \in \text{Im}(\varphi')
 \end{aligned}$$

De plus, si g_1 est surjective, il en est de même de ψ' : un élément de $\text{coker}(a'')$ s'écrit $p''(x_1'') = p''(g_1(x_1)) = \psi'(p_1(x_1))$

- * Explicitons maintenant d . Considérons $x'' \in \ker(a'')$, comme g est surjective, il existe $x \in M$, $g(x) = x''$. On obtient donc que $g_1(a(x)) = a''(g(x)) = 0$ et donc que $a(x) \in \ker(g_1) = \text{Im}(f_1)$. Il existe donc $x'_1 \in M'_1$ tel que $a(x) = f_1(x'_1)$. Montrons que l'élément $p'(x'_1)$ ne dépend pas du choix de x . Si en effet, $g(x) = g(y)$ et $a(y) = f_1(y'_1)$, alors $y - x \in \ker(g) = \text{Im}(f)$. Il existe donc $z' \in M'$ tel que $y - x = f(z')$, on en déduit que $f_1(y'_1) - f_1(x'_1) = a(y) - a(x) = (a \circ f)(z') = f_1(a(z'))$ et finalement comme f_1 est injective, $y'_1 = x'_1 + a'(z')$ de sorte que $p'(y'_1) = p'(x'_1)$. On peut donc définir d par $d(x'') = p'(x'_1)$, et elle est A -linéaire.

- * L'exactitude de $\ker(a'') \xrightarrow{d} \text{coker}(a') \xrightarrow{\varphi'} \text{coker}(a)$ provient des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 p'(x'_1) \in \ker(\varphi') &\iff p(f_1(x'_1)) = 0 \\
 &\iff \exists x \in M, f_1(x'_1) = a(x) \\
 &\iff \exists x \in M, p'(x'_1) = d(g(x)) \\
 &\iff p'(x'_1) \in \text{Im}(d)
 \end{aligned}$$

- * L'exactitude de $\ker(a) \xrightarrow{\psi} \ker(a'') \xrightarrow{d} \text{coker}(a')$ provient des considérations suivantes : On observe tout d'abord que l'on a les équivalences suivantes :

$$x'' \in \ker(d) \iff x'' = g(x), a(x) = f_1(x'_1) \text{ et } x'_1 = a'(x')$$

On déduit de la deuxième partie d'équivalence, que $a(x) = f_1(a'(x')) = a(f(x'))$. Cela nous assure donc que $x = f(x') + y$ où $y \in \ker(a)$, et donc que $x'' = g(x) = g(f(x')) + g(y) = g(y) = \psi(y)$ car $\text{Im}(f) = \ker(g)$ et $\psi = g|_{\ker(a)}$, et donc $x'' \in \text{Im}(\psi)$. On obtient donc que $\ker(d) \subseteq \text{Im}(\psi)$. D'autre part, on a par définition de d que $d \circ \psi = 0$ donc $\text{Im}(\psi) \subseteq \ker(d)$, ce qui donne l'autre inclusion et donc l'exactitude de la suite.

■

Chapitre 1

Modules projectifs, injectifs et plats

Soient A un anneau (commutatif), et M un A -module. Intéressons nous à 3 foncteurs :

- $\text{Hom}_A(M, -)$ qui est exact à gauche mais n'est pas en général exact.
- $\text{Hom}_A(-, M)$ qui est exact à gauche mais n'est pas en général exact.
- $M \otimes_A -$ qui est exact à droite mais n'est pas en général exact.

Il est alors intéressant de s'interroger sur quels modules rendent ces différents foncteurs exacts, c'est l'objectif de ce premier chapitre.

1.1 Modules projectifs et injectifs

1.1.1 Généralités

Définition 1.1. On dit que M est un module projectif si le foncteur $\text{Hom}_A(M, -)$ de la catégorie $\mathbf{Mod}(A)$ dans la catégorie \mathbf{Ab} est exact, c.à.d. si pour toute suite exacte courte de $\mathbf{Mod}(A)$

$$0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$$

la suite suivante de \mathbf{Ab} est exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\text{Hom}(M, f)} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}(M, g)} \text{Hom}_A(M, N'') \rightarrow 0$$

Lemme 1.2. Pour qu'un module M soit projectif, il suffit que tout diagramme commutatif à ligne exacte de $\mathbf{Mod}(A)$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N'' \rightarrow 0 \\ & \nearrow u'' & \\ M & & \end{array}$$

puisse être complété en un diagramme commutatif par une application A -linéaire $u : M \rightarrow N$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{g} & N'' \rightarrow 0 \\ \uparrow u & \nearrow u'' & \\ M & & \end{array}$$

Démonstration. Soit $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de $\mathbf{Mod}(A)$. Comme, le foncteur $\text{Hom}_A(M, -)$ est exact à gauche. Il suffit de montrer que l'application $\text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}(M, g)} \text{Hom}_A(M, N'')$ est surjective. En considérant

$u'' \in \text{Hom}_A(M, N'')$, alors par hypothèse il existe $u \in \text{Hom}_A(M, N)$ tel que $g \circ u = u''$, i.e. $\text{Hom}(M, g)(u) = u''$. Ainsi le module M est projectif. ■

Définition 1.3. On dit que M est un module injectif si le foncteur $\text{Hom}_A(-, M)$ de la catégorie $\mathbf{Mod}(A)$ dans la catégorie \mathbf{Ab} est exact, c.à.d. si pour toute suite exacte courte de $\mathbf{Mod}(A)$

$$0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$$

la suite suivante de \mathbf{Ab} est exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N'', M) \xrightarrow{\text{Hom}(g, M)} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\text{Hom}(f, M)} \text{Hom}_A(N', M) \rightarrow 0$$

Remarque 1.4. Comme les notions de modules projectifs et injectifs sont duales. Pour une bonne partie des propositions énoncées sur les modules projectifs, les propositions duales sur les injectifs existent et se démontrent en effectuant un renversement des flèches. On omettra la démonstration de ces preuves. Celles nécessitant une réelle adaptation feront l'objet de démonstrations.

Lemme 1.5. Pour qu'un module M soit injectif, il suffit que tout diagramme commutatif à ligne exacte de $\mathbf{Mod}(A)$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & N' \xrightarrow{f} N \\ & & \searrow v' \\ & & M \end{array}$$

puisse être complété en un diagramme commutatif par une application A -linéaire $v : N \rightarrow M$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & N' \xrightarrow{f} N \\ & & \searrow v' \quad \downarrow v \\ & & M \end{array}$$

Proposition 1.6. Soient A un anneau et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M_i est projectif pour tout $i \in I$.
- ii) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ est projectif.

Démonstration. On désigne par M la somme directe $\bigoplus_{i \in I} M_i$, et par α_i l'injection canonique de M_i dans M .

$i) \Rightarrow ii)$: Considérons un diagramme à ligne exacte

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{g} & N'' & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow u'' & & \\ & & M & & \\ & \nearrow \alpha_i & & & \\ M_i & & & & \end{array}$$

Or comme M_i est projectif, il existe une application linéaire $u_i : M_i \rightarrow N$ telle que $g \circ u_i = u'' \circ \alpha_i$. Or l'application

$$f \in \text{Hom}_A(M, N) \xmapsto{\psi_N} (f \circ \alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(M_i, N)$$

est bijective. Il existe donc une unique application linéaire $u : M \rightarrow N$ telle que $u \circ \alpha_i = u_i$ pour tout $i \in I$. Or comme pour tout $i \in I$,

$$(g \circ u) \circ \alpha_i = g \circ (u \circ \alpha_i) = g \circ u_i = u'' \circ \alpha_i$$

alors par injectivité de $\psi_{N''}$, on obtient que $g \circ u = u''$, ce qui assure la commutativité du diagramme depuis M et donc que M est projectif.

ii) \Rightarrow i) : Considérons le diagramme à ligne exacte suivant :

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{g} & N'' & \rightarrow & 0 \\ & \nearrow u'' & \uparrow u_i'' & & \\ M & \xleftarrow{\alpha_i} & M_i & & \end{array}$$

où $u'' : M \rightarrow N''$ l'application linéaire telle que $u'' \circ \alpha_i = u_i''$ et $u'' \circ \alpha_j = 0$ pour $j \neq i$. Comme M est projectif, il existe une application linéaire $u : M \rightarrow N$ telle que $g \circ u = u''$. Ainsi en posant $u_i = u \circ \alpha_i : M_i \rightarrow N$, on obtient que $u_i'' = g \circ u_i$ et donc que M_i est projectif. ■

Proposition 1.7. Soient A un anneau et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M_i est injectif pour tout $i \in I$.
- ii) $\prod_{i \in I} M_i$ est injectif.

Démonstration. On désigne par M le produit $\prod_{i \in I} M_i$ et par $p_i : M \rightarrow M_i$ la projection canonique de M dans M_i .

i) \Rightarrow ii) : Considérons un diagramme à ligne commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{f} & N'' \\ & & \downarrow u & & \\ & & M & \xrightarrow{p_i} & M_i \end{array}$$

Comme M_i est injectif, il existe une application linéaire $u_i : N \rightarrow M_i$ telle que $u_i \circ f = p_i \circ u$. Or l'application

$$f \in \text{Hom}_A(N'', M) \xmapsto{\psi_{N''}} (p_i \circ f)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(N'', M_i)$$

est bijective. Il existe donc une unique application linéaire $u'' : N'' \rightarrow M$ telle que $p_i \circ u'' = u_i$ pour tout $i \in I$. Or comme pour tout $i \in I$,

$$p_i \circ (u'' \circ f) = (p_i \circ u'') \circ f = u_i \circ f = p_i \circ u$$

alors par injectivité de ψ_N , on obtient que $u'' \circ f = u$, ce qui assure donc que M est injectif.

ii) \Rightarrow i) : Considérons le diagramme à ligne exacte suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & N'' \\ & & \downarrow u & \searrow u_i & \\ & & M & \xrightarrow{p_i} & M_i \end{array}$$

où $u : N \rightarrow M$ l'application linéaire telle que $p_i \circ u = u_i$ et $p_j \circ u = 0$ pour $j \neq i$. Comme M est injectif, il existe une application linéaire $u'' : N'' \rightarrow M$ telle que $u'' \circ f = u$. Ainsi en posant $u_i'' = p_i \circ u'' : N'' \rightarrow M_i$, on obtient que $u_i'' \circ f = u_i$ et donc que M_i est injectif. ■

Corollaire 1.8. *Un facteur direct d'un module projectif est projectif.*

Démonstration. Si M est un module projectif, en considérant M_1 un facteur direct de M , alors il existe une suite exacte scindée $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \rightarrow 0$. Alors M est somme directe de M_1 et M_2 et comme M est un module projectif, alors par la proposition précédente, M_1 est projectif. ■

Corollaire 1.9. *Un facteur direct d'un module injectif est injectif.*

Démonstration. La preuve est la même que la précédente, il faut tout de même remarquer qu'un produit fini est isomorphe à la somme directe correspondante, ce qui permet de conclure. ■

Lemme 1.10. *Un A -module libre est projectif.*

Démonstration. Considérons M un A -module libre. Alors

$$M = A^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} A$$

Or par la proposition 1.6, pour montrer que M est projectif, il suffit de montrer que A l'est. On considère donc le diagramme à ligne exacte suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow u & & \\ & & A & & \end{array}$$

On souhaite créer une application linéaire $v : A \rightarrow M$ tel que $g \circ v = u$. Il suffit de déterminer l'image de 1 pour définir totalement cette application. Comme g est surjective, considérons x un antécédant par g de $u(1)$. On définit alors $v(1) = x$. Ainsi $g \circ v(1) = g(x) = u(1)$. Par suite, $g \circ v = u$, donc A est projectif, et donc M l'est. ■

Proposition 1.11. *Soient A un anneau et M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) M est projectif.
- ii) M est facteur direct de tout A -module dont il est quotient.

Démonstration.

$i) \Rightarrow ii)$: Si M est projectif. En considérant N un A -module dont M est quotient. On a le diagramme à ligne exacte suivant :

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & \nwarrow f & \uparrow 1_M & & \\ & & M & & \end{array}$$

où $f : M \rightarrow N$ est une application linéaire qui rend commutatif le diagramme provenant de la projectivité de M . Alors, par suite $g \circ f = 1_M$ et donc g admet une section f et donc M est facteur direct de N .

$ii) \Rightarrow i)$: Soit M un A -module facteur direct de tout A -module dont il est quotient. Alors en considérant N un module libre dont M est quotient, alors il existe S un A -module tel que $N = M \oplus S$. Or N est libre, donc par le lemme 1.10, il est projectif. En utilisant ensuite le corollaire 1.8, en conclut que M comme facteur direct d'un projectif est projectif. ■

Proposition 1.12. Soient A un anneau et M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est injectif.
- ii) M est facteur direct de tout A -module dont il est sous-module.

1.1.2 Structure des projectifs

Proposition 1.13. Soient A un anneau et M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est projectif.
- ii) M est facteur direct d'un A -module libre.

Démonstration.

$i) \Rightarrow ii)$: M est quotient d'un A -module libre L . Or comme M est projectif, Il en est un facteur direct par la proposition 1.11.

$ii) \Rightarrow i)$: Si M est un facteur direct d'un A -module libre (donc projectif par le lemme 1.10), alors comme facteur direct d'un projectif, M est projectif par le corollaire 1.8. ■

1.1.3 Structures des injectifs

Proposition 1.14. Soient A un anneau et M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est injectif.
- ii) Toute application linéaire d'un idéal de A dans M se prolonge en une application linéaire de A dans M .

Démonstration.

$i) \Rightarrow ii)$: Considérons \mathfrak{a} un idéal de A et $u : \mathfrak{a} \rightarrow M$ une application linéaire. Comme \mathfrak{a} est un idéal de A , on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{a} \rightarrow 0$$

Comme M est injectif, alors $\text{Hom}_A(-, M)$ est exact, donc on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, M) \rightarrow \text{Hom}_A(A, M) \rightarrow \text{Hom}_A(\mathfrak{a}, M) \rightarrow 0$$

ce qui nous assure que l'application $u : \mathfrak{a} \rightarrow M$ se prolonge en une application linéaire de A dans M .

$ii) \Rightarrow i)$: Considérons le diagramme à ligne exacte de $\mathbf{Mod}(A)$ suivant :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & N' \xrightarrow{f} N \\ & & \searrow u' \\ & & M \end{array}$$

Considérons l'ensemble suivant

$$\mathfrak{F} = \{(P, v) | P \text{ sous module de } N, N' \subseteq P, v : P \rightarrow M \text{ est un prolongement de } u'\}$$

- * \mathfrak{F} est non-vide puisqu'il contient (N', u') .
- * On ordonne cet ensemble par la relation suivante : $(P, v) \leq (P_1, v_1)$ si P_1 contient P et v_1 prolonge v .
- * Muni de cette relation, l'ensemble \mathfrak{F} est inductif. En effet, si $(P_i, v_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de \mathfrak{F} , alors le couple (P, v) où $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ et v est défini par restriction à P_i comme étant v_i , est une borne supérieure de la famille.
- * Par le théorème de Zorn, il existe un élément maximal (P, v) dans \mathfrak{F} . Pour conclure ce sens, il nous suffit de montrer que $P = N$. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un élément $x \in N \setminus P$. L'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $ax \in P$ est un idéal \mathfrak{a} de A . On peut ainsi définir une application linéaire

$$\begin{aligned} r : \mathfrak{a} &\rightarrow M \\ a &\mapsto v(ax) \end{aligned}$$

Or comme M satisfait $ii)$, alors l'application r se prolonge en une application linéaire $s : A \rightarrow M$. Définissons une application

$$\begin{aligned} w : P + Ax &\rightarrow M \\ y + ax &\mapsto v(y) + s(a) \end{aligned}$$

Celle-ci est bien définie car en considérant une égalité $y + ax = y' + a'x$ où $(y, y') \in P^2$ et $(a, a') \in A^2$, on a $(a - a')x = y' - y \in P$ et donc $a - a' \in \mathfrak{a}$.

On a ainsi que

$$\begin{aligned} s(a) - s(a') &= s(a - a') \\ &= r(a - a') \\ &= v((a - a')x) \\ &= v(y' - y) = v(y') - v(y) \end{aligned}$$

et donc que $s(a) + v(y) = s(a') + v(y')$. Cette application est de plus linéaire et prolonge v . Le couple $(P + Ax, w)$ est donc strictement supérieur au couple (P, v) et appartient à \mathfrak{F} ce qui fournit une contradiction. Ainsi $P = N$ et donc M est injectif. ■

Définition 1.15. Soit A un anneau intègre. Un A -module M est dit divisible si pour tout $a \in A \setminus \{0\}$ et tout x de M , il existe y de M tel que $x = ay$.

Proposition 1.16. Soit un A un anneau intègre.

1. Un module injectif est divisible.
2. Si de plus l'anneau A est principal, un module divisible est injectif.

Démonstration.

1. Soit M un module injectif. Si $a \in A \setminus \{0\}$ et $x \in M$. On définit une application linéaire depuis l'idéal principal aA dans M :

$$\begin{aligned} u' : aA &\longrightarrow M \\ ab &\longmapsto bx \end{aligned}$$

Comme M est injectif, alors par la proposition 1.14, on peut prolonger u' en une application linéaire $u : A \rightarrow M$ et on a d'une part $u'(a) = u'(a.1) = x$ et d'autre part $u'(a) = u(a) = au(1)$. Ainsi $x = ay$ où $y = u(1)$.

2. Soit M un module divisible, pour montrer que M est injectif, appliquons la proposition 1.14. Les idéaux de A sont de la forme aA pour $a \in A$ car A est principal. On considère $a \in A \setminus \{0\}$ et une application linéaire $u' : aA \rightarrow M$, comme M est divisible et $u'(a) \in M$, il existe $y \in M$ tel que $u'(a) = ay$. Considérons $u : A \rightarrow M$ l'application linéaire définie par $u(1) = y$, alors celle-ci prolonge u' car $u(a) = au(1) = ay = u'(a)$. Ainsi M est injectif. ■

Exemple 1.17. Comme \mathbb{Z} est principal, on tire que \mathbb{Q} est un \mathbb{Z} -module injectif car divisible.

1.1.4 Écriture d'un module en lien avec les projectifs/injectifs

Proposition 1.18. Tout A -module est quotient d'un projectif.

Démonstration. Tout A -module est quotient d'un A -module libre par la proposition 0.3. De plus, par le lemme 1.10, on sait qu'un A -module libre est projectif. Ainsi, tout A -module est quotient d'un A -module projectif. ■

Remarque 1.19. La proposition précédente nous permet d'obtenir des suites exactes courtes. En effet, en considérant M un A -module, il est quotient d'un projectif L , on a

donc une surjection $L \twoheadrightarrow M$, et en considérant le noyau de cette application que l'on note K , on obtient donc la suite exacte suivante où L est projectif :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Remarque 1.20. Le cas des modules injectifs nécessite une preuve plus délicate, on énoncera pour cela plusieurs lemmes préliminaires.

Lemme 1.21. Soit G un \mathbb{Z} -module. Le groupe $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ est muni d'une structure de A -module via $(a, u) \mapsto au$ où $au(a') = u(a'a)$ si $(a, a') \in A$ et $u \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$.

Démonstration. Pour tout $(a, b, a') \in A^3$ et $u \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$, on a

$$a(bu)(a') = bu(a'a) = u(a'ab) = ((ab)u)(a')$$

donc $a(bu) = (ab)u$. Les autres axiomes pour définir un module sont immédiatement vérifiés. Ainsi, on a bien une structure de A -module. ■

Lemme 1.22. Soit G un \mathbb{Z} -module. Si G est injectif, alors le A -module $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ est injectif.

Démonstration. On considère le diagramme à ligne exacte de $\mathbf{Mod}(A)$ suivant :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow N' & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow u' & \\ & & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G) \end{array}$$

Ce diagramme induit le suivant à ligne exacte de $\mathbf{Mod}(\mathbb{Z})$ où l'on désigne par $N'_{\mathbb{Z}}$ et $N_{\mathbb{Z}}$ les \mathbb{Z} -modules sous-jacents à N' et N :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow N'_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{f} & N_{\mathbb{Z}} \\ & \searrow \theta' & \downarrow \theta \\ & & G \end{array}$$

où θ' est l'application \mathbb{Z} -linéaire telle que $\theta'(x') = u'(x')(1)$. Or comme G est \mathbb{Z} -injectif, il existe un prolongement θ de θ' de $N_{\mathbb{Z}}$ dans G .

