

Semaine du 10 Février - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncé et démontrer les énoncés suivants : Chapitre 19, propriétés 6 et 7 : opérations sur les équivalents.

Exercice n° 2 :

(Analyse asymptotique) :

1. Déterminer un équivalent simple de $w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln(n) - 2n^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$.
2. Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $n^2((n+1)^{1/n} - n^{1/n})$.

Exercice n° 3 :

(Morphisme et applications) : Les deux questions suivantes sont indépendantes mais la philosophie de résolutions sont proches.

1. Soit A un anneau intègre commutatif fini. Montrer que A est un corps.
2. Soit f un morphisme non constant d'un groupe fini (G, \cdot) dans (\mathbb{C}^*, \times) . Calculer $\sum_{x \in G} f(x)$.

Semaine du 10 Février - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer les résultats suivants : Chapitre 19, propriétés 1 et 2 : opérations sur les petits o et grands O .

Exercice n° 2 :

(Analyse asymptotique) :

1. Déterminer un équivalent simple quand $n \rightarrow +\infty$ de $u_n = \frac{(1-e^{1/n})\sin(\frac{1}{n})}{n^2+n^3}$.
2. Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $(1 + \sin(\frac{1}{n}))^n$.

Exercice n° 3 :

(Structures algébriques) : Soit p un nombre premier. On note

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{a}{b} : (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \text{pgcd}(p, b) = 1 \right\}$$

1. Démontrer que \mathbb{Z}_p est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Démontrer que pour tout nombre rationnel non-nul x , au moins un des deux éléments x ou x^{-1} est un élément de \mathbb{Z}_p .
3. Soit B un sous-anneau de \mathbb{Q} contenant \mathbb{Z}_p . Démontrer que $B = \mathbb{Q}$ ou que $B = \mathbb{Z}_p$.

Semaine du 10 Février - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer les propriétés 15 et 17 du Chapitre 18 : image de l'élément neutre et de l'inverse d'un élément par un morphisme de groupes, image directe et réciproque d'un groupe par un morphisme de groupes.

Exercice n° 2 :

(Analyse asymptotique) :

1. Déterminer un équivalent simple de $\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos(x)}$ en 0.
2. Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice n° 3 :

(Anneaux et corps) :

1. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Soit F un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Montrer que $F = \mathbb{Q}$.