L'intégrale : Pré-quel, apparition et évolution

MATHIEU Alix, DIAF Sihem, ROUSSEL Juliette

12 mai 2022

Table des matières

Introduction

L'intégrale de Lebesgue fête ses 100 ans. Mais comment en est-on arrivée jusqu'à l'intégrale de Lebesgue ? Derrière cette question, se profile de nombreuses recherches menées par différents mathématiciens à travers les époques. Des Grecs jusqu'au monde contemporain, nous tâcherons d'expliquer l'évolution depuis la recherche d'aires/de volumes chez les grecs jusqu'aux intégrales actuelles.

1 Méthode d'exhaustion

1.1 Histoire de la méthode d'Exhaustion

La méthode d'exhaustion est une méthode dont la paternité est attribuée à Eudox de Cnide durant la Grèce Antique. Celle-ci fut reprise par **Euclide** dans le *Livre XII des Éléments*. Archimède va venir pousser cette méthode à un point culminant pour la calcul d'aires et de volume.s

À l'aide cette méthode, Archimède parviendra à démontrer de nouveaux résultats tel que :

Exemple(s) :

> L'aire d'un segment de parabole est égale à quatre tiers de l'aire d'un triangle de même base et de même sommet

La méthode poussée à son apogée par Archimède permet de résoudre de nombreux problèmes liés au calcul infinitésimal en le contournant (quadratures, ...). Cette méthode permet de comparer l'aire d'une surface S à l'aide d'une surface T connue.

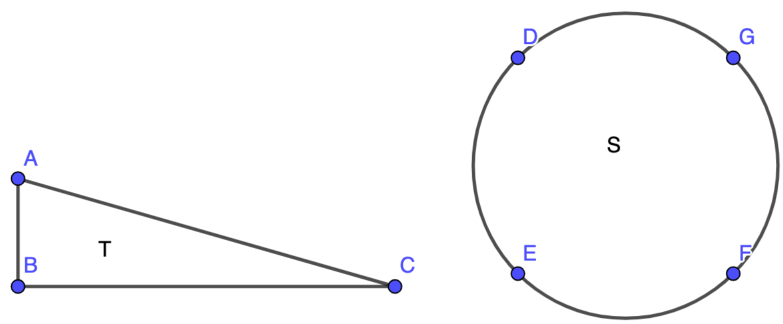

FIGURE 1 – Surface S et T

1.2 Évolution de la méthode

1.2.1 Principe de la méthode avant Archimède

Afin de prouver l'égalité entre deux figures A et B (au sens de l'aire ou du volume de ces figures), cette méthode introduit un raisonnement par double raisonnement par l'absurde en montrant d'abord une contradiction pour $A < B$ puis une seconde contraction pour $B < A$.

Pour se faire, on approxime la figure curviligne A par une figure rectiligne C inscrire de sorte que A et C soient plus petites qu'une grandeur donnée.

On peut se questionner sur les fondements de cette méthode, **y a-t-il des bases solides à cette méthode ?**

1.2.2 Fondements de la méthode

Cette méthode s'appuie sur la proposition 1 du *Livre X* des Éléments d'Euclide :

« *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées* »

Exemple(s) :

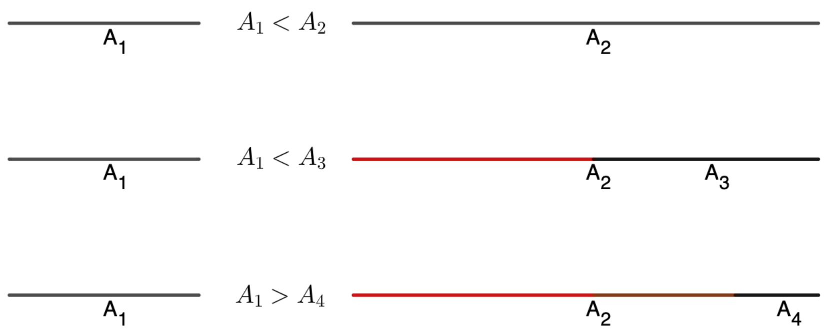

FIGURE 2 – Exemple d'application entre 2 segments

La démonstration de cette méthode repose sur l'article 5 du *livre V* appelé :

Axiome d'Archimède : (ou axiome de mesurabilité)

« *Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.* »

Cet axiome peut s'appliquer à des grandeurs à la fois commensurables et à la fois à des grandeurs incommensurables. Cependant, cet axiome n'est pas le seul, il existe un autre postulat supplémentaire qui est utilisé implicitement par Euclide mais énoncé de la sorte par Clavius lors de sa traduction latine des six premiers livres des Éléments en 1574 :

Hypothèse de la 4è proportionnelle :

« Soient 3 grandeurs A,B et C dont les premières sont de même espèce (commensurables ou non). Il existe toujours une grandeur D de même espèce que C telle que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ »

1.2.3 Avantages et inconvénients de la méthode d'exhaustion

Les avantages et inconvénients ci-dessous sont à prendre dans le contexte d'utilisation intensive de cette méthode, c'est-à-dire principalement chez les Grecs :

Avantages	Inconvénients
• Évite le recours à tout processus infini : Dans le monde grecque, la géométrie est finitiste. Cette méthode permet d'éviter le passage à l'infini et les paradoxes associés. On verra plus tard un exemple dans le calcul de l'aire d'un cercle dans De la mesure du cercle d'Archimède. Celui-ci ne parlera jamais de polygones infinis mais d'une suite de polygones dont le nombre de côté qui approxime le cercle, mais dont il restera toujours un reste qui sera égal à la différence entre le polygone et le cercle. • La méthode d'exhaustion est une méthode rigoureuse de démonstration basé sur un double raisonnement par l'absurde (seule méthode légitime universelle de démonstration jusqu'au XVIII ème siècle pour les méthodes infinitésimales).	• La méthode d'exhaustion n'est pas une méthode de recherche : elle est suffisante pour expliquer, démontrer mais pas pour rechercher/découvrir car elle suppose de savoir le résultat à prouver. La recherche de ce résultat doit se faire par d'autres méthodes plus intuitives et/ou expérimentales. • La méthode d'exhaustion résout chaque problème au cas par cas en devant trouvé un procédé géométrique adapté à chaque cas (ce n'est pas une méthode générale). • C'est une méthode longue, laborieuse et indirecte (double raisonnement par l'absurde) qui nécessite de long développement.

1.3 Les apports d'Archimède

Archimède vient complexifier les éléments et les différentes étapes de la méthode d'exhaustion (en généralisant celle-ci à la comparaison du surface et de solides).

1.3.1 Notion de grandeur

Pour Euclide, les grandeurs peuvent être des segments de droite, des aires (attention limitées par des portions de droites ou des arcs de cercles), des volumes(sphères, cône,pyramide) ou des angles rectilignes. ces grandeurs ayant pour propriétés intuitives de s'additionner, se partage, se comparer et satisfaire l'axiome d'Archimède

Archimède vient quant à lui étendre cette notion aux arcs de cercles, aux portions des coniques, au poids, au durées, etc...

1.3.2 L'axiome d'Archimède ou de mesurabilité

Archimède énonce comme suit cet axiome qui diffère par la forme de celui d'Euclide énoncé page 2.

Axiome d'Archimède ou de mesurabilité : Selon Archimède

« *Parmi les lignes, surfaces et solides inégaux, le plus grand excède le plus petit d'une grandeur telle qu'étant ajoutée à elle même, elle peut dépasser toute grandeur donné ayant un rapport avec l'une et l'autre des premières* »

1.3.3 Usage des figures inscrites et circonscrites

On construit deux figures U et V encadrant à la fois la figure A inconnue et la figure S connue tel que $V - U$ soit aussi petite que l'on veut (suffisamment petite) pour aboutir au contradictions nécessaires au double raisonnement par l'absurde de la méthode d'exhaustion afin d'obtenir que $A = V$

FIGURE 3 – Figure U,V,A et S

1.3.4 Apparition des « sommes intégrales »

Archimède utilise à plusieurs reprises des suites de polygones inscrits et circonscrits dont les aires constituent une suite géométrique convergente. Pour calculer la masure de la grandeur inscrite, Archimède vient utiliser une méthode consistant à calculer la somme des n premiers termes d'une série, mais il évite de calculer la somme entière (correspondant à une série infinie) restant ainsi dans la monde de la finitude.

1.4 Application de la méthode d'exhaustion à la mesure du cercle

Citons l'énoncé d'Archimède :

Énoncé : mesure du cercle selon Archimède

« Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des cotés de l'angle droite est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle »

Démontrons ce résultat selon la méthode d'exhaustion par la méthode d'Archimède en utilisant les polygones inscrits et circonscrits :

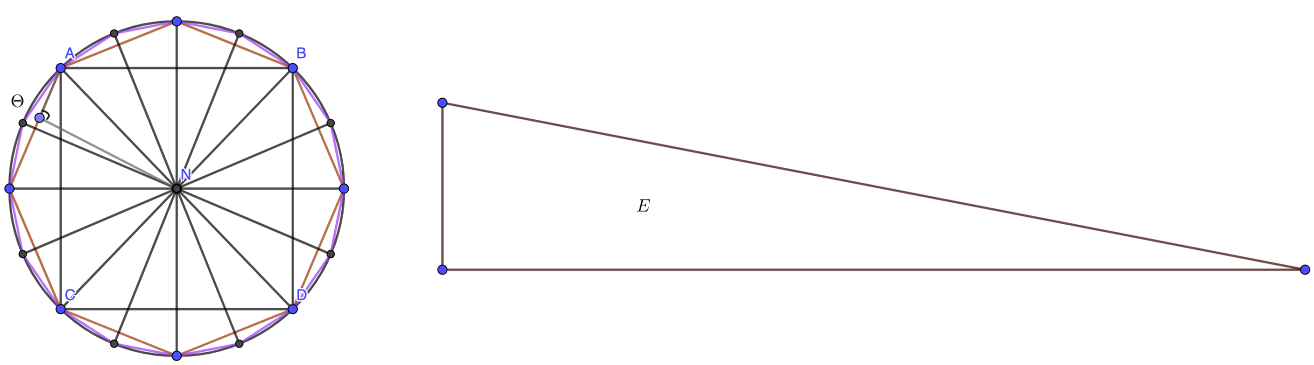

FIGURE 4 – Représentation du cercle, du triangle E, et de la figure inscrite

Démonstration :

- Dans un premier temps, supposons l'aire du cercle $ABCD$ (de rayon r) supérieur à celle du triangle rectangle E : On inscrit le carré passant par A, B, C et D dans le cercle $ABCD$ et division en 2 parties égales les arcs (admettant comme corde les cotés du carré), en répétant l'opération de division en deux parties égales de tels sortes que les segments de cercles aient à la fin une somme plus petite que la différence de l'aire du cercle et du triangle.

