

# Leçon 159: Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

MATHIEU ALIX

—

## 1 Rapport du Jury

« Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire  $X$  est déterminée par les lois unidimensionnelles de  $X \cdot u$  pour tout vecteur  $u$ . »

## 2 Questions classiques

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
  - (a) Soient  $f, g \in E^* \setminus \{0\}$ , montrer qu'il existe  $u \in E$  tel que  $f(u) \neq 0$  et  $g(u) \neq 0$ .
  - (b) Supposons qu'il existe  $p$  formes linéaires non-nulles  $f_1, \dots, f_p$  telles que

$$\forall x \in E, f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0 \implies x = 0$$

Montrer que  $\dim(E) \leq p$ .

<b>Solution:</b>
------------------

- a) Si  $f$  et  $g$  sont proportionnelles, il suffit de choisir  $u$  tel que  $f(u) \neq 0$ . Sinon, alors  $\ker(f) \not\subseteq \ker(g)$ , et  $\ker(g) \not\subseteq \ker(f)$ . On peut donc choisir  $x \in \ker(f) \setminus \ker(g)$  et  $y \in \ker(g) \setminus \ker(f)$ . Alors en considérant  $u = x + y$ , on a  $f(u) = f(y) \neq 0$  et  $g(u) = g(x) \neq 0$ .
- b) L'hypothèse nous dit que  $\bigcap_{i=1}^p \ker(f_i) = \{0\}$ . Si  $E$  était de dimension  $n > p$ , alors l'intersection de ces  $p$  hyperplans serait de dimension au moins égale à  $n - p > 0$ , ce qui n'est pas le cas, donc  $n \leq p$ .

2. Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n \geq 1$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe  $n$  hyperplans  $H_1, \dots, H_n$  de  $E$  stables par  $u$  vérifiant  $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$

**Solution:** Supposons que  $u$  soit diagonalisable et considérons  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de diagonalisation. Pour  $1 \leq i \leq n$ , posons  $H_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$ . Les sous-espaces vectoriels  $H_i$  sont des hyperplans stables par  $u$  vérifiant  $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$ . Réciproquement supposons qu'il existe  $n$  hyperplans comme souhaités. On souhaite former une bases de diagonalisation, c'est à dire des vecteurs engendrant des droites via  $u$ . Or à partir d'hyperplans, on forme des droites en intersectant. Ainsi considérons  $D_i = H_1 \cap \dots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \dots \cap H_n$  qui est bien de dimension 1, comme chaque hyperplan est stable par  $u$ , alors la droite  $D_i$  est stable par  $u$ . Dès lors, en considérant  $e_i \in D_i \setminus \{0\}$ ,  $e_i$  est donc un vecteur propre comme  $D_i$  est stable par  $u$ . Avec l'hypothèse sur l'intersection, on vérifie aisément la liberté de la famille  $(e_1, \dots, e_n)$ . Celle-ci est donc une base de diagonalisation de  $u$ .

3. Que peut-on dire de deux formes linéaires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  qui s'annulent un même hyperplan  $H$  d'un espace  $E$ .

**Solution:** Les formes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont proportionnelles. En effet, considérons  $D$  un supplémentaire de  $H$  dans  $E$ .  $D$  est donc une droite et on note  $a$  un générateur de cette droite. Ainsi tout vecteur  $x \in E$  s'écrit  $x = h + \lambda a$  avec  $h \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Ainsi

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(h + \lambda a) = \varphi_1(h) + \lambda \varphi_1(a) \text{ et de même } \varphi_2(x) = \lambda \varphi_2(a)$$

Comme  $a \notin \ker(\varphi_2)$ , on peut poser  $\lambda = \frac{\varphi_1(a)}{\varphi_2(a)}$  et on a  $\varphi_1 = \lambda \varphi_2$ .

4. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les plans stables par  $f$ .

**Solution:** Un plan  $P$  est stable par  $f$  si et seulement si  $P^\perp$  est stable par  $f^\top$ . Comme  $\dim(P) = 2$ , on a  $\dim(P^\perp) = 1$ . On est donc amené à chercher les droites stables par  $f^\top$  dont la matrice dans la base duale  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est

$$A^\top = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant les calculs, on trouve que le spectre de  $A^\top$  (donc celui de  $A$ ) est  $\{1, 2\}$ . L'espace propre  $E_1$  associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 avec  $E_1 = \text{Vect}(a_1)$  où  $a_1 = 4e_1^* + 2e_2^* - 3e_3^*$  et l'espace propre  $E_2$  associé à la valeur propre 2 est de dimension 1 avec  $E_2 = \text{Vect}(a_2)$  où  $a_2 = 2e_1^* + e_2^* - e_3^*$ . Par conséquent, les plans stables par  $f$  sont les orthogonaux, donc sont :

$$P_1 = E_1^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y - 3z = 0\}$$

et

$$P_2 = E_2^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

5. (a) Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- i)  $u$  est une homothétie.
  - ii)  $u$  laisse stable toutes les droites de  $E$ .
  - iii)  $u$  laisse stable tout hyperplan de  $E$ .
  - iv)  $u^\top$  laisse stable toute droite de  $E^*$ .
  - v)  $u^\top$  est une homothétie.
- (b) On suppose que  $E$  est de dimension  $n$ . que dire d'un  $u \in \mathcal{L}(E)$  qui laisse stable tous les sev de dimension  $r$  de  $E$  pour  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