Construisons ainsi $u : N \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ en posant $u(x)(a) = \theta(ax)$. Cette application est A -linéaire : en effet, pour $(a, b) \in A^2, x \in N$,

$$u(bx)(a) = \theta(a(bx)) = \theta((ab)x) = u(x)(ab) = (bu(x))(a)$$

par structure définie dans le lemme 1.21 et donc $u(bx) = bu(x)$. Cette application prolonge bien u' car, si $x \in N', a \in A$, alors

$$u(x)(a) = \theta(ax) = \theta'(ax) = u'(ax)(1) = (au'(x)(1)) = u'(x)(a)$$

■

Lemme 1.23. Soit M un A -module. L'application $j : \begin{cases} M & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M_{\mathbb{Z}}) \\ x & \longmapsto (a \mapsto ax) \end{cases}$ où $M_{\mathbb{Z}}$ est le \mathbb{Z} -module sous-jacent à M , est A -linéaire et injective.

Démonstration. L'application $a \mapsto ax$ est \mathbb{Z} -linéaire. De plus l'application j est A -linéaire. En effet pour $(a, b) \in A$ et $x \in M$,

$$j(bx)(a) = a(bx) = (ab)x \text{ et } (bj(x))(a) = j(x)(ab) = (ab)x$$

De plus, cette application est bien injective car l'égalité $j(x) = 0$ implique que $j(x)(1) = 1.x = x = 0$. ■

Remarque 1.24. On peut ainsi identifier dans la suite M via j à un sous-module de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M_{\mathbb{Z}})$.

Proposition 1.25. Soit A un anneau. Tout A -module est un sous-module d'un A -module injectif.

Démonstration.

- * Commençons par le cas où $A = \mathbb{Z}$. Comme A est principal, on sait que injectif équivaut à divisible. Considérons M' un \mathbb{Z} -module, M' peut s'écrire comme quotient d'un projectif : $M' = (\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z})/R$. On identifie ensuite $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ à un sous \mathbb{Z} -module de $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}$. Or \mathbb{Q} est divisible, donc $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}$ est divisible, puis en passant au quotient $(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q})/R$ aussi. Ainsi M' est inclus dans $(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q})/R$ qui est divisible donc injectif. C'est donc bien un sous-module d'un module injectif.
- * Soit M un A -module. Le \mathbb{Z} -module sous-jacent $M_{\mathbb{Z}}$ s'injecte par le cas $A = \mathbb{Z}$ dans un \mathbb{Z} -module injectif G . Comme le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, -)$ est exact à gauche, on obtient une suite exacte de $\mathbf{Mod}(A)$:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{i} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$$

Or par le lemme 1.23 j donne une injection de M dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M_{\mathbb{Z}})$. On obtient donc $i \circ j$ une application A -linéaire injective du A -module M dans le A -module injectif (par le lemme 1.22) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$. ■

1.1.5 Un résultat un peu plus précis

Proposition 1.26. \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un \mathbb{Z} -module injectif.

Démonstration. Comme \mathbb{Z} est principal, il suffit de montrer que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est divisible. Considérons $a + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et $k \neq 0$. Comme \mathbb{Q} est divisible, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a = kq$, alors $k(q + \mathbb{Z}) = a + \mathbb{Z}$ donc \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est divisible donc injectif. ■

Proposition 1.27. Si M est un \mathbb{Z} -module non-nul, il existe une application linéaire non-nulle de M dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Démonstration. Soit M un \mathbb{Z} -module non-nul. Considérons dès lors $m_1 \in M \setminus \{0\}$ et notons M_1 le module engendré par m_1 . Alors $M_1 \subseteq M$ et deux possibilités apparaissent (en fonction de s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $nm_1 = 0$) :

$$M_1 \simeq \mathbb{Z} \text{ ou } M_1 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

- * Dans le premier cas où $M_1 \simeq \mathbb{Z}$, on envoie m_1 sur n'importe quel élément non-nul de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , cela nous définit une application $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On a donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M \\ & & & \searrow f_1 & \\ & & & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

Comme \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif, alors on peut étendre cette application en une application linéaire $f : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui est non-nulle car elle étend f_1 .

- * Dans le second cas où $M_1 \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Définissons $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $f_1(m_1) = \frac{1}{n}$ et comme précédemment, on l'étend en une application linéaire non-nulle $f : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. ■

Définition 1.28. On dit que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un cogénérateur de **Ab**.

Proposition 1.29. Soit A un anneau, le A -module $U = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un cogénérateur de **Mod**(A).

Démonstration. Soit M un A -module non-nul. Considérons $M_{\mathbb{Z}}$ le \mathbb{Z} -module sous-jacent de M , qui est non-nul, alors par la proposition précédente, il existe une application linéaire non nulle ψ_1 de $M_{\mathbb{Z}}$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Mais alors l'application $\text{Hom}(A, \psi_1) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M_{\mathbb{Z}}) \rightarrow U = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est non-nulle. Ainsi en composant via l'injection $j : M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M_{\mathbb{Z}})$ (introduite dans le lemme 1.23), on obtient une application linéaire non-nulle $\psi : x \in M \mapsto (a \mapsto \psi_1(ax)) \in U$. ■

Proposition 1.30. Pour tout A -module M , le A -module $U^{\text{Hom}_A(M, U)}$ est injectif.

Démonstration. Par le lemme 1.22, comme \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif, alors U est injectif, puis $U^{\text{Hom}_A(M, U)}$ est donc produit d'injectif donc injectif. ■

Définition 1.31. Dans la suite, on notera $M^0 = U^{\text{Hom}_A(M, U)}$. Considérant $f : M' \rightarrow M$ une application A -linéaire entre A -modules, on définit

$$f^0 : \begin{array}{ccc} M'^0 & \longrightarrow & M^0 \\ (\gamma\beta)_{\beta \in \text{Hom}_A(M', U)} & \longmapsto & (\gamma\beta \circ f)_{\beta \in \text{Hom}_A(M, U)} \end{array}$$

Proposition 1.32. Les application $M \mapsto M^0$ et $f \mapsto f^0$ permettent de définir un foncteur contravariant $-^0$ de la catégorie **Mod**(A) dans la sous-catégorie des modules injectifs.

1.1.6 Résolutions projectives et injectives

Définition 1.33. Soient A un anneau, et X un A -module. On appelle résolution projective de X la donnée d'une suite $P^X = (P_n^X, d_n^X)$ où P_n^X est un A -module projectif et $d_n^X : P_n^X \rightarrow P_{n-1}^X$ est une application A -linéaire, et d'une application A -linéaire (appelée l'augmentation) $\varepsilon : P_0^X \rightarrow X$ telle que la suite suivante soit exacte

$$\cdots \longrightarrow P_n^X \xrightarrow{d_n^X} P_{n-1}^X \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1^X \xrightarrow{d_1^X} P_0^X \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$$

Définition 1.34. Soient X et X' deux A -modules, $\varphi : X' \rightarrow X$ une application A -linéaire, et $P^X, P^{X'}$ des résolutions projectives respectives de X et X' . On appelle

morphisme de $P^{X'}$ dans P^X compatible avec φ la donnée pour tout entier n d'une application A -linéaire $f_n : P_n^{X'} \rightarrow P_n^X$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} P_0^{X'} & \xrightarrow{\varepsilon'} & X' \\ f_0 \downarrow & & \downarrow \varphi \\ P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon} & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} P_n^{X'} & \xrightarrow{d_n^{X'}} & P_{n-1}^{X'} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ P_n^X & \xrightarrow{d_n^X} & P_{n-1}^X \end{array}$$

On note $\mathbf{f} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce morphisme et on dit qu'il relève φ .

Remarque 1.35. Comme précédemment, la notion de résolution injective est duale de celle projective.

Définition 1.36. Soient A un anneau, et X un A -module. On appelle résolution injective de X la donnée d'une suite $I_X = (I_X^n, d_X^n)$ où I_X^n est un A -module injectif et $d_X^n : I_X^n \rightarrow I_X^{n+1}$ est une application A -linéaire, et d'une application A -linéaire (appelée l'augmentation) $\varepsilon : X \rightarrow I_X^0$ telle que la suite suivante soit exacte

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\varepsilon} I_X^0 \xrightarrow{d_X^0} I_X^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_X^n \xrightarrow{d_X^n} I_X^{n+1} \rightarrow \cdots$$

Définition 1.37. Soient X et X' deux A -modules, $\varphi : X' \rightarrow X$ une application A -linéaire, et $I_X, I_{X'}$ des résolutions injectives respectives de X et X' . On appelle morphisme de $I_{X'}$ dans I_X compatible avec φ la donnée pour tout entier n d'une application A -linéaire $f^n : I_{X'}^n \rightarrow I_X^n$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varepsilon'} & I_{X'}^0 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f^0 \\ X & \xrightarrow{\varepsilon} & I_X^0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} I_{X'}^n & \xrightarrow{d_{X'}^n} & I_{X'}^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ I_X^n & \xrightarrow{d_X^n} & I_X^{n+1} \end{array}$$

On note $\mathbf{f} = (f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ce morphisme et on dit qu'il prolonge φ .

Proposition 1.38. Soit A un anneau et X, X' des A -modules.

1. Tout A -module admet une résolution projective (respectivement injective).
2. Soit $\varphi : X' \rightarrow X$ une application A -linéaire. Soient P^X et $P^{X'}$ (respectivement I_X et $I_{X'}$) des résolutions projectives (respectivement injectives) de X et X' . Il existe alors un morphisme \mathbf{f} de $P^{X'}$ dans P^X (respectivement de $I_{X'}$ dans I_X) compatible avec φ .
3. Si g est un autre morphisme compatible, il existe pour tout entier naturel n une application A -linéaire $k_n : P_n^{X'} \rightarrow P_{n+1}^X$ (respectivement $k^n : I_{X'}^n \rightarrow I_X^{n+1}$) telle que

$$g_n - f_n = d_{n+1}^X \circ k_n + k_{n-1} \circ d_n^{X'} \text{ si } n > 0 \text{ et } g_0 - f_0 = d_1^X \circ k_0$$

(respectivement

$$g^n - f^n = d_X^{n+1} \circ k^n + k^{n+1} \circ d_{X'}^n, \text{ si } n > 0 \text{ et } g^0 - f^0 = k^1 \circ d_{X'}^0.)$$

Définition 1.39. La suite des $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement $(k^n)_{n \in \mathbb{N}}$) comme définie dans le point 3. de la proposition précédente, s'appelle une homotopie entre \mathbf{f} et \mathbf{g} .

Remarque 1.40. On se limitera dans la démonstration au cas projectif, le cas injectif étant clairement dual.

Démonstration.

1. Soit X un A -module, celui-ci est quotient d'un module libre donc projectif, que l'on note P_0^X . Considérons alors $\varepsilon : P_0^X \twoheadrightarrow X$ la surjection canonique et $i : \ker \varepsilon \hookrightarrow P_0^X$ l'injection canonique associée à ε . Or $\ker \varepsilon$ est un A -module, il est donc quotient d'un module libre donc projectif que l'on note P_1^X . Considérons dès lors $p_1 : P_1^X \twoheadrightarrow \ker \varepsilon$ la surjection canonique et posons $d_1^X = i \circ p_1$. Alors $\ker(\varepsilon) = \text{Im}(d_1^X)$. On a ainsi :

$$P_1^X \xrightarrow{d_1^X} P_0^X \xrightarrow{\varepsilon} X \rightarrow 0$$

On construit ainsi de proche en proche de la même façon, ayant choisi le module projectif P_n^X de sorte que le module $\ker(p_{n-1})$, où $p_{n-1} : P_{n-1}^X \twoheadrightarrow \ker(d_{n-1}^X)$, est la surjection canonique, en soit un quotient. On définit alors $d_n^X = i_n \circ p_n$ où $p_n : P_n^X \twoheadrightarrow \ker(p_{n-1})$ est la surjection canonique et $i_n : \ker(p_{n-1}) \hookrightarrow P_{n-1}^X$ l'injection canonique. On choisit maintenant P_{n+1}^X comme un module projectif dont $\ker(d_n^X)$ est un quotient. Par construction, on obtient donc la suite exacte suivante

$$\dots \longrightarrow P_n^X \xrightarrow{d_n^X} P_{n-1}^X \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1^X \xrightarrow{d_1^X} P_0^X \xrightarrow{\varepsilon} X \rightarrow 0$$

2. Soit $\varphi : X' \rightarrow X$ une application A -linéaire et P^X et $P^{X'}$ des résolutions projectives de X et X' . Tachons de construire un morphisme compatible avec φ . Nous avons tout d'abord le diagramme commutatif de $\mathbf{Mod}(A)$ à ligne exacte suivant

$$\begin{array}{ccc} P_0^{X'} & & \\ & \searrow \varphi \circ \varepsilon' & \\ P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

Comme $P_0^{X'}$ est projectif, ce diagramme est complétable via une application A -linéaire $f_0 : P_0^{X'} \rightarrow P_0^X$ telle que $\varepsilon \circ f_0 = \varphi \circ \varepsilon'$. On a donc obtenu le premier diagramme d'un morphisme de résolutions :

$$\begin{array}{ccc} P_0^{X'} & \xrightarrow{\varepsilon'} & X' \\ f_0 \downarrow & & \downarrow \varphi \\ P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon} & X \end{array}$$

Construisons le reste de proche en proche par itération du procédé. Supposons que l'on ait obtenu une application A -linéaire $f_n : P_n^{X'} \rightarrow P_n^X$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} P_n^{X'} & \xrightarrow{d_n^{X'}} & P_{n-1}^{X'} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ P_n^X & \xrightarrow{d_n^X} & P_{n-1}^X \end{array}$$

On a le diagramme à ligne exacte suivant

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1}^{X'} & \xrightarrow{d_{n+1}^{X'}} & P_n^{X'} & \xrightarrow{d_n^{X'}} & P_{n-1}^{X'} \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ P_{n+1}^X & \xrightarrow{d_{n+1}^X} & P_n^X & \xrightarrow{d_n^X} & P_{n-1}^X \end{array}$$

Ainsi $d_n^X \circ (f_n \circ d_{n+1}^{X'}) = f_{n-1} \circ (d_n^{X'} \circ d_{n+1}^{X'}) = 0$ car $\text{Im}(d_{n+1}^{X'}) = \ker(d_n^{X'})$. Cela implique que $\text{Im}(f_n \circ d_{n+1}^{X'}) \subseteq \ker(d_n^X) = \text{Im}(d_{n+1}^X)$

Ainsi on a la factorisation suivante du diagramme précédent :

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1}^{X'} & \xrightarrow{d_{n+1}^{X'}} & P_n^{X'} & \xrightarrow{d_n^{X'}} & P_{n-1}^{X'} \\ & \searrow & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ P_{n+1}^X & \xrightarrow{d_{n+1}^X} & \text{Im}(d_{n+1}^X) & \xrightarrow{d_n^X} & P_{n-1}^X \end{array}$$

Alors par projectivité de $P_{n+1}^{X'}$, il existe une application A -linéaire $f_{n+1} : P_{n+1}^{X'} \rightarrow P_{n+1}^X$ rendant le diagramme précédent commutatif. On a ainsi créé un morphisme f compatible avec φ .

3. Si g est un autre morphisme compatible avec φ . On a alors le diagramme à ligne exacte suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_0^{X'} & & & & \\ & & \downarrow g_0 - f_0 & & & & \\ P_1^X & \xrightarrow{d_1^X} & P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ainsi $\varepsilon \circ (g_0 - f_0) = \varepsilon \circ g_0 - \varepsilon \circ f_0 = \varphi \circ \varepsilon' - \varphi \circ \varepsilon' = 0$ car f et g sont des morphismes compatibles avec φ . Ainsi $\text{Im}(g_0 - f_0) \subseteq \ker(\varepsilon) = \text{Im}(d_1^X)$. Le diagramme précédent se factorise donc ainsi

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_0^{X'} & & & & \\ & & \downarrow g_0 - f_0 & & & & \\ P_1^X & \xrightarrow{d_1^X} & \text{Im}(d_1^X) & \xrightarrow{\varepsilon} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$P_0^{X'}$ est projectif, il existe donc une application A -linéaire $k_0 : P_0^{X'} \rightarrow P_1^X$ faisant commuter le diagramme précédent, c.à.d, $g_0 - f_0 = d_1^X \circ k_0$.

Comme précédemment, construisons de proche en proche les applications linéaires en itérant le processus (c.à.d. par récurrence). On a le diagramme commutatif à ligne exacte suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & P_n^{X'} & \xrightarrow{d_n^{X'}} & P_{n-1}^{X'} \\ & & \downarrow g_n - f_n & & \downarrow g_{n-1} - f_{n-1} \\ P_{n+1}^X & \xrightarrow{d_{n+1}^X} & P_n^X & \xrightarrow{d_n^X} & P_{n-1}^X \end{array}$$

c.à.d. $d_n^X \circ (g_n - f_n) = (g_{n-1} - f_{n-1}) \circ d_n^{X'}$. Si on fait l'hypothèse que

$$g_{n-1} - f_{n-1} = d_n^X \circ k_{n-1} + k_{n-2} \circ d_{n-1}^{X'}$$

on obtient que

$$\begin{aligned} d_n^X \circ (g_n - f_n - k_{n-1} \circ d_n^{X'}) &= d_n^X \circ (g_n - f_n) - d_n^X \circ (k_{n-1} \circ d_n^{X'}) \\ &= (g_{n-1} - f_{n-1}) \circ d_n^{X'} - (d_n^X \circ k_{n-1}) \circ d_n^{X'} \\ &= (g_{n-1} - f_{n-1}) \circ d_n^{X'} - (g_{n-1} - f_{n-1} - k_{n-2} \circ d_{n-1}^{X'}) \circ d_n^{X'} \\ &= k_{n-2} \circ (d_{n-1}^{X'} \circ d_n^{X'}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\text{Im}(d_{n-1}^{X'}) = \ker(d_n^{X'})$. Ainsi $\text{Im}(g_n - f_n - k_{n-1} \circ d_n^{X'}) \subseteq \ker(d_n^{X'}) = \text{Im}(d_{n-1}^{X'})$

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_n^{X'} & & \\ & \searrow^{g_n - f_n - k_{n-1} \circ d_n^{X'}} & \\ P_{n+1}^X & \xrightarrow{d_{n+1}^X} & \text{Im}(d_{n+1}^X) \end{array}$$

Or $P_n^{X'}$ est projectif, donc il existe une application A -linéaire $k_n : P_n^{X'} \rightarrow P_{n+1}^X$ telle que $g_n - f_n = d_{n+1}^X \circ k_n + k_{n-1} \circ d_n^{X'}$. Cela conclut la proposition. ■

Remarque 1.41. Dans la suite, on choisira souvent des résolutions projectives et injectives privilégiées obtenues en prenant pour P_n^X le A -module libre engendré par $\ker(d_{n-1}^X)$ et pour I_X^n le module injectif $U^{\text{Hom}_A(\text{Im}(d_X^{n-1}), U)}$ car ceux-ci sont fonctoriels.

Proposition 1.42. Soit A un anneau, étant donné un diagramme suivant où les colonnes sont des résolutions projectives, et la ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & P_1^{X'} & & P_1^{X''} & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & P_0^{X'} & & P_0^{X''} & & & \\ & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon'' & & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\varphi} & X & \xrightarrow{\psi} & X'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il existe une résolution projective P de X et des morphismes \mathbf{f} (resp. \mathbf{g}) compatibles avec φ (resp. ψ) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant est commutatif à lignes exactes

scindées :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_n^{X'} & \xrightarrow{f_n} & P_n & \xrightarrow{g_n} & P_n^{X''} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_n^{X'} & & \downarrow d_n^X & & \downarrow d_n^{X''} \\
 0 & \longrightarrow & P_{n-1}^{X'} & \xrightarrow{f_{n-1}} & P_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & P_{n-1}^{X''} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Démonstration. On commence par montrer qu'il existe un module projectif P_0 et un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K'_0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K_0'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0^{X'} & \xrightarrow{f_0} & P_0 & \xrightarrow{g_0} & P_0^{X''} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & \nearrow \sigma & \downarrow \varepsilon'' \\
 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\varphi} & X & \xrightarrow{\psi} & X'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

- * Définissons $P_0 := P_0^{X'} \oplus P_0^{X''}$. Comme $P_0^{X'}$ et $P_0^{X''}$ sont projectifs, alors P_0 est projectif. Considérons $f_0 : x' \in P_0^{X'} \mapsto (x', 0) \in P_0$ et $g_0 : (x', x'') \in P_0 \mapsto x'' \in P_0^{X''}$. On voit immédiatement que la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow P_0^{X'} \xrightarrow{f_0} P_0 \xrightarrow{g_0} P_0^{X''} \longrightarrow 0$$

Comme $P_0^{X''}$ est projectif, il existe une application A -linéaire $\sigma : P_0^{X''} \rightarrow X$ telle que $\psi \circ \sigma = \varepsilon''$. Définissons maintenant

$$\varepsilon : (x', x'') \in P_0 \mapsto (\varphi \circ \varepsilon')(x') + \sigma(x'') \in X$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
 \psi \circ \varepsilon(x', x'') &= \psi((\varphi \circ \varepsilon')(x') + \sigma(x'')) \\
 &= \psi((\varphi \circ \varepsilon')(x')) + \psi(\sigma(x'')) \\
 &= \varepsilon''(x'') \\
 &= \varepsilon''(g_0(x', x'')) \\
 &= \varepsilon'' \circ g_0(x', x'')
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a la surjectivité de ε par le lemme des cinq. Posons les notations suivantes, $K'_0 = \ker(\varepsilon')$, $K_0'' = \ker(\varepsilon'')$, et $K_0 = \ker(\varepsilon)$, par le diagramme du serpent, on a l'existence de la suite exacte supérieure et la commutativité du diagramme supérieur.

