Semaine du 24 Mars - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 23, propriété 3 : inégalité de Jensen.

Exercice n° 2 :

(Dénombrement) : Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire simultanément cinq au hasard. Combien y'a-t-il (respectivement) de tirages pour lesquels :

1. Au moins un atout est un multiple de 5 ?
2. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3 ?
3. On a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice n° 3 :

(Dénombrement) : Un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$ est dit lacunaire s'il est non vide et ne contient jamais deux entiers consécutifs. On notera L_n le nombre de sous-ensembles lacunaires de $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. A quelle-condition sur n, a-t-on $\{2, 5, 7\}$ qui est une partie lacunaire.
2. Déterminer L_1, L_2, L_3 et L_4 à la main.
3. Montrer que $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n + 1$.
4. En déduire une expression explicite de L_n.
5. Montrer que le nombre de sous-ensembles lacunaires de $\{1, 2, \dots, n\}$ contenant exactement p éléments est égal à $\binom{n+1-p}{p}$.

Semaine du 24 Mars - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 23, propriété 4 : croissance de la fonction pente.

Exercice n° 2 :

(Dénombrement) : Combien existe-t-il de couples d'entiers naturels (a, b) vérifiant (respectivement) les conditions suivantes : (à $n \in \mathbb{N}$ fixé)

1. $a + b = n$
2. $a < b \leq n$
3. $a < b$, $a \leq n$, mais $b \leq 2n$
4. $|a - b| \leq 1$ avec $a \leq n$ et $b \leq n$

Exercice n° 3 :

(Dénombrement) : Une grille de mots croisées est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n \times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre k (inférieur ou égal à np) sont noircies (et les autres blanches).

1. Combien y-a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatres coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n = p = k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neufs chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge.
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Sudoku.

Semaine du 10 Mars - Planche n$^{\text{o}}$ 3

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 23, propriété 7 : caractérisation de la convexité pour une fonction dérivable.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 :

(Dénombrement) : De combien de manières peut-on classer quatres personnes en admettant qu'il puisse y avoir des æquo ?

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 :

(Dénombrement) : Soit E un ensemble fini à n éléments. Une application $f : E \to E$ est une involution si $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Une involution sans point fixe est une involution f pour laquelle aucun élément de E ne vérifie $f(x) = x$. On note T_n le nombre total d'involutions de E, et S_n le nombre d'involutions sans point fixe de E.

1. Donner un exemple d'involution de E lorsque $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (pas trop trivial si possible). Est-il possible de créer une involution sans point fixe de E (justifier) ?
2. Donner les valeurs de T_i et S_i pour tous les entiers $i \leq 3$ en donnant simplement la liste de toutes les involutions possibles.
3. Montrer qu'on a toujours $S_n \leq T_n \leq n\,!$
4. Soit $E = \{1, 2, \dots, n, n+1, n+2\}$.
   (a) On fixe un entier $k \in \{2, 3, \dots, n+1, n+2\}$. Déterminer en fonction de S_n le nombre d'involutions sans point fixe de E vérifiant $f(1) = k$. En déduire que $S_{n+2} = (n+1)S_n$.
   (b) Par un raisonnement similaire, déterminer une relation de récurrence entre T_{n+2}, T_{n+1} et T_n.
5. Déduire des résultats de la question précédente une formule explicite pour S_n lorsque n est un entier pair.
6. Montrer que $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$, et en déduire une formule explicite pour T_n. (On ne cherchera pas à se débarrasser de la somme.