

Leçon 155 : Exponentielles de matrices

MATHIEU ALIX

—

1 Rapport du Jury

« Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL(n, \mathbb{R})$ ou vers les algèbres de Lie. »

2 Questions et exercices

1. À-t-on $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\exp(M_2(\mathbb{R}))$?

Solution: La matrice a pour déterminant -1 , donc n'est pas un carré dans $GL_2(\mathbb{R})$. Or si $A = \exp(B)$ alors $A = \exp(B/2)^2$ et donc A est un carré. Ainsi $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $M_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution:

- On montre que $A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k x^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k x^{2k} \end{pmatrix}$ et $A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} x^{2k+1} \\ (-1)^k x^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$
sans problème ce qui permet de trouver que $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$
— De manière similaire en décomposant pair et impair, on trouve que $A^{2k} = x^{2k} I_2$ et $A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & x^{2k+1} \\ x^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$ ce qui permet de conclure que $\exp(B) = \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective.

Solution: On ne traite ici que le cas $n = 2$, le lecteur arrivera facilement à passer au cas général. En considérant $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, alors par l'exercice précédent $\exp(A) = I_2$ ce qui contredit l'injectivité.

4. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$$

Solution: On peut voir ce système comme $Y' = AY$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $\chi_A(X) = (X-1)^2$. Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\chi_A(A) = 0$, c'est-à-dire $B^3 = 0$ en posant $B = (A - I_3)$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tB) = I_3 + Bt + \frac{t^2}{2}B^2$ et comme I_3 et $A - I_3 = B$ commutent, on a finalement que

$$\exp(tA) = \exp(tI_3) \exp(tB) = e^t(I_3 + Bt + \frac{t^2}{2}B^2)$$

Ainsi si $Y(0)$ est fixé dans \mathbb{K}^3 , alors les solutions maximales sont définies par

$$Y(t) = e^t(I_3 + Bt + \frac{t^2}{2}B^2)Y(0)$$

5. Déterminer les solutions dans $M_n(\mathbb{C})$ de l'équation $\exp(A) = I_n$.

Solution: Pour $n = 1$, on a $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ est les solutions de $\exp(z) = 1$ dans \mathbb{C} sont les $\exp(2i\pi n)$ pour n dans \mathbb{Z} . Pour $n \geq 1$, considérons $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(A) = I_n$. Comme on se place dans \mathbb{C} , alors $\chi_A(X)$ est scindé, donc on peut considérer la décomposition de Dunford $A = D + N$, on obtient alors la décomposition de Dunford de $e^A = e^{D+N} = e^D + e^D(e^N - I_n)$. Par unicité celle-ci, comme $e^A = I_n$, alors $e^D = I_n$ et $e^N = I_n$. La dernière égalité implique $N = 0$. De plus e^D est diagonalisable de valeurs propres e^{μ_k} où les μ_k sont les valeurs propres de D , donc celles de A et la condition $e^D = I_n$ impose $e^{\mu_k} = 1$, soit $\mu_k \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et ce, pour tout k . En conclusions A est diagonalisable de valeurs propres dans $2i\pi\mathbb{Z}$. La réciproque est immédiate.

6. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles antisymétriques de taille n . Montrer que $\exp : A_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est bien définie et surjective.

Solution:

- On commence par montrer la bonne définition de l'application. Si $A \in A_n(\mathbb{R})$, on a

$$\exp(A)^\top = \exp(A^\top) = \exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$$

ce qui nous assure que $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$. Calculons maintenant son déterminant, $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$ car A est antisymétrique. Cela permet de conclure que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$ et donc que l'application est bien définie.

- Montrons que cette application est surjective : Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$, par le théorème de réduction des matrices orthogonales, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $U = PMP^{-1}$ où M est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

où $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$. Si $U \in SO_n(\mathbb{R})$, les -1 sont en nombre pair, on peut

les regrouper par deux. Puisque $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\pi$, on peut écrire

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

Or on a vu dans l'exercice 2 que $\exp(A_x) = R_{\theta_x}$ pour $A_x = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi en considérant la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & A_{\theta_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

on obtient que $\exp(B) = M$. Enfin puisque $\exp(PBP^{-1}) = P \exp(B) P^{-1} = PMP^{-1} = U$, que par construction B est antisymétrique, alors en considérant $A = PBP^{-1}$. On a bien $\exp(A) = U$ et $A^\top = (P^{-1})^\top B^\top P^\top = -PBP^{-1} = -A$ car P est orthogonale donc $A \in A_n(\mathbb{R})$. D'où la surjectivité.