- * On prouve maintenant par récurrence sur $n \geq 0$, que les n lignes inférieures du diagramme attendu ont été construites. En notant $K_n = \ker(P_n \rightarrow P_{n-1})$, $K'_n =$

$\ker(d'_n)$ et $K_n'' = \ker(d_n'')$, comme dans l'initialisation, il existe un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & K'_{n+1} & \longrightarrow & K_{n+1} & \longrightarrow & K_{n+1}'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_{n+1}^{X'} & \xrightarrow{f_{n+1}} & P_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & P_{n+1}^{X''} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow \delta_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & K'_n & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & K_n'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

En recollant ce diagramme au n -ème diagramme, celui supposé par récurrence en définissant $d_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_n$ comme la composée $P_{n+1} \rightarrow K_n \rightarrow P_n$ cela termine la récurrence et la preuve. ■

Proposition 1.43. Soit A un anneau, étant donné le diagramme suivant où les colonnes sont des résolutions injectives, et la ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\varphi} & X & \xrightarrow{\psi} & X'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon' & & & & \downarrow \varepsilon'' \\
 & & I_{X'}^0 & & & & I_{X''}^0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & I_{X'}^1 & & & & I_{X''}^1 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \vdots & & & & \vdots
 \end{array}$$

Il existe une résolution injective I de X et des morphismes \mathbf{f} (resp. \mathbf{g}) compatibles avec φ (resp. ψ) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant est commutatif à lignes exactes scindées :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I_{X'}^n & \xrightarrow{f^n} & I^n & \xrightarrow{g^n} & I_{X''}^n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_{X'}^n & & \downarrow d_X^n & & \downarrow d_{X''}^n \\
 0 & \longrightarrow & I_{X'}^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & I^{n+1} & \xrightarrow{g^{n+1}} & I_{X''}^{n+1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

1.2 Modules plats et fidèlement plats

1.2.1 Définitions

Considérons A un anneau, et M un A -module, pour les premières définitions à venir, on considèrera les deux conditions suivantes :

- i) La suite $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ de $\mathbf{Mod}(A)$ est exacte
- ii) La suite $M \otimes_A N' \xrightarrow{Id_M \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{Id_M \otimes g} M \otimes_A N''$ de $\mathbf{Mod}(A)$ est exacte

Définition 1.44. Soit A un anneau (commutatif), M un A -module. On dit que M est plat si le foncteur $M \otimes_A -$ de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(A)$ est exact. *i.e.* que la condition i) implique ii)

Définition 1.45. Soit A un anneau (commutatif), M un A -module. On dit que M est fidèlement plat si la condition i) est équivalente à la condition ii).

Remarque 1.46. En utilisant la proposition générale suivante sur les foncteurs, on obtient des caractérisations d'être un module plat.

Proposition 1.47. Soient \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' deux catégories abéliennes, F un foncteur covariant additif de \mathfrak{S} dans \mathfrak{S}' . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) F est exact
- ii) Pour toute suite exacte de \mathfrak{S} $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$, la suite de \mathfrak{S}' suivante est exacte $0 \rightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \rightarrow 0$.

Proposition 1.48. Le A -module M est plat si et seulement si pour toute suite exacte de $\mathbf{Mod}(A)$, $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$, la suite suivante est exacte

$$0 \rightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{Id_M \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{Id_M \otimes g} M \otimes_A N'' \rightarrow 0$$

Remarque 1.49. Comme le produit tensoriel est exact à droite, on obtient donc la caractérisation encore plus faible suivante d'être un module plat.

Proposition 1.50. Le A -module M est plat si et seulement si pour toute application linéaire injective $f : N' \rightarrow N$, l'application $Id_M \otimes f : M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N$ est injective.

Proposition 1.51. Soit A un anneau (commutatif).

1. Le A -module A est plat.
2. $\bigoplus_j M_j$ est plat si et seulement si pour tout j , M_j est plat.
3. Tout module projectif est plat.

Démonstration.

1. Soit M et N deux A -modules et considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau \\ & & A \otimes_A M & \xrightarrow{Id_A \otimes i} & A \otimes_A N \end{array}$$

où $\sigma : m \in M \mapsto 1 \otimes m \in A \otimes_A M$ et $\tau : n \in N \mapsto 1 \otimes n \in A \otimes_A N$ sont les isomorphismes classiques. Alors $A \otimes i = \tau i \sigma^{-1}$ est une injection et donc A est un A -module plat.

2. Soit $i : M \rightarrow N$ une injection. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_j M_j) \otimes_A M & \xrightarrow{(\bigoplus_j M_j) \otimes i} & (\bigoplus_j M_j) \otimes_A N \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ \bigoplus_j (M_j \otimes_A M) & \xrightarrow{\varphi} & \bigoplus_j (M_j \otimes_A N) \end{array}$$

où $\varphi : (m_j \otimes x)_j \mapsto (m_j \otimes i(x))_j$, les flèches descendantes sont les isomorphismes faisant commuter les limites inductives avec le produit tensoriel. Du diagramme commutatif, on tire $(\bigoplus_j M_j) \otimes i = \psi_2^{-1} \varphi \psi_1$. Or φ est une injection si et seulement si pour tout j , $M_j \otimes i$ est une injection. Ainsi, on voit que $(\bigoplus_j M_j) \otimes i$ est une injection si et seulement si pour tout j , $M_j \otimes i$ est une injection. Ceci revient bien à dire que $\bigoplus_j M_j$ est plat si et seulement si pour tout j , M_j est plat.

3. Soit P un module projectif, il est facteur direct d'un A -module libre que l'on note L . Ainsi, il existe P' un A -module tel que $P \oplus P' = L$. Or, L est libre donc $L \simeq A^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} A$ et par 1. et 2. on tire que L est plat; en utilisant cette fois 2. à L , on obtient que P est plat. ■

Remarque 1.52. On a même montré dans cette proposition que tout module libre est plat.

Proposition 1.53. Soient A un anneau (commutatif), et M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est fidèlement plat
- ii) M est plat et $M \otimes_A N = 0$ implique $N = 0$
- iii) M est plat et si g est une application linéaire de N' dans N telle que $\text{Id}_M \otimes g = 0$ alors $g = 0$
- iv) M est plat et pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A , $\mathfrak{m}M \neq M$.

Démonstration.

- i) \Rightarrow ii) : M est immédiatement plat, et considérons N un A -module tel que $M \otimes_A N = 0$, alors on a la suite $0 \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow 0$ qui est exacte. Comme M est fidèlement plat, cela donne que la suite $0 \rightarrow N \rightarrow 0$ l'est aussi, et donc que $N = 0$.
- ii) \Rightarrow iii) : On a la suite exacte suivante : $0 \rightarrow \ker(g) \rightarrow N' \xrightarrow{g} N$. Comme M est plat, alors en tensorisant cette suite exacte, on obtient la suite exacte suivante : $0 \rightarrow M \otimes_A \ker(g) \rightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes g} M \otimes_A N$ et on obtient donc $M \otimes_A \ker(g) = \ker(\text{Id}_M \otimes g)$. En appliquant ce résultat à $\pi : N \rightarrow N/\text{Im}(g)$, on obtient que $\ker(\text{id}_M \otimes \pi) = M \otimes_A \ker(\pi) = M \otimes_A \text{Im}(g)$. On a d'autre part aussi la suite exacte suivante :

$$N' \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\pi} N/\text{Im}(g) \rightarrow 0$$

Comme M est plat, en la tensorisant, on obtient la suite exacte suivante :

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{Id_M \otimes g} M \otimes_A N \xrightarrow{Id_M \otimes \pi} M \otimes_A N / \text{Im}(g) \rightarrow 0$$

Cela nous assure que $\text{Im}(Id_M \otimes g) = \ker(Id_M \otimes \pi) = M \otimes_A \text{Im}(g)$

Ainsi si $Id_M \otimes g = 0$ alors $M \otimes_A \text{Im}(g) = 0$ et par hypothèse *ii*), on tire que $\text{Im}(g) = 0$ et donc $g = 0$.

iii) \Rightarrow *i*) : Soit $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ une suite de $\mathbf{Mod}(A)$ telle que la suite

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{Id_M \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{Id_M \otimes g} M \otimes_A N''$$

soit exacte. Alors $Id_M \otimes (g \circ f) = (Id_M \otimes g) \circ (Id_M \otimes f) = 0$ et donc par hypothèse *iii*), on tire que $g \circ f = 0$, et donc que $\text{Im}(f) \subseteq \ker(g)$. Cela nous donne ainsi une autre suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow \ker(g) \xrightarrow{h} \ker(g)/\text{Im}(f) \rightarrow 0$$

que l'on tensorise en la suite exacte suivante en utilisant que M est plat

$$0 \rightarrow M \otimes_A \text{Im}(f) \rightarrow M \otimes_A \ker(g) \xrightarrow{Id_M \otimes h} M \otimes_A (\ker(g)/\text{Im}(f)) \rightarrow 0$$

Or, on a $M \otimes_A \text{Im}(f) = \text{Im}(Id_M \otimes f) = \ker(Id_M \otimes g) = M \otimes_A \ker(g)$, donc $Id_M \otimes h = 0$ et donc par hypothèse $h = 0$, ce qui nous assure que $\ker(g) = \text{Im}(f)$.

ii) \Rightarrow *iv*) : Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A . $M/\mathfrak{m}M = M \otimes_A A/\mathfrak{m}$, Or A/\mathfrak{m} est non-nul car \mathfrak{m} est maximal dans A donc propre. Ainsi $M/\mathfrak{m}M \neq 0$ et donc $\mathfrak{m}M \neq M$.

iv) \Rightarrow *ii*) : Soit N un A -module non nul. considérons $n \in N \setminus \{0\}$, et notons N_1 le module engendré par n , alors $N_1 \subseteq N$. Comme $f : a \in A \mapsto an \in N_1$ est une application surjective, alors $A/\ker(f) \simeq N_1$. Notons $\mathfrak{a} := \ker(f)$, c'est un idéal distinct de A car N_1 est non nul. Ainsi on obtient une suite exacte $0 \rightarrow A/\mathfrak{a} \rightarrow N$. Comme M est plat, on tensorise la suite exacte par M ce qui nous donne la suite exacte suivante $0 \rightarrow M \otimes_A A/\mathfrak{a} \rightarrow M \otimes_A N$. Or, on peut plonger \mathfrak{a} dans un idéal maximal \mathfrak{m} , on a donc la suite exacte $A/\mathfrak{a} \rightarrow A/\mathfrak{m} \rightarrow 0$ et donc en tensorisant par M , $M \otimes_A A/\mathfrak{a} \rightarrow M \otimes_A A/\mathfrak{m} \rightarrow 0$ est exacte. Or $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = M/\mathfrak{m}M$ qui est non nul par hypothèse, donc $M \otimes_A A/\mathfrak{a}$ aussi. Cela nous donne en reprenant la première suite exacte tensorisée par M que $M \otimes_A N$ est non nul. ■

1.2.2 Premières propriétés

Proposition 1.54. Soient A un anneau, M un A -module plat, N un A -module, N_1 et N_2 des sous-modules de N . En identifiant $M \otimes_A N_i$ comme des sous-modules de $M \otimes_A N$, on a l'égalité suivante

$$M \otimes_A (N_1 \cap N_2) = (M \otimes_A N_1) \cap (M \otimes_A N_2)$$

Démonstration. On considère la suite exacte suivant

$$0 \longrightarrow (N_1 \cap N_2) \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} N/N_1 \times N/N_2$$

Comme M est plat, en tensorisant par M , la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow M \otimes_A (N_1 \cap N_2) \xrightarrow{Id_M \otimes i} M \otimes_A N \xrightarrow{Id_M \otimes \pi} M \otimes_A (N/N_1 \times N/N_2)$$

De plus,

$$M \otimes_A (N/N_1 \times N/N_2) = (M \otimes_A N/N_1) \times (M \otimes_A N/N_2) = \left(\frac{M \otimes_A N}{M \otimes_A N_1} \right) \times \left(\frac{M \otimes_A N}{M \otimes_A N_2} \right)$$

et comme vu précédemment, on a donc :

$$\begin{aligned} M \otimes_A (N_1 \cap N_2) &= M \otimes_A \text{Im}(i) \\ &= \text{Im}(Id_M \otimes i) \\ &= \ker(Id_M \otimes \pi) \\ &= (M \otimes_A N_1) \cap (M \otimes_A N_2) \end{aligned}$$

■

Définition 1.55. Un ensemble I est dit préordonné filtrant si I est muni d'une relation de préordre (réflexive et transitive) tel que pour tout couple $(i, j) \in I$ a un majorant (i.e. il existe $k \in I$ tel que $i \leq k$ et $j \leq k$).

Proposition 1.56. Soient A un anneau, $(M_i, f_{ji})_{i,j \in I}$ un système inductif de $\mathbf{Mod}(A)$ indexé par un ensemble préordonné filtrant I , $(M, f_i)_{i \in I}$ sa limite inductive. Si pour tout $i \in I$, le A -module M_i est plat, alors M est plat.

Démonstration. Soit $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ une suite exacte de $\mathbf{Mod}(A)$. Comme pour tout $i \in I$, M_i est plat, cela donne que la suite suivante est exacte :

$$M_i \otimes_A N' \xrightarrow{Id_{M_i} \otimes f} M_i \otimes_A N \xrightarrow{Id_{M_i} \otimes g} M_i \otimes_A N''$$

On a donc la suite suivante de $\mathbf{I}(I, \mathbf{Mod}(A))$ des systèmes inductifs de $\mathbf{Mod}(A)$ indexés par I qui est exacte :

$$(M_i \otimes_A N', f_{ji} \otimes Id_{N'}) \xrightarrow{(Id_{M_i} \otimes f)} (M_i \otimes_A N, f_{ji} \otimes Id_N) \xrightarrow{(Id_{M_i} \otimes g)} (M_i \otimes_A N'', f_{ji} \otimes Id_{N''})$$

Le foncteur limite inductive filtrante de la catégorie abélienne $\mathbf{I}(I, \mathbf{Mod}(A))$ dans $\mathbf{Mod}(A)$ est exact ce qui nous donne l'exactitude de la suite suivante :

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{Id_M \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{Id_M \otimes g} M \otimes_A N''$$

et donc que M est plat.

■

Définition 1.57. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs. On définit un foncteur φ_* , covariant de la catégorie $\mathbf{Mod}(B)$ dans la catégorie $\mathbf{Mod}(A)$ comme suit :

- i) si M est un B -module, $\varphi_*(M)$ est le A -module de groupe additif sous-jacent celui de M muni de la loi de composition externe

$$a \cdot x : (a, x) \in A \times \varphi_*(M) \mapsto \varphi(a)x \in \varphi_*(M)$$

- ii) Si on considère une application B -linéaire f du B -module M' dans le B -module M , elle définit immédiatement une application A -linéaire $\varphi_*(f)$ de $\varphi_*(M')$ dans $\varphi_*(M)$.

Le foncteur φ_* est appelé foncteur de restriction des scalaires.

Proposition 1.58. Étant donné $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs. Le foncteur φ_* est exact

Démonstration. Cela provient directement du fait que $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ ne dépendent que de la structure de groupe abélien sous-jacent. ■

Proposition 1.59. Soient A un anneau, \mathfrak{a} un idéal de A , M un A -module. Si M est plat (respectivement fidèlement plat), le A/\mathfrak{a} -Module $M/\mathfrak{a}M$ est plat (respectivement fidèlement plat).

Démonstration. Soit N' et N deux A/\mathfrak{a} -modules et $i : N' \rightarrow N$ une injection. Considérons $p : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ la projection canonique. En considérant $p_*(N')$ le A -module de groupe additif sous-jacent celui de N' avec comme loi externe $(a, x) \mapsto p(a) \cdot x$. Comme le foncteur de restriction est exact par la proposition précédente. On obtient donc que $p_*(i) : p_*(N') \rightarrow p_*(N)$ est une application A -linéaire injective.

- * Si M est plat, alors $\text{Id}_M \otimes p_*(i) : M \otimes_A p_*(N') \rightarrow M \otimes_A p_*(N)$ est une injection. Or $M/\mathfrak{a}M \otimes_{A/\mathfrak{a}} N = M \otimes_A A/\mathfrak{a} \otimes_{A/\mathfrak{a}} N = M \otimes_A p_*(N)$

On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A p_*(N') & \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes p_*(i)} & M \otimes_A p_*(N) \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ M/\mathfrak{a}M \otimes_{A/\mathfrak{a}} N' & \xrightarrow{\text{Id}_{M/\mathfrak{a}M} \otimes i} & M/\mathfrak{a}M \otimes_{A/\mathfrak{a}} N \end{array}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont les isomorphismes canoniques. Ainsi $\text{Id}_{M/\mathfrak{a}M} \otimes i$ est une injection, ce qui donne bien que $M/\mathfrak{a}M$ est un module plat.

- * Si M est fidèlement plat, et N est un A/\mathfrak{a} -module tel que $M/\mathfrak{a}M \otimes_{A/\mathfrak{a}} N = 0$, alors $M \otimes_A p_*(N) = 0$ donc comme M est fidèlement plat, $p_*(N) = 0$ et donc $N = 0$; ainsi $M/\mathfrak{a}M$ est fidèlement plat par la proposition 1.53.

■

1.2.3 Quelques exercices et exemples

Exemple 1.60. Considérons $n > 1$ un entier, $r \mid n$, $s = \frac{n}{r}$ et $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- * Comme $r \mid n$, on peut considérer l'injection

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & k \bmod [r] & \mapsto ks \bmod [n] \end{array}$$

On a immédiatement que $\text{Im}(f) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} = sA$.

- * D'autre part en considérant la projection canonique $\pi_s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, comme $s \mid n$, i.e. $n\mathbb{Z} \subseteq s\mathbb{Z} = \ker(\pi_s)$. Il existe ainsi $g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} \simeq rA$ tel que $g \circ \pi_n = \pi_s$. Alors

$$\begin{aligned} \ker(g) &= \{\pi_n(k) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, g(\pi_n(k)) = 0\} \\ &= \{\pi_n(k) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \pi_s(k) = 0\} \\ &= \{\pi_n(k) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, s \mid k\} \\ &= s\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ &= \text{Im}(f) \end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu l'existence de la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow sA \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} rA \longrightarrow 0$$

- * Montrons que la suite précédente est scindée si et seulement si r et s sont premiers entre eux.

\Rightarrow : Si la suite est scindée, alors sA et rA sont facteurs directs de A , i.e.

$$A = sA \oplus rA$$

Il existe ainsi $(u, v) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ tel que $\bar{1}^n = s\bar{u}^n + r\bar{v}^n$. On peut donc écrire $1 = s(u + kn) + r(v + \tilde{k}n)$, et en notant $U = u + kn, V = v + \tilde{k}n \in \mathbb{Z}$, on a bien que r et s sont premiers entre eux.

\Leftarrow : Si r et s sont premiers entre eux, alors par le théorème des restes chinois $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} \simeq sA \oplus rA$. La suite est donc scindée.

- * Déterminons les idéaux projectifs de A . Les idéaux de A sont les dA pour $d \mid n$. D'autre part, nous avons vu en proposition 1.13 une caractérisation des modules projectifs comme facteur direct d'un A -module libre. Ainsi les idéaux projectifs de A sont les dA où $d \mid n$ et tel que $\text{pgcd}(d, \frac{n}{d}) = 1$ par ce qui précède.

Exemple 1.61. Pour $n \geq 2$ un entier, le module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas plat car l'application de multiplication par n , $\times n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui est injective n'induit pas une application $\times n \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ injective.

On a même la proposition plus générale suivante :

Proposition 1.62. Soit A un anneau et I un idéal de A contenant un élément x non diviseur de 0. Alors $M = A/I$ n'est pas un A -module plat.

