

# Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

MATHIEU ALIX

Jeudi 24 Avril 2025

## 1 Rapport du Jury

« Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de Newton. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de Möebius ou de la formule de Burnside. Des candidates et candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique  $S_n$  et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limites  $n \rightarrow +\infty$ ). »

## 2 Questions classiques

1. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $p$ . Combien y a-t-il d'injections de  $E$  dans  $F$  ?

**Solution:** Si  $n > p$ , évidemment 0. Si  $n = 0$ , il n'y a qu'une seule injection, l'application vide. Si  $0 < n \leq p$ , alors écrire  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ , pour définir une application injective on définit les images de chaque élément itérativement : pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f(x_i) \in F \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_{i-1})\}$  :  $p - (i - 1)$  choix. On obtient ainsi le produit, et donc

$$p \times (p - 1) \times \dots \times (p - n + 1) = \frac{p!}{(p - n)!} \text{ choix .}$$

2. Combien d'anagrammes le mot **BOROROS** possède-t-il ? (Les Bororos sont un peuple amérindien du Brésil.)

**Solution:**

- Pour construire une anagramme de **BOROROS**, on peut choisir d'abord la position des O  $\binom{7}{3} = 35$  possibilités, puis celle des R  $\binom{7-3}{2} = \binom{4}{2} = 6$  possibilités, puis celle du B  $\binom{2}{1} = 2$  possibilités, et enfin celle du S  $\binom{1}{1} = 1$  possibilité — d'où un total de  $35 \times 6 \times 2 = 420$  anagrammes possibles.
- On aurait bien sûr pu choisir la position des lettres dans un ordre différent — par exemple d'abord le S, puis les R, puis le B, puis les O. On obtient le même résultat, mais présenté différemment :

$$\binom{7}{1} \binom{6}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{3} = 7 \times 15 \times 4 = 420 \quad \text{anagrammes possibles.}$$

Mais à vrai dire, on peut faire mieux, *i.e.* obtenir un résultat plus lisible. Remarquons d'abord que :

$$\binom{7}{1} \binom{6}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{3} = \frac{7!}{1!6!} \times \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{1!3!} \times \frac{3!}{3!0!} = \frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!}.$$

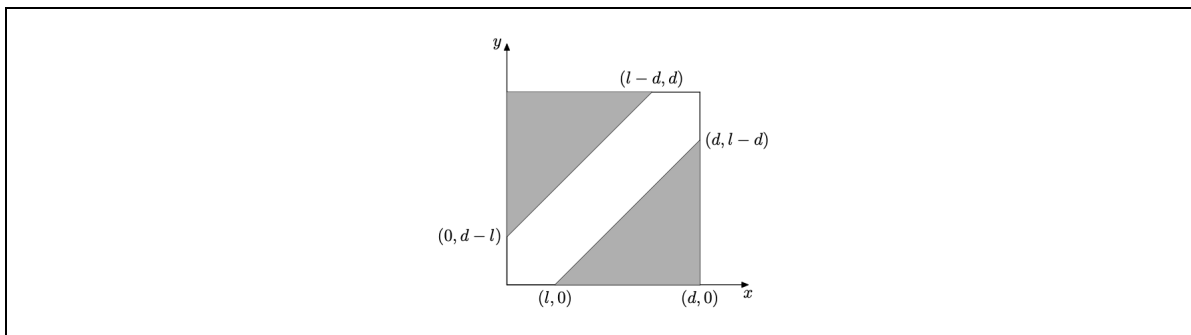
*Jolie simplification !*

Ce résultat simplifié a-t-il un sens combinatoire ? Eh bien oui. Pour le comprendre, numérotons fictivement nos 7 lettres de 1 à 7, ce qui signifie que pour le moment nous les distinguons. On peut former  $7!$  mots à partir de ces lettres numérotées, associés chacun à une manière d'ordonner les entiers de 1 à 7, mais chaque anagramme est bien sûr comptée plusieurs fois par ce procédé. Combien de fois au juste ? Chaque anagramme a été comptée autant de fois qu'il y a de façons d'y permuer les 3 lettres O, les 2 lettres R, le B et le S — soit  $3! \times 2! \times 1! \times 1!$  fois. Le mot **BOROROS** possède ainsi :

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 420 \text{ anagrammes.}$$

3. On choisit deux points au hasard et de manière indépendante sur un segment  $I$  de longueur  $d$ . Soit  $0 < l < d$ , quelle est la probabilité que la distance entre ces deux points soit supérieure ou égale à  $l$  ?