On construit donc ici une suite de polygones P_n inscrits qui approxime le cercle dont le nombre de côtés augmente et tel que :

$$\text{Aire restante entre le cercle et le polygone } = (\mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(P_n)) < (\mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(E))$$

ce qui est rendu possible grâce au 5è postulat énoncé dans (De la sphère et du cylindre).
Alors l'aire du polygone P_n est plus grande que celle du triangle rectangle E : $\mathcal{A}(P_n) < \mathcal{A}(E)$.

Maintenant notons N le centre du cercle $ABCD$ et qui correspond au centre du carré. Appelons Θ le point d'abaissement de la perpendiculaire sur un segment du polygone .

On a donc $N\Theta < r = NA$. Or si $\mathcal{P}(P_n) < \mathcal{P}(ABCD)$ alors $\mathcal{P}(P_n) < \text{base}_E$
Prenons un triangle du polygone noté T_1 passant par exemple par A, N et un autre point T. On a :

$$\mathcal{A}(T_1) = \frac{AT \times N\Theta}{2} = \frac{\mathcal{P}(P_n) \times N\Theta}{\text{nb cotés } \times 2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(P_n) &= \text{nb cotés } \times \mathcal{A}(T_1) \text{ car tous les triangles sont égaux}\\ &= \frac{\mathcal{P}(P_n) \times N\Theta}{2} < \frac{\text{base}_E\, r}{2} = \mathcal{A}(E)\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}(P_n) < \mathcal{A}(E)$ ce qui est une contradiction

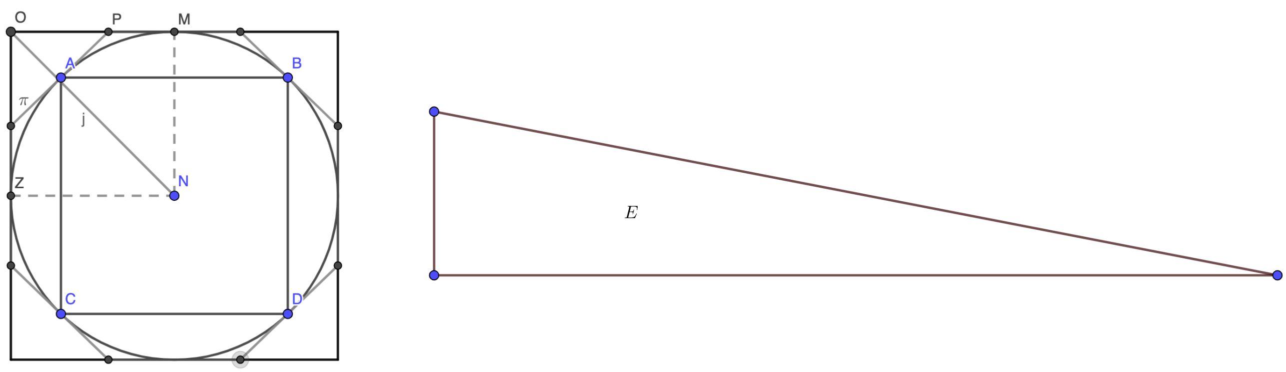

FIGURE 5 – Représentation du cercle, du triangle E, et de la figure circonscrite

Démonstration :

- Dans un second temps, supposons maintenant l'aire du cercle $ABCD$ inférieure à celle du triangle rectangle E. On circonscrit le cercle dans un carré. Divisons les arcs en deux parties égales et on fait passer des tangentes par les points de division. En répétant l'opération de division en deux parties égales, On construit alors les tangentes passant par les points de divisions, on crée donc une suite de polygone circonscrit C_n au cercle

  On a tout d'abord, par construction à partir des tangentes aux cercles que l'angle $\widehat{\text{OAP}}$ est droit. De plus si $PM = PA$ alors $OP \geqslant MP$. En effet, en se plaçant dans le triangle rectangle

OAP, en appliquant le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OP^2 &= OA^2 + AP^2 \\ &= OA^2 + PM^2 \geqslant PM^2 \end{aligned}$$

Ainsi $OP \geqslant MP$

Montrons maintenant que $\mathcal{A}(PO\pi) \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{A}(OZAM)$:

On a en appliquant la théorème de Pythagore dans OAH où H est la hauteur depuis le sommet A (on a donc $OH = HP$) : $AH^2 = AP^2 - PH^2 = PM^2 - HP^2 \leqslant PM^2$. Ainsi $PM \geqslant AH$. On obtient ensuite que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{A}(OP\pi) = \mathcal{A}(OPA) &= \frac{PA^2}{2} \text{ car } PA = OA \text{ car le triangle est rectangle} \\ &= \frac{PM \times PM}{2} \\ &\geqslant \frac{PM \times AH}{2} = \mathcal{A}(PAM) \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{A}(OZAM) &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}(OP\pi) + \mathcal{A}(PAM)) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\mathcal{A}(OP\pi) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(OP\pi) \\ &= \mathcal{A}(OP\pi) \end{aligned}$$

la construction est faite de telle sorte qu'il reste donc des segments pareils à πZA dont l'aire de la somme est inférieur à l'aire de la différence entre E et $ABCD$. Ainsi $\mathcal{A}(C_n - ABCD) < \mathcal{A}(E - ABCD)$, et donc $\mathcal{A}(C_n) < \mathcal{A}(E)$ ce qui est absurde comme C_n figure circonscrite. (Du moment que NA est égale à la hauteur du triangle E et que $\mathcal{P}(C_n) > \text{base}_E$ alors la figure circonscrite C_n est d'aire plus grande à celle du triangle E. (i.e. $\mathcal{A}(C_n) > \mathcal{A}(E)$)). (sans utiliser les premières propriétés énoncées)

On a donc finalement montré que $\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(ABCD)$ ■

1.5 Approfondissement de la méthode d'exhaustion par Ibn-al-Haytham

1.5.1 Biographie de Ibn-al-Haytham

Ibn-al-Haytham est un mathématicien, philosophe, astronome et physicien du monde médiéval arabo-musulman. Il est considéré comme le fondateur de l'optique moderne et a également apporté des contributions notables dans le domaine des mathématiques. Il a par exemple contribué à l'introduction du langage mathématiques dans les sciences physiques. Né vers 965 à Bassora dans l'actuel Irak, il y recevra une éducation qu'il complétera dans la ville de Bagdad. Il aura écrit autour de 200 ouvrages mais seulement une soixantaine nous est parvenue. Il meurt au Caire en Égypte vers 1040.

1.5.2 Proposition de Ib-al-Haytham

Proposition :

La surface d'un cercle est égale à la surface d'un carré.

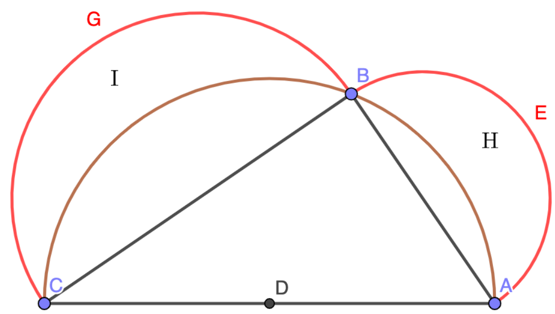

FIGURE 6 – Représentation cas général

Démonstration :

- Montrons d'abord que $\mathcal{A}(AEBHA) + \mathcal{A}(BGCIB) = \mathcal{A}(ABC)$

  On rappelle que si on a deux cercles de diamètres respectifs d_1, d_2 et de rayon r_1, r_2 alors $\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Ainsi on a :

$$\frac{\mathcal{A}(BGC)}{\mathcal{A}(BEA)} = \frac{BC^2}{BA^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{A}(BEA)}{\mathcal{A}(BEA)} = \frac{BA^2}{BA^2}$$

  et donc

$$\frac{CB^2 + AB^2}{AB^2} = \frac{\mathcal{A}(BCG) + \mathcal{A}(BEA)}{\mathcal{A}(BEA)}$$

  Or en utilisant le théorème du Pythagore dans le triangle rectangle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ (car triangle inscrit dans le cercle) : $AC^2 = BC^2 + BA^2$

  Ainsi

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{\mathcal{A}(BCG) + \mathcal{A}(BEA)}{\mathcal{A}(BEA)}$$

  or $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(BEA)}$

  finalement on obtient donc

$$\frac{\mathcal{A}(BCG) + \mathcal{A}(BEA)}{\mathcal{A}(BEA)} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(BEA)}$$

  et donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BCG) + \mathcal{A}(BEA)$$

  si on enlève les 2 portions AHB et BIC au demi-cercle ABC , il reste le triangle rectangle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ On a alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\widehat{\mathrm{ABC}}) &= \mathcal{A}(ABC) - \mathcal{A}(AHB) - \mathcal{A}(BIC) \\ &= \mathcal{A}(BCG) + \mathcal{A}(BEA) - \mathcal{A}(AHB) - \mathcal{A}(BIC) \\ &= (\mathcal{A}(BCG) - \mathcal{A}(AHB)) + (\mathcal{A}(BEA) - \mathcal{A}(BIC))\end{aligned}$$

  Ainsi

$$\mathcal{A}(\widehat{\mathrm{ABC}}) = \mathcal{A}(AEBHA) + \mathcal{A}(BCGIB)$$

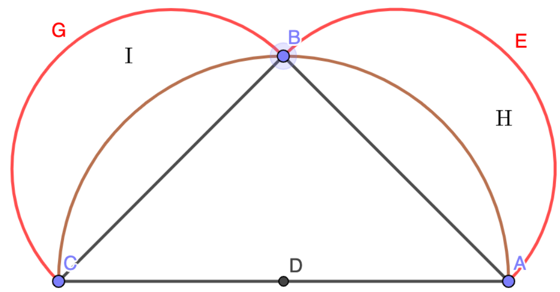

FIGURE 7 – Représentation cas où B est au dessus de D

À partir de maintenant on se place dans le cas particulier de la Figure 7 où $\mathcal{A}(AHB) = \mathcal{A}(BIC)$

Démonstration :

- Si les 2 arcs AHB et BIC ont même aires, les droites AB et BC sont de même longueurs, les cercles AEB et BCG sont égaux ; les deux lunules sont aussi égales. Plaçons donc comme dans la Figure 7, le point B au dessus du point D. On a $\widehat{\mathrm{ADB}} = \widehat{\mathrm{CDB}}$. Or

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\widehat{\mathrm{ABC}}) &= 2\mathcal{A}(\widehat{ABD}) \\ &= \mathcal{A}(AEBHA) + \mathcal{A}(BCGIB) \\ &= 2\mathcal{A}(AEBHA)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{A}(ABD) = \mathcal{A}(AEBHA)$$

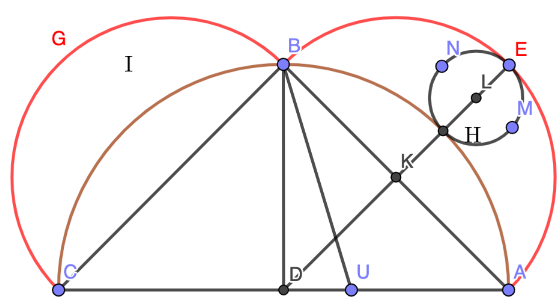

FIGURE 8 – Représentation cas où B est au dessus de D

Démonstration :

- On note K le centre du cercle AEB. $(DE), (DK)$ et (HE) diamètre de ABC et de AEB donc $[DH] = [HE]$ car elle passe par les 2 centres. À cette époque, est diamètre d'un cercle toute droite qui passe par le centre de ce cercle.