Démonstration. Soit x un élément non-diviseur de 0 de I . En considérant l'application $\times x : A \rightarrow A$ qui est injective car x est non-diviseur de 0. Celle-ci n'induit pas une application injective $\times x \otimes M : M \rightarrow M$. Le module M n'est donc pas plat. ■

Exemple 1.63. Considérons A un anneau principal et M un A -module de type fini tel que $M \otimes_A M = 0$. Montrons que $M = 0$:

- * Dans un premier temps, comme M est un A -module de type fini sur un anneau principal, on peut écrire

$$M = \bigoplus_{i=1}^n A_{/(a_i)} \bigoplus A^r$$

avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i \in A$ et $r \geq 0$ un entier. Nous allons traiter la partie libre et la partie de torsion à part car le produit tensoriel commute avec les sommes directes.

- * D'une part, pour la partie libre $0 = A^r \otimes_A A^r = A^r$ par propriété du produit tensoriel; Ainsi $r = 0$
- * D'autre part, pour la partie de torsion,

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n A_{/(a_i)} \right) \otimes_A \left(\bigoplus_{i=1}^n A_{/(a_i)} \right) = 0$$

Or

$$A_{/(a_i)} \otimes_A A_{/(a_i)} = A_{/(a_i)} \Big/_{(a_i).A_{/(a_i)}} = A_{/(a_i)}$$

Ainsi

$$\bigoplus_{i=1}^n A_{/(a_i)} = 0$$

et donc $M = 0$.

Exemple 1.64. On se propose dans cet exemple de remonter que tout module est sous-module d'un injectif mais d'une autre manière. On considérera A un anneau, M un A -module, et on note $\hat{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

- * \hat{M} est muni d'une structure de A -module à droite via :

$$(f, a) \in \hat{M} \times A \mapsto f a(\cdot) = f(a \cdot) \in \hat{M}$$

- * Supposons que M soit projectif, alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \hat{M}) &:= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} -, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Or M est projectif donc M est plat. Ainsi, le foncteur $M \otimes_{\mathbb{Z}} -$ est exact. Or, par la proposition 1.26, \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un \mathbb{Z} -module injectif, donc le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est exact. Ainsi, par composition, le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \hat{M})$ est exact, ce qui nous assure que \hat{M} est injectif.

- * Considérons l'application $j : \begin{cases} M & \rightarrow \hat{M} \\ x & \mapsto [\hat{y} \mapsto \hat{y}(x)] \end{cases}$ Si $x \neq 0$, il existe une application $\hat{y} \in \hat{M}$ tel que $\hat{y}(x) \neq 0$ et donc j est injective.
- * Comme \hat{M} , est un module, il est quotient d'un module projectif que nous noterons F . On a donc la suite suivante :

$$0 \rightarrow F \rightarrow \hat{M}$$

Alors en appliquant le foncteur contravariant $\hat{} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, on obtient :

$$\hat{\hat{M}} \rightarrow \hat{F} \rightarrow 0$$

Or comme F est projectif, par ce qui précède, \hat{F} est injectif. De plus, via l'injection $j : M \rightarrow \hat{M}$, on obtient que $M \subseteq \hat{M} \subseteq \hat{F}$ qui est injectif. Ainsi M est un sous-module d'un module injectif.

Chapitre 2

Éléments d'algèbre homologique

2.1 Homologie et Cohomologie

Les définitions suivantes peuvent être généralisées aux catégories abéliennes.

2.1.1 Catégorie des complexes de A -modules

Soient $\mathbf{I} = (I^n, \delta^n)$ une résolution injective d'un A -module X , \mathbf{F} un foncteur additif covariant de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(B)$, par exemple le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$.

Remarque 2.1. Étant donné une résolution injective, on a $\mathrm{Im}(\delta^n) = \ker(\delta^{n+1})$, mais en appliquant le foncteur, on n'a pas nécessairement $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(\delta^n)) = \ker(\mathbf{F}(\delta^{n+1}))$. Cependant, comme le foncteur est additif on a tout de même $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(\delta^n)) \subseteq \ker(\mathbf{F}(\delta^{n+1}))$. En effet,

$$\mathbf{F}(\delta^{n+1}) \circ \mathbf{F}(\delta^n) = \mathbf{F}(\delta^{n+1} \circ \delta^n) = \mathbf{F}(0) = 0$$

Cela amène à la définition suivante qui généralise celle de résolution.

Définition 2.2. Soit A un anneau. On appelle complexe de A -modules la donnée $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$ où :

1. $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de A -modules.
2. Pour tout entier n , d'une application linéaire $d^n : M^n \rightarrow M^{n+1}$, appelée différentielle de degré n , telle que $d^{n+1} \circ d^n = 0$.

On convient de noter M_{-n} (resp. d_{-n}) si $n < 0$ au lieu de M^n (resp. d^n).

Exemple 2.3. Les résolutions projectives et injectives de A -modules sont des complexes.

Définition 2.4. On définit la catégorie des complexes de A -modules :

- * Soit A un anneau, $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$, $\mathbf{M}' = (M'^n, d'^n)$ et $\mathbf{M}'' = (M''^n, d''^n)$ des complexes de A -modules.
- * Un morphisme \mathbf{f} de \mathbf{M} dans \mathbf{M}' est la donnée, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'une application linéaire $f^n : M^n \rightarrow M'^n$ telle que $f^{n+1} \circ d^n = d'^n \circ f^n$.
- * Soit \mathbf{g} un morphisme de \mathbf{M}' dans \mathbf{M}'' . Le morphisme composé $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ est le morphisme $(g^n \circ f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
- * Comme précédemment, on notera f_{-n} si $n < 0$ au lieu de f^n .

Exemple 2.5. On a vu dans le chapitre précédent des exemples de morphismes de complexes avec les morphismes de résolutions projectives ou injectives, compatibles avec une application linéaire.

Proposition 2.6. La catégorie des complexes de A -modules est abélienne.

Démonstration. Vérifions les axiomes des catégories abéliennes :

- * Soit $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$ et $\mathbf{M}' = (M'^n, d'^n)$ deux complexes de A -modules. Considérons $f_1, f_2 : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ et $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ des morphismes de complexes. On a immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(f_1^n + f_2^n) \circ g^n = f_1^n \circ g^n + f_2^n \circ g^n$$

Ainsi, $(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$. De même, en considérant, $g_1, g_2 : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ et $f : \mathbf{M}' \rightarrow \mathbf{M}'$, on a directement que $f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$

- * On définit le complexe nul $\mathbf{0} = (M^n, d^n)$ où $M^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Intéressons nous aux morphismes de complexes entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$. Pour cela considérons en un f . Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f^n : 0 \rightarrow M^n$ est le morphisme nul, donc f est unique. De même pour les morphismes de complexes entre \mathbf{M} et $\mathbf{0}$.
- * Considérons \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 deux complexes de A -modules. Leur somme existe dans la catégorie des A -modules, c'est $\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 = (M_1^n \oplus M_2^n, d_1^n \oplus d_2^n)$
- * Soit $f = (f^n)$ un morphisme du complexe $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$ dans le complexe $\mathbf{M}' = (M'^n, d'^n)$. Considérons i^n le noyau de f^n , le morphisme $i = (i^n)$ de $(\ker(f^n), d^n|_{\ker(f^n)})$ dans \mathbf{M}' est le noyau de f . De même, en notant $p = (p^n)$ où p^n est le conoyau de f^n , le morphisme p de \mathbf{M}' dans $(\text{coker}(f^n), \bar{d}^n)$ est le conoyau de f .
- * Comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, dans les A -modules, $\bar{f}^n : \text{coim}(f^n) \rightarrow \text{Im}(f^n)$ est un isomorphisme, cela nous assure que $\bar{f} : \text{coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ est un isomorphisme. Ainsi la catégorie des complexes de A -modules est abélienne. ■

Définition 2.7. Soient $\mathbf{M}', \mathbf{M}, \mathbf{M}''$ des complexes. On dit que la suite de morphismes de complexes suivante $\mathbf{M}' \xrightarrow{f} \mathbf{M} \xrightarrow{g} \mathbf{M}''$ est exacte (resp. scindée) si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suite de $\mathbf{Mod}(A)$: $M'^n \xrightarrow{f^n} M^n \xrightarrow{g^n} M''^n$ l'est.

Proposition 2.8. La catégorie des complexes de A -modules admet des limites inductives et le foncteur limite inductive filtrante y est exact.

Démonstration. Soit $(\mathbf{M}_i, f_{ji})_{i,j \in I} = ((M_i^n, d_i^n), f_{ji})_{i,j \in I}$ un système inductif de complexes de A -modules indexé par l'ensemble préordonné I . Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, considérons $(M_i^n, f_{ji}^n)_{i,j \in I}$ une limite inductive du système inductif de $\mathbf{Mod}(A)$ $(M_i^n, f_{ji}^n)_{i,j \in I}$ et d^n l'application linéaire limite inductive du morphisme (d_i^n) de (M_i^n, f_{ji}^n) dans $(M_i^{n+1}, f_{ji}^{n+1})$.

Comme le foncteur limite inductive est additif, cela assure que $d^{n+1} \circ d^n = 0$ et donc que $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$ est un complexe de A -module. C'est la limite inductive dans la catégorie des complexes de A -modules du système inductif $(\mathbf{M}_i, f_{ji})_{i,j \in I}$. Ce foncteur est exact étant donné l'exactitude de celui-ci dans $\mathbf{Mod}(A)$. ■

Définition 2.9. Un complexe (M^n, d^n) est dit de cochaînes si $M^n = 0$ pour tout $n < 0$. Un tel complexe est donc la donnée d'une suite

$$0 \rightarrow M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \rightarrow \dots \rightarrow M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \rightarrow \dots$$

Exemple 2.10. Les résolutions injectives $\mathbf{I} = (I^n, d^n)$ d'un module fournissent un exemple de complexe de cochaînes (avec la convention $I^n = 0$ pour $n < 0$).

Définition 2.11. Un complexe (M^n, d^n) est dit de chaînes si $M^n = 0$ pour tout $n > 0$. Un tel complexe est donc, la donnée d'une suite

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \longrightarrow 0$$

Exemple 2.12. Les résolutions projectives $\mathbf{P} = (P_n, d_n)$ d'un module fournissent un exemple de complexe de chaînes (avec la convention $P_n = 0$ pour $n > 0$).

2.1.2 Homologie et cohomologie

Remarque 2.13. Soit $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$ un complexe de A -modules. La non-exactitude du complexe (i.e. de la suite de A -modules le définissant) est mesurée par la suite $(H^n(\mathbf{M}))_{n \in \mathbb{Z}}$ de A -modules où $H^n(\mathbf{M}) = \ker(d^n) / \text{Im}(d^{n-1})$.

Définition 2.14. Pour un entier $n > 0$,

- * les A -modules $Z^n(\mathbf{M}) := \ker(d^n)$ sont appelés modules des n -cocycles.
- * les A -modules $B^n(\mathbf{M}) := \text{Im}(d^{n-1})$ sont appelés modules des n -cobords.
- * le A -module $H^n(\mathbf{M}) := Z^n(\mathbf{M}) / B^n(\mathbf{M})$ est appelé n -ème module de cohomologie du complexe \mathbf{M} .

Définition 2.15. Pour un entier $n < 0$,

- * les A -modules $Z_n(\mathbf{M}) := \ker(d_n)$ sont appelés modules des n -cycles.
- * les A -modules $B_n(\mathbf{M}) := \text{Im}(d_{n+1})$ sont appelés modules des n -bords.
- * le A -module $H_n(\mathbf{M}) := Z_n(\mathbf{M}) / B_n(\mathbf{M})$ est appelé n -ème module d'homologie du complexe \mathbf{M} .

Proposition 2.16. Considérant $\mathbf{f} = (f^n)$ un morphisme du complexe $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$ dans le complexe $\mathbf{M}' = (M'^n, d'^n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f^n(Z^n(\mathbf{M})) \subseteq Z^n(\mathbf{M}') \text{ et } f^n(B^n(\mathbf{M})) \subseteq B^n(\mathbf{M}')$$

Démonstration. En effet, comme \mathbf{f} est un morphisme de complexes, alors pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $f^{n+1} \circ d^n = d'^n \circ f^n$

- * Soit $x \in Z^n(\mathbf{M})$, $d'^n(f^n(x)) = f^{n+1}(d^n(x)) = f^{n+1}(0) = 0$ d'où $f^n(x) \in Z^n(\mathbf{M}')$ et donc $f^n(Z^n(\mathbf{M})) \subseteq Z^n(\mathbf{M}')$.
- * Soit $y \in B^n(\mathbf{M})$, il existe donc $x \in M^{n-1}$ tel que $y = d^{n-1}(x)$. Alors, on a $f^n(y) = f^n(d^{n-1}(x)) = d'^{n-1}(f^{n-1}(x)) \in B^n(\mathbf{M}')$ et donc $f^n(B^n(\mathbf{M})) \subseteq B^n(\mathbf{M}')$. ■

Définition 2.17. Étant donné un morphisme de complexes $\mathbf{f} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$. Par la proposition précédente, f^n induit par passage au quotient, une application linéaire $H^n(\mathbf{f}) : H^n(\mathbf{M}) \rightarrow H^n(\mathbf{M}')$ définit comme suit :

- * Soit ξ^n un élément de $H^n(\mathbf{M})$ de représentant x^n dans $Z^n(\mathbf{M})$. On définit

$$H^n(\mathbf{f})(\xi^n) = f^n(x^n) \mod (B^n(\mathbf{M}'))$$

On obtient immédiatement les deux propriétés suivantes :

- * $H^n(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) = H^n(\mathbf{g}) \circ H^n(\mathbf{f})$
- * $H^n(1_{\mathbf{M}}) = 1_{H^n(\mathbf{M})}$

Définition 2.18. On définit ainsi, pour tout entier n , un foncteur additif covariant de la catégorie des complexes de A -modules dans la catégorie $\mathbf{Mod}(A)$:

- * Le n -ème foncteur de cohomologie $H^n(\cdot)$ si $n \geq 0$.
- * Le n -ème foncteur d'homologie $H_n(\cdot)$ si $n \leq 0$.

Définition 2.19. Soient $\mathbf{M} = (M^n, d^n)$ et $\mathbf{M}' = (M'^n, d'^n)$ deux complexes de A -modules, $\mathbf{f}_1 = (f_1^n)$ et $\mathbf{f}_2 = (f_2^n)$ deux morphismes de \mathbf{M} dans \mathbf{M}' .

- * On appelle homotopie de \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 la donnée, pour tout entier n , d'une application linéaire $k^n : M^n \rightarrow M'^{n-1}$ telle que $f_2^n = f_1^n + d'^{n-1} \circ k^n + k^{n+1} \circ d^n$.
- * On dit que \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont homotopes s'il existe une homotopie de \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 .

Proposition 2.20. Soient \mathbf{M} et \mathbf{M}' deux complexes de A -modules, \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 deux morphismes homotopes de \mathbf{M} dans \mathbf{M}' . Alors pour tout entier n , $H^n(\mathbf{f}_1) = H^n(\mathbf{f}_2)$.

Démonstration. Soient $\xi \in H^n(\mathbf{M})$ et x^n un représentant de ξ dans $Z^n(\mathbf{M})$. Alors par hypothèse, comme \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont homotopes :

$$\begin{aligned} f_2^n(x^n) &= f_1^n(x^n) + d'^{n-1} \circ k^n(x^n) + k^{n+1} \circ d^n(x^n) \\ &= f_1^n(x^n) + d'^{n-1}(k^n(x^n)) \end{aligned}$$

Les classes modulus $B^n(\mathbf{M}')$ sont donc égales et donc $H^n(\mathbf{f}_1)(\xi) = H^n(\mathbf{f}_2)(\xi)$ ■

Définition 2.21. Deux complexes \mathbf{M} et \mathbf{M}' de A -modules sont dit homotopiquement équivalents s'il existe un morphisme \mathbf{f} de \mathbf{M} dans \mathbf{M}' (resp. \mathbf{g} de \mathbf{M}' dans \mathbf{M}) tels que $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ (resp. $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$) soit homotope à $1_{\mathbf{M}}$ (resp. $1_{\mathbf{M}'}$).

Remarque 2.22. La proposition 1.38 peut être énoncée en disant que deux résolutions projectives (resp. injectives) d'un A -module sont homotopiquement équivalentes. En effet, étant donné P^X et Q^X deux résolutions projectives de X un A -module, en considérant $\varphi : X \rightarrow X$ l'identité, il existe deux morphismes compatibles avec φ ; $\mathbf{f} : P^X \rightarrow Q^X$ et $\mathbf{g} : Q^X \rightarrow P^X$. Alors $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : Q^X \rightarrow Q^X$ est un morphisme compatible avec $\varphi : X \rightarrow X$ tout comme Id_{Q^X} et donc ceux-ci sont homotopes par le point 3. De même pour $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : P^X \rightarrow P^X$ et Id_{P^X} .

Lemme 2.23. Soient \mathbf{M} et \mathbf{M}' deux complexes de A -modules homotopiquement équivalents, F un foncteur additif. Les complexes $F(\mathbf{M})$ et $F(\mathbf{M}')$ sont homotopiquement équivalents.

Démonstration.

- * Soit $(k^n : M^n \rightarrow M'^{n-1})$ une homotopie de \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, comme le foncteur F est additif :

$$F(f_2^n) = F(f_1^n) + F(d'^{n-1}) \circ F(k^n) + F(k^{n+1}) \circ F(d^n)$$

Ainsi $F(k^n)$ est une homotopie de $F(\mathbf{f}_1)$ et $F(\mathbf{f}_2)$.

- * si \mathbf{M} et \mathbf{M}' sont homotopiquement équivalents alors il existe $\mathbf{f} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ et $\mathbf{g} : \mathbf{M}' \rightarrow \mathbf{M}$ tel que $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ (resp. $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$) soit homotope via (k_1^n) à $1_{\mathbf{M}}$. (resp. à $1_{\mathbf{M}'}$ via (k_2^n)). Alors $F(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = F(\mathbf{f}) \circ F(\mathbf{g})$ est homotope via $F(k_1^n)$ à $F(1_{\mathbf{M}}) = 1_{F(\mathbf{M})}$. (De même $F(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) = F(\mathbf{g}) \circ F(\mathbf{f})$ est homotope à $F(1_{\mathbf{M}'}) = 1_{F(\mathbf{M}')} via $F(k_2^n)$).$
- * Ainsi $F(\mathbf{M})$ et $F(\mathbf{M}')$ sont homotopiquement équivalents. ■

Corollaire 2.24. Soient \mathbf{M} et \mathbf{M}' deux complexes de A -modules homotopiquement équivalents. Pour tout entier n , $H^n(\mathbf{M})$ et $H^n(\mathbf{M}')$ sont isomorphes.

Démonstration. Si f et g des morphismes tels que $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) soit homotope à 1_M (resp. $1_{M'}$). Alors par la proposition 2.20 :

$$H^n(g) \circ H^n(f) = H^n(g \circ f) = 1_{H^n(M)} \text{ et } H^n(f) \circ H^n(g) = H^n(f \circ g) = 1_{H^n(M')}$$

Ainsi $H^n(M)$ et $H^n(M')$ sont isomorphes. ■

Proposition 2.25. *Pour tout entier n , le foncteur H^n commute aux limites inductives filtrantes.*

Démonstration.

- * Soient $(M_i, f_{ji})_{i,j \in I}$ un système inductif de complexes de A -modules indexé par l'ensemble préordonné filtrant I . Comme la catégorie des complexes admet des limites inductives, alors on peut considérer $(M, f_i)_{i \in I}$ sa limite inductive.
- * D'autre part, H^n est un foncteur covariant, donc $(H^n(M_i), H^n(f_{ji}))_{i,j \in I}$ est un système inductif de A -modules indexé par I . On peut considérer $(M', f'_i)_{i \in I}$ sa limite inductive.
- * Si $i \leq j$, on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} H^n(M_i) & & H^n(M_i) \\ \downarrow H^n(f_{ji}) & \searrow f'_i & \searrow H^n(f_i) \\ & M' & H^n(M) \\ \uparrow f'_j & & \uparrow H^n(f_j) \\ H^n(M_j) & & H^n(M_j) \end{array}$$

Il existe donc une application linéaire $\varphi : M' \rightarrow H^n(M)$ telle que pour tout $i \in I$, $H^n(f_i) = \varphi \circ f'_i$.

