Metrična dimenzija usmerjenih grafov

Projekt pri predmetu finančni praktikum

Maša Popovič

10. 11. 2024

1 Uvod in definicije

V prvem delu želimo zapisati celoštevilski linearni program za določanje metrične dimenzije usmerjenih grafov. V drugem delu pa si podrobneje ogledamo posebno skupino grafov - cirkulantske grafe $C(n,d)$ s povezavami v smeri urinega kazalca. Za majhne vrednosti parametrov n in d želimo preveriti metrično dimenzijo, nato pa izpeljati splošen rezultat za grafe iz te skupine. Začnimo z nekaj osnovnimi pojmi in definicijami.

Definicija 1.1. Naj bo G usmerjen graf z množico vozlišč V in množico povezav E ter $u, v \in V$. Za vozlišče v velja, da je *dosegljivo* iz u, če med u in v obstaja pot. Za dolžino poti med vozliščema vzamemo dolžino najkrajše poti.

Definicija 1.2. Naj bo G graf z množico vozlišč V in množico povezav E ter $u, v, w \in V$. Za vozlišče w pravimo, da *razreši* par vozlišč u in v,če velja, da sta u in v dosegljivi iz w na različnih razdaljah, t.j. $d(w,u) \neq d(w,v)$. Množica vozlišč S razreši graf G, če za vsak par vozlišč v G velja, da ga razreši nek element S. *Metrična dimenzija* grafa G je kardinalnost najmanjše množice, ki zadošča prejšnji lastnosti. To označimo z $\beta(G)$.

Opomba. Množica S, ki razreši dani graf G ni nujno enolična. Preprost primer je npr. graf, ki je pot. Potem je metrična dimenzija enaka 1, za vozlišče v S pa lahko vzamemo eno izmed robnih vozlišč grafa G.

Definicija 1.3. Naj bo G graf z množico vozlišč V in množico povezav E. Naj bo $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}, W \subseteq V$ urejena množica in $v \in V$. Oznaki

$$r(v|W) = (d(w_1, v), d(w_2, v), \dots, d(w_n, v))$$

pravimo metrična reprezentacija v glede na množico W. Sledi, da W razreši G natanko tedaj, ko velja $r(u|W) \neq r(v|W)$ za vse $u, v \in V$, kjer velja $u \neq v$.

Definicija 1.4. *V smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf* $C(n,d)$ je usmerjen graf z n vozlišči, kjer so vozlišča označena kot $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Množica povezav E vsebuje usmerjene povezave med vozlišči, in sicer vsakemu vozlišču v_i pripadajo povezave do naslednjih d vozlišč v smeri urinega kazalca. Množica povezav je torej podana kot:

$$E = \left\{ (v_i, v_{(i+k) \mod n}) : 1 \leq k \leq d \right\}, \quad \text{za vsak } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

2 Načrt za nadaljnje delo

- Zapisati celoštevilski linearni program za določanje metrične dimenzije usmerjenga grafa.
- Poiskati metrične dimenzije $C(n,d)$. za majhne n in d.
- Uporaba programa za določitev splošne formule za metrično dimenzijo $C(n,d)$.

Trenutna ideja za CLP:

Vhodni podatki:

- **Seznam vozlišč** V: predstavimo kot seznam
- **Matrika razdalj** D: matrika, kjer je $D[i][j]$ razdalja med vozliščema i in j v grafu. Razdalja je enaka ∞ , če vozlišča niso neposredno povezana. Za izračun razdalj lahko na primer uporabimo algortem Floyd-Warshall ali BFS.

Ciljna funkcija:

Minimiziramo število vozlišč v razrešljivi množici:

$$\text{Minimiziraj:} \quad \sum_{v \in V} x_v$$

kjer je x_v binarna spremenljivka, ki je enaka 1, če je vozlišče v vključeno v razrešljivo množico, in 0, če ni.

Omejitve:

Pogoj razločljivosti: Za vsak par različnih vozlišč u in v mora obstajati vsaj eno vozlišče w, ki jih razlikuje po razdalji.

$$\sum_{w \in V} z_{u,v}^w \geq 1, \quad \forall u, v \in V,\ u \neq v$$

kjer je $z_{u,v}^w$ pomožna binarna spremenljivka, ki je enaka 1, če vozlišče w razlikuje par (u,v) po razdalji.

Povezava med $z_{u,v}^w$ in x_w: Pomožna spremenljivka $z_{u,v}^w$ lahko postane 1 samo, če je vozlišče w v razrešljivi množici (tj. če je $x_w = 1$).

$$z_{u,v}^w \leq x_w, \quad \forall u, v, w \in V,\ u \neq v$$

Pogoji za binarne spremenljivke: Vse spremenljivke morajo biti binarne, da zagotovimo celoštevilsko rešitev:

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V$$

$$z_{u,v}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall u, v, w \in V,\ u \neq v$$