  Le cercle $HMEN$ est tangent au cercle ABC et l'extérieur est tangent au cercle AEB.

- On prend U tel que $\frac{AD}{DU} = \frac{\mathcal{A}(AEBHA)}{\mathcal{A}(HMEN)}$. Or on sait que $\frac{AD}{DU} = \frac{\mathcal{A}(\widehat{\text{ABD}})}{\mathcal{A}(\widehat{\text{BDU}})} = \frac{\frac{AD \times BD}{2}}{\frac{DU \times BD}{2}}$ Ainsi

$$\frac{\mathcal{A}(\widehat{\text{ABD}})}{\mathcal{A}(\widehat{\text{BDU}})} = \frac{\mathcal{A}(AEBHA)}{\mathcal{A}(HMEN)} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{A}(\widehat{\text{ABD}})}{\mathcal{A}(AEBHA)} = \frac{\mathcal{A}(\widehat{\text{BDU}})}{\mathcal{A}(HMEN)}$$

  Or on a montré que $\mathcal{A}(AEBHA) = \mathcal{A}(ABD)$ donc finalement $\mathcal{A}(\widehat{\text{BDU}}) = \mathcal{A}(HMEN)$

- Montrons que tout triangle est égal à un carré.
  Construisons sur la droite XQ un carré tel que $\mathcal{A}(SPQO) = \mathcal{A}(\widehat{\text{BDU}})$, on aura alors $\mathcal{A}(HMEN) = \mathcal{A}(SPQO)$. Comme AC, EH sont des diamètres connus et fixes, alors le rapport $\frac{AC}{EH}$ est connu. Soit X tel que $\frac{AC}{EH} = \frac{XQ}{QP}$ donc $\frac{AC^2}{HE^2} = \frac{XQ^2}{QP^2}$

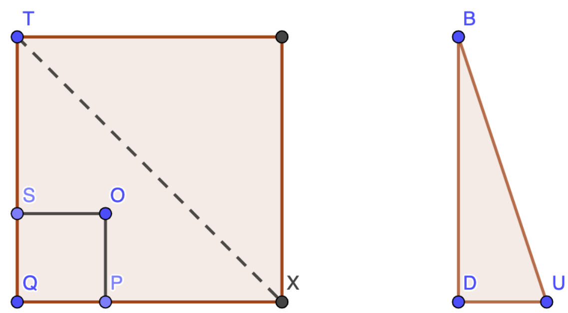

Figure 9 – Représentation de $SPQO$ et BDU

Démonstration :

On applique le théorème de Thalès, on a $\frac{XT^2}{SP^2} = \frac{XQ^2}{QP^2}$ et comme $SPQO$ est un carré donc $SP^2 = QO^2$, on obtient donc que $\frac{AC^2}{EH^2} = \frac{XT^2}{QO^2} = \frac{\mathcal{A}(XTQ)}{\mathcal{A}(SPQO)}$.
Or

$$\frac{AC^2}{HE^2} = \frac{\pi AC^2}{\pi HE^2} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(HMEN)}$$

Donc

$$\frac{XT^2}{QO^2} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(HMEN)}$$

Or $\mathcal{A}(\widehat{\text{BDU}}) = \mathcal{A}(HMEN)$ et comme $\mathcal{A}(SPQO) = \mathcal{A}(\widehat{\text{BDU}})$ (par construction) alors $\mathcal{A}(HMEN) = \mathcal{A}(SPQO)$.
On obtient donc que $\frac{XT^2}{QO^2} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(SPQO)} = \frac{\mathcal{A}(XTQ)}{\mathcal{A}(SPQO)}$ et donc que

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(XTQ)$$

■

1.6 Quelle objection ?

Plusieurs objections sont apparues suite à l'écrit de Ibn-Al-Haytham :

- Nasir al-Din critique la longueur du texte et propose donc une autre méthode
- L'auteur du texte que nous avons étudié, quant à lui, reproche à Ibn-Al-Haytham d'avoir seulement prouvé l'existence d'une telle égalité. En effet, rien dans cette preuve n'assure que la construction de telles figures est possible.

2 Naissance d'un nouveau calcul : le calcul infinitésimal

2.1 Mise en contexte

2.1.1 Newton - Leibniz

Gottfried Leibniz, né en 1646 à Leipzig en Allemagne et mort en 1746 à Hanovre, est l'un des deux grands mathématiciens dont nous allons étudier une œuvre dans cette partie. Il est connu pour être également philosophe, scientifique, diplomate et logicien. Leibniz a publié la majorité de ses travaux dans la revue : « *Acta eruditorium* », et notamment ses calculs concernant le calcul différentiel et intégral.

Isaac Newton, deuxième grand mathématicien dont les œuvres vont nous intéresser dans cette partie, est né en 1643 à Woolsthorpe en Angleterre et mort en 1727 à Londres. Il est connu pour être également physicien, philosophe, astronome ou encore alchimiste. Il est une figure emblématique, notamment pour sa théorie de la gravitation universelle, ou son calcul infinitésimal, qui fait l'objet d'étude de cette partie.

Les travaux de ces deux mathématicien concernent le problème de la quadrature ainsi que le problème des tangentes, comme inverses l'un de l'autre. Ces deux mathématiciens concentrent leurs recherches sur les possibles liens entre intégrale et dérivée. Ils travaillent indépendamment l'un de l'autre, mais ils cherchent tous deux à identifier et manipuler le problème inverse des tangentes (et des quadratures), la relation entre dérivation et intégration.

Newton et Leibniz ont tous deux travailler et aboutis à des conclusions sur le calcul infinitésimal et le lien entre quadrature et tangentes. Or le problème est de savoir qui avait découvert la méthode en premier, ce qui initia de nombreuses querelles entre les deux mathématiciens. D'un point de vu des travaux, il est néanmoins reconnu que Newton fut le premier à publier ses résultats.

2.2 Théorème fondamental du calcul infinitésimal

2.2.1 Le calcul fluxionnel Newtonien

2.2.1.1 Méthode des fluxions

Au milieu de 17^{eme} siècle, Newton travaille sur des problèmes mettant en jeu le changement de vitesse au cours du temps. En effet, Newton utilise le terme de fluxion pour désigner la vitesse à laquelle une quantité variable notons la x (qu'il appelle « *fluente* ») varie au cours du temps. C'est donc le nom donnée par Newton pour définie, ce que nous définissons actuelle « dérivée ».

Prenons la peine d'étudier deux exemples :

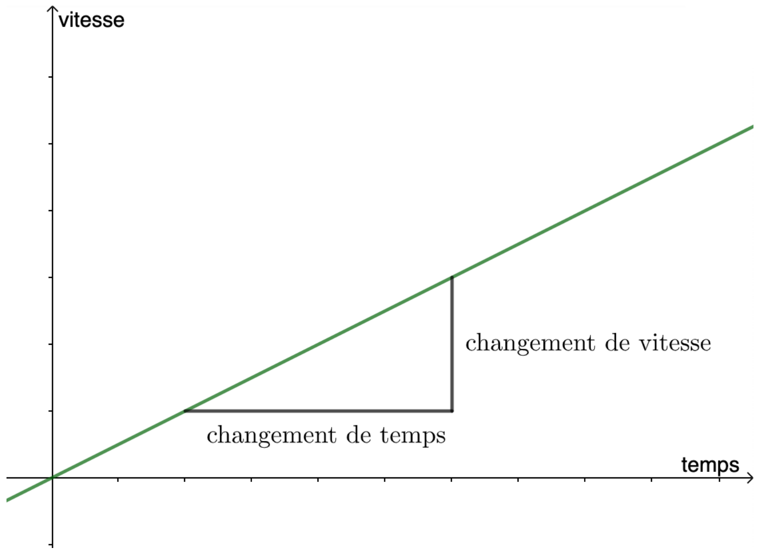

Figure 10 – 1er Cas : pour une droite affine

Exemple(s) :

> Ici, le changement de vitesse est donné par la pente (le coefficient directeur) de cette droite où la vitesse d'un objet augmente de manière proportionnelle au temps écoulé.

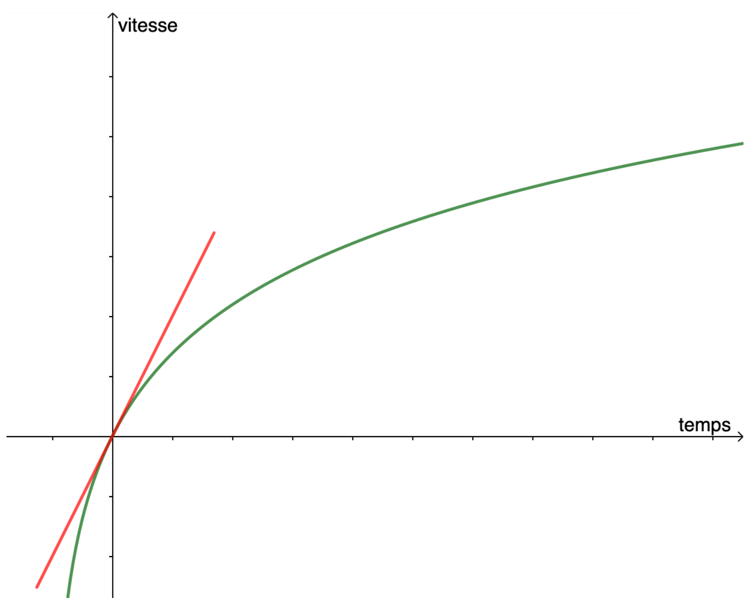

Figure 11 – 2ème Cas : pour une courbe

Exemple(s) :

> Newton remarque ensuite que si on considère une changement de vitesse sur une période de temps très courte, la courbe se résume à un petit segment. On se restreint donc à ce petit morceau de courbe. L'accélération est donné part $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Lorsqu'un point x se déplace de M en M', on approche donc son déplacement par la tangente (M' prend comme abscisse $x + a$). Il apparait alors le lien

entre tangente et fluxions.

