

Semaine du 17 Mars - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncé et démontrer les propositions suivantes : Chapitre 21, propriétés 5 et 6 : primitivation des développements limités.

Exercice n° 2 :

(DL usuel) : Donner le DL de $\text{ch}(x)$ en 0.

Exercice n° 3 :

(Calcul de développements limités) : Déterminer le $\text{DL}_5(0)$ de

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{1+x}$$

Exercice n° 4 :

(DL et applications) : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f .

1. Montrer que f est continue en 0.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Étudier les variations de f .
5. Étudier les branches infinies de \mathcal{C} .
6. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f .
7. Préciser l'équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de T et \mathcal{C} au voisinage du point d'abscisse 1.
8. Tracer \mathcal{C} avec soin. On placera notamment la tangente T déterminée à la question précédente.

Semaine du 17 Mars - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncé et démontrer les propositions suivantes : Chapitre 21, théorème 7 : formule de Taylor-Young.

Exercice n° 2 :

(DL usuel) : Donner le DL de $\ln(1 - x)$ en 0.

Exercice n° 3 :

(Calcul de développements limités) : Déterminer le $DL_2(0)$ de

$$f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$$

Exercice n° 4 :

(DL et applications) : On cherche à déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \frac{1}{\arcsin(x)} - \frac{1}{x}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Prouver que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement dans la suite.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Étudier la position relative du graphe de f et de sa tangente au voisinage de l'origine.

Semaine du 17 Mars - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncé et démontrer les propositions suivantes : Chapitre 22, propriété 4 : cardinal d'une union disjointe..

Exercice n° 2 :

(DL usuel) : Donner le DL de $(1+x)^\alpha$ en 0.

Exercice n° 3 :

(Calcul de développements limités) : Déterminer le $DL_2(0)$ de

$$f(x) = \sqrt{e^x + \cos(x)}$$

Exercice n° 4 :

(DL et applications) : Considérons la fonction suivant $f : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{1-\cos(2x)}$

1. Donner l'ensemble de définition de f puis déterminer sa période.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais pas en π .
3. Démontrer que le prolongement par continuité de f est dérivable en 0 et donner son nombre dérivée, ainsi que la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente.