

Semaine du 13 Janvier - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Démontrer la proposition suivante :

- ▷ Si $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $E_{k,l}$ est une matrice élémentaire de $M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Exercice n° 2 :

(Matrices) : On dit qu'une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est stochastique si elle est à coefficients positifs et si la somme des éléments de chaque colonne vaut 1.

1. Donner un exemple de matrice stochastique de $M_3(\mathbb{R})$
2. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

Exercice n° 3 :

(Matrices) : Le but de cet exercice est d'exhiber une partie de $M_2(\mathbb{R})$ formant un "corps" isomorphe à \mathbb{C} . Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, posons $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\mathcal{C} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Posons $J = M(0, 1)$. Que vaut J^2 ?
2. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, expliciter $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(a, b)M(c, d) = M(\alpha, \beta)$. A-t-on de plus que $M(a, b)M(c, d) = M(c, d)M(a, b)$?
(On a montrer ici que \mathcal{C} est une partie commutative de $M_2(\mathbb{R})$ stable par multiplication)
3. Montrer que pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $M(a, b) + M(c, d) \in \mathcal{C}$ puis que $-M(a, b) \in \mathcal{C}$ et enfin que la matrice nulle de $M_2(\mathbb{R})$ appartient à \mathcal{C}
(On a montrer dans cette question que \mathcal{C} forme un sous-groupe de $M_2(\mathbb{R})$)
4. Montrer que $I_2 \in \mathcal{C}$.
5. Montrer que tout élément non-nul de \mathcal{C} est inversible et que son inverse appartient aussi à \mathcal{C} .
On a donc vu via les 5 premières questions que \mathcal{C} forme un "corps".
6. En posant $\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto \operatorname{Re}(z)I_2 + \operatorname{Im}(z)J \in \mathcal{C}$, montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \quad \varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2) \text{ et } \varphi(1) = I_2$$

7. Montrer que φ est bijective.
On a donc finalement montrer que \mathcal{C} fournit une partie de $M_2(\mathbb{R})$ qui est un corps isomorphe à \mathbb{C} .

Semaine du 13 Janvier - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Démontrer la proposition suivante :

- ▷ si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbb{K})$ alors AB est triangulaire supérieure.

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Considérons $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ tel que A et B commutent, et que A soit inversible. Justifier que les matrices A^{-1} et B commutent.

Exercice n° 3 :

(Matrices) : Pour tout réel a , on note $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 + \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$ et l'ensemble $G = \{M_a, a \in \mathbb{R}\}$

1. En posant $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que les matrices appartenant à G sont combinisons linéaires des matrices I_3, U et U^2 .
2. Montrer que l'application $f : a \in \mathbb{R} \mapsto M_a \in G$ est bijective.
3. A-t-on $I_3 \in G$?
4. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}, M_{a+b} = M_a M_b$
5. Les matrices M_a sont-elles toujours inversibles ? (si oui, donner leur inverse).
6. Calculer pour tout entier relatif n , M_a^n .

On a montré en question 3/4/5 que G forme un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.

Semaine du 13 Janvier - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Démontrer les deux propositions suivantes :

- ▷ Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$
- ▷ Si A et B sont deux matrices inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Considérons $n \geq 2$ et $(A, B, C) \in M_n(\mathbb{K})^3$ non nulles vérifiant $ABC = O_{M_n(\mathbb{K})}$. Montrer qu'au moins deux des matrices A, B, C ne sont pas inversibles.

Exercice n° 3 :

(Matrices) : On définit dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer l'inverse de la matrice P par la méthode de votre choix.
2. Calculer le produit $P^{-1}AP$. (On doit obtenir une matrice diagonale que l'on notera pour la suite D)
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire, une l'expression explicite de A^n .
4. Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 5x - 3y - z &= 5 \\ 4x - 3y - 2z &= -2 \\ -2x + 3y + 4z &= 16 \end{cases}$$

Que peut-on en déduire concernant la matrice $A + I_3$?

5. Calculer A^2 et A^3 et déterminer une relation entre les matrices A^2 , A et I_3 .
6. Déduire du résultat de la question précédente du caractère inversible ou non de la matrice A et si oui donner explicitement son inverse.