Notations :
Newton notera $a = \dot{x}0$ et $b = \dot{y}0$, les notations correspondantes aujourd'hui à $a = \mathrm{d}x$ et $b = \mathrm{d}y$ ou encore la dérivée d'une fonction f par rapport à x : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ arriveront dans un manuscrit datant de 1975).

2.2.1.2 Développement du calcul Newtonien

Au début des années 1665, il découvre le calcul des séries infinies, ainsi que le calcul de dérivée. Profitons en pour rappelé dans un premier temps la formule de Newton des séries infinies, qui nous sera utile pour comprendre ses calculs.

Séries infinies :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \cdots$$

En 1666, il développe la méthode inverse des fluxions et la relation entre quadrature et fluxion. Il développe notamment 3 version de ses calculs, et énonce 3 règles :

Règles de Newton :

1. si $y = ax^{\frac{m}{n}}$ alors l'aire sous y est $\frac{an}{n+m}x^{1+\frac{m}{n}}$.
2. Si y est donné par la somme de plusieurs termes alors l'aire sous y est donné par la somme des aires de tous les termes.
3. Pour calculer l'aire sous une courbe $f(x, y) = 0$, il faut exprimer y comme somme de termes de la forme $y = ax^{\frac{m}{n}}$ et appliquer les règles 1 et 2.

2.2.1.3 Lien entre dérivée et intégration

On s'intéresse donc ici à la règle numéro 1 de Newton où commence à apparaitre implicitement l'intégration d'une fonction puissance.

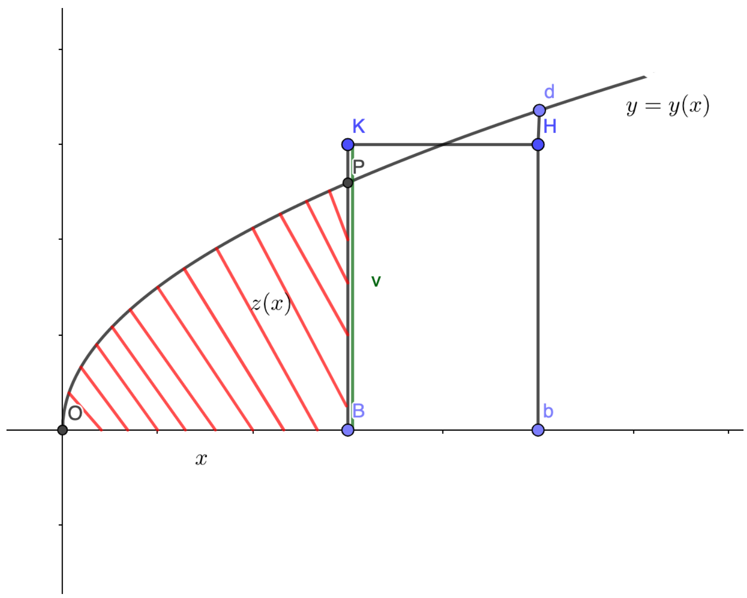

FIGURE 12 – Représentation de $y = y(x)$

On appelle $z = z(x)$ l'aire de la figure sous la courbe y, c'est à dire la figure OPB.
Alors $z(x) = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = \frac{a}{r}x^r$ où $r = \frac{m+n}{n}$.

On écrit $x \to x + \underbrace{o}$ quantité infinitésimale . On note $BK = v$, on a alors $ov = \mathcal{A}(BbHK) = \mathcal{A}(BbPd)$ car $HK = Pd$. On note $z = z(x) \to z(x+o)$. Alors $ov = z(x+o) - z(x) = \underbrace{\frac{a}{r}(x+o)^r}_{1} - \underbrace{\frac{a}{r}x^r}_{2}$

On réécrit 1. :

$$\begin{aligned}\frac{a}{r}(x+o)^r &= \frac{a}{r}x^r\left(1+\frac{o}{x}\right)^r \\ &= \frac{a}{r}x^r\left(1 + r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)}{2!}\frac{o^2}{x^2} + \cdots\right)\end{aligned}$$

Donc $ov = \frac{a}{r}(x^r)\left(r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)}{2!}\frac{o^2}{x^2} + \cdots\right) = ax^{r-1}o + \frac{a(r-1)}{2!}o^2x^{r-2} + \cdots$

Ainsi $v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2!}ox^{r-2} + \cdots$ On suppose que o diminue jusqu'à n'être rien, et on considère $v = y$. On obtient donc $y = ax^{1-r} = ax^{\frac{m+n}{n}-1} = ax^{\frac{m}{n}}$

On a donc $x = \frac{a}{r}x^r$ et $y = ax^{r-1}$ et donc que la dérivée de $z = z(x)$ est $y = y(x)$

- Pendant que Newton développait son calcul, Leibniz travaillait plus ou moins de manière similaire sur le calcul infinitésimales. Il travaillait également sur le fait de considérer un changement infinitésimale en 2 points qui définissent un courbe (ou une fonction)

2.2.2 Le calcul différentiel et intégrale de Leibniz

2.2.2.1 Le calcul Leibnizien

Dans son œuvre « *Acta Eruditorium* », Leibniz introduit la notion différentielle ainsi que sa notation dx. C'est le premier qui utiliser le signe $\int$ pour définir l'intégral, qui est utilisé universellement encore aujourd'hui.

Notation du calcul moderne :

- $\dot{f}$ inventé par Newton pour la différenciation
- $\int$ inventé par Leibniz pour l'intégration
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ inventé par Leibniz pour la différenciation
- f' inventé par Lagrange pour la différenciation

Leibniz considère une courbe comme un polygone de côtés infinis, et de longueur infinitésimal. Il y associe une succession d'abscisse et d'ordonnées. La différence entre deux valeurs successives de x (resp. x) est notée dx (resp. dy) (dx est une quantité fixe non nulle, et qui est infiniment petite comparée à x).Leibniz se place donc dans un univers constitué d'objets infiniment petits (dx), et chaque objet est la somme d'objets infinitésimaux (noté par $\int$). Cela revient à dire que $x = \int \mathrm{d}x$.

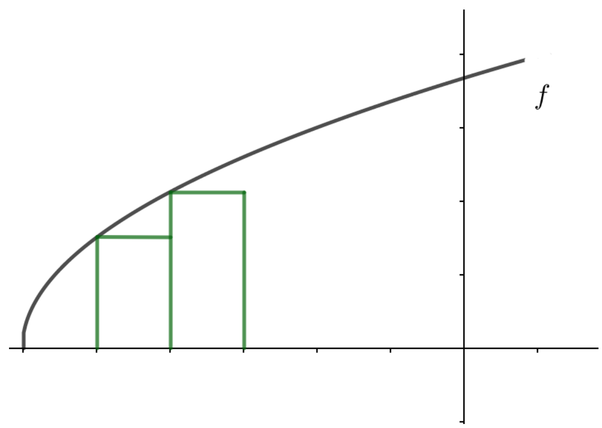

FIGURE 13 – Représentation d'une fonction qu'on découpe en rectangles

On découpe la fonction en des rectangles de plus en plus petit jusqu'à ce qu'ils aient une largeur infinitésimale dx. L'aire sous cette courbe est donc $A = \int f(x)\mathrm{d}x$. La notation dx désigne donc la largeur d'un rectangle très fin de longueur $y = f(x)$

2.2.2.2 Un calcul de Leibniz - quelques propriétés

Propriétés :

Leibniz montre notamment que :

1. $\mathrm{d}(xy) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$
2. $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}$

Démonstration :

1. Considérons $z_n = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$. On réalise l'opération suivante qui en notant $x = zy$

revient à la différentiel $d(xy) = z_{n+1} - z_n = x_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j\right) + y_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)$. On a donc $\mathrm{d}x = x_{n+1}, \mathrm{d}y = y_{n+1}$ et $x = \sum_{j=1}^{n} x_j, y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$

2. On pose $z = \frac{x}{y}$. D'après 1., si $x = zy$ alors $\mathrm{d}x = y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}y$. Donc

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x - \frac{x}{y}\mathrm{d}y}{y} = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}$$

2.2.2.3 Les limites du calcul Leibnizien

On considère la fonction carré $y = x^2$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 \\ &= 2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$ et donc en négligeant le $\mathrm{d}x$, on obtient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$

Il subit de nombreuses critiques, semblables à celles qu'on fit à Newton : pour quelles raisons négliger les infinitésimaux dans le résultat final ? Et s'ils sont égaux à 0, comment peut-on calculer leur rapport ?

2.2.2.4 Du calcul différentiel aux intégrales

Cette idée de décomposer l'aire sous la courbe comme rectangles infiniment petits va permettre l'émergence des premières intégrales à l'image de l'intégrale de Cauchy.

3 Intégrales

3.1 Intégrale de Cauchy

3.1.1 Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy est né à Paris le 21 août 1789. Plus tard, Cauchy devint ingénieur militaire et se rendit en 1810 à Cherbourg pour travailler à la flotte d'invasion de Napoléon. En 1813, il retourna à Paris et poussé par Lagrange et Laplace, il se consacra aux mathématiques. Il occupa divers postes à Paris, à la Faculté des Sciences, au Collège de France et à l'École Polytechnique. En 1816, il remporta le grand prix de l'Académie des sciences. Cauchy fut un pionnier dans l'étude de l'analyse et de la théorie des groupes de substitutions.Ses diverses contributions comprennent des recherches sur la convergence et la divergence des séries infinies, les équations différentielles, les déterminants, les probabilités et la physique mathématique.

