

Semaine du 16 septembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Propriétés de morphisme de l'application $t \mapsto e^{it}$.
2. Inégalité triangulaire.

Exercice n° 2 :

(Application directe) :

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $(3 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 1 + i$
2. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant : $1 + i\sqrt{3}$

Exercice n° 3 :

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\} \iff \exists x \in \mathbb{R}, z = \frac{1 + ix}{1 - ix}$$

Semaine du 16 septembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Une similitude directe est une translation ou la composée commutative d'une rotation et d'une homothétie de même centre.
2. Formule de transformation de $e^{ia} \pm e^{ib}$ avec les demi sommes des arguments.

Exercice n° 2 :

(Application directe) :

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $(3 - i)z - (3 + i)\bar{z} = 0$
2. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant : $-2\sqrt{3} + 2i$

Exercice n° 3 :

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

1. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. On pose $z = \omega + \omega^{-1}$. Former une équation du second degré vérifiée par z .
3. En déduire les valeurs de $\cos(2\pi/5)$, $\sin(2\pi/5)$ et $\tan(2\pi/5)$.

Semaine du 16 septembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Définitions géométriques des translations, homothéties et rotations puis expressions complexes associées.
2. Calcul de la somme des racines n-ième de l'unité.

Exercice n° 2 :

(Application directe) :

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $(1 + 2i)\bar{z} + i = 0$
2. Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant : $1 + i$

Exercice n° 3 :

On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. On note $E = \{z \in \mathbb{C}, \exists(a, b) \in \mathbb{Z}^2, z = a + jb\}$

1. Soit $z = a + jb \in E$. Montrer que

$$|z| = 1 \iff (2a - b)^2 + 3b^2 = 4$$

2. En déduire explicitement tout les éléments de $U = \{z \in E : |z| = 1\}$ en fonction de ± 1 et $\pm j$.

Semaine du 16 septembre - Exercices supplémentaires

Exercice n° 1 :

Exercice 9 - Entiers de Gauss

Exercice n° 2 :

(Classique à savoir - possible diviser en 2) :

1. Linéariser $\sin^3(x)$ et $\cos^4(x)$
2. Exprimer $\cos(5x)$ sous forme d'une expression polynomiale en $\cos(x)$. De même, pour $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

Exercice n° 3 :

(Équation dans \mathbb{C}) : Résoudre dans \mathbb{C} , $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

Exercice n° 4 :

(Mi-géométrie/Mi calculatoire) : Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que z , $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

Exercice n° 5 :

(Géométrie) : Soient A, B, C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c . Montrer que :

$$\begin{aligned}(ABC) \text{ est équilatéral} &\iff j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \\ &\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \\ &\iff \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-a} = 0\end{aligned}$$