

Semaine du 4 Novembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Que savez-vous de la fonction arctan ?

Exercice n° 2 :

(Fonctions usuelles) :

1. Rappeler la formule d'addition pour le cosinus.
2. Établir que pour tout entier naturel n , on a l'égalité

$$\arccos\left(\frac{1}{n}\right) + \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{(n^2 - 1)n(n+2)}}{n(n+1)}\right)$$

Exercice n° 3 :

(Nombres complexes) : Montrer que

$$z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\} \iff \exists x \in \mathbb{R}, z = \frac{1 + ix}{1 - ix}$$

Semaine du 4 Novembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Propriétés de $e^{i\theta}$ et Formules d'Euler (Propriétés 12 et 13 du Chapitre 8).

Exercice n° 2 :

(Fonctions usuelles) : Soient a et b deux nombres réels positifs.

1. Rappeler la formule de soustraction pour \tan .
2. Prouver qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(c)$ et exprimer c en fonction de a et b .

Exercice n° 3 :

(Nombres complexes) : Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 z_2 \neq -1$. On pose $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

1. Montrer que Z est réel.
2. On désigne respectivement par θ_1 et θ_2 des arguments de ces complexes. Exprimer Z en fonction de θ_1 et de θ_2 .

Semaine du 4 Novembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Formule de Moivre.

Exercice n° 2 :

(Fonctions usuelles) :

1. Rappeler la formule de soustraction pour \tan
2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a l'égalité suivante

$$\arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$$

3. En déduire la valeur de $S_N = \sum_{n=0}^N \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$ en fonction de N puis $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$.

Exercice n° 3 :

(Nombres complexes) : On pose $\omega = \sqrt{3} + i$. Déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tel que

1. $\omega^n \in \mathbb{R}$
2. $\omega^n \in i\mathbb{R}$.