Cauchy fut le premier à donner des conditions rigoureuses pour la convergence des séries infinies et il donna également une définition précise de l'intégrale. Son livre Cours d'analyse de 1821 était destiné aux étudiants de l'École Polytechnique et développait les théorèmes de base d'analyse aussi rigoureusement que possible. L'ouvrage en 4 volumes Exercices d'analyse et de physique mathématique publié entre 1840 et 1847 est extrêmement remarquable. Il écrivit 789 articles mathématiques mais n'était pas aimé par la plupart de ses collègues. Il faisait preuve d'un entêtement auto-satisfait et d'une bigoterie agressive.

Ardent royaliste, il passa quelque temps en Italie après avoir refusé de prêter serment d'allégeance. Il quitta Paris après la révolution de 1830 et après un court séjour en Suisse, il accepta l'offre du roi du Piémont qui lui proposait une chaire à Turin où il enseigna à partir de 1832. En 1833, Cauchy partit pour Prague afin de suivre Charles X et d'instruire son fils. Cauchy retourna à Paris en 1838 et reprit son poste à l'Académie, mais non son enseignement car il refusait de prêter serment d'allégeance au gouvernement. Quand Louis Philippe fut destitué en 1848, Cauchy regagna sa chaire à la Sorbonne. Il conserva ce poste jusqu'à sa mort, le 23 mai 1857.

3.1.2 Introduction aux sommes de Cauchy

Définition : Subdivision d'un segment

On dit que $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision du segment $[a, b]$ si on a :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

On appelle :

- points de la subdivision σ : x_i
- support de la subdivision : la partie : $\text{Supp}(\sigma) = \{x_i, i \in [\![0, n]\!]\}$
- pas de la subdivision : $\delta(\sigma) = \max_{i \in [\![0, n-1]\!]} (x_{i+1} - x_i)$

Exemple(s) :

$S_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, S_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}, S_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}, S_4 = \{0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\}$ sont des subdivisions du segment $[0, 1]$. Ils ont comme pas respectifs $\delta(S_1) = \frac{1}{2}$, $\delta(S_2) = \frac{1}{4}$, $\delta(S_3) = \frac{1}{3}$ et $\delta(S_4) = \frac{2}{5}$

Remarque : Soient $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ et $\sigma' = (y_0, \dots, y_m)$ deux subdivisions. On dit que σ' est plus fine que σ si tout point de σ est un point de σ' autrement dit :

$$\text{Supp}(\sigma) \subseteq \text{Supp}(\sigma')$$

Proposition :

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. Il existe une subdivision σ'' qui est plus fine que σ et que σ'

Démonstration :

On prend σ'' tel que $\text{Supp}(\sigma'') = \text{Supp}(\sigma) \cup \text{Supp}(\sigma')$ et on a bien que σ'' est plus fine que nos deux subdivisions initiales

■

Défintion :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et soit une partition P de $[a, b]$
$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$. On appelle somme de Cauchy

$$S_c(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \text{méthode des rectangles à gauche}$$

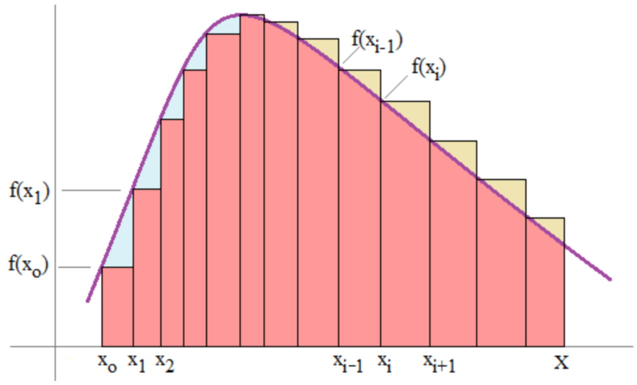

FIGURE 14 – Représentation d'une somme de Cauchy

Théorème - Défintion :
Les sommes de Cauchy d'une fonction continue convergent vers une réel, appelé intégrale définie.

Démonstration :

Pour cela on va montrer que les sommes de Cauchy est une suite de cauchy. Observons tout d'abord que si on prend une subdivision (appelé partition par Cauchy) P d'un intervalle $[a, b]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existera $\theta \in [0, 1]$ tel que la somme de Cauchy $S_c(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = (x_n - x_0)f(x_0 + \theta(x_n - x_0))$

Considérons maintenant subdivision plus fine $Q = \{x_{0,1} = x_0 = a, x_{0,2}, \ldots, x_{0,k_0}, x_{1,1} = x_1, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1}, x_{2,1} = x_2, \ldots, x_{n,1} = x_n = b\}$ de P (Cauchy appelle cela un raffinement). Cette subdivision sous-divise au moins un des sous-intervalles de P. Alors pour chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, il existe $\theta_i \in [0, 1]$ tel que

$$(x_{i,2} - x_{i,1})f(x_{i,1}) + \cdots + (x_{i+1,1} - x_{i,k_i})f(x_{i,k_i}) = (x_{i+1} - x_i)f(x_i + \theta_i(x_{i+1} - x_i))$$

On obtient donc la somme de Cauchy associé à la subdivision Q suivante :

$$S_c(f, Q) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i + \theta_i(x_{i+1} - x_i))$$

avec $\theta_i \in [0, 1]$.

Or par continuité de la fonction f sur $[x_i, x_{i+1}]$, on peut affirmer qu'il existe ε_i tel que

$$f(x_i + \theta_i(x_{i+1} - x_i)) = f(x_i) \pm \varepsilon_i$$

On obtient donc que

$$\begin{aligned}
S_c(f,Q) &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i+\theta_i(x_{i+1}-x_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i)\pm\varepsilon_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_i)+\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(\pm\varepsilon_i)
\end{aligned}$$

Or f est continue sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ donc uniformément continue sur chaque segment ce qui implique que ε_i ne dépend pas du segment. Notons donc le simplement ε. On peut donc finalement écrire que :

$$S_c(f,Q) = S_c(f,P)+\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(\pm\varepsilon) = S_c(f,P)\pm\varepsilon(x_n-x_0)$$

Ainsi $|S_c(f,Q)-S_c(f,P)| < (x_n-x_0)\varepsilon$ et donc $\{S_c(f,P) : \delta(P)\to 0\}$ forme une suite de Cauchy sur $(\mathbb{R}, |.|)$ qui est complet et donc converge vers un réel.

■

Ainsi L'intégrale définie d'une fonction continue est donc la limite des sommes de Cauchy. La notation de cette intégrale sera celle émise par Newton : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3.1.3 Généralisation

Cauchy effectue une généralisation de sa Somme de Cauchy en permettant d'évaluer f à toute valeur des sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. Il ne se sert de cette généralisation que pour retrouver les sommes de gauche (méthode des rectangles à gauche à et les sommes de droite (méthode des rectangles à droite).

En effet, en permutant les éléments de la subdivision de telle sorte que : $P = \{x_n < \cdots < x_{n-1}\}$ on obtient pour la somme de Cauchy à droite :

$$S_c(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_i-x_{i+1}) = -\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

On obtient donc la valeur des sommes de Cauchy à gauche multiplié par un signe $-$. On a donc en passant à la limite que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Afin d'effectuer certains calculs d'intégrales, on emploie fréquemment les formules de sommes de gauche et de somme de droite. Pour plus de simplicité, on peut prendre les valeurs de la subdivision comme suivant une progression arithmétique ou encore géométrique. Étudions ces deux cas :

- **Cas d'une progression arithmétique :** $P = \{a = x_0, x_0+i, x_0+2i, \ldots, x_0+ni = b\}$. On a donc

$i = \frac{b-a}{n}$. Les sommes de Cauchy à gauche et à droite deviennent respectivement :

$$S_{cg}(f,P) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_{cd}(f,P) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

- **Cas d'une progression géométrique :** $P = \{a = x_0, x_0(1+\alpha), x_0(1+\alpha)^2, \ldots, x_0(1+\alpha)^n = b\}$ avec donc pour raison $1+\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$. Les sommes de Cauchy à gauche et à droite deviennent respectivement :

$$S_{cg}(f,P) = a\alpha\sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k f\left(a(1+\alpha)^k\right) \text{ et } S_{cd}(f,P) = a\alpha\sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k f\left(a(1+\alpha)^{k+1}\right)$$

Effectuons un exemple appliquant une des deux progressions :

Exemple(s) :

Calcul de l'intégrale de la fonction : $f : x \mapsto x$ sur $[a,b]$ à l'aide d'une progression arithmétique de raison $(1+\alpha)$. On a donc :

$$\begin{aligned} S_c(f,P) &= a\alpha\sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k f\left(a(1+\alpha)^k\right) \\ &= a^2\alpha\sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^{2k} \\ &= a^2\alpha\frac{(1+\alpha)^{2n}-1}{(1+\alpha)^2-1} \quad \text{série géométrique de raison } (1+\alpha)^2 \\ &= a^2\frac{(1+\alpha)^{2n}-1}{\alpha+2} \\ &= \frac{b^2-a^2}{\alpha+2} \end{aligned}$$

Or $\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$S \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(b^2-a^2) = \int_a bx\mathrm{d}x$$

Cauchy calcul ainsi la valeur exacte de l'intégrale de certaines fonctions comme l'identité, les fonctions puissances, ou encore la fonction exponentielle. Il en profite pour démontrer aussi certaines propriétés de l'intégrale :

3.1.4 Propriétés algébriques de l'intégrale et interprétation géométrique

Propriétés :

- $\int_a^b f(x+d)\mathrm{d}x = \int_{a+d}^{b+d} f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + d\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Ensuite Cauchy nous propose une interprétation géométrique de son intégrale définie. En effet, il écrit que l'aire A sous la courbe d'une fonction sur le segment $[a, b]$ sera équivalente à un rectangle construit sur une ordonnée moyenne représentée par l'expression $f(a + \theta(b - a))$ où $\theta \in [0, 1]$ de telle sorte que $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)f(a + \theta(b - a))$

Exemple(s) :