- * L'application φ est surjective : En effet, si on considère $\xi^n \in H^n(M)$, $x^n \in Z^n(M)$ un représentant de ξ^n , $i \in I$ et $x_i \in M_i^n$ tels que $x^n = f'_i(x_i)$. On a alors

$$d^n(x^n) = d^n \circ f'_i(x_i) = f_i^{n+1}(d_i^n(x_i)) = 0$$

Ainsi, il existe $j \in I$ tel que $i \leq j$ et $f_{ji}^{n+1}(d_i^n(x_i)) = 0$, soit $d_j^n(f_{ji}^n(x_i)) = 0$. La classe de $f_{ji}^n(x_i)$ modulo $B^n(M_j)$ est un élément de $H^n(M_j)$. Notons alors $\xi' = f'_j(f_{ji}^n(x_i) \bmod [B^n(M_j)])$, On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \varphi(\xi') &= \varphi(f'_j(f_{ji}^n(x_i) \bmod [B^n(M_j)])) \\ &= H^n(f_j)(f_{ji}^n(x_i) \bmod [B^n(M_j)]) \\ &= f_j^n(f_{ji}^n(x_i) \bmod (B^n(M_i))) \\ &= f_i^n(x_i) \bmod (B^n(M_i)) \\ &= H^n(f_i)(x^n) \\ &= \xi^n \end{aligned}$$

- * L'application φ est injective. En effet, si on considère $\xi' \in \ker(\varphi)$, et pour $i \in I$, $\xi_i^n \in H^n(M_i)$ tels que $\xi' = f'_i(\xi_i^n)$. Alors

$$0 = \varphi(\xi') = (\varphi \circ f'_i)(\xi_i^n) = H^n(f_i)(\xi_i^n)$$

Soit $x_i^n \in Z^n(M)$ un représentant de ξ_i^n . Alors $d_i^n \circ f_i^n(x_i^n) = 0 = f_i^{n+1}(d_i^n(x_i^n))$. Il existe donc $j \in I$ tel que $i \leq j$ et $f_{ji}^{n+1}(d_i^n(x_i^n)) = 0$, soit $d_j^n(f_{ji}^n(x_i^n)) = 0$. Pour

un tel j , on a donc $H^n(f_{ji})(\xi_i^n) = 0$ et, par conséquent, $\xi' = f_i(\xi_i^n) = 0$ comme limite inductive.

* Ainsi on a donc

$$\varinjlim (H^n(\mathbf{M}_i)) = M' = H^n(\mathbf{M}) = H^n(\varinjlim (\mathbf{M}_i))$$

■

2.1.3 Suite exacte d'homologie ou de cohomologie

Théorème 2.26 (suite exacte d'homologie ou cohomologie). Soient A un anneau et une suite exacte (E) de complexes de A -modules suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbf{M}' = (M^m, d^m) \xrightarrow{f} \mathbf{M} = (M^n, d^n) \xrightarrow{g} \mathbf{M}'' = (M''^n, d''^n) \longrightarrow 0$$

Il existe pour tout entier n une application A -linéaire δ_E^n de $H^n(\mathbf{M}'')$ dans $H^{n+1}(\mathbf{M}')$ telle que la suite suivante soit exacte

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathbf{M}') \xrightarrow{H^n(f)} H^n(\mathbf{M}) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(\mathbf{M}'') \xrightarrow{\delta_E^n} H^{n+1}(\mathbf{M}')$$

Démonstration.

* Étant donné la suite exacte (E) de complexes, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M^m & \xrightarrow{f^n} & M^n & \xrightarrow{g^n} & M''^n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d^m & & \downarrow d^n & & \downarrow d''^n \\ 0 & \longrightarrow & M'^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & M^n & \xrightarrow{g^{n+1}} & M''^{n+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par le diagramme du serpent, cela implique la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^n(\mathbf{M}') & \longrightarrow & Z^n(\mathbf{M}) & \longrightarrow & Z^n(\mathbf{M}'') \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \hookrightarrow \text{coker}(d''^n) \longrightarrow \text{coker}(d^n) \longrightarrow \text{coker}(d^m) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Or, puisque $d^{n+1}(B^{n+1}(\mathbf{M})) = d^{n+1} \circ d^n(M^n) = 0$, l'application

$$d^{n+1} : M^{n+1} \twoheadrightarrow \text{Im}(d^{n+1}) \subseteq \ker(d^{n+2}) = Z^{n+2}(\mathbf{M})$$

induit une application A -linéaire

$$a^n : \text{coker}(d^n) = M^{n+1} / B^{n+1}(\mathbf{M}) \rightarrow Z^{n+2}(\mathbf{M})$$

Or en notant $\pi : M^{n+1} \rightarrow M^{n+1} / B^{n+1}(\mathbf{M})$, on a donc $a^n \circ \pi = d^{n+1}$. Ainsi, $\text{Im}(a^n) = \text{Im}(d^{n+1}) = B^{n+2}(\mathbf{M})$. On a de plus le diagramme commutatif (par définition de morphisme de complexes) à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{coker}(d^m) & \longrightarrow & \text{coker}(d^n) & \longrightarrow & \text{coker}(d''^n) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow a^m & & \downarrow a^n & & \downarrow a''^n & & \\
0 & \longrightarrow & Z^{n+2}(\mathbf{M}') & \longrightarrow & Z^{n+2}(\mathbf{M}) & \longrightarrow & Z^{n+2}(\mathbf{M}'')
\end{array}$$

En appliquant à ce diagramme le lemme du serpent et en remarquant que :

$$\text{coker}(a^n) = Z^{n+2}(\mathbf{M})/B^{n+2}(\mathbf{M}) \text{ et } \ker(a^n) = Z^{n+1}(\mathbf{M})/B^{n+1}(\mathbf{M})$$

On tire la suite exacte :

$$H^{n+1}(\mathbf{M}') \xrightarrow{H^{n+1}(\mathbf{f})} H^{n+1}(\mathbf{M}) \xrightarrow{H^{n+1}(\mathbf{g})} H^{n+1}(\mathbf{M}'') \xrightarrow{\delta_E^{n+1}} H^{n+2}(\mathbf{M}')$$

* δ_E^n est obtenu comme suit : Considérons $x''^n \in Z^n(\mathbf{M}'')$ et notons \bar{x}''^n sa classe module $B^n(\mathbf{M}'')$. Comme le morphisme \mathbf{g} est surjectif, il existe $x^n \in M^n$ tel que $x''^n = g^n(x^n)$. Or $d^n(x^n)$ appartient à $B^{n+1}(\mathbf{M})$ et

$$g^{n+1}(d^n(x^n)) = d''^n(g^n(x^n)) = d''^n(x''^n) = 0$$

Ainsi $d^n(x^n) \in \ker(g^{n+1})$ et comme $\ker(g^{n+1}) = \text{Im}(f^{n+1})$, il existe $x'^{n+1} \in M'^{n+1}$, $d^n(x^n) = f^{n+1}(x'^{n+1})$. Comme $d^{n+1} \circ d^n = 0$, on voit que

$$f^{n+2}(d^{n+1}(x'^{n+1})) = d^{n+1} \circ f^{n+1}(x'^{n+1}) = d^{n+1} \circ d^n(x^n) = 0$$

Comme f^{n+2} est injective, on en déduit que $d^{n+1}(x'^{n+1}) = 0$. Par conséquent, $x'^{n+1} \in Z^{n+1}(\mathbf{M}')$. On définit donc $\delta_E^n(x''^n)$ comme la classe \bar{x}'^{n+1} de x'^{n+1} modulo $B^{n+1}(\mathbf{M}')$

■

Théorème 2.27 (Fonctorialité de δ_E^n). Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes de complexes de A -modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{M}' & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{M} & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbf{M}'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \mathbf{a}' & & \downarrow \mathbf{a} & & \downarrow \mathbf{a}'' \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{M}'_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}_1} & \mathbf{M}_1 & \xrightarrow{\mathbf{g}_1} & \mathbf{M}_1'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^n(\mathbf{M}'') & \xrightarrow{\delta_E^n} & H^{n+1}(\mathbf{M}') \\
\downarrow H^n(\mathbf{a}'') & & \downarrow H^{n+1}(\mathbf{a}') \\
H^n(\mathbf{M}_1'') & \xrightarrow{\delta_{E_1}^n} & H^{n+1}(\mathbf{M}'_1)
\end{array}$$

Démonstration. Soient $\xi^n \in H^n(\mathbf{M}'')$ de représentant x''^n dans $Z^n(\mathbf{M}'')$. Comme \mathbf{g} est surjectif, il existe $x^n \in M^n$ tel que $x''^n = g^n(x^n)$. Or comme dans le théorème précédent, $g^{n+1}(d^n(x^n)) = d''^n(g^n(x^n)) = d''^n(x''^n) = 0$, donc $d^n(x^n) \in \ker(g^{n+1})$. Or $\ker(g^{n+1}) = \text{Im}(f^{n+1})$, il existe donc $x'^{n+1} \in M'^{n+1}$, $d^n(x^n) = f^{n+1}(x'^{n+1})$ et on a vu dans le théorème précédent que $x'^{n+1} \in Z^{n+1}(\mathbf{M}')$.

- * D'une part, $a''^n(x''^n)$ est une représentant de $H^n(\mathbf{a}'')(\xi^n)$, et on a

$$a''^n(x''^n) = a''^n(g^n(x^n)) = g_1^n(a^n(x^n))$$

De plus,

$$\begin{aligned} d_1^n(a^n(x^n)) &= a^{n+1}(d^n(x^n)) \\ &= a^{n+1}(f^{n+1}(x'^{n+1})) \\ &= f_1^{n+1}(a'^{n+1}(x'^{n+1})) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \delta_{E_1}^n(H^n(\mathbf{a}'')(\xi^n)) = a'^{n+1}(x'^{n+1}) \mod (B^{n+1}(\mathbf{M}'_1))$$

- * D'autre part, $\delta_E^n(\xi^n) = x'^{n+1} \mod (B^{n+1}(\mathbf{M}'))$, et donc

$$\begin{aligned} H^{n+1}(\mathbf{a}')(\delta_E^n(\xi^n)) &= H^{n+1}(\mathbf{a}')(x'^{n+1} \mod (B^{n+1}(\mathbf{M}'))) \\ &= a'^{n+1}(x'^{n+1}) \mod (B^{n+1}(\mathbf{M}'_1)) \\ &= \delta_{E_1}^n(H^n(\mathbf{a}'')(\xi^n)) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la commutativité du diagramme. ■

2.2 Foncteurs dérivés de foncteurs d'une variable

2.2.1 Foncteurs dérivés droits d'un foncteur additif covariant

Soit \mathbf{F} un foncteur additif covariant de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(B)$. Commençons par quelques remarques qui proviennent toutes de résultats précédents :

- * Considérons Y un A -module, $\mathbf{I} = (I^n, d^n)$ et $\mathbf{I}' = (I'^n, d'^n)$ deux résolutions injectives de Y . Ces deux résolutions sont homotopiquement équivalentes (par la proposition 1.38 et la remarque 2.22).
- * Dès lors, par le lemme 2.23, les complexes $\mathbf{F}(\mathbf{I})$ et $\mathbf{F}(\mathbf{I}')$ sont donc homotopiquement équivalents. Alors par le corollaire 2.24, pour tout entier n , il existe un isomorphisme $\psi^n : H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I})) \rightarrow H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I}'))$.
- * Pour la suite, on notera donc \mathbf{I}_Y la résolution injective fonctorielle de Y définie à la remarque 1.41

Notation 2.28. On notera pour la suite $R^n \mathbf{F}(Y) = H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I}_Y))$.

- * En considérant $\varphi : Y \rightarrow Y'$ une application A -linéaire. Par la proposition 1.38, il existe un morphisme $\mathbf{f} : \mathbf{I}_Y \rightarrow \mathbf{I}_{Y'}$ compatible avec φ . Si on considère un autre tel morphisme \mathbf{g} , ceux-ci sont homotopes, alors $\mathbf{F}(\mathbf{f})$ et $\mathbf{F}(\mathbf{g})$ sont aussi homotopes, et pour tout entier n , $H^n(\mathbf{F}(\mathbf{f})) = H^n(\mathbf{F}(\mathbf{g}))$ par la proposition 2.20. L'application $H^n(\mathbf{F}(\mathbf{g})) : R^n \mathbf{F}(Y) \rightarrow R^n \mathbf{F}(Y')$ est donc indépendante du morphisme \mathbf{f} prolongeant φ .

Notation 2.29. On notera pour la suite $R^n \mathbf{F}(\varphi) = H^n(\mathbf{F}(\mathbf{f}))$.

Proposition 2.30. Si $\mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif covariant, alors $R^n \mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif covariant.

Démonstration. Par les remarques introductives, le foncteur $R^n \mathbf{F}$ est bien défini sur les objets et sur les morphismes. Montrons que c'est un foncteur additif covariant.

— Considérons Y, Y', Y'' trois A -modules, $\varphi \in \text{Hom}_A(Y', Y)$ et $\psi \in \text{Hom}_A(Y, Y'')$.

$$\begin{aligned} R^n \mathbf{F}(\psi \circ \varphi) &= H^n(\mathbf{F}(\psi \circ \varphi)) \\ &= H^n(\mathbf{F}(\psi) \circ \mathbf{F}(\varphi)) \text{ car } \mathbf{F} \text{ est covariant} \\ &= H^n(\mathbf{F}(\psi)) \circ H^n(\mathbf{F}(\varphi)) \text{ car } H^n \text{ est covariant} \\ &= R^n \mathbf{F}(\psi) \circ R^n \mathbf{F}(\varphi) \end{aligned}$$

— $R^n \mathbf{F}(1_Y) = H^n(\mathbf{F}(1_Y)) = H^n(1_{\mathbf{F}(Y)}) = 1_{H^n(\mathbf{F}(Y))} = 1_{R^n \mathbf{F}(Y)}$

— Considérons $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}_A(Y', Y)$, en utilisant successivement que \mathbf{F} et H^n est additif, on obtient que $R^n \mathbf{F}(\varphi_1 + \varphi_2) = R^n \mathbf{F}(\varphi_1) + R^n \mathbf{F}(\varphi_2)$

■

Définition 2.31. Si $\mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif covariant, on appelle le foncteur $R^n \mathbf{F}$ le n -ème foncteur dérivé droit de \mathbf{F} .

Remarque 2.32. Si le A -module Y est injectif, on peut prendre la résolution injective de Y la résolution $(\tilde{I}^n, \tilde{d}^n)$ avec $\tilde{I}^0 = Y$ et $\tilde{I}^n = 0$ pour $n \geq 1$, alors $R^n \mathbf{F}(Y) = 0$ car isomorphe à $H^n(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{I}}))$

Théorème 2.33. Soient A et B deux anneaux, \mathbf{F} un foncteur additif covariant exact à gauche de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(B)$ et le diagramme commutatif à lignes exactes de $\mathbf{Mod}(A)$ suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Y'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha'' \\ 0 & \longrightarrow & Y'_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 & \xrightarrow{\psi_1} & Y_1'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{F}(Y') & \xrightarrow{\mathbf{F}(\varphi)} & \mathbf{F}(Y) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\psi)} & \mathbf{F}(Y'') & \xrightarrow{\delta_E^0} & R^1 \mathbf{F}(Y') & \xrightarrow{R^1 \mathbf{F}(\varphi)} & R^1 \mathbf{F}(Y) & \xrightarrow{R^1 \mathbf{F}(\psi)} & R^1 \mathbf{F}(Y'') & \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \mathbf{F}(\alpha') & & \downarrow \mathbf{F}(\alpha) & & \downarrow \mathbf{F}(\alpha'') & & \downarrow R^1 \mathbf{F}(\alpha') & & \downarrow R^1 \mathbf{F}(\alpha) & & \downarrow R^1 \mathbf{F}(\alpha'') & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{F}(Y'_1) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\varphi_1)} & \mathbf{F}(Y_1) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\psi_1)} & \mathbf{F}(Y_1'') & \xrightarrow{\delta_{E_1}^0} & R^1 \mathbf{F}(Y'_1) & \xrightarrow{R^1 \mathbf{F}(\varphi_1)} & R^1 \mathbf{F}(Y_1) & \xrightarrow{R^1 \mathbf{F}(\psi_1)} & R^1 \mathbf{F}(Y_1'') & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Démonstration. La preuve va se faire en deux temps : l'existence et l'exactitude de chaque ligne, puis le caractère commutatif du diagramme.

* Soit $0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Y'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathbf{Mod}(A)$. Alors en considérant $\mathbf{I}_{Y'}$ et $\mathbf{I}_{Y''}$ des résolutions injectives de Y' et Y'' , par la proposition 1.43, il existe $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{Y'} \oplus \mathbf{I}_{Y''}$ résolution injective de Y telle qu'on ait la suite exacte de complexes de cochaînes suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathbf{I}_{Y'} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{I}_{Y''} \longrightarrow 0$$

La suite précédente est scindée, et comme tout foncteur additif transforme une suite exacte scindée en une suite exacte scindée, on obtient donc la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{I}_{Y'}) \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathbf{f})} \mathbf{F}(\mathbf{I}) \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathbf{g})} \mathbf{F}(\mathbf{I}_{Y''}) \longrightarrow 0$$

Comme \mathbf{I} et \mathbf{I}_Y sont des résolutions injectives de Y , pour tout entier n , il existe une application linéaire $u^n : I^n \rightarrow I_Y^n$ telle que

$$H^n(\mathbf{F}(u)) : H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I})) \rightarrow H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I}_Y)) = R^n\mathbf{F}(Y)$$

soit un isomorphisme.

Par le théorème 2.26, cela fournit le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & H^0(\mathbf{F}(\mathbf{I}_{Y'})) = R^0\mathbf{F}(Y') & \xrightarrow{H^0(\mathbf{F}(\mathbf{f}))} & H^0(\mathbf{F}(\mathbf{I})) & \xrightarrow{H^0(\mathbf{F}(\mathbf{g}))} & H^0(\mathbf{F}(\mathbf{I}_{Y''})) = R^0\mathbf{F}(Y'') & \\
 & \searrow R^0\mathbf{F}(\varphi) & & \downarrow \cong & & \nearrow R^0\mathbf{F}(\psi) & \\
 & & H^0(\mathbf{F}(\mathbf{I}_Y)) = R^0\mathbf{F}(Y) & & & & H^1(\mathbf{F}(\mathbf{I}_{Y'})) = R^1\mathbf{F}(Y') \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \vdots \\
 & \searrow & & & & & \nearrow \\
 \longrightarrow \dots \longrightarrow & H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I}_{Y'})) = R^n\mathbf{F}(Y') & \xrightarrow{H^n(\mathbf{F}(\mathbf{f}))} & H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I})) & \xrightarrow{H^n(\mathbf{F}(\mathbf{g}))} & H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I}_{Y''})) = R^n\mathbf{F}(Y'') & \longrightarrow \dots \\
 & \searrow R^n\mathbf{F}(\varphi) & & \downarrow \cong & & \nearrow R^n\mathbf{F}(\psi) & \\
 & & H^n(\mathbf{F}(\mathbf{I}_Y)) = R^n\mathbf{F}(Y) & & & &
 \end{array}$$

On en déduit alors la suite exacte des foncteurs dérivés droits :

$$0 \rightarrow R^0\mathbf{F}(Y') \xrightarrow{R^0\mathbf{F}(\varphi)} R^0\mathbf{F}(Y) \xrightarrow{R^0\mathbf{F}(\psi)} R^0\mathbf{F}(Y'') \xrightarrow{\delta_E^0} R^1\mathbf{F}(Y') \xrightarrow{R^1\mathbf{F}(\varphi)} R^1\mathbf{F}(Y) \xrightarrow{R^1\mathbf{F}(\psi)} R^1\mathbf{F}(Y'') \rightarrow \dots$$

Or comme le foncteur est exact à gauche, l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{\varepsilon} I_Y^0 \xrightarrow{d^0} I_Y^1$$

implique donc celle de la suite :

$$0 \rightarrow \mathbf{F}(Y) \xrightarrow{\mathbf{F}(\varepsilon)} \mathbf{F}(I_Y^0) \xrightarrow{\mathbf{F}(d^0)} \mathbf{F}(I_Y^1)$$

Puisque $B^0(\mathbf{F}(\mathbf{I}_Y)) = 0$ et $Z^0(\mathbf{F}(\mathbf{I}_Y)) = \ker(\mathbf{F}(d^0))$, $\mathbf{F}(\varepsilon)$ est un isomorphisme fonctoriel (en Y) de $\mathbf{F}(Y)$ sur $\ker(\mathbf{F}(d^0)) = R^0\mathbf{F}(Y)$.

