#### 04...4:

Odvodi	
funkcija	odvod
c	0
$x^n$	$nx^{n-1}$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	$a^x$
$x^x$	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\sin(x)$	cos(x)
$\cos(x)$	-sin(x)
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$ $-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\sqrt{1-x^2}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$1 \pm x^2$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	ch(x)
$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	sh(x)
$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $th(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ $cth(x) = \frac{1}{th(x)}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$
$cth(x) = \frac{1}{th(x)}$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$
$arsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}$
$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arth(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

# Osnove kombinatorike

### Rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$
$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \quad \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a-q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^{n} - b^{n} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

 $\frac{a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}}{1-k}=a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+a_0^k+\ldots+a_{k-1}x^{2k-1}+\ldots \text{Verjetnost na } (\Omega,\mathcal{F}) \text{ je preslikava } P:\mathcal{F}\to\mathbb{R} \text{ z lastnostmi: }$ 

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$B_{\lambda}(x) = \sum_{n} {\lambda \choose n} x^{n} = (1+x)^{\lambda}; \qquad {\lambda \choose n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

# Izbori

Imamo n oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s pon.	brez pon.
variacije vrstni red je pomemben	$n^k$	$n^{\underline{k}}$
kombinacije vrstni red ni pomemben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

#### Pravila za računanie z dogodki

$$\begin{split} \text{idempotentnost} & A \cup A = A = A \cap A \\ \text{komutativnost} & A \cup B = B \cup A \\ & A \cap B = B \cap A \\ \text{asociativnost} & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ \text{distibutivnost} & (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C) \\ & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup C) \\ & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup C) \\ \end{split}$$
 De Morgan 
$$(\bigcup_{i \in I} A_i)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement} \\ & (\bigcap_{i \in I} A_i)^{\complement} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\complement} \\ & A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A \\ & A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \\ & A \cup A^{\complement} = \Omega \quad A \cap A^{\complement} = \emptyset$$

Neprazna družina dogodkov  $\mathcal{F}$  v  $\Omega$  je  $\sigma$ -algebra, če velja

• zaprtost za komplemente:

$$A \in \mathcal{F} \implies A^{\complement} \in \mathcal{F}$$

zaprtost za števne unije:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je  $\mathcal F$  le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu  $\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je  $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$  je algebra zaprta tudi za razlike. Najmanjša algebra je **trivialna**:  $\{\emptyset, \Omega\}$ .

Največja algebra je:  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je  $\{\emptyset, E, E^{\complement}, \Omega\}$ .

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je

Zaporedje  $\{A_i\}_i \in \mathcal{F}$  (končno ali števno mnogo) je **popoln** sistem dogodkov, če

$$\bigcup_{i} A_{i} = \Omega \qquad A_{i} \cup A_{j} = \emptyset, \forall i, j : i \neq j$$

- P(A) > 0 za  $\forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- Za paroma nezdružljive dogodke  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  velja *števna*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset) = 0$
- P ie končno aditivna.
- P je monotona:  $A \subseteq B \implies P(A) < P(B)$
- $P(A^{\complement}) = 1 P(A)$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \implies P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$
  
 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \implies P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\right) = \lim_{i \to \infty} P(B_i)$ 

$$P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$$
  
 
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Če lahko prostor izidov razbijemo na paroma nezdružljive enako verjetne dogodke, jih lahko obravnavamo kot izide: če je dogodek A unija k od n takih dogodkov, je P(A) = k/n.

# Načelo vključitev in izključitev

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} (-1)^{|S|+1} P(\bigcap_{i \in S} A_i)$$

Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### Izrek o polni verjetnosti

Če  $H_1, H_2, H_3, \ldots$  tvorijo popoln sistem dogodkov (tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih), velja:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

Dogodkom  $H_i$  često pravimo hipoteze in jih je lahko končno ali pa števno neskončno

#### Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_i)P(A|H_i) + P(H_i)P(A|H_i) + \dots}$$

Brezpogojnim verjetnostim  $P(H_i)$  pravimo apriorne, pogojnim verjetnostim  $P(H_i|A)$  pa aposteriorne verjetnosti hipotez.

#### Neodvisnot dogodkov

Dogodka A in B sta neodvisna, če velja:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Če je P(B) > 0, je to ekvivalentno pogoju, da je P(A|B) =P(A). Če je 0 < P(B) < 1, pa je to ekvivalentno tudi pogoju, da je  $P(A|B) = P(A|B^{\complement})$ . Dogodki A1, A2, A3, ...so neodvisni, če za poljubne različne indekse  $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$$

# Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija  $X:\Omega\to\mathbb{R}$  z lastnostijo, da je  $\forall x \, \in \, \mathbb{R}$ množica  $\{\omega \, \in \, \Omega \, : \, X(\omega) \, < \, x\} \, \equiv \,$  $X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \le x)$  dogodek.