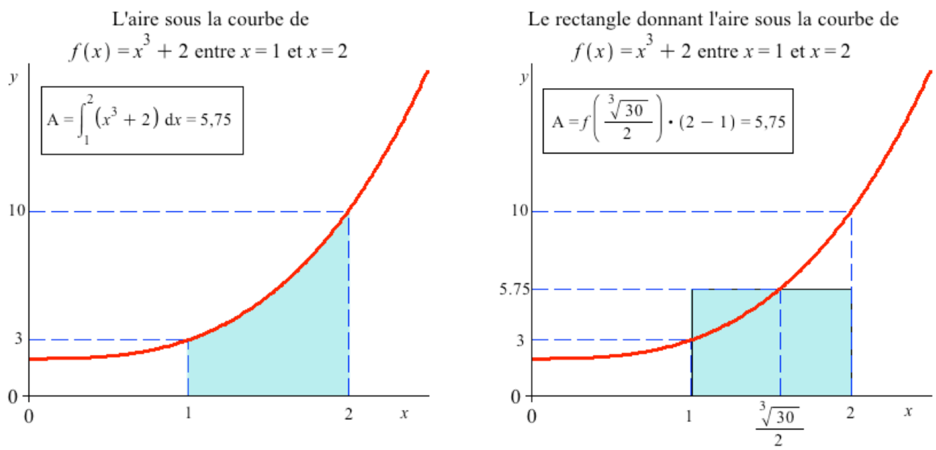

FIGURE 15 – Représentation graphique de $f : x \mapsto x^3 + 2$ et de son aire sous la courbe entre $x = 1$ et $x = 2$

Il poursuit en appliquant le même argument à chaque des sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de l'intervalle $[a, b]$ et il obtient donc une somme de rectangles de bases $(x_{i+1} - x_i)$ et de hauteur $f(x_i + \theta_i(x_{i+1} - x_i))$. Il obtient donc finalement que $A = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)f(x_i + \theta_i(x_{i+1} - x_i))$ et donc en passant à la limite que $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3.1.5 Intégrales à bornes infinies et intégrale d'une fonction continue par morceaux

On remarquera que depuis le début, on considère les bornes de nos intervalles comme des quantités finies et f qui demeure finie et continue entre ces mêmes limites. Mais que se passe-t-il lorsque a et b deviennent infinies, ou lorsque f ne de meure pas continue sur $[a, b]$? On ne peut plus affirmer que S_c a une limite finie. Que ce soit pur des bornes infinies ou pour une fonction continue par morceaux, nous allons régler le problème avec la même méthode. Il faut troquer l'intervalle d'intégration afin d'obtenir une fonction continue sur un intervalle fini. Puis on passe à la limite sur chaque intervalle. Si la limite existe sur chaque intervalle, alors la fonction est intégrable.

3.1.6 Le théorème fondamental du calcul

Définition :

- **intégrales définies :** se calculant comme la limite des sommes de Cauchy d'une fonction f continue et représente l'aire sous la courbe de cette fonction
- **intégrales indéfiinies :** l'opération inverse de la dérivée et permettant de trouver une primitive de la fonction f

Ce théorème vise à lier l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie. Nous allons montrer deux choses :

1. l'intégrale définie peut permettre de trouver une primitive
2. l'intégrale indéfinie peut être utilisée pour calculer l'aire sous la courbe

Montrons le point 1. : Soit $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. si f est continue alors F est continue et dérivable et $F' = f$

- Pour cela, on a avec le théorème des accroissements finis version intégrale que :
$$F(x) = (x-a)f(a+\theta(x-a)) \;\text{ et }\; F(a) = 0$$
F 'est une intégrale définie (on l'a vue dans 3.1.3
- On a aussi que :
$$F(x+\alpha) - F(x) = \int_a^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+\alpha} f(t)\mathrm{d}t = \alpha f(x+\theta\alpha)$$
Comme f est continue et finie alors $\alpha f(x+\alpha\theta) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc $F(x+\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$
- De même on a :
$$F(x-\alpha) - F(x) = \int_a^{x-\alpha} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x-\alpha} f(t)\mathrm{d}t = -\alpha f(x-\theta\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$$
On obtient donc la continuité de F
- On utilise ce qui a été montré :
$$\frac{F(x+\alpha) - F(x)}{\alpha} = f(x+\theta\alpha)$$
Or comme f est continue on, obtient que $F'(x) = f(x)$ lorsque $\alpha \longrightarrow 0$. Ainsi, l'intégrale définie permet bien de trouver une primitive car F est une primitive de f.

Montrons maintenant le point 2. :
Cauchy se pose 2 sous-problèmes :

1. trouver w tel que $w' = 0$
2. trouver la valeur générale de y tel que $\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$

Pour ce sous-problème numéro 1. , les solutions sont les fonctions constantes par morceaux. Pour la solution du 2., si on prend $y = F(x)$ une primitive de $f(x)$, ça marche. De plus si on a $\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ i.e. $y' = F'(x) = f(x)$ alors $y = F(x) + w(x)$ avec $w'(x) = 0$ est la solution générale. F peut être trouvée par l'intégrale indéfinie. Mais, si f est continue, alors on a vue que $J(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, calculée comme la limite des sommes de Cauchy est aussi une primitive. Ainsi :

$$y = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + w(x) \;\text{ avec } w'(x) = 0$$

Si $F(x)$ est une primitive non triviale d'une fonction continue $f(x)$, alors cette primitive donne l'intégrale indéfinie. De tous cela résulte les équations suivantes :

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + w(x) \quad \text{(intégrale indéfinie)} \tag{1}$$

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \tag{2}$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Donc avec l'intégrale indéfinie, on trouve la primitive de f et avec cette primitive, comme le montre les deux dernières équations, on calcule l'aire sous la courbe

Conclusion : Les apports de Cauchy

Finalement, Cauchy introduisit l'intégrale définit comme un moyen de calculer l'aire sous une courbe et expliqua comment utiliser l'intégrale définie pour trouver une primitive. Il démontra également que toute fonction continue possède une primitive

Il introduisit également les notions de limite et de suite de Cauchy qui nous sert pour les sommes de Cauchy. Il généralisé son intégrale définie aux fonctions continues par morceaux. Par la suite, Cauchy s'intéressera à l'étude des fonctions discontinues ayant une infinité de discontinuités. Cauchy ouvrit donc une nouvelle voie de recherche sur l'intégration, jusqu'aux travaux de Riemann en 1854.

3.2 Intégrale de Riemann

3.2.1 Le mathématicien : Bernhard Riemann

Bernhard Riemann, grand mathématicien allemand , né le 17 septembre 1826 à Hanovre et mort le 20 juillet 1866 à Selasca. Riemann est un mathématicien célèbre car en seulement 40 ans il a réussi à obtenir des résultats majeurs. Il doit notamment sa célébrité à ses travaux sur l'intégrale de Riemann avec l'intégrale attachée aux sommes et à l'idée d'approcher l'aire sous une courbe par des rectangles. Riemann a établi une conjecture sur les zéros de la fonction zêta qui n'a toujours pas été démontrée à ce jour. Il a obtenu des résultats importants sur les équations différentielles. Il a également contribué au fondement de la topologie et de la géométrie différentielle.

3.2.2 L'intégrale de Riemann

3.2.2.1 fonctions en escalier

Définition : Fonctions en escalier

On appelle fonction en escalier sur $[a, b]$ toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a, b]$ avec f constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. La fonction f s'écrit alors (en notant c_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$) :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbb{1}_{]x_i,x_{i+1}[}(x) + \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathbb{1}_{\{x_i\}}(x)$$

On notera $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui est une sous-algèbre-unitaire de $\mathbb{R}^{[a,b]}$

3.2.2.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition - Proposition : Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. On considère $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et on note pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, c_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$:

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$$

Cette quantité ne dépend pas de la subdivision choisie parmi celles adaptées à f

Démonstration :

Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ et σ' deux subdivisions adaptées à f. On note I_σ et $I_{\sigma'}$ les intégrales associées. Supposons par exemple que σ' est plus fine que σ. On peut écrire σ' sous la forme :

$$\sigma' : a = x_{0,0} < x_{0,1} < \cdots x_{0,k_0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,k_1} < \cdots < x_{n-1,1} < \cdots < x_{n-1,k_{n-1}} = x_n = b$$

où $\forall i \in [\![1, n-1]\!], x_{i,k_i} = x_{i+1}$. Maintenant puisque f prend la valeur c_i sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ alors f prend aussi la valeur c_i sur les intervalles $]x_{i-1,k_{i-1}}, x_{i,1}[,]x_{i,1}, x_{i,2}[, \cdots,]x_{i,k_i-1}, x_{i,k_i}[$. On a donc en posant $x_{i,0} = x_{i-1,k_{i-1}}$:

$$I_{\sigma'} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{k_i} c_i(x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \sum_{j=1}^{k_i} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i) = I_\sigma$$

■

3.2.2.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions en escalier

Propriétés :

1. $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{[a,b]} f \end{array} \right.$ est une forme linéaire.
2. (Relation de Chasles) : Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in [a,b]$:
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$
3. Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $u \in \mathbb{R}$. Définissons $\psi : s \in [a+u, b+u] \mapsto f(s-u) \in \mathbb{R}$, on a :
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+u,b+u]} \psi$$
4. Si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est à valeurs positive alors sont intégrale est positive :
$$f \geqslant 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geqslant 0$$
5. Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. On a :
$$f \leqslant g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$$

6. Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

3.2.3 Intégrale des fonctions continues et continues par morceaux

3.2.3.1 Fonctions continues par morceaux

Défintion - Proposition :

On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ telle que, sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, f puisse être prolongée en une application $\widetilde{f_i}$ continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.
Une telle subdivision est dite adaptée à f

On note $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ qui est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{[a,b]}$

Proposition :

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée et possède donc une norme infinie $\|f\|_\infty$

Démonstration :

Soit $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à f. On note $\widetilde{f_i} : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{K}$ l'unique prolongement par continuité de $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$. Comme $\widetilde{f_i}$ est continue sur un segment, alors d'après le théorème des bornes atteintes (TBA), $\widetilde{f_i}$ est bornée et atteint ses bornes que nous noterons $M_i = \sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} \left|\widetilde{f_i}\right| = \left\|\widetilde{f_i}\right\|_\infty$. Alors $|f|$ est majorée par $\max(M_0,\dots,M_{n-1},|f(x_0)|,\dots,|f(x_n)|)$

■

Théorème : Approximation uniforme d'une fonction cpmx

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

Démonstration :

Soit $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$. Il nous suffit de montrer que $\forall\varepsilon > 0, \exists\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}), \|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$

- **Cas où $f \in C^0([a,b],\mathbb{K})$:** Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$, c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x,y \in [a,b], |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Or $\mathbb{R}$ est archimédien donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{b-a}{n} \leqslant \eta$ et considérons la subdivisions à pas constant de $[a,b]$ en posant :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

et enfin définissons la fonction φ sur $[a,b]$ par :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \varphi(x) = f(x_i) \text{ et } \varphi(b) = f(b)$$

Alors par constructions $\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$, il nous reste à vérifier que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Or pour tout $x \in [a, b[$, il existe un certain $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}[$, donc

$$|x - x_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i| \leqslant \eta$$

et donc par continuité uniforme :

$$|f(x) - f(x_i)| = |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$$

et ceux pour tout x. Donc

$$\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

- **Cas général :** On considère une subdivision adaptée à f, disons $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$. f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}. D'après le point précédent, alors $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ il existe une fonction en escalier $\varphi_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{K}$ pour laquelle

$$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[, |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$$

Notons maintenant la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in]x_i, x_i + 1[, \varphi(x) = \varphi_i(x)$$

et

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \varphi(x_i) = f(x_i)$$

Alors $\varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{K})$ et $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$

■

3.2.3.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Proposition : Intégrale des fonctions cpmx

Soit $f \in C^0_{pm}([a,b], \mathbb{K})$. Pour toute suite de fonctions en escalier $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f, la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Cette limite unique est appelée *l'intégrale de* f sur $[a,b]$ et notée $\int_{[a,b]} f$.