On a donc obtenu l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow \mathbf{F}(Y') \xrightarrow{\mathbf{F}(\varphi)} \mathbf{F}(Y) \xrightarrow{\mathbf{F}(\psi)} \mathbf{F}(Y'') \xrightarrow{\delta_E^0} R^1\mathbf{F}(Y') \xrightarrow{R^1\mathbf{F}(\varphi)} R^1\mathbf{F}(Y) \xrightarrow{R^1\mathbf{F}(\psi)} R^1\mathbf{F}(Y'') \rightarrow \dots$$

* La commutativité du diagramme provient de la commutativité du diagramme issue du théorème 2.27. ■

2.2.2 Foncteurs dérivés gauches d'un foncteur additif covariant

Toute la construction est analogue en remplaçant les résolutions injectives par des résolutions projectives. Soit \mathbf{F} un foncteur additif covariant de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(B)$.

- * On notera pour la suite P^Y la résolution projective fonctorielle de Y définie à la remarque 1.41.

Notation 2.34. On notera pour la suite $L_n \mathbf{F}(Y) = H_n(\mathbf{F}(P^Y))$ et $L_n \mathbf{F}(\varphi) = H_n(\mathbf{F}(\mathbf{f}))$

Proposition 2.35. Si $\mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif covariant, alors $L_n \mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif covariant.

Définition 2.36. Si $\mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif covariant, on appelle le foncteur $L_n \mathbf{F}$ le n -ème foncteur dérivé gauche de \mathbf{F} .

Remarque 2.37. Si le A -module Y est projectif, on peut prendre la résolution projective de Y la résolution $(\tilde{P}_n, \tilde{d}_n)$ avec $\tilde{P}_0 = Y$ et $\tilde{P}_n = 0$ pour $n \geq 1$, alors $L_n \mathbf{F}(Y) = 0$ car isomorphe à $H^n(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}))$

Remarque 2.38. Si le foncteur \mathbf{F} est exact à droite, on déduit de l'exactitude de la suite $P_1^Y \xrightarrow{d_1^Y} P_0^Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \rightarrow 0$ celle de la suite

$$\mathbf{F}(P_1^Y) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_1^Y)} \mathbf{F}(P_0^Y) \xrightarrow{\mathbf{F}(\varepsilon)} \mathbf{F}(Y) \rightarrow 0$$

Par conséquent $\mathbf{F}(\varepsilon)$ définit, par passage au quotient, un isomorphisme fonctoriel (en Y) du module $L_0 \mathbf{F}(Y) = \mathbf{F}(P_0^Y) / \text{Im}(\mathbf{F}(d_1^Y))$ sur le module $\mathbf{F}(Y)$.

On obtient comme précédemment un théorème suivant :

Théorème 2.39. Soient A et B deux anneaux, \mathbf{F} un foncteur additif covariant exact à droite de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(B)$ et le diagramme commutatif à lignes exactes de $\mathbf{Mod}(A)$ suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Y'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha'' \\ 0 & \rightarrow & Y'_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 & \xrightarrow{\psi_1} & Y_1'' \rightarrow 0 \end{array}$$

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \rightarrow & L_1 \mathbf{F}(Y') & \xrightarrow{L_1 \mathbf{F}(\varphi)} & L_1 \mathbf{F}(Y) & \xrightarrow{L_1 \mathbf{F}(\psi)} & L_1 \mathbf{F}(Y'') & \xrightarrow{\delta_1^E} & \mathbf{F}(Y') & \xrightarrow{\mathbf{F}(\varphi)} & \mathbf{F}(Y) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\psi)} & \mathbf{F}(Y'') \rightarrow 0 \\ & & \downarrow L_1 \mathbf{F}(\alpha') & & \downarrow L_1 \mathbf{F}(\alpha) & & \downarrow L_1 \mathbf{F}(\alpha'') & & \downarrow \mathbf{F}(\alpha') & & \downarrow \mathbf{F}(\alpha) & & \downarrow \mathbf{F}(\alpha'') \\ \cdots & \rightarrow & L_1 \mathbf{F}(Y'_1) & \xrightarrow{L_1 \mathbf{F}(\varphi_1)} & L_1 \mathbf{F}(Y_1) & \xrightarrow{L_1 \mathbf{F}(\psi_1)} & L_1 \mathbf{F}(Y_1'') & \xrightarrow{\delta_1^{E_1}} & \mathbf{F}(Y'_1) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\varphi_1)} & \mathbf{F}(Y_1) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\psi_1)} & \mathbf{F}(Y_1'') \rightarrow 0 \end{array}$$

2.2.3 Foncteurs dérivés droits d'un foncteur additif contravariant

La construction est analogue avec les résolutions projectives. Il faut juste faire attention au caractère contravariant du foncteur. Soit \mathbf{F} un foncteur additif contravariant de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(B)$.

- * On notera pour la suite P^Y la résolution projective fonctorielle de Y définie à la remarque 1.41.

Notation 2.40. On notera pour la suite $R^n \mathbf{F}(Y) = H^n(\mathbf{F}(P^Y))$ et $R^n \mathbf{F}(\varphi) = H^n(\mathbf{F}(\mathbf{f}))$

Proposition 2.41. Si $\mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif contravariant, alors $R^n \mathbf{F} : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif contravariant.

Définition 2.42. Si $F : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$ est un foncteur additif contravariant, on appelle le foncteur $R^n F$ le n -ème foncteur dérivé droit de F .

Remarque 2.43. Si le A -module Y est projectif, on peut prendre la résolution projective de Y la résolution $(\tilde{P}_n, \tilde{d}_n)$ avec $\tilde{P}_0 = Y$ et $\tilde{P}_n = 0$ pour $n \geq 1$, alors $R^n F(Y) = 0$ car isomorphe à $H^n(F(\tilde{P}))$.

Remarque 2.44. Si le foncteur F est exact à gauche, on déduit de l'exactitude de la suite $P_1^Y \xrightarrow{d_1^Y} P_0^Y \xrightarrow{\varepsilon} Y \rightarrow 0$ celle de la suite

$$0 \rightarrow F(Y) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(P_0^Y) \xrightarrow{F(d_1^Y)} F(P_1^Y)$$

Par conséquent $F(\varepsilon)$ définit, par passage au quotient, un isomorphisme fonctoriel (en Y) du module $F(Y)$ sur le module $\ker(F(d_1^Y)) = R^0 F(Y)$ (car $B^0(F(P^Y)) = \text{Im}(F(d_0^Y)) = 0$ et $Z^0(F(P^Y)) = \ker(F(d_1^Y))$).

On obtient comme précédemment un théorème :

Théorème 2.45. Soient A et B deux anneaux, F un foncteur additif contravariant exact à gauche de $\mathbf{Mod}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(B)$ et le diagramme commutatif à lignes exactes de $\mathbf{Mod}(A)$ suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Y'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha'' \\ 0 & \rightarrow & Y'_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 & \xrightarrow{\psi_1} & Y_1'' \rightarrow 0 \end{array}$$

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \rightarrow & F(Y'') & \xrightarrow{F(\psi)} & F(Y) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y') & \xrightarrow{\delta_E^0} & R^1 F(Y'') & \xrightarrow{R^1 F(\psi)} & R^1 F(Y) & \xrightarrow{R^1 F(\varphi)} & R^1 F(Y') & \rightarrow \dots \\ & & \uparrow F(\alpha'') & & \uparrow F(\alpha) & & \uparrow F(\alpha') & & \uparrow R^1 F(\alpha'') & & \uparrow R^1 F(\alpha) & & \uparrow R^1 F(\alpha') & \\ 0 & \rightarrow & F(Y_1'') & \xrightarrow{F(\psi_1)} & F(Y_1) & \xrightarrow{F(\varphi_1)} & F(Y_1') & \xrightarrow{\delta_{E_1}^0} & R^1 F(Y_1'') & \xrightarrow{R^1 F(\psi_1)} & R^1 F(Y_1) & \xrightarrow{R^1 F(\varphi_1)} & R^1 F(Y_1') & \rightarrow \dots \end{array}$$

2.3 Foncteurs Ext et Tor

2.3.1 Foncteurs Ext

Définition 2.46. Soient A un anneau et X un A -module. On appelle et note $\text{Ext}_A^n(X, -) = R^n \text{Hom}_A(X, -)$ le n -ème foncteur dérivé droit du foncteur $\text{Hom}_A(X, -)$.

Remarque 2.47.

1. Au vu de la définition des foncteurs dérivés droits, le foncteur $\text{Ext}_A^n(X, -)$ est additif covariant de $\mathbf{Mod}(A)$ dans \mathbf{Ab} fonctoriellement isomorphe à $\text{Hom}_A(X, -)$ si $n = 0$ et tel que $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ si $n \geq 1$ et Y est injectif.
2. On a immédiatement toutes les propriétés associées aux foncteurs dérivés droits (suite exacte longue, etc.).
3. Nous allons voir maintenant qu'il est possible de définir $\text{Ext}_A^n(X, -)$ comme un foncteur additif contravariant de $\mathbf{Mod}(A)$ dans \mathbf{Ab} de la variable X .

Proposition 2.48. Soit X', X des A -modules, $f : X' \rightarrow X$ une application linéaire, et Y un A -module. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X, Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(X, \varepsilon_Y)} & \text{Hom}_A(X, I_Y^0) & \xrightarrow{\text{Hom}(X, d_Y^0)} & \cdots \longrightarrow \text{Hom}_A(X, I_Y^n) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \text{Hom}(f, Y) & & \downarrow \text{Hom}(f, I_Y^0) & & \downarrow \text{Hom}(f, I_Y^n) \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X', Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(X', \varepsilon_Y)} & \text{Hom}_A(X', I_Y^0) & \xrightarrow{\text{Hom}(X', d_Y^0)} & \cdots \longrightarrow \text{Hom}_A(X', I_Y^n) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

et $(\text{Hom}(f, I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un morphisme du complexe $(\text{Hom}_A(X, I_Y^n), \text{Hom}(X, d_Y^n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans le complexe $(\text{Hom}_A(X', I_Y^n), \text{Hom}(X', d_Y^n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Cela est immédiat et provient du fait que $\text{Hom}_A(-, -)$ est un bi-foncteur covariant en la première variable, contravariant (et exact à gauche) en la seconde variable. ■

Définition 2.49. On définit l'application linéaire $\text{Ext}_A^n(f, Y)$ de $\text{Ext}_A^n(X, Y)$ dans $\text{Ext}_A^n(X', Y)$ comme étant $H^n((\text{Hom}(f, I_Y^m))_{m \in \mathbb{N}})$.

Proposition 2.50. Les applications $X \mapsto \text{Ext}_A^n(X, Y)$ et $f \mapsto \text{Ext}_A^n(f, Y)$ définissent pour tout A -module Y un foncteur contravariant additif de $\mathbf{Mod}(A)$ dans \mathbf{Ab} .

Démonstration. Nous allons montrer que ces applications définissent bien un foncteur contravariant puis que celui-ci est additif

- On observe tout d'abord qu'en considérant $g : X \rightarrow X''$ une application linéaire que $(\text{Hom}(g \circ f, I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}} = (\text{Hom}(f, I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}} \circ (\text{Hom}(g, I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}}$ car $\text{Hom}_A(-, Y)$ est contravariant pour tout A -module Y . Alors pour tout entier naturel n ,

$$\text{Ext}_A^n(g \circ f, Y) = \text{Ext}_A^n(f, Y) \circ \text{Ext}_A^n(g, Y)$$

- On a de plus que

$$\begin{aligned}
 \text{Ext}_A^n(1_X, Y) &= H^n(\text{Hom}(1_X, I_Y^m)_{m \in \mathbb{N}}) \\
 &= H^n(\text{Hom}(X, I_Y^m)_{m \in \mathbb{N}}) \\
 &= R^n(\text{Hom}_A(X, -))(Y) \\
 &= \text{Ext}_A^n(X, Y) \\
 &= 1_{\text{Ext}_A^n(X, Y)}
 \end{aligned}$$

On a ainsi que les applications définissent un foncteur contravariant.

- Le caractère additif provient immédiatement du caractère additif de H^n et de Hom . ■

Remarque 2.51. Si le A -module X est projectif, la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(X, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(X, \varepsilon_Y)} \text{Hom}_A(X, I_Y^0) \xrightarrow{\text{Hom}(X, d_Y^0)} \text{Hom}_A(X, I_Y^1) \longrightarrow \cdots$$

on obtient donc par définition que $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ si $n \geq 1$

Théorème 2.52. Soient A un anneau X, X', X'' et Y des A -modules et la suite exacte de $\mathbf{Mod}(A)$ suivante :

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

On a alors la suite exacte des Ext par rapport à la variable X suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(X'', Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(g, Y)} & \text{Hom}_A(X, Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, Y)} & \text{Hom}_A(X', Y) \xrightarrow{\delta^0} \text{Ext}_A^1(X'', Y) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & \searrow & \text{Ext}_A^n(X', Y) & \xrightarrow{\delta^n} & \text{Ext}_A^{n+1}(X'', Y) & \xrightarrow{\text{Ext}_A^n(g, Y)} & \text{Ext}_A^{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\text{Ext}_A^n(f, Y)} \text{Ext}_A^{n+1}(X', Y) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Démonstration. Comme pour tout $n \geq 0$, le A -module I_Y^n est injectif, alors la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(X'', I_Y^n) \xrightarrow{\text{Hom}(g, I_Y^n)} \text{Hom}_A(X, I_Y^n) \xrightarrow{\text{Hom}(f, I_Y^n)} \text{Hom}_A(X', I_Y^n) \longrightarrow 0$$

Dès lors, cela donne l'exactitude de la suite de complexe

$$0 \longrightarrow (\text{Hom}_A(X'', I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(\text{Hom}(g, I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}}} (\text{Hom}_A(X, I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(\text{Hom}(f, I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}}} (\text{Hom}_A(X', I_Y^n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

Alors en appliquant le théorème 2.26 couplé à l'existence d'un isomorphisme fonctoriel de $H^0(\text{Hom}_A(X, I_Y^n))$ sur $\text{Hom}_A(X, Y)$, on obtient le résultat souhaité. ■

Remarque 2.53.

1. On a donc vu que l'on peut voir $\text{Ext}_A^n(X, -)$ comme un foncteur de la seconde variable ou comme un foncteur de la variable X .
2. Le foncteur $\text{Ext}_A^n(-, -)$ est un foncteur de deux variables. Étant donné $f : X' \rightarrow X$ et $g : Y' \rightarrow Y$ des applications linéaires. On a le diagramme commutatif de complexes suivant où \mathbf{g} est un morphisme du complexe $(I_{Y'}, d_{Y'}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le complexe $(I_Y^n, d_Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ prolongeant g :

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Hom}_A(X, I_{Y'}^n), \text{Hom}(X, d_{Y'}^n))_{n \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\text{Hom}(X, \mathbf{g})} & (\text{Hom}_A(X, I_Y^n), \text{Hom}(X, d_Y^n))_{n \in \mathbb{N}} \\
 \downarrow (\text{Hom}(f, I_{Y'}^n)) & & \downarrow (\text{Hom}(f, I_Y^n)) \\
 (\text{Hom}_A(X', I_{Y'}^n), \text{Hom}(X', d_{Y'}^n))_{n \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\text{Hom}(X', \mathbf{g})} & (\text{Hom}_A(X', I_Y^n), \text{Hom}(X', d_Y^n))_{n \in \mathbb{N}}
 \end{array}$$

On obtient donc un diagramme commutatif des n -èmes modules de cohomologie, avec les notations précédentes :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_A^n(X, Y') & \xrightarrow{\text{Ext}_A^n(X, g)} & \text{Ext}_A^n(X, Y) \\
 \downarrow \text{Ext}_A^n(f, Y') & & \downarrow \text{Ext}_A^n(f, Y) \\
 \text{Ext}_A^n(X', Y') & \xrightarrow{\text{Ext}_A^n(X', g)} & \text{Ext}_A^n(X', Y)
 \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \text{Ext}_A^n(f, g) &= \text{Ext}_A^n(X', g) \circ \text{Ext}_A^n(f, Y') \\
 &= \text{Ext}_A^n(f, Y) \circ \text{Ext}_A^n(X, g)
 \end{aligned}$$

3. Le résultat suivant le lemme donne une autre possibilité de calculer $\text{Ext}_A^n(X, Y)$

Lemme 2.54. Soit $U \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\alpha} W$ une suite avec α injective. Alors la suite $0 \rightarrow \text{Im}(\alpha \circ \beta) \xrightarrow{\varphi} \text{Im}(\alpha) \xrightarrow{\psi} \text{coker}(\beta) \rightarrow 0$ où φ est l'injection naturelle et ψ l'application qui à $w = \alpha(v)$ fait correspondre $v \bmod (\text{Im}(\beta))$.

Démonstration. ψ est immédiatement surjective par définition. Il reste à montrer que $\ker(\psi) = \text{Im}(\varphi)$. Pour cela :

$$\begin{aligned} w \in \ker(\psi) &\Leftrightarrow w = \alpha(v) \text{ où } v = \beta(u) \text{ avec } u \in U \\ &\Leftrightarrow w = \alpha \circ \beta(u) \\ &\Leftrightarrow w \in \text{Im}(\alpha \circ \beta) = \text{Im}(\varphi) \end{aligned}$$

■

Théorème 2.55. Soient A un anneau, X et Y des A -modules. Il existe un isomorphisme fonctoriel en X et Y de $\text{Ext}_A^n(X, Y)$ sur le n -ème module de cohomologie du complexe $(\text{Hom}_A(P_i^X, Y), \text{Hom}(d_i^X, Y))_{i \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. On va démontrer cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$: Par exactitude à gauche du foncteur contravariant $\text{Hom}_A(-, Y)$ la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(X, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(\varepsilon^X, Y)} \text{Hom}_A(P_0^X, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(d_1^X, Y)} \text{Hom}_A(P_1^X, Y)$$

Dès lors, $\text{Hom}(\varepsilon^X, Y)$ réalise un isomorphisme fonctoriel de $\text{Hom}_A(X, Y)$ sur $\text{Im}(\text{Hom}(\varepsilon^X, Y)) = \ker(\text{Hom}(d_1^X, Y))$. Or, $\ker(\text{Hom}(d_1^X, Y))$ n'est rien autre que $H^0((\text{Hom}_A(P_i^X, Y), \text{Hom}(d_i^X, Y))_{i \in \mathbb{N}})$.

$n = 1$: Notons $R_1^X = \text{Im}(d_1^X)$. On a une suite exacte, fonctorielle en X :

$$0 \rightarrow R_1^X \xrightarrow{\lambda^X} P_0^X \xrightarrow{\varepsilon^X} X \rightarrow 0$$

On obtient, par le théorème 2.52 la suite exacte des Ext suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(X, Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(\varepsilon^X, Y)} & \text{Hom}_A(P_0^X, Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(\lambda^X, Y)} & \text{Hom}_A(R_1^X, Y) & \xrightarrow{\delta^0} & \text{Ext}_A^1(X, Y) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Ext}_A^1(P_0^X, Y) \end{array}$$

Or P_0^X étant projectif, alors $\text{Ext}_A^1(P_0^X, Y) = 0$ et donc $\text{Ext}_A^1(X, Y) = \text{coker}(\text{Hom}(\lambda^X, Y))$.

D'autre part, comme on a la suite $P_2^X \xrightarrow{d_2^X} P_1^X \rightarrow R_1^X \rightarrow 0$ on a le diagramme commutatif à ligne exacte suivant

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(R_1^X, Y) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_A(P_1^X, Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(d_2^X, Y)} & \text{Hom}_A(P_2^X, Y) \\ & \uparrow \text{Hom}(\lambda^X, Y) & \nearrow \text{Hom}(d_1^X, Y) & & \\ & \text{Hom}_A(P_0^X, Y) & & & \end{array}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} H^1((\text{Hom}_A(P_i^X, Y), \text{Hom}(d_i^X, Y))_{i \in \mathbb{N}}) &= \ker(\text{Hom}(d_2^X, Y)) / \text{Im}(\text{Hom}(d_1^X, Y)) \\ &= \text{Im}(\alpha) / \text{Im}(\alpha \circ \text{Hom}(\lambda^X, Y)) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme précédent avec $\beta = \text{Hom}(\lambda^X, Y)$, On obtient que ψ induit un isomorphisme de $H^1((\text{Hom}_A(P_i^X, Y), \text{Hom}(d_i^X, Y))_{i \in \mathbb{N}})$ à valeurs dans $\text{coker}(\text{Hom}(\lambda^X, Y)) = \text{Ext}_A^1(X, Y)$.

$n \geq 1$: Supposons le théorème démontré pour $n \geq 1$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow R_1^X \xrightarrow{\lambda^X} P_0^X \xrightarrow{\varepsilon^X} X \longrightarrow 0$$

on tire avec le fait que P_0^X est projectif celle des Ext suivante :

$$0 = \text{Ext}_A^n(P_0^X, Y) \longrightarrow \text{Ext}_A^n(R_1^X, Y) \xrightarrow{u_X^{n+1}} \text{Ext}_A^{n+1}(X, Y) \longrightarrow \text{Ext}_A^{n+1}(P_0^X, Y) = 0$$

où u_X^{n+1} est fonctoriel en X et Y .

