

Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

Applications

MATHIEU ALIX

—

1 Rapport du Jury

« Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutant entre eux.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations. »

2 Questions classiques

Dans tout ce qui suit on considérera E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, sauf si plus de précisions sont données.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$ (aka nilpotent d'ordre maximum 3). Quels sont les sous-espaces stables par u ?

Solution: Soit e_3 un vecteur tel que $u^2(e_3) \neq 0$, on pose alors $e_2 = u(e_3)$ et $e_1 = u^2(e_3)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E (à vérifier). Dans une telle base, u admet la matrice

suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si F est un sous-espace stable de dimension 1, alors il est nécessairement engendré par un vecteur propre, et comme 0 est la seule valeur propre de u (u nilpotents, alors les vecteurs propres de F sont dans le noyau de u). Comme $\ker(u)$ est de dimension 1 (la matrice M est de rang 2), alors $F = \ker(u)$.
- Si F est sous-espace stable de dimension 2 alors en considérant l'équation de F : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Si x est le vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , alors $u(x)$ a pour coordonnées $(x_2, x_3, 0)$ et doit vérifier $a_1x_2 + a_2x_3 = 0$ (car $u(F) \subseteq F$) et $a_1x_3 = 0$ (car $u^2(F) \subseteq F$). Si $a_1 \neq 0$, alors $x_3 = 0$ et en reportant dans les 2 équations précédentes, on trouve $x_2 = x_1 = 0$ ce qui est impossible car dans ce cas $F = \{0\}$. On a donc $a_1 = 0$, de même $a_2 = 0$ et donc l'équation de F est $x_3 = 0$, i.e. $F = \text{Im}(u)$.

En conclusion les sev stables par u sont $\{0\}, \ker(u), \text{Im}(u), \mathbb{R}^3$.

2. Soit u un endomorphisme. Montrer que si $\ker(u)$ admet un supplémentaire S stable par u , alors $S = \text{Im}(u)$.

Solution: Soit S un supplémentaire de $\ker(u)$ stable par u . Comme $\ker(u) \cap S = \{0\}$, alors u réalise un isomorphisme de S dans S . Ainsi $S = u(S) \subseteq \text{Im}(u)$. Par ailleurs la formule du rang donne

$$\dim(\text{Im}(u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \dim(S)$$

D'où l'égalité.

3. Soit D une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 . Déterminer les endomorphismes de \mathbb{R}^3 laissant stables tous les plans de \mathbb{R}^3 contenant D .

Solution: Considérons e_1 un vecteur directeur de D , qu'on complète en une base (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 . Soit u un endo comme attendu dans l'énoncé. u laisse donc stable $\text{Vect}(e_1, e_2)$ et $\text{Vect}(e_1, e_3)$ et donc laisse stable D qui est leur intersection. La matrice de cet endo est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Enfin u laisse stable le plan $\text{Vect}(e_1, e_2 + e_3)$ et, avec mes notations, $u(e_2 + e_3) = (\alpha + \gamma)e_1 + \beta e_2 + \delta e_3$ d'où $\beta = \delta$. On vérifie réciproquement qu'un endomorphisme u admettant dans la base (e_1, e_2, e_3) une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

laisse stable tous les plans contenant D .

4. (a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- i) u est une homothétie.
 - ii) u laisse stable toutes les droites de E .
 - iii) u laisse stable tout hyperplan de E .
 - iv) u^\top laisse stable toute droite de E^* .
 - v) u^\top est une homothétie.
- (b) On suppose que E est de dimension n . que dire d'un $u \in \mathcal{L}(E)$ qui laisse stable tous les sev de dimension r de E pour $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Solution:

