Semaine du 31 Mars - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Formules des probabilités composées.
2. Inégalité de Markov.
3. $P_X : A \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \mapsto P(X \in A) \in [0,1]$ est une probabilité sur l'ensemble fini $X(\Omega)$.

Exercice n° 2 :

(Probabilités) : On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (en ordre croissant ou décroissant).

Exercice n° 3 :

(Probabilités) : $ABCD$ est un carré de centre O. Un jeton posé sur l'un des cinq points peut se déplacer de façon aléatoire vers l'un des autres voisins suivant le mode suivant :

* Tous les pas issus de l'un des sommets A, B, C et D ont pour probabilité $\frac{1}{3}$.
* Tous les pas issus de O ont une probabilité de $\frac{1}{4}$.

Un chemin est une suite de pas successifs. On suppose qu'au départ le jeton est en A.

1. Le jeton fait deux pas. Calculer la probabilité qu'ill arrive en A, en B, en C, en D, en O ?
2. Il fait un pas de plus. Quelle est la probabilité qu'il arrive en O ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_n la probabilité pour que le jeton arrive en O après n pas. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$
4. Exprimer p_n en fonction de n et déterminer sa limite quand $n \to +\infty$. (Interpréter ?)

Semaine du 31 Mars - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Formule des probabilités totales.
2. Si X, Y sont indépendantes, alors $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
3. Si X, Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exercice n° 2 :

(Probabilité) : Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement (sans remise) une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné, quelle est la probabilité de gain pour chaque personne ?

Exercice n° 3 :

(Probabilités) : Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires : A, B, C, D.

* La probabilité qu'il a de choisir A (respectivement B, C) est $\frac{1}{3}$ (respectivement $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}$).
* La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (respectivement B, C) est $\frac{1}{20}$ (respectivement $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}$).
* En empruntant D, il n'est jamais en retard.

On suppose que l'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire D ? C ?

Exercice n° 4 :

(Probabilités) : Soit $n \geq 2$. On choisit au hasard un entier compris entre 1 et n. Pour p diviseur de n, on note A_p l'évènement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer $P(A_p)$ pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$.
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers distincts de n, alors les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \text{Card}(\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid k \wedge n = 1\})$.
   En déduire que $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Semaine du 31 Mars - Planche n$^{\text{o}}$ 3

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Formules de Bayes.
2. $(\mathcal{A}_n, \circ)$ est un groupe appelé groupe alterné et $\text{Card}(\mathcal{A}_n) = \frac{n!}{2}$.
3. $E(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$ et croissance de l'espérance.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 :

(Probabilités) : On tire au hasard (sans remise) deux dominos dans un jeu de dominos. Quelle est la probabilité qu'on puisse les poser côte à côte ?

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 :

(Probabilités) : On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geq 2$). Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, A_k désigne l'évènement « on obtient Pile au k-ième lancer ». Soit A_{n+1} l'évènement « le nombre de Piles obtenus au cours des n lancers est pair ».

1. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{\substack{0 \leq k \leq p \\ k \equiv 0[2]}} \binom{p}{k} = \sum\limits_{\substack{0 \leq k \leq p \\ k \equiv 1[2]}} \binom{p}{k} = 2^{p-1}$.

   (b) Déterminer les probabilités des évènements A_k pour $k \in \{1, \dots, n+1\}$.
2. Déterminer la probabilité $P(A_{n+1} | A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.
   En déduire que les évènements $A_1, \dots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants.
3. Montrer que pour toute sous famille de n évènements choisis parmi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ est formée d'évènements mutuellement indépendants.