

Semaine du 17 Mars - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis.**

1. Le rang d'une matrice A est aussi le rang des vecteurs formés par les lignes de A .
2. Si E est fini, $\mathcal{P}_p(E)$ est fini.
3. Formule du triangle de Pascal.

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base e est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$

1. Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice B de f dans e'
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice n° 3 :

(Matrices) : On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On considère les sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ suivant :

$$\mathcal{M} = \{A \in M_3(\mathbb{R}), AU = \text{tr}(A)U \text{ et } U^T A = \text{tr}(A)U^T\}$$

1. Montrer que \mathcal{M} est un sev de $M_3(\mathbb{R})$ et que si $A \in \mathcal{M}$, alors $A^T \in \mathcal{M}$.
2. Les matrices $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ appartiennent-elles à \mathcal{M} ?
3. Déterminer une base de $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. (*Indication : on cherchera à préciser les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$*)
4. Déterminer une base de $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
5. En déduire la dimension de \mathcal{M} .

Semaine du 17 Mars - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis.**

1. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
2. Cardinal de l'union de deux ensembles finis.

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base e est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$

1. Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice B de f dans e'
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice n° 3 :

(Matrices) : Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le noyau de f
2. Donner une équation cartésienne de l'image de f .
3. Déterminer les endomorphismes g de \mathbb{R}^3 tels que :

$$\ker(g) = \text{Im}(g), \text{Im}(g) = \ker(f) \text{ et } \text{tr}(g) = \text{tr}(f).$$

Semaine du 17 Mars - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis.**

1. La trace d'un projecteur est égale à son rang.
2. Si f est une application entre deux ensembles de même cardinal, alors f injective est équivalent à f surjective

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base e est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$

1. Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice B de f dans e'
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice n° 3 :

(Matrices) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les questions suivantes traitent de divers exercices classiques sur la trace

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.
2. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$, montrer que si $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible
3. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est de rang 1, alors $A^2 = \text{Tr}(A)A$. (*Indication : on pourra utiliser l'endomorphisme canoniquement associé dans une autre base*).