Par hypothèse de récurrence, il existe un isomorphisme fonctoriel en X et Y $\varphi_{X,Y}^n$ de $\text{Ext}_A^n(X, Y)$ sur $H^n((\text{Hom}_A(P_i^X, Y), \text{Hom}(d_i^X, Y))_{i \in \mathbb{N}})$. On commence par observer que :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_n^X & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_2^X & \xrightarrow{d_2^X} & P_1^X & \xrightarrow{d_1^X} & P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon^X} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & \nearrow \\ & & & & & & & & & & & & R_1^X & & \end{array}$$

Ainsi pour tout entier naturel i , $P_i^{R_1^X} = P_{i+1}^X$ et donc que

$$H^{n+1}((\text{Hom}_A(P_i^X, Y), \text{Hom}(d_i^X, Y))_{i \in \mathbb{N}}) = H^n((\text{Hom}_A(P_i^{R_1^X}, Y), \text{Hom}(d_i^{R_1^X}, Y))_{i \in \mathbb{N}})$$

Alors $\varphi_{X,Y}^n \circ (u_X^{n+1})^{-1}$ est donc un isomorphisme fonctoriel en X et Y de $\text{Ext}_A^{n+1}(X, Y)$ sur $H^{n+1}((\text{Hom}_A(P_i^X, Y), \text{Hom}(d_i^X, Y))_{i \in \mathbb{N}})$. ■

Proposition 2.56. Soient A un anneau, X un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) X est projectif.
- ii) $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ pour tout A -module Y et tout entier $n \geq 1$.
- iii) $\text{Ext}_A^1(X, Y) = 0$ pour tout A -module Y .

Démonstration.

$i) \Rightarrow ii)$: C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

$ii) \Rightarrow iii)$: Cas $n = 1$.

iii) \Rightarrow i) : Soit $0 \rightarrow T \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$ une suite exacte avec Z projectif. Alors, par suite exacte des Ext, on obtient la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(X, T) \xrightarrow{\text{Hom}(X, f)} \text{Hom}_A(X, Z) \xrightarrow{\text{Hom}(X, g)} \text{Hom}_A(X, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, T) = 0$$

Or $\text{Id}_X \in \text{Hom}_A(X, X)$, et par surjectivité de $\text{Hom}(X, g)$, on obtient donc l'existence de $h \in \text{Hom}_A(X, Z)$ tel que $g \circ h = \text{Id}_X$. On en déduit donc que X est un facteur direct de Z projectif, donc X est projectif par le corollaire 1.8. ■

Proposition 2.57. Soient A un anneau, Y un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Y est injectif.
- ii) $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ pour tout A -module X et tout entier $n \geq 1$.
- iii) $\text{Ext}_A^1(X, Y) = 0$ pour tout A -module X .

Démonstration.

i) \Rightarrow ii) : C'est une conséquence immédiate de la définition de $\text{Ext}_A^n(X, -)$ comme foncteur dérivé droit.

ii) \Rightarrow iii) : Cas $n = 1$.

iii) \Rightarrow i) : Soit $0 \rightarrow Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \rightarrow 0$ une suite exacte avec Z injectif. Alors, par suite exacte des Ext, on obtient la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(T, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(g, Y)} \text{Hom}_A(Z, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(f, Y)} \text{Hom}_A(Y, Y) \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, Y) = 0$$

Or $\text{Id}_Y \in \text{Hom}_A(Y, Y)$, et par surjectivité de $\text{Hom}(f, Y)$, on obtient donc l'existence de $h \in \text{Hom}_A(Z, Y)$ tel que $h \circ f = \text{Id}_Y$. On en déduit donc que Y est un facteur direct de Z injectif, donc Y est injectif par le corollaire 1.9. ■

2.3.2 Foncteurs Tor

Définition 2.58. Soient A un anneau, X un A -module à droite. On appelle et note $\text{Tor}_n^A(X, -) = L_n(X \otimes_A -)$ le n -ème foncteur dérivé gauche du foncteur $X \otimes_A -$

Remarque 2.59.

1. Au vu de la définition des foncteurs dérivés gauche, le foncteur $\text{Tor}_n^A(X, -)$ est additif covariant de **Mod**(A) dans **Ab** fonctoriellement isomorphe à $X \otimes_A -$ si $n = 0$ et tel que $\text{Tor}_n^A(X, Y) = 0$ si $n \geq 1$ et Y est projectif.
2. On a immédiatement toutes les propriétés associées aux foncteurs dérivés gauche (suite exacte longue, etc..)
3. Nous allons maintenant voir qu'il est possible de définir $\text{Tor}_n^A(X, -)$ comme un foncteur additif covariant de la variable X .

Proposition 2.60. Soit X', X des A -modules, $f : X' \rightarrow X$ une application linéaire, et Y un A -module. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X' \otimes_A P_n^Y & \xrightarrow{Id_{X'} \otimes d_n^Y} & X' \otimes_A P_{n-1}^Y & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f \otimes Id_{P_n^Y} & & \downarrow f \otimes Id_{P_{n-1}^Y} & & \\ \cdots & \longrightarrow & X \otimes_A P_n^Y & \xrightarrow{Id_X \otimes d_n^Y} & X \otimes_A P_{n-1}^Y & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{Id_{X'} \otimes \varepsilon^Y} & X' \otimes_A Y & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow f \otimes Id_{P_0^Y} & & \downarrow f \otimes Id_Y & \\ & & & X \otimes_A P_0^Y & \xrightarrow{Id_X \otimes \varepsilon^Y} & X \otimes_A Y & \longrightarrow 0 \end{array}$$

et $(f \otimes Id_{P_n^Y})_{n \in \mathbb{N}}$ est un morphisme du complexe $(X' \otimes_A P_n^Y, Id_{X'} \otimes d_n^Y)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le complexe $(X \otimes_A P_n^Y, Id_X \otimes d_n^Y)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Cela provient immédiatement du fait que $-\otimes_A -$ est un bi-foncteur additif covariant exact à droite en ses deux variables. ■

Définition 2.61. On définit l'application A -linéaire $\text{Tor}_n^A(f, Y)$ de $\text{Tor}_n^A(X', Y)$ dans $\text{Tor}_n^A(X, Y)$ comme étant $H_n((f \otimes Id_{P_n^Y})_{n \in \mathbb{N}})$.

Proposition 2.62. Les applications $X \mapsto \text{Tor}_n^A(X, Y)$ et $f \mapsto \text{Tor}_n^A(f, Y)$ définissent pour tout A -module Y un foncteur additif covariant de $\mathbf{Mod}(A)$ dans \mathbf{Ab} .

Démonstration. Nous allons montrer que ces applications définissent bien un foncteur covariant puis que celui-ci est additif.

- En considérant une application $g : X \rightarrow X''$, on a tout d'abord que $(g \circ f \otimes Id_{P_n^Y})_{n \in \mathbb{N}} = (g \otimes Id_{P_n^Y})_{n \in \mathbb{N}} \circ (f \otimes Id_{P_n^Y})_{n \in \mathbb{N}}$ car $-\otimes_A Y$ est un foncteur covariant pour tout A -module Y . Alors, pour tout entier naturel n ,

$$\text{Tor}_n^A(g \circ f, Y) = \text{Tor}_n^A(g, Y) \circ \text{Tor}_n^A(f, Y)$$

- On a de plus que

$$\begin{aligned} \text{Tor}_n^A(1_X, Y) &= H_n((Id_X \otimes Id_{P_m^Y})_{m \in \mathbb{N}}) \\ &= H_n((Id_X \otimes Id_{P_m^Y})_{m \in \mathbb{N}}) \\ &= L_n(X \otimes_A -)(Y) \\ &= \text{Tor}_n^A(X, Y) \\ &= 1_{\text{Tor}_n^A(X, Y)} \end{aligned}$$

On a ainsi que les applications définissent un foncteur covariant.

- Le caractère additif provient du caractère additif de H_n et de $-\otimes_A -$

■

Remarque 2.63. Si le A -module X est projectif, (donc plat), on voit que la suite suivante est exacte :

$$\cdots \longrightarrow X \otimes_A P_1^Y \xrightarrow{Id_X \otimes d_1^Y} X \otimes_A P_0^Y \xrightarrow{Id_X \otimes \varepsilon} X \otimes_A Y \longrightarrow 0$$

On obtient donc par définition que $\text{Tor}_n^A(X, Y) = 0$ si $n \geq 1$.

Théorème 2.64. Soient A un anneau X, X', X'' et Y des A -modules et la suite exacte de $\mathbf{Mod}(A)$ suivante :

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \longrightarrow 0$$

On a alors la suite exacte des Tor par rapport à la variable X suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^A(X', Y) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^A(g, Y)} & \mathrm{Tor}_n^A(X, Y) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^A(g, Y)} & \mathrm{Tor}_n^A(X'', Y) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^A(X', Y) \\ & & & & & & \downarrow \vdots \\ & & & & & & \downarrow \\ & \searrow & \mathrm{Tor}_1^A(X'', Y) & \xrightarrow{\delta_1} & X' \otimes_A Y & \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_Y} & X \otimes_A Y \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_Y} X'' \otimes_A Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration. Comme pour tout $n \geq 0$, P_n^Y est projectif et donc plat, alors la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow X' \otimes_A P_n^Y \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_{P_n^Y}} X \otimes_A P_n^Y \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_{P_n^Y}} X'' \otimes_A P_n^Y \longrightarrow 0$$

Dès lors, cela donne que la suite de complexe est exacte

$$0 \longrightarrow (X' \otimes_A P_n^Y)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(f \otimes \mathrm{Id}_{P_n^Y})_{n \in \mathbb{N}}} (X \otimes_A P_n^Y)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(g \otimes \mathrm{Id}_{P_n^Y})_{n \in \mathbb{N}}} (X'' \otimes_A P_n^Y)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

Alors par le théorème 2.26 couplé à l'existence d'un isomorphisme fonctoriel de $H^0(X \otimes_A P_n^Y)$ sur $X \otimes_A Y$, on obtient la suite longue d'homologie attendue. ■

Remarque 2.65.

1. On a donc vu que l'on peut voir $\mathrm{Tor}_n^A(-, -)$ comme un foncteur de la première ou seconde variable.
2. Le résultat suivant le lemme donne une autre possibilité de calculer $\mathrm{Tor}_n^A(X, Y)$.

Lemme 2.66. Soit $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W$ une suite avec α surjective. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha) \xrightarrow{\varphi} \ker(\beta \circ \alpha) \xrightarrow{\psi} \ker(\beta) \longrightarrow 0 \quad \text{où } \varphi \text{ est l'injection naturelle et } \psi \text{ la restriction de } \alpha.$$

Démonstration. La surjectivité de ψ provient directement de celle de α . D'autre part,

$$\begin{aligned} x \in \ker(\psi) &\Leftrightarrow x \in \ker(\alpha) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}(\varphi) \end{aligned}$$

La suite est donc exacte. ■

Théorème 2.67. Soient A un anneau, X et Y des A -modules. Il existe un isomorphisme fonctoriel en X et Y de $\mathrm{Tor}_n^A(X, Y)$ sur le n -ème module de cohomologie du complexe $(P_i^X \otimes_A Y, d_i^X \otimes \mathrm{Id}_Y)_{i \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. On va démontrer le résultat par récurrence sur n .

$n = 0$: On a la suite exacte suivante

$$P_1^X \otimes_A Y \xrightarrow{d_1^X \otimes Id_Y} P_0^X \otimes_A Y \xrightarrow{\varepsilon^X \otimes Id_Y} X \otimes_A Y \longrightarrow 0$$

Par conséquent, $\varepsilon^X \otimes Id_Y$ définit un isomorphisme de $P_0^X \otimes_A Y / \ker(\varepsilon^X \otimes Id_Y)$ sur $X \otimes_A Y$.

Or d'une part,

$$\begin{aligned} P_0^X \otimes_A Y / \ker(\varepsilon^X \otimes Id_Y) &= P_0^X \otimes_A Y / \text{Im}(d_1^X \otimes Id_Y) \\ &= \ker(d_0^X \otimes Id_Y) / \text{Im}(d_1^X \otimes Id_Y) \\ &= H_0((P_i \otimes_A Y, d_i^X \otimes Id_Y)_{i \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

et d'autre part $X \otimes_A Y = \text{Tor}_0^A(X, Y)$. On a donc bien un isomorphisme de $H_0((P_i \otimes_A Y, d_i^X \otimes Id_Y)_{i \in \mathbb{N}})$ sur $\text{Tor}_0^A(X, Y)$.

$n = 1$: Notons $R_1^X = \text{Im}(d_1^X)$. On a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow R_1^X \longrightarrow P_0^X \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

On obtient donc la suite exacte des Tor suivante :

$$0 = \text{Tor}_1^A(P_0^X, Y) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(X, Y) \longrightarrow R_1^X \otimes_A Y \longrightarrow P_0^X \otimes_A Y \longrightarrow X \otimes_A Y \longrightarrow 0$$

Alors $\text{Tor}_1^A(X, Y) = \ker(R_1^X \otimes_A Y \rightarrow P_0^X \otimes_A Y)$. Or, on a le diagramme commutatif à ligne exacte suivant :

$$\begin{array}{ccccc} P_2^X \otimes_A Y & \xrightarrow{d_2^X \otimes Id_Y} & P_1^X \otimes_A Y & \xrightarrow{\alpha} & R_1^X \otimes_A Y \longrightarrow 0 \\ & & \searrow d_1^X \otimes Id_Y & & \downarrow \beta \\ & & & & P_0^X \otimes_A Y \end{array}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} H_1((P_i^X \otimes_A Y, d_i^X \otimes Id_Y)_{i \in \mathbb{N}}) &= \ker(d_1^X \otimes Id_Y) / \text{Im}(d_2^X \otimes Id_Y) \\ &= \ker(\beta \circ \alpha) / \ker(\alpha) \end{aligned}$$

Or, en utilisant le lemme précédent, on obtient que ψ induit un isomorphisme de $H_1((P_i^X \otimes_A Y, d_i^X \otimes Id_Y)_{i \in \mathbb{N}}) = \ker(\beta \circ \alpha) / \ker(\alpha)$ sur $\ker(\beta) = \text{Tor}_1^A(X, Y)$.

$n \geq 1$: Supposons l'assertion vérifiée pour l'entier $n \geq 1$ et pour tout couple (X, Y) de A -modules.

$$0 = \mathrm{Tor}_{n+1}^A(P_0^X, Y) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^A(X, Y) \xrightarrow{u_{n+1}^X} \mathrm{Tor}_n^A(R_1^X, Y) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(P_0^X, Y) = 0$$
$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_n^X & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_2^X & \xrightarrow{d_2^X} & P_1^X & \xrightarrow{d_1^X} & P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon^X} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & & & & & & & & R_1^X & & & & & \end{array}$$
$$H_{n+1}((P_i^X \bigotimes_A Y, d_i^X \bigotimes Id_Y)_{i \in \mathbb{N}}) = H_n((P_i^{R_1^X} \bigotimes_A Y, d_i^{R_1^X} \bigotimes Id_Y)_{i \in \mathbb{N}})$$

Ainsi $\varphi_{R_1^X, Y}^n \circ u_{n+1}^X$ est un isomorphisme fonctoriel en X et en Y de $\text{Tor}_{n+1}^A(X, Y)$ dans $H_{n+1}((P_i^X \otimes_A Y, d_i^X \otimes Id_Y)_{i \in \mathbb{N}})$ ce qui achève la récurrence.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_m^A(M, N) &= H_m((P_n \bigotimes_A N, d_n \bigotimes Id_N)) \\ &= H_m(\varinjlim_A (P_n \bigotimes_A N_i, d_n \bigotimes Id_{N_i}), \varinjlim (Id_{P_n} \bigotimes f_{ji})) \\ &= \varinjlim (H_m((P_n \bigotimes_A N_i, d_n \bigotimes Id_{N_i}), (Id_{P_n} \bigotimes f_{ji}))) \\ &= \lim (\mathrm{Tor}_m^A(M, N_i), \mathrm{Tor}_m^A(M, f_{ji})) \end{aligned}$$

Théorème 2.69. Soient A un anneau commutatif, M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est plat.
- ii) $\text{Tor}_1^A(M, N) = 0$ pour tout A -module N .
- iii) $\text{Tor}_1^A(M, N) = 0$ pour tout A -module N de type fini.
- iv) $\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ pour tout idéal \mathfrak{a} de A .
- v) $\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ pour tout idéal de type fini \mathfrak{a} de A .
- vi) L'application canonique $\sum x_i \otimes a_i \in M \otimes_A \mathfrak{a} \mapsto \sum a_i x_i \in M$ est injective pour tout idéal (resp. tout idéal de type fini) \mathfrak{a} de A .

Démonstration.

- i) \Rightarrow ii) : Soit $0 \rightarrow R \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow 0$ une suite exacte avec L projectif. On a alors la suite exacte suivante :

$$\text{Tor}_1^A(M, L) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow M \otimes_A R \xrightarrow{u} M \otimes_A L$$

Or L étant projectif, alors $\text{Tor}_1^A(M, L) = 0$ et donc $\text{Tor}_1^A(M, N) = \ker(u) = 0$ car u est injective par platitude de M .

- ii) \Rightarrow i) : Considérons $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ une suite exacte. On en déduit la suite exacte suivante :

$$\text{Tor}_1^A(M, N'') \rightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes f} M \otimes_A N$$

Or par hypothèse $\text{Tor}_1^A(M, N'') = 0$, donc $\text{Id}_M \otimes f$ est injective ce qui nous assure la platitude de M .

- ii) \Rightarrow iii) : c'est clair.

- iii) \Rightarrow ii) : On considère le A -module N comme limite inductive filtrante de ses sous-modules de type fini, $N = \bigcup_{i \in I} N_i$, alors par commutativité de Tor aux limites inductives filtrantes, alors $\text{Tor}_1^A(M, N) = \varinjlim (\text{Tor}_1^A(M, N_i)) = 0$.

- iii) \Rightarrow v) : c'est clair.

- v) \Rightarrow iv) : On réalise la même preuve que iii) \Rightarrow ii) en remarquant que le A -module A/\mathfrak{a} est limite inductive du système inductif $(A/\mathfrak{a}_i, f_{ji})$ où \mathfrak{a}_i parcourt l'ensemble des idéaux de type fini contenus dans \mathfrak{a} et si $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{a}_j$ alors f_{ji} est la surjection canonique de A/\mathfrak{a}_i sur A/\mathfrak{a}_j .

- iv) \Rightarrow iii) : On effectue la preuve par récurrence sur le cardinal n d'un système fini de générateurs du A -module de type fini N

$n = 1$: si $N = Ae_1$, alors $A/\mathfrak{a} \simeq N$ et donc $\text{Tor}_1^A(M, N) \simeq \text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ où $\mathfrak{a} = \ker(a \in A \mapsto ae_1 \in Ae_1 = N)$

$n \geq 2$: Supposons l'assertion vraie pour $n - 1$ et considérons $N = Ae_1 + \dots + Ae_n$. On a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow N' = Ae_1 \rightarrow N \rightarrow N'' = A\bar{e}_2 + \dots + A\bar{e}_n \rightarrow 0$$

où \bar{e}_i désigne la classe de e_i modulo N' . On en déduit alors la suite exacte suivante $0 = \text{Tor}_1^A(M, N') \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N'') = 0$ par hypothèse de récurrence et cas $n = 1$. Ainsi $\text{Tor}_1^A(M, N) = 0$.

$iv)$ ou $v) \Leftrightarrow vi)$: On a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

Cela nous assure l'existence de la suite exacte suivante

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(M, A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) \longrightarrow M \otimes_A \mathfrak{a} \longrightarrow M \otimes_A A \simeq M$$

Les équivalences en résultent directement. ■

Corollaire 2.70. Soient A un anneau principal, M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est plat
- ii) Soient $a \in A$, $x \in M$. L'égalité $ax = 0$ implique $a = 0$ ou $x = 0$ (On dit alors que le A -module M est sans torsion.)

Démonstration.