#### Diskretne porazdelitve

Diskretna enakomerna porazdelitev na n točkah:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \text{Unif}\{a_1, \dots, a_n\}$$

# Binomska porazdelitev

 $Bin(n, p), n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$ 

Naj bo X št. uspelih (z verjetnostjo p) poskusov v zaporedju n poskusov.  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ :

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Bernulijeva porazdelitev  $Ber(p) \sim Bin(1, p)$ 

## Geometrijske porazdelitev

Geo(p),  $p \in (0, 1)$ 

(X = k) je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi.

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

### Pascalova / negativna binomska porazdelitev $Pas(m, p) = NB(m, p), m \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$

 $(X\,=\,k)$ je dogodek, da se dogodekAzgodim-tičvk-ti

Oziroma X je število poskusov do vključno m-tega uspelega, pri katerig vsak uspe z verjetnostjo p.  $X \sim Pas(m, p)$ :

$$p_k = P(X = k) = {k-1 \choose n-1} p^k (1-p)^{k-n}$$

## Hipergeometrijska porazdelitev

Iz posode, v kateri je n kroglic, od tega r rdečih, na slepo in

brez vračanja izvlečemo s kroglic. Če z X označimo število rdečih med izvlečenimi, ima ta slučajna spremenljivka hipergeometrijsko porazdelitev:  $X \sim \text{Hip}(s, r, n) = \text{Hip}(r, s, n)$ .

$$P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{l}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{l}}$$

Aproksimacija binomske porazdelitve

# Poissonova porazdelitev

 $Poi(\lambda), \lambda > 0$ 

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Če imamo veliko ponovitev  $(n \to \infty)$  z malo verjetnostjo  $(p \to 0)$ , je  $Bin(n, p) \approx Poi(np)$ 

**Laplaceova lokalna formula:** Če je  $p, 1-p \gg \frac{1}{n}$ , lahko  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  aproksimiramo

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

#### Laplaceova integralska formula:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sigma}\right)$$

Za majhno relativno napako zahtevamo še:

- $|a-np| \ll \sigma^{4/3}$  ali  $|b-np| \ll \sigma^{4/3}$
- $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  ali  $b a \gg 1$

## Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

# Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Realna slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka integrabilna funkcija  $p_X: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ , da za poljubna a < b velja:

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} p_X(t) dx$$

Funkciji  $p_X$  pravimo porazdelitvena gostota Komulativna funkcija slučajne spremenlijvke X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt$$

Če je  ${\cal F}_X$  zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je X porazdeljena zvezno in za vse razen za končno mnogo točk $\boldsymbol{x}$ velja  $p_x(x) = F'_X(x)$ .

#### Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk X = $(X_1,\ldots,X_n):\Omega->R$ 

# Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja

$$F_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) = P(X_1 \le x_1,...,X_n \le x_n)$$

# Neodvisnot slučajnih spremenljivk

Slučajne spremenljivke so neodvisne, če je

$$F_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n)$$

Torej so dogodki  $(X_1 \leq x_1), \ldots, (X_n \leq x_n)$  neodvisni. Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen sluč. vektor:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$
  $p_i = P(X = x_i)$   $P(Y = y_j)$ 

potem velja

$$X, Y$$
neodvisni  $\iff p_{ij} = p_i q_j$ 

Naj bo (X,Y) zvezno porazdeljen sluč. vektor z gostoto  $p_{(X,Y)}(x,y)$ , potem velja:

$$X, Y$$
neodvisni  $\iff \exists p_X, p_Y : p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ 

#### Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bosta  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  odprti množici in  $h: A \to B$  taka bijekcija, da je funkcija  $h^{-1}: B \to A$  zvezno odvedljiva. Nadalje naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto  $p_X$ , ki je izven množice A enaka nič. Tedaj je slučajna spremenljivka Y := h(X) porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X \left( h^{-1}(y) \right) \left| (h^{-1})'(y) \right| & y \in B \\ 0 & sicer \end{cases}$$

Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto  $p_X$ , skoncentrirana na odprti množici A. Naj bo  $h:A\to\mathbb{R}$  zvezno odvedljiva in  $h'(x)\neq 0$  za  $\forall x\in A$ . Tedaj je slučajna spremenljivka Y=h(X) porazdeljena zvezno z

$$p_Y = \sum_{\substack{x \in A \\ h(x) = y}} \frac{p_X(x)}{|h'(x)|}$$

Naj bosta  $A,B\in\mathbb{R}^n$  odprti množici;  $h:A\to B$  taka bijekcija, da je  $h^{-1}$  parcialno zvezno odvedlijva; X sl. vek porazdeljen zvezno z gostoto  $p_X$ . Tedaj je Y = h(X) po-

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(h^{-1}(y)|\det J(h^{-1}(y))|) & y \in B\\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

# Matematično upanje

Diskretno porazdeljena sl. sprem.

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad \text{\'e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$$

$$E(h(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k) p_k$$

$$E(h(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

Zvezno porazdeljena sl. sprem. X z gostoto  $p_X$ 

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$
 če  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx < \infty$ 

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)p_X(x)dx$$

$$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) p_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Za neko zvezno funkcijo h.

# Lastnosti

Če ima |X| mat. up., ga ima tudi X in velja

$$|E(X)| \le E(|X|)$$

Če obstaja  $E(X^2)$  in  $E(Y^2)$ , obstaja tudi E(XY) in velja

$$|E(XY)| < E(|XY|) < \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Za poljubne sl. sprem  $X_1, \ldots, X_n$  velja:

$$E(a_1X_1 + \dots a_nX_n) = a_1E(X_1) + \dots + a_nE(X_n)$$

# Indikator dogodka

Indikator dogodka A je sl. sprem.:

$$1_A = \begin{cases} 1 & \text{Ase zgodi} \\ 0 & \text{Ase ne zgodi} \end{cases} \qquad E(1_A) = P(A)$$

#### Disperzija (varianca)

$$D(X) = E((X - E(X))^{2}) = E(X^{2}) - (E(X))^{2}$$

Lastnosti:

- $D(X) \ge 0$
- $D(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$
- $D(aX) = a^2D(X)$

Standardna diviacija/odklon:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

zanjo velja  $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$ .

#### Nekoreliranost

Sl. sprem. X in Y sta nekorelirani, če velja:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \\$$

X, Y neodvisni  $\implies X, Y$  nekorelirani

Če imata X in Y, je nekoreliranost ekvivalentna zvezi:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

### Kovarianca

$$K(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

- K(X,X) = D(X)
- $K(X,Y) = 0 \iff X, Y$ nekorelirani
- K(aX, bY, Z) = aK(X, Z) + bK(Y, Z)
- K(X,Y) = K(Y,X)
- K(aX + b, cY + d) = acK(X, Y)
- $|K(X,Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)}$
- D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X, Y)
- $D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} K(X_i, X_j)$

# Standardizacija

$$X_S = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

# Korelacijski koeficient

$$r(X,Y) = \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = E(X_S, Y_S)$$

- $r(X,Y) = 0 \iff X, Y$ nekorelirani
- $-1 \le r(X, Y) \le 1$
- $r(X,Y) = 1 \iff P(X_S = Y_S) = 1$
- $r(X,Y) = -1 \iff P(X_S = -Y_S) = 1$
- r(aX + b, cY + d) = r(X, Y)

#### Pogojne porazdelitve

Pogojna porazdelitev sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$X|B \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ P(X=a_1|B) & P(X=a_2|B) & \dots \end{pmatrix}$$

#### Pogojna porazdelitvena funkcija

sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$F_{X|B}(x) = F_X(x|B) = P(X \le x|B) = \frac{P((X \le x) \cap B)}{P(B)}$$

Če je pogojna porazdelitev zvezna, objstaja tudi **pogojna** porazdelitvena gostota:

$$p_{X|B}(x) = F'_{X|B}(x)$$

#### Pogojna gostota

$$p_X(x|Y=y) \equiv p_X(x|y) = \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}$$

#### Pogojno matematično upanje

$$E(h(X)|B) = \sum_{x} h(x)P(X = x|B)$$

$$\begin{split} E(X|Y=y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X|Y)(x|y)} dx \\ &= \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X,Y)(x,y)} dx \end{split}$$

$$E(h(X,Y)|Y=y) = E(h(X,y)|Y=y)$$
 
$$E(h(X,Y)|Y) = \sum_{x} h(x,Y)P(X=x|Y)$$

$$E(h(X,Y)|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,Y) P_{X|Y}(x|Y) dx$$

Za vsako slučajno spremenlivko X in dogodek B veleja

$$E(X|B) = \frac{E(XZ)}{P(B)} = \frac{E(XZ)}{E(Z)}$$

kjer je sl. sprem. Z indikator dogodka B.

