Semaine du 27 Janvier - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice n° 2 :

(Continuité) : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'application $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice n° 3 :

(Dérivabilité) : (Règle de L'Hôpital) : Soient f et g des fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
2. On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos(x)+x\sin(x)-1}{e^x-x-1}$.

Semaine du 27 Janvier - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

Exercice n° 2 :

(Continuité) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction continue. Montrer que f est constante.

Exercice n° 3 :

(Dérivabilité) : Soit b un réel et f une fonction numérique dérivable sur $]-b, b[$ telle que :

$$\forall x \in]-b, b[,\ \ f'(x) = \exp(-xf(x))$$

1. Vérifer que f admet en b une limite à gauche ℓ réelle ou infinie.
2. Montrer que si on suppose ℓ réelle, alors f se prolonge sur $]-b, b]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
3. En raisonnant par l'absurde à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer qu'effectivement ℓ est un réel.
4. On étend la même situation au cas $b = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.
   Indication : On pourra introduire la fonction $x \mapsto f(x) + \exp(-x)$

Semaine du 27 Janvier - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer l'égalité et l'inégalité des accroissements finis.

Exercice n° 2 :

(Continuité) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f possède un minimum.

Exercice n° 3 :

(Dérivabilité) : Soit $f = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que f'' est bornée et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \alpha f(x) \leq f''(x)$$

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f' et f ont une limite nulle en $+\infty$.