Démonstration :

- Soient $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ dont f est la limite uniforme. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, d'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier déjà démontrées :

$$\left|\int_{[a,b} \varphi_p - \int_{[a,b]} \psi_p\right| = \left|\int_{[a,b]} (\varphi_p - \psi_p)\right| \leqslant (b-a) \|\varphi_p - \psi_p\|_\infty \leqslant (b-a) \left(\|f - \varphi_p\|_\infty + \|f - \psi_p\|_\infty\right) \ (\star)$$

Il en découle par encadrement que si jamais les suites $\left(\int_{[a,b]} \varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a,b]} \psi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, elles ont la même limite, indépendante de $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

- Il reste à montrer que la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Or $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f - \varphi_p\|_\infty = 0$ donc $\|f - \varphi_p\|_\infty \leqslant 1$ à partir d'un certain rang. On obtient donc que

$$\|\varphi_p\|_\infty = \|\varphi_p - f + f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f - \varphi_p\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + 1$$

et donc :

$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_p\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi_p| \leqslant \int_{[a,b]} (\|f\|_\infty + 1) = (b-a)(\|f\|_\infty + 1)$$

La suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dont d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass alors elle admet une sous-suite convergente de limite ℓ que nous noterons $\left(\int_{[a,b]} \varphi_{\theta(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$. Alors d'après $(\star)$ appliqué à φ_p et $\varphi_{\theta(p)}$:

$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_p - \int_{[a,b]} \varphi_{\theta(p)}\right| \leqslant (b-a) \left(\|f - \varphi_p\|_\infty + \left\|f - \varphi_{\theta(p)}\right\|_\infty\right)$$

Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_p = \ell$ par encadrement

$\blacksquare$

On notera que nous avons les mêmes propriétés qui ont été énoncées plutôt en passant à la limite depuis une suite de fonction en escalier dont notre fonction est la limite uniforme

3.2.3.3 Sommes de Riemann - Fonctions Riemann intégrables

Définition : (subdivision pointée)

Soient $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\tau = (y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ vérifiant :

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], y_i \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Le couple (σ, τ) s'appelle subdivision pointée de $[a, b]$

Définition : Somme de Riemann

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, et (σ, τ) une subdivision pointée de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann de f associée à (σ, τ) le réel :

$$S(f, \sigma, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(y_i)$$

Remarque : Une somme de Riemann est donc manifestement l'intégrale d'une fonction en escalier pour laquelle la subdivision σ est adaptée, et qui prend la valeur $f(y_i)$ sur $]x_i, x_{i+1}[$

Définition : Fonctions Riemann-Intégrable

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est intégrable sur $[a, b]$ (au sens de Riemann) s'il existe un réel A, représentant l'aire algébrique situé sous le graphe de f, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute subdivision pointée (σ, τ) de $[a, b]$, δ-fine, on ait :

$$|S(f, \sigma, \tau) - A| \leqslant \varepsilon$$

- Si f est intégrable sur $[a, b]$, le nombrée réel A du point précédent est appelé intégrale (au sens de Riemann) de f sur $[a, b]$ et noté $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. C'est donc la limite des sommes de Riemann, lorsque la subdivision σ devient de plus en plus fine.

Définition équivalente : Fonctions Riemann-Intégrable

On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann s'il existe deux suites de fonctions en escalier (φ_n) et (ψ_n) telles que :

$$\forall t, |f(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \psi_n(t) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

Théorème :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision pointée (σ, τ) de $[a, b]$ telle que $\delta(\sigma) \leqslant \eta$ on a :

$$\left| \int_{[a,b]} f - S(f, \sigma, \tau) \right| \leqslant \varepsilon$$

(C'est à dire que toute fonction continue par morceaux est Riemann-Intégrable)

Démonstration :

- **Cas où f est continue :** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Fixons $\varepsilon > 0$, le théorème de Heine nous fournit l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$ tel que $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

  Considérons maintenant la somme de Riemann :

$$S(f, \sigma, \tau) = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(y_i)$$

  où $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a, b]$ et $\tau = (y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de points vérifiant $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$. On rappelle que $S(f, \sigma, \tau)$ est exactement la valeur de l'intégrale d'une fonction en escalier φ qui vaut $f(y_i)$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ (peu importe la valeur de φ aux points x_i de la subdivision.

D'après ce qui précède (qui découlait directement du théorème de Heine), pourvu que la subdivision soit inférieur à η, la fonction en escalier φ approche f à ε près : $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On en déduit, par caractère lipschitzien de l'intégrale :

$$\left|\int_{[a,b]} f - S(f,\sigma,\tau)\right| \leqslant (b-a) \times \varepsilon$$

- **Cas où f est continue par morceaux :** Rien ne change sur les intervalles de la subdivision. Seuls aux points de la subdivision (au x_i) une erreur est peut être commise. Or cette erreur peut être majorée par $(n+1) \times \|f\|_\infty \times \eta$. Donc en faisant tendre le pas de la subdivision vers 0 et donc $\eta \to 0$ et on a bien ce qu'on souhaite

■

Montrons finalement un résultat important qui finalement classe l'ensemble des fonctions qui sont intégrable au sens de Riemann.

Proposition :

Toute fonction Riemann-Intégrable sur $[a, b]$ est bornée

Démonstration :

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors il existe A, δ tels qu'en prenant $\varepsilon = 1$, $|S(f, \sigma, \tau) - A| \leqslant 1$ pour toute subdivision σ δ-fine. En remplaçant éventuellement δ par une valeur plus petite, on peut supposer que $\delta = \frac{b-a}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}*$
Soit $(\sigma, \tau) = (\{[x_i, x_{i+1}]\}, \{y_i\})_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ la subdivision pointée définie par une progression arithmétique $x_i = a + i\delta$ et $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$. On a donc $D = (\sigma, \tau)$ qui est δ-fine. Soit c un point quelconque de $[a, b]$. Il existe une indice i tel que $c \in [x_i, x_{i+1}]$. Notons D' la subdivision pointée obtenue à partir de D en remplaçant y_i par c et en ne changeant rien d'autre. On a toujours D' qui est δ-fIne.

$$\left|S(D,f) - S(D',f)\right| \leqslant |S(D,f) - A| + \left|S(D,f') - A\right| \leqslant 2$$

Or $S(D', f) - S(D, f) = (x_{i+1} - x_i)(f(c) - f(y_i))$, donc on en déduit :

$$|f(c) - f(y_i)| \leqslant \frac{2}{x_{i+1} - x_i} = \frac{2}{\delta}$$

On obtient finalement que pour tout $c \in [a, b], |f(c)| \leqslant M + \frac{2}{\delta}$ où $M = \max\{|f(a + i\delta)|\,; 0 \leqslant i \leqslant n\}$

■

3.3 Intégrale de Lebesgue

3.3.1 Le mathématicien : Henri-Léon Lebesgue

Henri-Léon Lebesgue, grand mathématicien français né en 1875 et mort en 1941, est connu principalement pour sa théorie de la mesure et d'intégration. Cette théorie prolonge les premiers travaux de l'un de ses professeurs : Émile Borel (qui deviendra plus tard son ami). Il a notamment mis au point en 1901 une théorie des fonctions mesurables, en se fondant notamment sur le résultat de Borel concernant les tribus boréliennes. Lebesgue a en quelques sortes révolutionné et généralisé le calcul intégral. Sa théorie de l'intégration permet de rechercher et de prouver par exemple l'existence de primitives pour des fonctions « irrégulières », qui feront l'objet des parties suivantes, dans lesquelles nous allons étudier le passage de l'intégrale de Riemann à celle de Lebesgue.

3.3.2 Nécessité de l'intégrale de Lebesgue

3.3.2.1 Limite de l'intégrale de Riemann

On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dites intégrable au sens de Riemann, si les sommes de Riemann associées :

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(y_i)(x_{i+1} - x_i) \text{ où } \begin{cases} a = x_0 \leqslant \cdots \leqslant x_N = b \\ y_i \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

convergent lorsque $R = \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant N-1} |x_{i+1} - x_i|$ tend vers 0. Dans ce cas, l'intégrale de Riemann sur $[a, b]$ de f est la limite des sommes de Riemann.

Jusqu'à la fin du 19 ème siècle, de nombreux mathématiciens savent que l'intégrale de Riemann possède de nombreuses limites, notamment avec un comportement qui ne correspond pas avec tous les processus de convergence dans certains cas ! Ces limites invitent et obligent de nouveaux mathématiciens à réaliser de nouvelles constructions, d'autres intégrales. Jordan, Young, Borel (comme nous l'avons évoqué plutôt) et Lebesgue font notamment parti de ces importants mathématiciens.

Citons par exemple un fonction qui n'est pas intégrable au sens de Riemann :

Exemple(s) :

La fonction suivante appelée « fonction de Dirichlet » :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \end{array} \right.$$

n'est pas intégrable au sens de Riemann. En effet si on considère dans un premier temps la subdivision pointée avec l'ensemble des y_i rationnels (respectivement irrationnels) on en déduirait que l'intégrale vaut à la fois 1 (resp 0)

L'intégrale de Riemann limite donc le type de fonction que l'on peut intégrer, ainsi que le domaine dans lequel on peut les étudier :

- Les domaines d'intégration sont restreints : ce sont seulement des intervalles, qui sont en principe fermés et bornés.
- Les théorèmes de passage à la limite sont également insuffisants.

Ces nombreux inconvénients vont disparaître lors de l'apparition de l'intégrale de Lebesgue en 1910, avec une importante théorie (à laquelle contribuera également Borel...)