**Solution:** Sans perdre de généralité, on peut supposer que  $I = [0, d]$ , et on considère dans  $\mathbb{R}^2 : \{(x, y) \in [0, d]^2, |x - y| = l\}$ . Parmi tous les cas possibles (c.a.d  $[0, d]^2$ ), les couples  $(x, y)$  qui nous intéressent sont ceux qui se trouvent dans les deux triangles rectangles de sommes respectifs  $(0, l), (0, d), (d - l, d)$  et  $(l, 0), (d, 0), (d, d - l)$  qui se réunissent pour former un carré de côté  $d - l$ . La probabilité est donc de  $p = \frac{(d-l)^2}{d^2}$ .



4. Soit  $p \in \mathcal{P}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Considérons  $L$  un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension  $n$
- Combien y'a-t-il de droites dans  $L$  ?
  - Combien y'a-t-il d'hyperplans ?
  - Combien y'a-t-il de famille libre à  $k$  éléments dans  $L$  ?
  - Combien de bases ?
  - Combien y'a-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  dans  $L$  ?

**Solution:**

- Une droite est engendré par un vecteur non nul de  $L$ . Or il y a  $p^n - 1$  éléments non-nuls de  $L$ , et chaque élément appartient à une unique droite. Or chaque droite contient  $p - 1$  éléments non-nuls (multiplication par un élément de  $\mathbb{F}_p$  non-nul). On obtient donc  $\frac{p^n - 1}{p - 1}$  droites dans  $L$ .
- L'application  $d \mapsto d^\perp$  est une bijection de l'ensemble des droites de  $L$  dans l'ensemble des hyperplans de son dual  $L^*$ . Il y a donc  $\frac{p^n - 1}{p - 1}$  hyperplans dans  $L$ . Or  $L$  et  $L^*$  sont isomorphes (dimension finie), ils ont donc autant d'hyperplans.
- On construit itérativement les éléments de notre système libre : 1er vecteur non nul :  $p^n - 1$  choix. 2ème vecteur non colinéaire au premier :  $p^n - p$  choix... quand on a choisi  $j$  vecteurs, ils engendrent un espace de dimension  $j$  qui contient  $p^j$  éléments, donc pour le  $j + 1$ ème, on a  $p^n - p^j$  choix. On obtient ainsi  $(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{k-1})$  systèmes libres à  $k$  éléments dans  $L$ .
- Les bases de  $L$  sont des systèmes libres à  $n$  éléments d'où  $(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1})$  bases de  $L$ .
- Notons  $L_k$  : l'ensemble des familles libres à  $k$  éléments de  $L$ , et  $S_k$  : l'ensemble des sev de dimension  $k$  de  $L$ . Soit  $\varphi : e \in L_k \mapsto \text{Vect}(e) \in S_k$ .  $e$  est immédiatement une base de  $\text{Vect}(e)$ . Pour tout  $F \in S_k$ ,  $F$  admet une base qui appartient donc à  $L_k$ . Ainsi  $\varphi$  est surjective. Ainsi  $\varphi^{-1}(F)$  est l'ensemble des bases de  $F$ . Or un élément de  $G_k$  est sev de dimension  $k$ , qui a donc par question précédente  $(p^k - 1)(p^k - p) \dots (p^k - p^{k-1})$  bases. On a aussi que  $L_k$  contient  $(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{k-1})$  éléments.  $G_k$  admet donc

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{k-1})}{(p^k - 1)(p^k - p) \dots (p^k - p^{k-1})} = \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p^{n-k+1} - 1)}{(p^k - 1)(p^{k-1} - 1) \dots (p - 1)} \text{ éléments.}$$

5. Soit  $E$  un ensemble fini non-vidé de cardinal  $n$ . Calculer  $\sum_{A, B \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(A \cap B)$ .

**Solution:**

$$\begin{aligned}
 \sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} |A \cap B| &= \sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \sum_{x \in E} \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(x) \\
 &= \sum_{x \in E} \sum_{A,B \in \mathcal{P}(E)} \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(x) \\
 &= \sum_{x \in E} \left( \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \mathbf{1}_A(x) \right) \left( \sum_{B \in \mathcal{P}(E)} \mathbf{1}_B(x) \right) = \sum_{x \in E} |\{A \in \mathcal{P}(E) \mid x \in A\}|^2 \\
 &= \sum_{x \in E} |\mathcal{P}(E \setminus \{x\})|^2 = \sum_{x \in E} (2^{n-1})^2 = 4^{n-1}n.
 \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in E$ , l'égalité

$$|\{A \in \mathcal{P}(E) \mid x \in A\}| = |\mathcal{P}(E \setminus \{x\})|$$

découle du fait que se donner une partie de  $E$  qui contient  $x$ , c'est juste ajouter  $x$  à une partie de  $E \setminus \{x\}$ .