- a) On effectue l'équivalence des 2 premières, puis un raisonnement circulaire sur les restantes
- i) \implies ii) Si u est une homothétie, il laisse stable tout sous-espace vectoriel de E , donc en particulier toute droite de E .
- ii) \implies i) Comme u laisse stable toute droite de E , alors pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. On souhaite montrer que λ_x est indépendant de x . Soit $y \in E \setminus \{0\}$,
- * Si $\exists \alpha \in \mathbb{K}, y = \alpha x$, alors $u(y) = \lambda_y y = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \lambda_x \alpha x = \lambda_x y$, alors comme $y \neq 0$ alors $\lambda_x = \lambda_y$.
 - * Sinon en regardant $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Alors $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x = (\lambda_y - \lambda_{x+y})y$, et comme x et y sont linéairement indépendants alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.
- Ainsi λ_x est indépendant de x , et u est une homothétie.
- i) \implies iii) Si u est une homothétie, il laisse stable tout sous-espace vectoriel de E , donc en particulier tout hyperplan de E .
- iii) \implies iv) Soit φ une forme linéaire non nulle et $H = \ker(\varphi)$ un hyperplan de E , et $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$ alors $E = \mathbb{K}a \oplus H$ (en effet $x \in E$ s'écrit $x = \lambda a + h$ avec $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \lambda a \in H$). Comme u laisse stable h
- $$\begin{aligned} u^\top(\varphi)(x) &= \varphi(u(x)) = \varphi(\lambda u(a) + u(h)) = \lambda \varphi(u(a)) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \varphi(u(a)) \\ &= \mu_\varphi \varphi(x) \text{ où } \mu_\varphi = \frac{\varphi(u(a))}{\varphi(a)} \in \mathbb{K} \end{aligned}$$
- Ainsi $u^\top(\varphi) = \mu_\varphi \varphi$ et donc u^\top laisse stable toute droite de E^* .
- iv) \implies v) Remplacer E par E^* , c'est déjà vu.
- v) \implies i) Montrons que si $u^\top = \lambda Id_{E^*}$ alors $u = \lambda Id_E$. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, alors il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $y = u(x) - \lambda x \neq 0$. On complète y en une base de E que l'on note \mathcal{B} , alors en considérant la forme

linéaire φ définie par $\varphi(y) = 1$ et $\varphi(e) = 0$ pour $e \in \mathcal{B} \setminus \{y\}$. On vérifie que $(u^\top(\varphi) - \lambda\varphi)(x) = \varphi(u(x)) - \lambda\varphi(x) = \varphi(y) = 1$, ce qui contredit l'homothétie de u^\top .

- b) Montrons que u laisse stable tout hyperplan de E , et alors par la question précédente, on aura que u est une homothétie. Si H est un hyperplan de base $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, alors le sous-espace de H engendré par $\{e_1, \dots, e_{r-1}, e_k\}$ pour $r \leq k \leq n-1$ est laissé stable par u , donc $u(e_j) \in H$ pour tout $1 \leq j \leq n-1$, donc H est stable par u .

5. Stabilité sur les orthogonaux, question d'adjoint, et thm spectrale ? comme exemple d'application.
6. (E un \mathbb{R} -ev) Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un sous-espace vectoriel P de dimension 1 ou 2 stable par u

Solution: Si u admet une valeur propre réelle λ , alors pour tout vecteur propre associé $x \in E \setminus \{0\}$, alors la droite $D = \mathbb{R}x$ est stable par u .

Sinon $n \geq 2$ et le polynôme minimal π_u se décompose dans l'anneau factoriel $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles de degré 2 (les valeurs propres de u sont les racines de π_u). Ce polynôme π_u s'écrit donc $\pi_u(X) = (X^2 + bX + c)Q(X)$ avec $b^2 - 4c < 0$ et $Q(u) \neq 0$ (π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u).

De l'égalité $0 = \pi_u(u) = u^2 + bu + cId \circ Q(u)$ avec $Q(u) \neq 0$, on déduit alors que l'endomorphisme $u^2 + bu + cId$ n'est pas injectif, c'est-à-dire que son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Pour tout vecteur x non nul dans ce noyau on vérifie alors que $P = \text{Vect}(x, u(x))$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par u . En effet, P est de dimension 2 puisque x n'est pas vecteur propre de u et avec $u^2(x) + bu(x) + cx = 0$ on déduit que $u^2(x)$ est dans P , ce qui entraîne que P est stable par u .

3 Question plus exotique ?

1. L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie π_u irréductible alors u est un endomorphisme semi-simple (*i.e.* tout sev F de E stable par u admet un supplémentaire dans E stable par u). Considérons dès lors F un sev stable de E par u
- (a) Traiter le cas $F = E$
- (b) Si $F \neq E$, il existe $x_1 \in E \setminus F$, considérons l'ensemble suivant $E_{x_1, u} = \{P(u)(x_1), P \in \mathbb{K}[X]\}$, vérifier qu'il est stable par u ?
- i) Notons $I_{x_1} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x_1) = 0\}$, Montrer que I_{x_1} est un idéal principal non-nul. On notera pour la suite π_{x_1} un générateur.
- ii) Montrer que $\pi_u = \pi_{x_1}$ et en déduire l'irréductibilité de π_{x_1} .
- iii) Montrer que $E_{x_1, u} \cap F = \{0\}$
- iv) Conclure en fonction de si $E_{x_1, u}$ est supplémentaire par rapport à F . Sinon en déduire un procédé qui permet de conclure.