3.3.2.2 L'idée de Lebesgue en comparaison à celle de Riemann

La principale idée de Lebesgue est de travailler avec des partitions du domaine d'arriver des fonction au lieu de travailler avec les domaines de définition. Rappelons donc ce qu'est une partition :

Définition : Partition

Une partition, d'un ensemble X est un ensemble de parties non-vides de X deux à deux disjointes dont l'union vaut X.

Un ensemble P de parties de X est une partition de X lorsque :

- $\forall Y \in P, Y \neq \varnothing$
- $\bigcup_{Y \in P} Y = X$
- $\forall Y_1, Y_2 \in P, Y_1 \neq Y_2, Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$

Nous allons donc expliquer l'idée de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, en la comparant à celle de Riemann : On considère pour cela une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ et on suppose que $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$

- L'intégrale de Riemann consistait à prendre des partitions de l'intervalle de départ (domaine de définition) $[a, b]$. $P = \{a = x_0, \ldots, x_N = b\}$ et faire la limite :

$$\lim_{R \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} f(\varepsilon_i) \times \text{ longueur}([x_i, x_i + 1]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Lebesgue lui considère une partition de l'intervalle d'arrivée $[\alpha, \beta]$ et $Q = \{\alpha = y_0, \ldots, y_N = \beta\}$. (Il encadre donc f à partir des valeurs de $y = f(x)$ et non pas des valeurs de x comme Riemann). Ce qui nous donne en posant $R' = \sup_{0 \leqslant i \leqslant N-1} |y_{i+1} - y_i|$ qu'il fait la limite :

$$\lim_{R' \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} (y_{i+1} - y_i) \times \text{ longueur}(f^{-1}([y_i, y_{i+1}]))$$

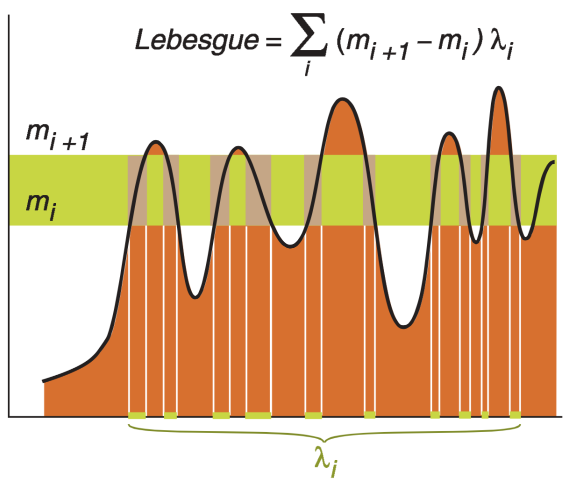

Figure 16 – Représentation idée de l'intégrale de Lebesgue

Si on note $E_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}])$, on remarque que E_i est une union disjointe d'intervalles, et donc le concept de longueur de E_i est clair : c'est la somme des longueurs de chacun de ces intervalles. Or dans le cas ci-dessus, notre fonction f était relativement simple. Or si l'on considère une fonction plus étrange et compliqué, de nombreuses questions nous viennent à l'esprit :

- Que signifie longueur(E_i) ?
- Quel ensemble de $\mathbb{R}$ peut-on mesurer ?

On commence alors à apercevoir la difficulté de la théorie de Lebesgue. On peut tout de même se questionner sur l'intérêt d'introduire une telle théorie. Pourquoi renverser la partition en passant d'une partition de l'ensemble de départ à une partition de l'ensemble d'arrivée ?

Un des intérêts cruciaux de l'intégrale de Lebesgue est également de définir le bon comportement par passage à la limite, c'est-à-dire, étant donné une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions intégrables qui admet une limite. Peut-on permuter limites et intégrale de Lebesgue ?

- Les 2 membres de l'égalité ont-ils un sens ?
- Si on note f la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est-on capable de donner un sens à l'intégrale de f ?

Toutes ces questions font donc l'intérêt à introduire une nouvelle intégrale.

3.3.3 L'intégrale de Lebesgue

3.3.3.1 Théorie de la mesure

Pour répondre aux questions que l'on s'est posé dans la partie précédente, et aborder le problème de la mesurabilité. On admet avec Lebesgue que chaque chose que l'on veut appelée mesurable sur sur $\mathbb{R}$ de mesure m devra vérifier :

1. $m \in [0, +\infty[$
2. Un intervalle est mesurable $m([a,b]) = b - a$
3. On note $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite d'ensemble. Alors si $\forall k, E_k$ est un ensemble mesurable et disjoint 2 à 2, Alors $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ doit être mesurable et :
$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$
4. Si E est mesurable alors E^c est aussi mesurable
5. Si E est mesurable, le translaté $x + E$ est aussi mesurable et $m(E) = m(x + E)$

Le plus simple serait donc que tous les sous-ensemble de $\mathbb{R}$ soient mesurables mais une telle application $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty[$ n'existe pas, d'où la difficulté de cette nouvelle intégrale. Commençons donc par rappeler la définition d'une tribu.

Définition : Tribu

Une tribu sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{A}$ non vide de parties de X contenant le vide et étant stable par passage au complémentaire et par union dénombrable càd :

- $\varnothing \in \mathcal{A}$
- $\forall B \in \mathcal{A}, B^c \in \mathcal{A}$
- si $\forall n \geqslant 1, B_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

Définition : Espace mesurable

Un ensemble muni d'une tribu $(X, \mathcal{A})$ est appelé un espace mesurable

On rappelle la notion de Tribu engendrée :

Définition - Proposition : Tribu engendrée

Soit $\mathcal{M}$ une famille de sous-ensemble de X. On note $\sigma(\mathcal{M})$ la plus petite tribu de X (pour l'inclusion) contenant $\mathcal{M}$. On l'appelle la tribu engendré par $\mathcal{M}$.

La tribu engendrée par une famille $\mathcal{M}$ est donnée par :

$$\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \\ \mathcal{A} \text{ tribu}}} \mathcal{A}$$

Exemple(s) :

Rappelons l'exemple fondamental : La **Tribu borélienne sur** $\mathbb{R}^{(d)}$ notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{(d)})$

C'est la tribu engendrée par la famille de tous les ouverts de $\mathbb{R}^{(d)}$. En particulier elle contient tous les ouverts, les fermés comme complémentaire des ouverts, les produits d'intervalles dans $\mathbb{R}^{(d)}$ etc...

Définition : - Mesure

Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une mesure (σ-additive) est une application $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\mu(\varnothing) = 0$
- Pour toute famille d'ensemble $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints :

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Le triplet $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé dans ce cas un espace mesuré.

Théorème : Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée classiquement λ telle que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b,\ \lambda(]a, b[) = b - a$$

Remarque : La mesure de Lebesgue est diffuse : $\lambda(\{x\}) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
En effet : $\{x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$ et donc par monotonie décroissante ($n = 1$ de mesure finie) alors :

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \to +\infty} \lambda\left(\left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Conséquences :

- $\lambda(]a, b[) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a$ (si $a \leqslant b$)
- Les ensembles dénombrables sont de mesures nulles.

Théorème : Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ notée classiquement λ telle que pour tout pavé $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$, on ait :

$$\lambda(P) = \prod_{i=1} d(b_i - a_i)$$

Quelques propriétés de la mesure de Lebesgue :

- λ est invariante par translation.
- λ est régulière, c'est-à-dire que $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable, on a :
  - $\lambda(E) = \sup\{\lambda(K), K \text{ compact }, K \subseteq E\}$: c'est la régularité extérieur.
  - $\lambda(E) = \inf\{\lambda(V), V \text{ ouvert }, V \supseteq E\}$: c'est la régularité intérieur.

3.3.3.2 Intégrale de Lebesgue

Définition : Fonctions mesurables

Soit $(X, \mathcal{F}_1)$ et $(Y, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables. On dit que $f : X \to Y$ est mesurable (pour les tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$) si $forall B \in \mathcal{F}_2, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$

Définition : Fonctions étagées

Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On dit qu'une application mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est étagée si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ où } A_i = f^{-1}(\alpha_i)$$

Proposition :

Soit $f : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées qui converge ponctuellement vers f

Nous allons maintenant pouvoir définir l'intégrale de Lebesgue à partir des fonctions étagées puis passer aux fonctions mesurables positives et enfin à l'ensemble des fonctions mesurables

Définition : Intégrale de Lebesgue

- Soit $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée, $X = \cup A_i$. L'intégrale de Lebesgue de f est définie comme suit :

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

- Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, on définit son intégrale par :

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_X g \mathrm{d}\mu : g \text{ étagée }, 0 \leqslant g \leqslant f \right\}$$

On dit que f est intégrable si son intégrale est finie

- Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. On dit que f est intégrable si $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$ sont intégrables et dans ce cas on définit son intégrale par :

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \mathrm{d}\mu$$

Conclusion

L'intégrale de Lebesgue fête ses 100 ans. Cette intégrale qui s'est démocratisée durant le dernier siècle relève d'un travail de recherche très important depuis les Grecs. Il a donné lieu à la la recherche de calculs d'aires par la méthode d'exhaustion et à son approfondissement par les mathématiciens Arabes tel qu'Ibn-Al-Haytham. Suite à cela, des mathématiciens plus contemporains s'intéressent à l'infinitésimal petit en introduisant un nouveau calcul et de nouvelles notations tels que Newton ou Leibniz. C'est des lors qu'apparait le lien entre la notion d'intégrale, le calcul d'aire et les primitives d'une fonction. Ce travail laborieux donne lieu à une évolution progressive de l'intégrale et des fonctions qui peuvent être intégrées passant par Cauchy puis Riemann jusqu'à l'intégrale de Lebesgue.

Références

[1] Archimède - *De La mesure du Cercle*

[2] Groupe M :A.T.H - *De la méthode par Exhaustion.* (INSRM)

[3] Ibn-Al-Haytham - *Sur la quadrature du cercle.*

[4] http://www.nocierreslosojos.com/calculo-historia-leibniz-newton/

[5] https://www.ugr.es/~mmartins/material/Historia_parte_2.pdf

[6] Robert Ryan - *L'intégrale de Lebesgue à 100 ans*

[7] Cauchy - *Cours d'Analyse* - https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62404287/f94.item

[8] Intégrale de Riemann - Cours de Monsieur Renaud, professeur MPSI 4, Lycée Saint-Louis, Paris

[9] http://cermics.enpc.fr/~ehrlachv/integration.pdf?fbclid=IwAR0i3Y-hS_CQr0QT4eL1S7fi6QIlhD3tgeesqgXThkV0C5Lm5fBYIVH4bAI et autre...