Semaine du 14 Avril - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 25, théorème 21 : théorème fondamental de l'analyse.

Exercice n° 2 :

(Intégration) : Calculer la limite suivante

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}$$

Exercice n° 3 :

(Intégration) : On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser (mais qu'on ne demande pas de résoudre).
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x)=1$.
4. On pose $g(x)=\dfrac{e^{x^2}}{2x}f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elle s'annule en un unique x_0 compris strictement entre 0 et 1.
5. En déduire le tableau de variations de f (on ne cherchera pas à calculer x_0).
6. Tracer une allure plausible de la courbe représentative de f.

Semaine du 14 Avril - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 25, théorème 23 : formule de Taylor avec reste intégrale.

Exercice n° 2 :

(Intégration) : Calculer la limite suivante

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{p=1}^{n} \left(n^2 \times p^{-\frac{4p}{n^2}} \right)$$

Exercice n° 3 :

On définit la fonction f par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\, dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer, pour les valeurs de x pour lesquelles ça a un sens, la valeur de
$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\, dt.$$
3. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln(2)$ et $x^2\ln(2)$ (préciser le sens des inégalités selon la valeur de x), puis montrer que f est prolongeable par continuité à deux endroits différents.
4. Calculer la valeur de $f'(x)$ là où elle est naturellement définie.
5. Montrer que f est en fait prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
6. Justifier que
$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, dt$$
existe, et donner sa valeur.

Semaine du 14 Avril - Planche n$^{\text{o}}$ 3

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 25, propriété 26 et théorème 27 : sommes de Riemann.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 :

(Divers) : Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Rappeler le théorème de Heine.
2. Déterminer la limiter de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,dt.$$

1. Préciser le domaine de définition et la parité éventuelle de la fonction f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier les variations de f sur l'intervalle $]0, 2\pi]$.
3. Après avoir effectué une IPP en dérivant le facteur $\dfrac{1}{t}$, montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
4. Étudier la limite quand x tend vers 0 de
$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt,$$
puis en déduire que f peut être prolongée par continuité en 0.