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in popoln sistem dogodkov  $H_1, H_2, \ldots$  velja izrek o polni pričakovani vrednosti

$$E(X) = P(H_1)E(X|H_1) + P(H_2)E(X|H_2) + \dots$$

#### Regresijska funkcija

$$\varphi(y) = E(X|Y = y)$$

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in diskretno sl. sprem. Y Izrek o enoličnosti:

$$\begin{split} E(Xg(Y)|Y) &= E(X|Y)g(Y) \\ E(Xg(Y)) &= E(E(X|Y)g(Y)) \\ E(X) &= E(E(X|Y)) \end{split}$$

Za vsak dododek A in vsako sl. sprem Y velja:

$$E(P(A|Y)) = P(A)$$

## Momenti

Moment reda k glede na točko a je

$$m_k(a) = E((X-a)^k)$$
 če obstaja

- Začetni moment  $z_k := m_k(0) = E(X^k)$
- Centralni moment  $m_k := m_k(E(X)) = E((X X))$
- Faktorski moment reda r: E(X(X-1)...(X-r+

$$z_1 = E(X) \qquad m_2 = D(X)$$

Če obstaja  $m_n(a)$ , obstaja tudi  $m_k(a)$  za  $\forall k < n$ . Če obstaja  $z_n$ , obstaja tudi  $m_n(a)$  za  $\forall a \in \mathbb{R}$ 

Centralne momente lahko izračunamo iz začetnih:

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k$$

$$A(X) = E(X_S^3) = E\left(\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right)^3\right) = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\forall \lambda > 0 : A(\lambda X) = A(X)$$

#### Sploščenost (kurtozis)

$$K(X) = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)^4\right] = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Presežna sploščenost

$$K^*(X) = K(X) - 3$$

# Vrstilne karakteristike

Kvantil redap

je vsaka vrednost  $x_n$ , za katero velja:

$$P(X \le x_p) \ge p \text{ in } P(X \ge x_p) = 1 - p$$

oz.  $F(x_p-) \le p \le F(x_p)$ 

- Mediana:  $x_{\underline{1}}$
- Kvartili:  $x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{2}{2}}, x_{\frac{3}{2}}$
- (Per)centili:  $x_{\frac{1}{120}}, \dots, x_{\frac{99}{100}}$

### Semi interkvartilni razmik

$$s = \frac{1}{2} \left( x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}} \right)$$

## Rodovne funkcije

Naj bo X sl. sprem. z zalogo vrednosti  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 

$$p_k = P(X = k)$$
  $k = 0, 1, 2, ...$ 

Rodovna funkcija sl. sprem. X:

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Obstaja za vse  $|s| \le 1$ .

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)(0)}}{k!}$$

$$G_X(0) = p_0$$
  $G_X(1) = 1$   $G_X(s) = E(s^X)$ 

$$\forall s \in [-1, 1] : G_X(s) = G_Y(s)$$

$$\iff P(X = k) = P(Y = k) \ \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{s \uparrow 1} G_X'(s) = \lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{s \uparrow 1} k p_k s^{k-1} E(X)$$

Naj bo X sl. sprem. z rodovno funkcijo  $G_X$ , potem je:

$$G_X^{(n)}(1-) = E(X)(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)$$

Naj bosta  $X_1,\dots,X_n$  nedovisne sl. sprem. z rodovnimi funkcijami  $G_{X_1}, \ldots G_{X_n}$ :

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G(X_1)\cdots G(X_n) \quad \forall s \in [-1,1]$$

Naj bodo  $\forall n \in \mathbb{N}$  sl. sprem  $N, X_1, \dots, X_n$  neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo  $G_N$  in  $X_i$  rodovno funkcijo  $G_X$  $(X_1,\ldots,X_n \text{ so enako porazdeljene})$ . Naj bo  $S=X_1+\cdots+$ 

$$G_S = G_N(G_X(s)) \quad \forall s \in [-1, 1]$$

Velja tudi E(S) = E(N)E(X)

$$G_{2X}(s) = G_X(s^2)$$

## Znane rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a-q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k} = a_0 + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_0^k + \dots + a_{k-1}x^{2k-1} + \dots$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$B_{\lambda}(x) = \sum_{n} {\lambda \choose n} x^{n} = (1+x)^{\lambda}; \qquad {\lambda \choose n} = \frac{\lambda^{n}}{n!}$$

