Odvodi

Odvodi	
funkcija	odvod
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\sin(x)$	cos(x)
$\cos(x)$	-sin(x)
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos(x)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\overline{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	ch(x)
$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	sh(x)
$ch(x) = \frac{e^{-x} + e^{-x}}{2}$ $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$
$cth(x) = \frac{ch(x)}{th(x)}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$
$arsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Osnove kombinatorike

Rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$
$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \qquad \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a-q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^{n} - b^{n} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

 $\frac{a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}}{1-k}=a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+a_0^k+\ldots+a_{k-1}x^{2k-1}+\ldots \text{Verjetnost na } (\Omega,\mathcal{F}) \text{ je preslikava } P:\mathcal{F}\to\mathbb{R} \text{ z lastnostmi: }$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$B_{\lambda}(x) = \sum_{n} {\lambda \choose n} x^n = (1+x)^{\lambda}; \qquad {\lambda \choose n} = \frac{\lambda^n}{n!}$$

Izbori

Imamo n oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s pon.	brez pon.
variacije vrstni red je pomemben	n^k	$n^{\underline{k}}$
kombinacije vrstni red ni pomemben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Pravila za računanie z dogodki

$$\begin{aligned} \text{idempotentnost} & A \cup A = A = A \cap A \\ \text{komutativnost} & A \cup B = B \cup A \\ & A \cap B = B \cap A \\ \text{asociativnost} & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ \text{distibutivnost} & (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C) \\ & (A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (A \cap C) \\ \text{De Morgan} & (\bigcup_{i \in I} A_i)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement} \\ & (\bigcap_{i \in I} A_i)^{\complement} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\complement} \\ & A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A \\ & A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \\ & A \cup A^{\complement} = \Omega \quad A \cap A^{\complement} = \emptyset \end{aligned}$$

Neprazna družina dogodkov \mathcal{F} v Ω je σ -algebra, če velja

• zaprtost za komplemente:

$$A \in \mathcal{F} \implies A^{\complement} \in \mathcal{F}$$

zaprtost za števne unije:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je $\mathcal F$ le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu $\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$ je algebra zaprta tudi za razlike. Najmanjša algebra je **trivialna**: $\{\emptyset, \Omega\}$.

Največja algebra je: $\mathcal{P}(\Omega)$.

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je $\{\emptyset, E, E^{\complement}, \Omega\}$.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je

Zaporedje $\{A_i\}_i \in \mathcal{F}$ (končno ali števno mnogo) je **popoln** sistem dogodkov, če

$$\bigcup_{i} A_{i} = \Omega \qquad A_{i} \cup A_{j} = \emptyset, \forall i, j : i \neq j$$

- P(A) > 0 za $\forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- Za paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ velja *števna*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset) = 0$
- P ie končno aditivna.
- P je monotona: $A \subseteq B \implies P(A) < P(B)$
- $P(A^{\complement}) = 1 P(A)$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \implies P(\bigcap_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i \to \infty} P(B_i)$$

$$P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Če lahko prostor izidov razbijemo na paroma nezdružljive enako verjetne dogodke, jih lahko obravnavamo kot izide: če je dogodek A unija k od n takih dogodkov, je P(A) = k/n.

Načelo vključitev in izključitev

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} (-1)^{|S|+1} P(\bigcap_{i \in S} A_i)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Izrek o polni verjetnosti

Če H_1, H_2, H_3, \ldots tvorijo popoln sistem dogodkov (tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih), velja:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

Dogodkom H_i često pravimo hipoteze in jih je lahko končno ali pa števno neskončno

Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_i)P(A|H_i) + P(H_i)P(A|H_i) + \dots}$$

Brezpogojnim verjetnostim $P(H_i)$ pravimo apriorne, pogojnim verjetnostim $P(H_i|A)$ pa aposteriorne verjetnosti hipotez.

Neodvisnot dogodkov

Dogodka A in B sta neodvisna, če velja:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Če je P(B) > 0, je to ekvivalentno pogoju, da je P(A|B) =P(A). Če je 0 < P(B) < 1, pa je to ekvivalentno tudi pogoju, da je $P(A|B) = P(A|B^{\complement})$. Dogodki A1, A2, A3, ...so neodvisni, če za poljubne različne indekse i_1, i_2, \ldots, i_k

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$$

Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija $X:\Omega\to\mathbb{R}$ z lastnostijo, da je $\forall x \, \in \, \mathbb{R}$ množica $\{\omega \, \in \, \Omega \, : \, X(\omega) \, < \, x\} \, \equiv \,$ $X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \le x)$ dogodek.

Diskretne porazdelitve

Diskretna enakomerna porazdelitev na n točkah:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \\ \frac{1}{n} \ \frac{1}{n} \ \dots \ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \text{Unif}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Binomska porazdelitev

$Bin(n, p), n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$

Naj boXšt. uspelih (z verjetnostjop)poskusov v zaporedju n poskusov. $X \sim \text{Bin}(n, p)$:

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Bernulijeva porazdelitev $Ber(p) \sim Bin(1, p)$

Geometrijske porazdelitev

Geo(p), $p \in (0, 1)$

(X = k) je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi.

