Semaine du 2 Juin - Planche n^{o} 1

Exercice n^{o} 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 28, propriétés 20 et 21 : rang et matrices extraites.

Exercice n^{o} 2 :

(Probabilités) : On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 2$). On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise.

* On note $(u_1, \ldots, u_n)$ la liste des numéros tirés.
* Pour $2 \leq i \leq n$, on dit qu'il y a un record à l'instant i si $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$.
* On convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.

1. Calculer, pour $1 \leq i \leq n$, la probabilité r_i qu'il y ait record à l'instant i.
2. Calculer les probabilités que, durant la totalité des tirages, on assiste exactement à :
   (a) un record.
   (b) 2 records.
   (c) n records.

Exercice n^{o} 3 :

(Représentation matricielle) : On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\phi(P(X)) = P(X+1) + P(X)$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On notera M cette matrice.
3. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner la matrice de ϕ^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. En déduire que l'équation $P(X+1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$ admet une unique solution $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et donner cette solution.

Semaine du 2 Juin - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 28, propriétés $26, 27$ et 28 : formules de changement de bases.

Exercice n° 2 :

(Probabilités) : Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

* 1% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété.
* Si une personne en état d'ébriété se fait tester, les test est positif 95 fois sur 100.
* Si une personne qui n'est pas en état d'ébriété se fait tester, le test est négatif 98 fois sur 100.

1. On teste une personne et le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. On teste une personne et le résultat est négatif. Quelles est la probabilité que cette personne soit en fait en état d'ébriété ?
3. Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux.

Exercice n° 3 :

(Représentation matricielle) : Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n et f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Montrer f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 3$, donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer ensuite pour n quelconque, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f pour $n \geq 3$. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \text{ et } P(0) = P'(0) = 0$$

Semaine du 2 Juin - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 29, propriété 6, théorème 8 et propriété 9 : formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.

Exercice n° 2 :

(Probabilités - Urne de Polya) : Une urne contient initialement $r \geq 1$ boules rouges et $b \geq 1$ boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c \geq 1$ boules de la même couleur. Pour tout $n \geq 1$, on note R_n l'évènement « la n-ième boule tirée est rouge ».

1. On note $p_n(r, b)$ la probabilité d'obtenir une boule rouge au n-ième tirage, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que

$$\forall n \geq 2, p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c)$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(R_n) = \frac{r}{r+b}$.

Exercice n° 3 :

(Représentation matricielle) : Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 et f l'application définie sur E par $f(P) = P + P'$

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E. Déterminer la matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.
3. Établir que f est un automorphisme de E.
4. En déduire la solution P de $P + P' = X^2 + X + 1$.