7. Dans tout l'exercice C désignera une matrice complexe de $M_n(\mathbb{C})$. On notera \mathcal{C} le groupe des éléments inversibles de l'algèbre $\mathbb{C}[C]$.
- (a) Montrer que $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$.
 - (b) Vérifier que $\mathcal{C} = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$.
 - (c) Montrer que l'exponentielle réalise un morphisme du groupe additif $\mathbb{C}[C]$ dans le groupe multiplicatif \mathcal{C} .
 - (d) Montrer que \mathcal{C} est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$.
 - (e) Établir que $\exp(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de I_n dans \mathcal{C} . En déduire que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert dans \mathcal{C} .
 - (f) Conclure que $\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathcal{C}$.
 - (g) En déduire que l'image par l'application exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ est $GL_n(\mathbb{C})$ et que celle de $M_n(\mathbb{R})$ est les carrés de $GL_n(\mathbb{R})$.

Solution:

1. $\mathbb{C}[C]$ est un sev de $M_n(\mathbb{C})$. Il est donc fermé dans $M_n(\mathbb{C})$, et $\exp(C)$ est une limite de polynômes en C . On en déduit que $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$.
2. Il est bien connu que C^{-1} est un polynôme en C (car le coefficient constant du polynôme caractéristique est non-nul et que celui-ci annule C par Cayley-Hamilton). Si $M \in \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$, alors son inverse dans $GL_n(\mathbb{C})$ est un polynôme en M donc un polynôme en C , et donc $M^{-1} \in \mathbb{C}[C]$ et $M \in \mathcal{C}$.
3. $\mathbb{C}[C]$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$ (stable par produit, et deux polynôme en C commutent toujours). On peut donc appliquer la formule

$$\forall (A, B) \in \mathbb{C}[C]^2, \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

Comme l'exponentielle est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$, sa restriction à $\mathbb{C}[C]$ est bien un morphisme de groupes. Enfin d'après la question (a), la restriction de l'exponentielle à $\mathbb{C}[C]$ prend en fait ses valeurs dans \mathcal{C} (car c'est un polynôme en C).

4. \mathcal{C} est un ouvert de $\mathbb{C}[C]$ car $\mathcal{C} = \mathbb{C}[C] \cap \det^{-1}(\mathbb{R}^*) = GL_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ avec la deuxième partie qui est bien un ouvert. Pour montrer que \mathcal{C} est connexe, on va montrer qu'il est connexe par arcs. Soit M et N deux matrices de \mathcal{C} . On constate que la troïde affine complexe $z \in C \mapsto M(z) = zM + (1 - z)N$ est entièrement contenue dans $\mathbb{C}[C]$. On va donc chercher un chemin continu reliant M à N sous la forme

$$\forall t \in [0, 1], M(z(t)) = z(t)M + (1 - z(t))N$$

où $t \mapsto z(t)$ est continue et vérifie les conditions $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$. Pour ce faire, il suffit de constater que la fonction $z \mapsto \det(M(z))$ est polynomiale en z , non nulle car $M(0) = N$ est inversible et ne s'annule qu'en un nombre fini de points. On peut donc facilement construire une fonction $z(t)$ évitant ces points.

5. Un calcul classique (ou alors tout simplement l'examen du développement en série entière) permet d'établir que la différentielle de l'exponentielle,

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}),$$

en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, est l'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, la différentielle de sa restriction,

$$\exp : \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathcal{C},$$

en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, est l'identité de $\mathbb{C}[C]$, qui est bijective. Le **théorème d'inversion locale** assure donc l'existence de deux ouverts de $\mathbb{C}[C]$, $U \ni 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et $V \ni I_n$ tels que l'exponentielle réalise un difféomorphisme de U sur V . En particulier, $\exp(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de I_n .

Soit maintenant $A \in \mathbb{C}[C]$. On a clairement

$$\exp(A + U) = \exp(A) \exp(U) = \exp(A)V,$$

du fait que l'exponentielle, restreinte à $\mathbb{C}[C]$, est un morphisme de groupe (question 3). Or, comme $\exp(A)$ est inversible, la multiplication par cette matrice est un difféomorphisme. On obtient ainsi que $\exp(A)V$ est un voisinage de $\exp(A)$, dans $\mathbb{C}[C]$, inclus dans $\exp(\mathbb{C}[C])$. L'image de $\mathbb{C}[C]$ par l'exponentielle est donc voisinage de chacun de ses points, elle est ouverte.

6. Comme \mathcal{C} est connexe, il suffit maintenant de montrer que le sous-groupe ouvert $\exp(\mathbb{C}[C])$ est aussi fermé dans \mathcal{C} . Comme

$$\mathcal{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in \mathcal{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C]),$$

L'ensemble $\exp(\mathbb{C}[C])$ est donc fermé, puisque les ensembles $A \exp(\mathbb{C}[C])$ sont ouverts.

7. Si l'on suppose en plus que $C \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $C \in \mathcal{C}$. Ainsi, d'après la question précédente, $C \in \exp(\mathbb{C}[C])$ est bien dans l'image de l'exponentielle.