- $i) \Rightarrow ii)$: (Nous allons voir qu'il suffit la condition d'intégrité de l'anneau). Considérons un élément non nul $a \in A$. L'application $\delta_a : b \in A \mapsto ba \in A$ est injective. On en déduit la suite exacte $0 \longrightarrow M \otimes_A A \xrightarrow{Id_M \otimes \delta_a} M \otimes_A A$ et on utilise l'isomorphisme canonique $m \otimes A \in M \otimes_A A \mapsto am \in M$. Cela donne l'injectivité de l'application $\delta_a^M : x \in M \mapsto ax \in M$, ce qui correspond à la condition $ii)$
- $ii) \Rightarrow i)$: Soit \mathfrak{a} un idéal de A , il est de la forme aA . Considérons l'application

$$\varphi \circ (Id_M \otimes \delta_a) : M \otimes_A \mathfrak{a} \longrightarrow M$$

où φ est l'isomorphisme canonique $M \otimes_A A \rightarrow M$. Alors comme M est sans torsion, cette application est injective, et donc par point $vi)$ du théorème précédent, M est plat. ■

2.4.2 Caractérisation des modules plats par équations linéaires

Théorème 2.71. Soient A un anneau, M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est plat.
- ii) Soient a_{ij} des éléments de A ($(i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, n\}$), x_i des éléments de M tels que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^r a_{ij}x_i = 0$. Alors il existe $s \in \mathbb{N}^*$, des éléments $b_{ik} \in A$ (pour $k \in \{1, \dots, s\}$), tels que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{i=1}^r a_{ij}b_{ik} = 0 \text{ et } x_i = \sum_{k=1}^s b_{ik}y_k$$

- iii) L'assertion $ii)$ avec $j = 1$.

Démonstration.

ii) \Rightarrow iii) : c'est clair.

iii) \Rightarrow i) : On va démontrer que pour tout idéal de type fini \mathfrak{a} de A , l'application canonique

$M \otimes_A \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} M$ est injective. Cela donnera par le théorème 2.69 que M est plat. Considérons a_1, \dots, a_r un système fini de générateurs de l'idéal \mathfrak{a} . Un élément de $M \otimes_A \mathfrak{a}$ est de la forme $\sum_{i=1}^r x_i \otimes a_i$. Il appartient au noyau de λ si $\sum_{i=1}^r a_i x_i = 0$. Par l'assertion iii), il existe un entier naturel s , des éléments b_{ik} de A et des éléments y_k de M (pour $k \in \{1, \dots, s\}$) vérifiant les hypothèses. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r x_i \otimes a_i &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s b_{ij} y_j \right) \otimes a_i \\ &= \sum_{j=1}^s y_j \otimes \left(\sum_{i=1}^r a_i b_{ij} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

i) \Rightarrow ii) : Considérons l'application suivante

$$\begin{aligned} g : \quad A^r &\rightarrow A^n \\ (b_1, \dots, b_r) &\mapsto \left(\sum_{i=1}^r a_{i1} b_i, \sum_{i=1}^r a_{i2} b_i, \dots, \sum_{i=1}^r a_{in} b_i \right) \end{aligned}$$

Notons N son noyau, et f l'injection canonique de N dans A^r . En utilisant le caractère plat de M , on en déduit l'exactitude de la suite suivante

$$0 \rightarrow M \otimes_A N \xrightarrow{Id_M \otimes f} M \otimes_A A^r \xrightarrow{Id_M \otimes g} M \otimes_A A^n$$

et donc par application d'isomorphismes canoniques, de la suite

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N \xrightarrow{u} M^r \xrightarrow{v} M^n$$

où $v(z_1, \dots, z_r)$ l'élément de M^n dont la j -ème composante est $\sum_{i=1}^r a_{ij} z_i$ et u est le composé de $Id_M \otimes f$ et de l'isomorphisme canonique de $M \otimes_A A^r$ sur M^r . La condition pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^r a_{ij} x_i = 0$ traduit le fait que l'élément (x_1, \dots, x_r) de M^r appartient au noyau de v et donc à l'image de u . Il existe par conséquent, pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$ des éléments t_k de N et y_k de M tels que $(x_1, \dots, x_r) = u \left(\sum_{k=1}^s y_k \otimes t_k \right)$. En notant, $t_k = (b_{1k}, \dots, b_{rk})$, on observe que

$$x_i = \sum_{k=1}^s b_{ik} y_k \text{ et que } \sum_{i=1}^r a_{ij} b_{ik} = 0$$

■

Lemme 2.72. Soit A un anneau local, M un A -module de type fini. En considérant \mathfrak{m} l'idéal maximal de A , alors $M \neq \mathfrak{m}M$.

Démonstration. Soit x_1, \dots, x_n un système de générateurs de M , $M = \sum_{i=1}^n Ax_i$. Si on avait $M = \mathfrak{m}M$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists (a_{j,i})_{j=1, \dots, n} \in \mathfrak{m}$, $x_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} x_j$. Ainsi, en notant $P = (a_{j,i})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(A)$, on obtient donc que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On en déduit alors en notant $Q = I_n - P$ que

$$Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Or $\det(Q) \in A$ et $\det(Q) = 1 \pmod{[m]}$ et comme A est local, on en déduit que $\det(Q) \in A^\times$. On obtient donc que Q est inversible ce qui donne donc que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

et donc que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = 0$ et cela aboutit à une contradiction. Ainsi $M \neq \mathfrak{m}M$. ■

Proposition 2.73. Soient A un anneau local, M un A -module de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est plat.
- ii) M est projectif.
- iii) M est libre.

Démonstration. Étant donné qu'un module libre est projectif et qu'un module projectif est plat. Il suffit donc de démontrer l'implication $i) \Rightarrow iii)$. Pour cela, on démontre qu'un système minimal de générateurs du A -module M en est une base. Pour faire cela, on prouve par récurrence sur n , que des éléments $x_1, \dots, x_n \in M$ dont les classes modulo $\mathfrak{m}M$ sont linéairement indépendantes sur le corps résiduel k de A forment un système libre de M .

$n = 1$: Soit $a \in \text{Ann}(x_1)$. En utilisant la caractérisation $iii)$ du théorème précédent, Il existe $y_1, \dots, y_r \in M$ et $b_1, \dots, b_r \in A$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $ab_i = 0$ et $x_1 = \sum_{i=1}^r b_i y_i$. Or comme x_1 n'appartient pas à $\mathfrak{m}M$, l'un des éléments b_i n'appartient pas à \mathfrak{m} maximal, et donc est inversible. Ainsi $a = 0$.

$n > 1$: On suppose que l'assertion est vraie pour $n - 1$. Soit $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ où $a_i \in A$, par caractérisation $ii)$ du théorème précédent. Il existe, $y_1, \dots, y_r \in M$ et $b_{ij} \in A$

(pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, r\}$) tels que

$$x_i = \sum_{j=1}^r b_{ij} y_j \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} = 0$$

L'un des éléments b_{nj} n'appartient pas à \mathbf{m} et donc est inversible. Par suite, on peut réécrire $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i$. On obtient donc que

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (x_i + c_i x_n)$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les classes modulo \mathbf{mM} des éléments $x_i + c_i x_n$ sont linéairement indépendantes sur k . Alors par hypothèse de récurrence, $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On obtient ainsi du cas $n = 1$ que $a_n = 0$. ■

2.4.3 Module plat limite inductive filtrante de modules libres de type fini

Théorème 2.74. Soient A un anneau commutatif, M un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M est plat.
- ii) Pour tout A -module de présentation finie P et toute application linéaire $u : P \rightarrow M$, il existe un A -module libre de type fini L , une application linéaire $v : P \rightarrow L$ (resp. $w : L \rightarrow M$) telle que $u = w \circ v$.
- iii) Il existe un ensemble ordonné filtrant I et un système inductif $(M_i, f_{ji})_{i,j \in I}$ de modules libres de type fini M_i tels que $M = \varinjlim M_i$.

Démonstration. On a déjà vu la commutation du produit tensoriel aux limites inductives et l'exactitude du foncteur limite inductive filtrante dans $\mathbf{Mod}(A)$. Ceci nous donne donc que *iii*) implique *i*)

i) \Rightarrow *ii*) : Considérons le diagramme commutatif à ligne et colonne exactes suivant dont l'existence provient du fait que le A -module P est de présentation finie.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & A^r & \xrightarrow{\varphi} & P \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \psi & & & & \\ & & A^n & & & & \end{array}$$

Soient (e_1, \dots, e_r) (resp. (f_1, \dots, f_n)) la base canonique de A^r (resp. de A^n). Notons pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, r\}$, $z_i = \varphi(e_i)$, $\psi(f_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} e_i$ et $x_i = u(z_i)$.

On part du fait que $\sum_{i=1}^r a_{ij} z_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^r a_{ij} e_i\right) = \varphi(\psi(f_j)) = 0$ car $\psi(f_j) \in R = \ker(\varphi)$. En appliquant u , on obtient l'égalité $\sum_{i=1}^r a_{ij} x_i = 0$. On tire alors du fait

que M est plat, l'existence de $s \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$, l'existence d'éléments b_{ik} de A et d'éléments y_k de M tels que

$$\sum_{i=1}^r a_{ij} b_{ik} = 0 \text{ et } x_i = \sum_{k=1}^s b_{ik} y_k$$

Posons $L = A^s$ et considérons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ la base canonique de L . On peut alors définir $\bar{v} : A^r \rightarrow L$ par $\bar{v}(e_i) = \sum_{k=1}^s b_{ik} \varepsilon_k$. On remarque que cette application s'annule sur R par ce qui précède. Cette application définit donc par passage au quotient, une application linéaire $v : A^r/R \simeq P \rightarrow L$ telle que $v(z_i) = \sum_{k=1}^s b_{ik} \varepsilon_k$.

On définit de plus l'application linéaire $w : L \rightarrow M$ par $w(\varepsilon_k) = y_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$. On vérifie bien que l'on a $w \circ v(z_i) = x_i = u(z_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et donc $w \circ v = u$.

ii) \Rightarrow iii) : Considérons Λ l'ensemble des parties finies de $M \times N$ où N est un ensemble dénombrable. Si $\alpha \in \Lambda$, considérons $u_\alpha : A^{(\alpha)} \rightarrow M$ tel que $u_\alpha(e_{(m,n)}) = m$ pour $(m, n) \in \alpha$.

Pour tout couple (α, β) d'éléments de Λ tel que $\alpha \leq \beta$, il existe une application linéaire $u_{\beta\alpha} : A^{(\alpha)} \rightarrow A^{(\beta)}$ qui à $f \in A^{(\alpha)}$ fait correspondre $f' \in A^{(\beta)}$ en prolongeant par 0 au complémentaire de α dans β .

Dénontons I l'ensemble des couples (α, R_α) où α parcourt Λ et R_α l'ensemble des parties finies du noyau K_α de u_α . On ordonne cet ensemble par $(\alpha, R_\alpha) \leq (\beta, R_\beta)$ si et seulement si $\alpha \leq \beta$ et $u_{\beta\alpha}(R_\alpha) \subseteq R_\beta$.

Si $i = (\alpha, R_\alpha)$ appartient à I , on considère le A -module $M_i = A^{(\alpha)} / \langle R_\alpha \rangle$. On obtient ainsi un système inductif de A -modules de présentation finie indexé par I et, on obtient que M en est limite inductive.

Il nous suffit pour conclure, de montrer que $J := \{i = (\alpha, R_\alpha) \in I, M_i \text{ soit libre}\}$ est cofinal dans I . Soit $i = (\alpha, R_\alpha) \in I$. Par hypothèse, l'homomorphisme canonique $\bar{u} : M_i \rightarrow M$ se factorise en $M_i \xrightarrow{v} L \xrightarrow{w} M$ où L est libre de type fini de base (f_1, \dots, f_p) .

Dès lors, considérons $\beta = \{(\mu_k, \nu_k)\}_{1 \leq k \leq p}$ une partie de $M \times N$ telle que $\beta \cap \alpha = \emptyset$ et pour tout k tel que $1 \leq k \leq p$, $\mu_k = w(f_k)$. Notons $\gamma = \alpha \cup \beta$ et l'application linéaire π définie par

$$\pi : \begin{cases} A^{(\gamma)} & \rightarrow L \\ e_{(m,n)} & \mapsto v(e_{(m,n)}) \text{ si } (m,n) \in \alpha \\ e_{(\mu_k, \nu_k)} & \mapsto f_k \text{ si } 1 \leq k \leq p \end{cases}$$

Cette application est surjective du à la deuxième partie de définition de π , et son noyau que l'on note Q est de type fini car c'est un facteur direct du module libre de type fini $A^{(\gamma)}$ et donc un quotient de ce module. Ainsi Q est de la forme $\langle R_\gamma \rangle$ où R_γ est un ensemble fini. En notant $j = (\gamma, R_\gamma)$, il est clair que $i \leq j$. D'autre part M_j est libre car isomorphe à L . Cela assure que J est cofinal dans I .

■

2.4.4 Quelques exercices/exemples d'applications

Exemple 2.75.

1. On peut montrer par récurrence de la même façon que dans le théorème 2.67, qu'étant donnée une résolution plate $(P_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X , et pour tout A -module Y , on a $\text{Tor}_n^A(X, Y) := H_n(P_n \otimes_A Y, d_n \otimes Id_Y)$.
2. On obtient donc que si X est plat, alors pour tout $n \geq 1$, $\text{Tor}_n^A(X, Y) = 0$, pour tout A -module Y .
3. Étant donnée une suite exacte courte $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ avec N'' plat. Étant donné M un A -module, on obtient la suite exacte d'homologie

$$\text{Tor}_2^A(N'', M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(N', M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(N, M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(N'', M)$$

Or en utilisant le fait que N'' est plat, on obtient donc que

$$\text{Tor}_1^A(N', M) \xrightarrow{\cong} \text{Tor}_1^A(N, M)$$

Alors, en utilisant la caractérisation du théorème 2.69, on obtient que N' est plat si et seulement si N est plat.

4. On peut obtenir de la même façon que le point précédent, différents résultats par dévissage. Par exemple, si on considère A un anneau noethérien, la suite exacte courte suivante $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ et que l'on suppose que pour tout $k \geq 1$, $\text{Tor}_k^A(N', M)$ et $\text{Tor}_k^A(N'', M)$ sont des modules de type fini. Alors, on obtient étant donné la suite exacte d'homologie suivante :

$$\text{Tor}_2^A(N'', M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(N', M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(N, M) \xrightarrow{\varphi} \text{Tor}_1^A(N'', M)$$

la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(N', M) / \text{Tor}_2^A(N'', M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(N, M) \rightarrow \text{Im}(\varphi) \rightarrow 0$$

Or A est noethérien, donc $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Tor}_1^A(N', M) / \text{Tor}_2^A(N'', M)$ sont des modules de type fini. Ainsi $\text{Tor}_1^A(N, M)$ est de type fini. On peut par décalage dans la suite exacte longue d'homologie, l'étendre à tout $k \geq 1$.

5. En considérant la caractérisation de la proposition 2.56, on voit que le foncteur $\text{Ext}_A^n(M, -)$ est exact à droite si et seulement si M est projectif.
6. En considérant la caractérisation de la proposition 2.57, on voit que le foncteur $\text{Ext}_A^n(-, M)$ est exact à droite si et seulement si M est injectif.
7. De façon équivalente, on obtient que le foncteur $\text{Tor}_A^n(M, -)$ est exact à gauche si et seulement si M est plat.
8. Étant donné un anneau A principal, montrons que $\text{Ext}_A^n(X, Y) = \text{Tor}_n^A(X, Y) = 0$ pour tout couple de A -modules (X, Y) . Considérons une résolution projective P^X de X et notons $R_1^X = \text{Im}(d_1^X) = \ker \varepsilon$. Alors, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow R_1^X \rightarrow P_0^X \rightarrow X \rightarrow 0$$

Ainsi R_1^X comme sous-module de P_0^X projectif, est projectif car A est principal. En considérant alors la suite exacte d'homologie, on obtient que

$$0 = \text{Ext}_A^{n-1}(R_1^X, Y) \longrightarrow \text{Ext}_A^n(X, Y) \longrightarrow \text{Ext}_A^n(P_0^X, Y) = 0$$

Ainsi pour tout n , $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$. On réalise de même façon que $\text{Tor}_n^A(X, Y) = 0$.

9. Étant donné A un anneau principal, considérons M et N deux A -modules. Notons pour la suite $t(M)$ (resp. $t(N)$) le sous-module de torsion de M (resp. N). Comme A est principal, on peut écrire

$$M = t(M) \oplus A^r \text{ et } N = t(N) \oplus A^{\tilde{r}}$$

Alors par commutation de Tor aux limites inductives filtrantes et le fait qu'être sans torsion implique être plat. Alors

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1^A(M, N) &= \text{Tor}_1^A(t(M) \oplus A^r, t(N) \oplus A^{\tilde{r}}) \\ &= \text{Tor}_1^A(t(M), t(N)) \oplus \underbrace{\text{Tor}_1^A(t(M), A^{\tilde{r}})}_{=0} \oplus \underbrace{\text{Tor}_1^A(A^r, t(N))}_{=0} \oplus \underbrace{\text{Tor}_1^A(A^r, A^{\tilde{r}})}_{=0} \\ &= \text{Tor}_1^A(t(M), t(N)) \end{aligned}$$

10. En considérant a un élément d'un anneau A . Calculons $\text{Tor}_1^A(A/aA, N)$. Pour se faire, on considère la résolution projective suivante :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{1 \mapsto a} A \longrightarrow A/aA \longrightarrow 0$$

Par la suite exacte longue d'homologie, on obtient

$$0 = \text{Tor}_1^A(A, N) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(A/aA, N) \longrightarrow N \xrightarrow{x \mapsto ax} N \longrightarrow A/aA \otimes_A N \longrightarrow 0$$

Alors, on a donc que

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1^A(A/aA, N) &= \ker(x \mapsto ax) \\ &= \{x \in N, ax = 0\} \\ &= \text{partie de } a - \text{torsion de } N \end{aligned}$$

11. Finissons par un dernier résultat qui détermine pour tout $n \geq 1$, $\text{Tor}_n^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b})$ en considérant A un anneau commutatif, et \mathbf{a}, \mathbf{b} deux idéaux de A . Considérons la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbf{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathbf{a} \longrightarrow 0$$

$n = 1$: Alors, par suite longue exacte d'homologie, on a :

$$0 = \text{Tor}_1^A(A, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \mathbf{a} \otimes_A A/\mathbf{b} \longrightarrow A/\mathbf{b} \longrightarrow A/\mathbf{a} \otimes_A A/\mathbf{b} \longrightarrow 0$$

Or, d'une part $\mathbf{a} \otimes_A A/\mathbf{b} = \mathbf{a}/\mathbf{ab}$. On en déduit donc que $\text{Tor}_1^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) = \ker(\mathbf{a}/\mathbf{ab} \rightarrow A/\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cap \mathbf{b})/\mathbf{ab}$.

$n = 2$: Dans la suite exacte longue d'homologie, on a :

$$0 = \text{Tor}_2^A(A, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \text{Tor}_2^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) \xrightarrow{\simeq} \text{Tor}_1^A(\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(A, A/\mathbf{b}) = 0$$

Alors $\text{Tor}_2^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) = \text{Tor}_1^A(\mathbf{a}, A/\mathbf{b})$.

Or, de la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbf{b} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathbf{b} \longrightarrow 0$$

On tire la suite exacte longue d'homologie :

$$0 = \text{Tor}_1^A(\mathbf{a}, A) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \mathbf{a} \otimes_A \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{a} \otimes_A A \longrightarrow \mathbf{a} \otimes_A A/\mathbf{b} \longrightarrow 0$$

On obtient donc que $\text{Tor}_2^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) = \text{Tor}_1^A(\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) = \ker(\mathbf{a} \otimes_A \mathbf{b} \twoheadrightarrow \mathbf{ab})$.

$n > 2$: De la première suite exacte longue d'homologie, on a :

$$0 = \text{Tor}_n^A(A, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \text{Tor}_{n-1}^A(\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) \longrightarrow \text{Tor}_{n-1}^A(A, A/\mathbf{b}) = 0$$

ce qui nous donne que $\text{Tor}_n^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) = \text{Tor}_{n-1}^A(\mathbf{a}, A/\mathbf{b})$

et de la seconde suite exacte longue d'homologie, on a :

$$0 = \text{Tor}_{n-1}^A(\mathbf{a}, A) \longrightarrow \text{Tor}_{n-1}^A(\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) \xrightarrow{\simeq} \text{Tor}_{n-2}^A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longrightarrow \text{Tor}_{n-2}^A(\mathbf{a}, A) = 0$$

Tout ceci nous permet donc de conclure que $\text{Tor}_n^A(A/\mathbf{a}, A/\mathbf{b}) = \text{Tor}_{n-2}^A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Bibliographie

- [1] Jean-Pierre LAFON. *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative*. French. Nouv. éd. T. 20. Collect. Enseign. Sci. Paris : Hermann, 1998. ISBN : 2-7056-5759-2.
- [2] Joseph J. ROTMAN. *An introduction to homological algebra*. English. 2nd ed. Universitext. Berlin : Springer, 2009. ISBN : 978-0-387-24527-0 ; 978-0-387-68324-9. DOI : [10.1007/b98977](https://doi.org/10.1007/b98977).