### 3 Question plus exotique ?

1. Soit  $\Omega$  l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $\Omega$  est dénombrable.

*Indication : On pourra utiliser le fait que la réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ou finis est dénombrable.*

**Solution:** On partitionne  $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} \Omega_n$  où  $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$ . (Justifier une telle partition -> max éléments d'une partie?).  $\Omega_n \subseteq \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$  qui est fini et possède lui  $2^{n+1}$  éléments. Alors  $\Omega$  comme réunion dénombrable d'ensemble fini (ou dénombrable) est dénombrable.

2. Algèbre linéaire : Déterminer le cardinal de  $O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$ .

**Solution:** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une telle matrice.  $A$  étant orthogonale, ses colonnes sont de norme 1 :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1$$

Or les coefficients  $a_{ij}$  sont dans  $\mathbb{Z}$  et donc

$$\forall 1 \leq j \leq n, \exists! \sigma(j) \in \{1, \dots, n\} \text{ tq } a_{\sigma(j)j} = \pm 1 \text{ et } \forall i \neq \sigma(j), a_{ij} = 0$$

Toujours par orthogonalité de  $A$  :  $\forall i \neq j, \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = 0$ . Supposons que dans la première colonne le  $k$ -ième coefficient soit non nul :  $a_{k1} \neq 0$ , les vecteurs de la première et seconde colonne étant orthogonaux, on a forcément  $a_{k2} = 0$  et il ne reste donc que  $2(n-1)$  choix

possibles pour compléter la deuxième colonne (2 pour le choix de  $\pm 1$  et  $(n-1)$  pour le nb de cases possibles. De proche en proche, on obtient donc pour cardinal  $2^n n!$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .

**Solution:** Notons  $S_n$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . On sait

$$\text{Card } S_n = n!.$$

Pour  $\sigma \in S_n$ , notons  $N(\sigma)$  le nombre de points fixes de  $\sigma$

$$N(\sigma) = \text{Card } \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \sigma(i) = i\}.$$

Le nombre moyen de points fixes d'une permutation de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  est

$$M = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} N(\sigma).$$

Réorganisons le calcul de cette somme en introduisant les couples  $(\sigma, i)$  formés par  $\sigma \in S_n$  et  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Pour un tel couple, posons

$$\delta(\sigma, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{si } \sigma(i) \neq i. \end{cases}$$

On remarque

$$N(\sigma) = \sum_{i=1}^n \delta(\sigma, i)$$

et alors

$$\sum_{\sigma \in S_n} N(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \left( \sum_{i=1}^n \delta(\sigma, i) \right).$$

On réorganise le calcul de la somme

$$\sum_{\sigma \in S_n} N(\sigma) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\sigma \in S_n} \delta(\sigma, i) \right)$$

avec

$$\sum_{\sigma \in S_n} \delta(\sigma, i) = \text{Card } \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.$$

Or, pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , une permutation  $\sigma$  qui fixe  $i$  peut s'identifier à une permutation de  $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}$ , il y en a exactement  $(n-1)!$ . On peut alors achever le calcul

$$\sum_{\sigma \in S_n} N(\sigma) = \sum_{i=1}^n (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n!$$

puis

$$M = 1.$$

4. (a) Rappeler la formule de Burnside (+ idée de preuve ?)
- (b) En déduire le nombre de colliers possibles de 5 perles, où chaque perle peut prendre  $n$  couleurs.

**Solution:**

- (a) On considère ici  $G$  un groupe fini agissant sur un ensemble fini  $X$ . En notant  $\mathcal{O}$  l'ensemble des orbites pour cette action, on a :

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

où  $\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ .

- (b) Commençons par représenter la situation. On représente un collier par un cercle sur lequel les perles  $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$  sont régulièrement espacées. (5-gon inscrit dans un cercle).

- Notons  $E$  l'ensemble des colorations des 5 perles.
- Notons  $G = D_{10}$  le groupe diédral d'ordre 10 (conservant donc le pentagone régulier).

On fait agir  $G$  sur  $E$ . À quoi correspond une orbite ? Une orbite correspond donc à une coloration à rotation/réflexion près. En appliquant dès lors la formule de Burnside :

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Or  $|G| = 10$ , énumérons les éléments et donc les fix associés.

- $g = Id \implies$  l'ensemble des colorations sont laissées fixes, c.a.d  $n^5$ .
- 4 rotations  $\implies$  toutes les perles doivent avoir la même couleur (on choisit une perle et  $n$  choix de couleur puis le reste est déduit donc  $n$  colorations sont fixes).
- 5 réflexions  $\implies$   $n^3$  colorations sont fixes. (à une perle donnée, sa réflexion de même couleur, donc 3 perles à choisir et  $n$  choix et 2 déduites)

On obtient ainsi  $|\mathcal{O}| = \frac{n^5 + 4n + 5n^3}{10}$