Supposons maintenant $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et faisons l'hypothèse qu'il existe une matrice $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = C^2$. Il existe alors un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$\exp(P(C)) = C$. Comme C est réelle, on a aussi $\exp(\overline{P(C)}) = \overline{C} = C$. Finalement, il en résulte que

$$\exp\left((P + \overline{P})(C)\right) = C^2 = A.$$

La matrice A est bien l'exponentielle d'une matrice réelle.

8. Le but de cet exercice est de déterminer l'enveloppe convexe de l'image de l'exponentielle réelle.
- Traiter le cas $n = 1$.
 - Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs. Écrire M comme somme de deux exponentielles de matrices réelles.
 - On suppose n pair. Montrer que $-I_n$ est dans l'image de l'exponentielle réelle.
 - On suppose $n > 1$ impair. Construire une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont strictement négatifs et qui appartient à l'enveloppe convexe de l'image de l'exponentielle.
 - Conclure que si $n > 1$, l'enveloppe convexe de l'image de l'exponentielle est $M_n(\mathbb{R})$.
 - Que dire du cas complexe ?

Solution:

- En dimension 1, comme $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ qui est convexe, l'enveloppe convexe de l'image de l'exponentielle vaut donc \mathbb{R}_+^* .
- On utilisera le fait qu'une matrice diagonalisable à valeurs propres strictement positives est dans l'image de l'exponentielle. En effet, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels strictement positifs et si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} P^{-1} \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) P &= P^{-1} \exp(\text{Diag}(\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_n))) P \\ &= \exp\left(P^{-1} \text{Diag}(\log(\alpha_1), \dots, \log(\alpha_n)) P\right) \end{aligned}$$

En particulier, une matrice triangulaire, dont les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux et strictement positifs, est dans l'image de l'exponentielle.

Pour résoudre la question, il suffit donc décrire M comme somme de deux matrices triangulaires, l'une inférieure, l'autre supérieure, à coefficients diagonaux distincts deux à deux et strictement positifs. Plus précisément, écrivons M sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & T_1 \\ & \ddots & \\ T_2 & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Considérons un entier $N > n$ suffisamment grand pour que pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $1/N < \alpha_i/2$ et pour que $1/N < |\alpha_i - \alpha_j|/2$ dès que $\alpha_i \neq \alpha_j$. On définit deux matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{N^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\alpha_k}{2} + \frac{k}{N^2} & & T_1 \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & & \frac{\alpha_n}{2} + \frac{n}{N^2} \end{pmatrix}$$

et

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{N^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\alpha_k}{2} - \frac{k}{N^2} & & 0 \\ & & T_2 & \ddots & \\ & & & & \frac{\alpha_n}{2} - \frac{n}{N^2} \end{pmatrix}$$

Alors $M = M_1 + M_2$ et M_1 et M_2 sont triangulaires à coefficients diagonaux strictement positifs et distincts deux à deux, et sont donc dans l'image de l'exponentielle réelle. Comme l'image de l'exponentielle est un cône positif, alors M est dans l'enveloppe convexe de l'exponentielle, du fait que $M = \frac{1}{2}(2M_1 + 2M_2)$.

3. Si $n = 2$, on a vu précédemment (exo 2) que $\exp(A_\pi) = -I_2$. En dimension quelconque n paire, il suffit de remarquer que la matrice diagonale par blocs $A_n =$

$$\begin{pmatrix} A_\pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_\pi \end{pmatrix} \text{ vérifie } \exp(A_n) = -I_n.$$

4. Si $n > 1$ est impair, on utilise deux fois la question précédente. En effet, les matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -I_{n-1} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} -\log(2) & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} -I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & -\log(2) \end{pmatrix}$$

sont dans l'image de l'exponentielle réelle. Ainsi, la demi-somme de ces deux matrices, que l'on note B_n :

$$B_n = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

est dans l'enveloppe convexe de l'image de l'exponentielle.

5. Si n est pair, on note $B_n = -I_n$. Ainsi, dans tous les cas, la matrice B_n est à coefficients diagonaux strictement négatifs et dans l'enveloppe convexe de l'image de l'exponentielle. Soit maintenant $M \in M_n(\mathbb{R})$, si K est une constante positive suffisamment grande, alors $M - KB_n$ est à coefficients diagonaux strictement positif, donc peut s'écrire comme somme de deux exponentielles de matrices : $M - KB_n = M_1 + M_2$. Ainsi $M = \frac{1}{3}(3KB_n + 3M_1 + 3M_2)$ est bien dans l'enveloppe convexe de l'image de l'exponentielle réelle.
6. Le cas complexe, on trouve immédiatement $M_n(\mathbb{C})$ car toute matrice s'exprime comme somme de deux matrices inversibles, par exemple un triangulaire supérieure et un triangulaire inférieure, dont les coefficients diagonaux sont non nuls.