

Metrična dimenzija usmerjenih grafov

Projekt pri predmetu finančni praktikum

Aljaž Bratuša, Maša Popovič

10. 11. 2024

1 Uvod in definicije

V prvem delu želimo zapisati celoštevilski linearni program za določanje metrične dimenzije usmerjenih grafov. V drugem delu pa si podrobneje ogledamo posebno skupino grafov - cirkulantske grafe $C(n, d)$ s povezavami v smeri urinega kazalca. Za majhne vrednosti parametrov n in d želimo preveriti metrično dimenzijo, nato pa izpeljati splošen rezultat za grafe iz te skupine. Začnimo z nekaj osnovnimi pojmi in definicijami.

Definicija 1.1. Naj bo G usmerjen graf z množico vozlišč V in množico povezav E ter $u, v \in V$. Za vozlišče v velja, da je *dosegljivo* iz u , če med u in v obstaja pot. Za dolžino poti med vozliščema vzamemo dolžino najkrajše poti.

Definicija 1.2. Naj bo G graf z množico vozlišč V in množico povezav E ter $u, v, w \in V$. Za vozlišče w pravimo, da *razreši* par vozlišč u in v , če velja, da sta u in v dosegljivi iz w na različnih razdaljah, t.j. $d(u, w) \neq d(v, w)$. Množica vozlišč S razreši graf G , če za vsak par vozlišč v G velja, da ga razreši nek element S . *Metrična dimenzija* grafa G je kardinalnost najmanjše množice, ki zadošča prejšnji lastnosti. To označimo z $\beta(G)$.

Opomba. Množica S , ki razreši dani graf G ni nujno enolična. Preprost primer je npr. graf, ki je pot. Potem je metrična dimenzija enaka 1, za vozlišče v S pa lahko vzamemo eno izmed robnih vozlišč grafa G .

Definicija 1.3. Naj bo G graf z množico vozlišč V in množico povezav E . Naj bo $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $W \subseteq V$ urejena množica in $v \in V$. Oznaki

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_n))$$

pravimo metrična reprezentacija v glede na množico W . Sledi, da W razreši G natanko tedaj, ko velja $r(u|W) \neq r(v|W)$ za vse $u, v \in V$, kjer velja $u \neq v$.

Definicija 1.4. Za pozitivni celi števili n in d je cirkulantski graf $C(n, d)$ enostaven graf z vozlišči ostankov po modulu n , $Z_n = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$, kjer velja, da je i - to vozlišče sosedno vozliščem $v_{i-d}, v_{i-d+1}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{i-d+1} \pmod{n}$ v $C(n, d)$. [1]

2 Načrt za nadaljnje delo

- Zapisati celoštevilski linearni program za določanje metrične dimenzije usmerjenga grafa.
- Poiskati metrične dimenzije $C(n, d)$. za majhne n in d .
- Uporaba programa za določitev splošne formule za metrično dimenzijo $C(n, d)$.

Trenutna ideja za CLP:

Vhodni podatki:

- **Seznam vozlišč** V : predstavimo kot seznam
- **Matrika razdalj** D : matrika, kjer je $D[i][j]$ razdalja med vozliščema i in j v grafu. Razdalja je enaka ∞ , če vozlišča niso neposredno povezana. Za izračun razdalj lahko na primer uporabimo algortem Floyd-Warshall ali BFS.

Ciljna funkcija:

Minimiziramo število vozlišč v razrešljivi množici:

$$\text{Minimiziraj: } \sum_{v \in V} x_v$$

kjer je x_v binarna spremenljivka, ki je enaka 1, če je vozlišče v vključeno v razrešljivo množico, in 0, če ni.

Omejitve:

Pogoj razločljivosti: Za vsak par različnih vozlišč u in v mora obstajati vsaj eno vozlišče w , ki jih razlikuje po razdalji.

$$\sum_{w \in V} z_{u,v}^w \geq 1, \quad \forall u, v \in V, u \neq v$$

kjer je $z_{u,v}^w$ pomožna binarna spremenljivka, ki je enaka 1, če vozlišče w razlikuje par (u, v) po razdalji.

Povezava med $z_{u,v}^w$ in x_w : Pomožna spremenljivka $z_{u,v}^w$ lahko postane 1 samo, če je vozlišče w v razrešljivi množici (tj. če je $x_w = 1$).

$$z_{u,v}^w \leq x_w, \quad \forall u, v, w \in V, u \neq v$$

Pogoji za binarne spremenljivke: Vse spremenljivke morajo biti binarne, da zagotovimo celoštevilsko rešitev:

$$\begin{aligned} x_v &\in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V \\ z_{u,v}^w &\in \{0, 1\}, \quad \forall u, v, w \in V, u \neq v \end{aligned}$$

Literatura

- [1] Kevin Chau and Shonda Gosselin. The metric dimension of circulant graphs and their cartesian products. *Opuscula Math.*, 37(4):509–534, 2017.