**Solution:**

- a) On effectue l'équivalence des 2 premières, puis un raisonnement circulaire sur les restantes
- $i) \implies ii)$  Si  $u$  est une homothétie, il laisse stable tout sous-espace vectoriel de  $E$ , donc en particulier toute droite de  $E$ .
- $ii) \implies i)$  Comme  $u$  laisse stable toute droite de  $E$ , alors pour tout  $x \in E$ , il existe  $\lambda_x \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda_x x$ . On souhaite montrer que  $\lambda_x$  est indépendant de  $x$ . Soit  $y \in E \setminus \{0\}$ ,
- \* Si  $\exists \alpha \in \mathbb{K}, y = \alpha x$ , alors  $u(y) = \lambda_y y = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \lambda_x \alpha x = \lambda_x y$ , alors comme  $y \neq 0$  alors  $\lambda_x = \lambda_y$ .
  - \* Sinon en regardant  $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ . Alors  $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x = (\lambda_y - \lambda_{x+y})y$ , et comme  $x$  et  $y$  sont linéairement indépendant alors  $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$ .
- Ainsi  $\lambda_x$  est indépendant de  $x$ , et  $u$  est une homothétie.

$i) \implies iii)$  Si  $u$  est une homothétie, il laisse stable tout sous-espace vectoriel de  $E$ , donc en particulier tout hyperplan de  $E$ .

$iii) \implies iv)$  Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle et  $H = \ker(\varphi)$  un hyperplan de  $E$ , et  $a \in E$  tel que  $\varphi(a) \neq 0$  alors  $E = \mathbb{K}a \oplus H$  (en effet  $x \in E$  s'écrit  $x = \lambda a + h$  avec  $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$  et  $h = x - \lambda a \in H$ ). Comme  $u$  laisse stable  $h$

$$\begin{aligned} u^\top(\varphi)(x) &= \varphi(u(x)) = \varphi(\lambda u(a) + u(h)) = \lambda \varphi(u(a)) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \varphi(u(a)) \\ &= \mu_\varphi \varphi(x) \text{ où } \mu_\varphi = \frac{\varphi(u(a))}{\varphi(a)} \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Ainsi  $u^\top(\varphi) = \mu_\varphi \varphi$  et donc  $u^\top$  laisse stable toute droite de  $E^*$ .

$iv) \implies v)$  Remplacer  $E$  par  $E^*$ , c'est déjà vu.

$v) \implies i)$  Montrons que si  $u^\top = \lambda Id_{E^*}$  alors  $u = \lambda Id_E$ . Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, alors il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $y = u(x) - \lambda x \neq 0$ . On complète  $y$  en une base de  $E$  que l'on note  $\mathcal{B}$ , alors en considérant la forme linéaire  $\varphi$  définie par  $\varphi(y) = 1$  et  $\varphi(e) = 0$  pour  $e \in \mathcal{B} \setminus \{y\}$ . On vérifie que  $(u^\top(\varphi) - \lambda \varphi)(x) = \varphi(u(x)) - \lambda \varphi(x) = \varphi(y) = 1$ , ce qui contredit l'homothétie de  $u^\top$ .

b) Montrons que  $u$  laisse stable tout hyperplan de  $E$ , et alors par la question précédente, on aura que  $u$  est une homothétie. Si  $H$  est un hyperplan de base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ , alors le sous-espace de  $H$  engendré par  $\{e_1, \dots, e_{r-1}, e_k\}$  pour  $r \leq k \leq n-1$  est laissé stable par  $u$ , donc  $u(e_j) \in H$  pour tout  $1 \leq j \leq n-1$ , donc  $H$  est stable par  $u$ .

6. Lien dualité espace euclidien (voir ma leçon)

7. Différentielle et gradient ?

### 3 Question plus exotique ?

1. (Séparation) : Soit  $E$  un espace vectoriel et  $x, y \in E$ . Démontrer que  $x = y$  si et seulement si, pour tout  $\varphi \in E^*$ ,  $\varphi(x) = \varphi(y)$ .

**Solution:** L'implication directe est immédiate. On ne s'intéresse donc qu'à l'implication réciproque. Procédons par contraposée, et considérons donc  $(x, y) \in E$  tel que  $x \neq y$ , on cherche à construire  $\varphi \in E^*$  tel que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

- \* Supposons que la famille  $(x, y)$  soit libre, considérons  $F$  un supplémentaire de  $\text{Vect}(x, y)$ , on définit alors  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$  en la définissant sur  $\text{Vect}(x, y)$  par  $\varphi(ax + by) = a$  et sur  $F$  par  $\varphi(z) = 0$  pour tout  $z \in F$ . Alors  $\varphi(x) = 1$  et  $\varphi(y) = 0$ .
- \* Si maintenant  $(x, y)$  est liée, on peut supposer  $x \neq 0$  et  $y = \lambda x$  avec  $\lambda \neq 1$ . Considérons alors  $F$  un supplémentaire de  $\text{Vect}(x)$ , alors on définit  $\varphi$  sur  $E$  par  $\varphi(x) = 1$  et  $\varphi(z) = 0$  si  $z \in F$ . On a alors  $\varphi(x) = 1$  et  $\varphi(y) = \lambda$  et donc  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

Remarque : Dans le cas où  $E$  est de dimension finie, on considère  $e_1 = x - y \neq 0$  qu'on complète en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et on considère la base duale associée  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ . Alors  $e_1^*(x - y) = 1 \neq 0$ . Ainsi  $e_1^*$  convient.

2. Formes quadratiques  $\rightarrow$  orthogonaux
3. Générateurs de  $O(E)$  et  $SO(E)$