Remarque : Ce résultat est essentielle pour pouvoir montrer le résultat suivant sur les endomorphismes semi-simples (voir Gourdon, Algèbre et probabilités pour une démonstration) :

« u est semi-simple si et seulement si $\pi_u = M_1 \dots M_r$ où les M_i sont unitaires, irréductibles et distincts »

Solution: ▷ Soit F un sev stable par u . Montrons l'existence d'un supplémentaire S stable par u .

- (a) Si $F = E$, c'est terminé en prenant $S = \{0\}$ qui est bien stable par u .
- (b) Sinon, considérons $x_1 \in E \setminus F$ et posons l'ensemble suivant qui est stable par u

$$E_{x_1, u} = \{P(u)(x_1), P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Montrons que cet ensemble pourrait être un potentiel candidat de supplémentaire en commençant par montrer le caractère direct. Montrons que $E_{x_1, u} \cap F = \{0\}$. Pour se faire, on s'intéresse à l'ensemble

$$I_{x_1} = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x_1) = 0\}$$

- i) Il est laissé au lecteur de vérifier que I_{x_1} est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Or $\mathbb{K}[X]$ est principal car \mathbb{K} est un corps, I_{x_1} est donc principal, celui-ci est non réduit à $\{0\}$ car $\pi_u \in I_{x_1}$. Il est donc engendré par un élément $\pi_{x_1} \in \mathbb{K}[X]$.
- ii) Or comme dit précédemment, on a $\pi_u \in I_{x_1} = (\pi_{x_1})$ donc $\pi_{x_1} \mid \pi_u$ et comme π_u est irréductible (et que $\pi_{x_1} \neq 1$ car $x_1 \neq 0$ étant dans $E \setminus F$) alors $\pi_u = \pi_{x_1}$ et donc π_{x_1} est irréductible.
- iii) Considérons $y \in E_{x_1, u} \cap F$, alors, il existe $P \in \mathbb{K}[X], y = P(u)(x_1)$. Maintenant supposons que $y \neq 0$, alors $P \notin I_{x_1} = (\pi_{x_1})$ donc π_{x_1} ne divise pas P et comme π_{x_1} est irréductible, alors π_{x_1} et P sont premiers entre eux. Comme $\mathbb{K}[X]$ est principal, par le théorème de Bezout :

Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X], UP + V\pi_{x_1} = 1$ donc :

$$x_1 = U(u) \circ P(u)(x_1) + V(u) \circ \pi_{x_1}(u)(x_1) = U(u)(y)$$

Or $y \in F$ et comme F est stable par u alors par l'égalité au dessus, on devrait avoir $x_1 \in F$, ce qui est impossible. d'où le caractère direct.

- iv) Si $F \oplus E_{x_1} = E$, c'est terminé en choisissant $S = E_{x_1}$. Sinon, on choisit $x_2 \in E \setminus (E_{x_1} \oplus F)$ et on recommence. On itère ainsi ce procédé qui se termine en un nombre fini d'itération car E est de dimension fini (et que $\dim(E_{x_i}) \geq 1$). Il existe donc x_1, \dots, x_r tel que

$$E = F \oplus E_{x_1} \oplus \dots \oplus E_{x_r}$$

et comme pour tout $i \in \{1, \dots, r\}, E_{x_i}$ est stable par u alors $S = E_{x_1} \oplus \dots \oplus E_{x_r}$ est stable par u et $F \oplus S = E$.

2. (Décomposition de Fitting) : On considère u un endomorphisme sur une espace vectoriel E de dimension finie d .

- (a) Les suites $(\ker(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes.

- (b) Montrer que ces suites sont stationnaire à partir d'un même rang n_0 .
- (c) Avec les notations précédentes, montrer que $E = \ker(u^{n_0}) \oplus \operatorname{Im}(u^{n_0})$.
- (d) Montrer que u laisse stable $\ker(u^{n_0})$ et $\operatorname{Im}(u^{n_0})$.
- (e) Montrer que u induit un endomorphisme nilpotent sur $\ker(u^{n_0})$.
- (f) Montrer que u induit un automorphisme sur $\operatorname{Im}(u^{n_0})$.

Solution: Voir tout livre d'algèbre linéaire, [MAN] ou [CAL - Carnet de voyage en algèbre] ou si vous le souhaitez tout bien détaillé ici