# Momentno rodovna funkcija

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
  $\forall t \in R$  če obstaja 
$$= 1 + z_1 t + \frac{z_2}{2!} t^2 + \frac{z_3}{3!} t^3 + \dots$$

V primeru, ko ima X zalogo vrednosti v  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , je

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = G_X(e^t)$$

Za zvezno porazdeljeno sl. sprem. X velja:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$$

Naj pri nekem  $\delta > 0$   $M_X(t)$  obstaja za vse  $t \in (-\delta, \delta)$ . Potem je porazdelitev za X natanko določana z  $M_X$  in vsi začetni momenti obstajajo:

$$z_k = E(X^k) = M_X^{(k)}(0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Trditev:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Če sta X in Y neodvisni, je

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

## Izreka o velikih številih

Zaporedje sl. sprem.  $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  verjetnostno konvergira proti sl. sprem. X, če

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \ge \varepsilon) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1$$

Zaporedje sl. sprem.  $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  skoraj gotovo (s.g.) kon- Izrek o zveznosti rodovne funkcije vergira proti sl. sprem. X, če

$$P(\lim_{n \to \infty}) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0$$
:  $\lim P(|X_n - X| < \varepsilon, \forall n \ge m) = 1$ 

Če  $X_n \xrightarrow{s.g.} X$ , potem  $X_n \xrightarrow{ver.} X$ 

Naj bo  $X_1, X_2, X_n, \ldots$  zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo  $S = X_1 + \cdots + X_n, Y_n = \frac{\bar{S}_n - E(S_n)}{n}$ . Potem je

 Za  $\left\{X_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja šibki zakon o velikih številih, če zap.  $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  konvergira proti 0 verjetnostno, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} < \varepsilon\right) = 1$$

Za  $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  velja krepki zakon o velikih številih, če zap.  $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  konvergira proti 0 skoraj gotovo, tj.

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0\right) = 1$$

# Neenakost Markova

Če je X sl. sprem. z mat. up., potem je

$$P(|X| \ge a) \le \frac{E(|X|)}{a} \quad \forall a > 0$$

## Neenakost Čebiševa

 $\check{\text{C}}$ e ima X disperzijo, je

$$P(|X - E(X)| \ge a\sigma(X)) \le \frac{1}{a^2} \quad \forall a > 0$$

oziroma za  $\varepsilon := a\sigma(X)$ 

$$P(|X - E(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Izrek Markova: Če za sl. sprem.  $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  velja  $\frac{D(S_n)}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$  potem velja ŠZVŠ.

 $\mathit{Izrek}\ \check{\mathit{Cibiševa}}$ : Če so sl. sprem.  $X_1, X_2, \ldots$  paroma nekorelirane in je  $\sup_{n\in\mathbb{N}} D(X_n) < \infty$ , potem velja ŠZVŠ.

Izrek Kolmogorova Naj za neodvisne slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots$  velja pogoj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$$

potem za  $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  velja KZVŠ.

Zgornji pogoj velja, če je  $\sup_n D(X_n) < \infty$ 

Naj bodo  $X_1, X_2, \ldots$  neodvisne in enako porazdeljene sl. sprem. z disperzijo. Potem velja KZVŠ.

# Centralni limitni izrek

Naj bo  $X_1, X_2, X_n, \ldots$  zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo  $S = X_1 + \cdots + X_n$ ,  $Z_n = \frac{\hat{S}_n - E(S_n)}{n}$ . Potem je  $E(Z_n) = 0 \text{ in } D(Z_n) = 1.$ 

Za  $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  veljaj **centralni limitni zakon**, če

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_{N(0,1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Če so  $X_1, X_2, \ldots$  neodvisne in enako porazdeljene, velja centralni limitni zakon. Za velike n je  $S_n \sim N(E(S_n), \sigma(S_n))$ 

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \le x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$$P(a \le S_n \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right) - \Phi\left(\frac{a - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right)$$

Naj za zaporedje  $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  sl. sprem. velja

 $M_{Z_n}(t) \to M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$ 

$$F_{Z_n}(x) \to F_{N(0,1)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funkcija Γ

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ ,  $\forall s > 0$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

•  $\Gamma(1) = 1$ 

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n!$   $n \in \mathbb{N}$ •  $\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

# Funkcija B

•  $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ ,

• 
$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$$

• 
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

• 
$$\frac{1}{2}B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$$

• simetričnost: B(p,q) = B(q,p)