

## Semaine du 7 Avril - Planche n° 1

### Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis.**

1. Caractérisation des formes multilinéaires antisymétriques.
2. Énoncé et preuve des deux lemmes permettant de définir  $\det f$ .

### Exercice n° 2 :

(Probabilités) : Le génotype d'un individu est un ensemble de 2 gènes parmi  $a$  et  $A$ . Trois génotypes sont possibles : 1 ( $aa$ ), 2 ( $aA$ ) et 3 ( $AA$ ). L'ordre ne compte pas dans le sens que  $aA$  et  $Aa$  représentent le même génotype.

On s'intéresse à l'évolution d'une population de grande taille (génération 0) dont la proportion du génotype  $i$  est notée  $u_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

On suppose les mariages aléatoires et on rappelle que le génotype d'un enfant est formé d'un gène issu de celui de chaque parent, les deux gènes d'un parent ayant la même probabilité d'être transmis. Soit  $E$  le génotype d'un enfant de la première génération.

1. (a) On note  $F$  et  $M$  les génotypes respectifs du père et de la mère. Exprimer les probabilités conditionnelles  $P(E = 1 | (F, M) = (i, j))$  pour  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ .

(b) En déduire que

$$P(E = 1) = \left(u_1 + \frac{u_2}{2}\right)^2$$

puis la valeur de  $P(E = 3)$ .

- (c) On pose  $\theta = u_1 + \frac{u_2}{2}$ . Déterminer en fonctions de  $\theta$  les proportions des divers génotypes à la première génération :  $q_1, q_2, q_3$ .
- (d) Calculer les proportions des divers génotypes à la deuxième génération et en déduire qu'elles sont inchangées au cours du temps.
2. On dispose d'un échantillon de  $n$  individus de cette population stabilisée. On note  $X_i$  le génotype du  $i^{\text{ème}}$  individu de sorte que  $P(X_i = j) = q_j$ . Les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont supposées mutuellement indépendantes. Pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on note  $N_j$  le nombre d'individus de l'échantillon possédant le génotype  $j$ .
  - (a) Pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ , déterminer la loi de  $N_j$ , son espérance et sa variance.
  - (b) Calculer  $\text{Cov}(N_1, N_2)$  en fonction de  $n, q_1, q_2$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$\theta_n = \frac{N_1}{n} + \frac{N_2}{2n}$$

(  $N_1$  et  $N_2$  dépendent elles-mêmes de  $n$  ).

- (a) Calculer l'espérance de  $\theta_n$ .
- (b) Montrer que la variance de  $\theta_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

## Semaine du 7 Avril - Planche n° 2

### Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis.**

1. Lien entre les formes multilinéaires antisymétriques et les formes multilinéaires alternées.
2. Sachant que  $\det_e$  est alternée et  $\det_e(e) = 1$ , montrer que  $\det_e$  est une base de  $\Lambda^{*n}(E)$ .

### Exercice n° 2 :

(Probabilités) : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes  $X_1$  et  $X_2$  suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .  
On pose  $Y = \max(X_1, X_2)$  et  $Z = \min(X_1, X_2)$ .
  - (a) Déterminer les lois de  $Y$  et  $Z$ .
  - (b) Calculer leurs espérances et leurs variances.
  - (c) Déterminer des équivalents des espérances et des variances de  $Y$  et  $Z$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - (d) Les variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  sont-elles indépendantes ?
2. On se donne maintenant  $p \in \mathbb{N}^*$  et on considère  $p$  variables aléatoires mutuellement indépendantes  $X_1, \dots, X_p$  suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .  
On pose  $Y = \max(X_1, \dots, X_p)$  et  $Z = \min(X_1, \dots, X_p)$ .
  - (a) Déterminer les lois de  $Y$  et  $Z$ .
  - (b) Calculer les espérances de  $Y$  et  $Z$  (sous forme d'une somme) ainsi que leurs limites lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ .
  - (c) Déterminer des équivalents des espérances de  $Y$  et  $Z$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $p$  étant fixé.

## Semaine du 7 Avril - Planche n° 3

### Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis.**

1. Caractérisation des formes multilinéaires alternées.
2. Formule de Sarrus.
3. Formule de Chasles pour les bases.

### Exercice n° 2 :

(Probabilités) : Une entreprise recrute un cadre.  $n$  candidats se présentent pour le poste ( $n$  étant un entier naturel non nul fixé). Chacun d'eux passe un test et le premier qui y satisfait est engagé. La probabilité qu'un candidat de réussir le test est  $p \in ]0, 1[$ . On notera  $q = 1 - p$  pour alléger les calculs.

On définit la variable aléatoire  $X$  par  $X = k$  si le  $k$ -ième candidat qui se présente est engagé, et  $X = n + 1$  si aucun des  $n$  candidats n'est engagé.

1. (a) Déterminez la loi de  $X$ .  
(b) Vérifiez que  $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$ .
2. (a) En dérivant par rapport à  $x$  la formule donnant  $\sum_{k=0}^n x^k$ , calculer  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .  
(b) En déduire que  $\mathbb{E}(X) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .
3. Comment doit-on choisir  $p$  pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des  $n$  candidats ? Calculer la valeur minimum de  $p$  obtenue pour  $n = 4$  puis pour  $n = 10$ .

### Exercice n° 3 :

(Probabilités) : Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On note  $M$  la matrice aléatoire  $(X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

1. Déterminer la loi de  $\text{rg}(M)$ .
2. Déterminer la loi de  $\text{tr}(M)$ .