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

Pascalova / negativna binomska porazdelitev

 $Pas(m,p) = NB(m,p), m \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$ $(X\,=\,k)$ je dogodek, da se dogodekAzgodim-tičvk-ti

Oziroma X je število poskusov do vključno m-tega uspelega, pri katerig vsak uspe z verjetnostjo p. $X \sim Pas(m, p)$:

$$p_k = P(X = k) = {\binom{k-1}{n-1}} p^k (1-p)^{k-n}$$

Hipergeometrijska porazdelitev

Iz posode, v kateri je n kroglic, od tega r rdečih, na slepo in

brez vračanja izvlečemo s kroglic. Če z X označimo število rdečih med izvlečenimi, ima ta slučajna spremenljivka hipergeometrijsko porazdelitev: $X \sim \text{Hip}(s, r, n) = \text{Hip}(r, s, n)$.

$$P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Aproksimacija binomske porazdelitve

Poissonova porazdelitev

 $Poi(\lambda), \lambda > 0$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Če imamo veliko ponovitev $(n \to \infty)$ z malo verjetnostjo $(p \to 0)$, je Bin $(n, p) \approx Poi(np)$

Laplaceova lokalna formula: Če je $p, 1-p \gg \frac{1}{n}$, lahko $X \sim \text{Bin}(n, p)$ aproksimiramo

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Laplaceova integralska formula:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sigma}\right)$$

Za majhno relativno napako zahtevamo še:

- $|a-np| \ll \sigma^{4/3}$ ali $|b-np| \ll \sigma^{4/3}$
- $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ali $b a \gg 1$

Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Realna slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka integrabilna funkcija $p_X: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, da za

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p_X(t) dx$$

Funkciji p_X pravimo **porazdelitvena gostota** Komulativna funkcija slučajne spremenljivke X

$$F_X(x) = \int_{\infty}^x p_X(t)dt$$

Če je F_X zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je X porazdeljena zvezno in za vse razen za končno mnogo točk \boldsymbol{x} velja $p_x(x) = F'_X(x)$

Zvezne porazdelitve

Enakomerna zvezna porazdelitev na [a, b]

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b\\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

Normalna / Gaussova porazdelitev $N(\mu, \sigma)$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Standardizirana normalna porazdelitev: N(0,1)

Eksponentna porazdelitev $Exp(\lambda)$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0\\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0\\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Porazdelitev $\Gamma(b,c), b>0, c>0$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-cx} & x \ge 0\\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Funkcija Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad \forall s > 0$$

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Porazdelitev $\chi^2(n)$

 $n \in \mathbb{N}$ je št. prostorskih stopenj

$$\chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

Cauchyjeva porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk X = $(X_1,\ldots,X_n):\Omega->R$

Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja

$$F_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) = P(X_1 \le x_1,...,X_n \le x_n)$$

Slučajne spremenljivke so neodvisne, če je

Neodvisnot slučajnih spremenljivk

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_1}(x_1)\ldots F_{X_n}(x_n)$$

Torej so dogodki $(X_1 \leq x_1), \ldots, (X_n \leq x_n)$ neodvisni. Naj bo (X,Y) diskretno porazdeljen sluč. vektor:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$
 $p_i = P(X = x_i)$ $P(Y = y_j)$

potem velja:

$$X, Y$$
neodvisni $\iff p_{ij} = p_i q_j$

Naj bo(X,Y)zvezno porazdeljen sluč. vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x,y)$, potem velja:

$$X, Y$$
neodvisni $\iff \exists p_X, p_Y : p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odprti množici in $h: A \to B$ taka bijekcija, da je funkcija $h^{-1}: B \to A$ zvezno odvedljiva. Nadalje naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X , ki je izven množice A enaka nič. Tedaj je slučajna spremenljivka Y := h(X) porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X \left(h^{-1}(y) \right) \left| (h^{-1})'(y) \right| & y \in B\\ 0 & sicer \end{cases}$$

Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X , skoncentrirana na odprti množici A. Naj bo $h:A\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $h'(x)\neq 0$ za $\forall x\in A$. Tedaj je slučajna spremenljivka Y = h(X) porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y = \sum_{\substack{x \in A \\ h(x) = y}} \frac{p_X(x)}{|h'(x)|}$$

Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^n$ odprti množici; $h: A \to B$ taka bijekcija, da je h^{-1} parcialno zvezno odvedlijva; X sl. vek. porazdeljen zvezno z gostoto p_X . Tedaj je Y = h(X) po- Kovarianca

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(h^{-1}(y)|\det J(h^{-1}(y))|) & y \in B\\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matematično upanje

Diskretno porazdeljena sl. sprem.

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad \text{\'e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$$

$$E(h(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k) p_k$$

$$E(h(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

Zvezno porazdeljena sl. sprem. X z gostoto p_X

$$\begin{split} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad \text{\'e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx < \infty \\ E(h(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) p_X(x) dx \\ E(h(X,Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) p_{X,Y}(x,y) dx dy \end{split}$$

Za neko zvezno funkcijo h.

Lastnosti

Če ima |X| mat. up., ga ima tudi X in velja

$$|E(X)| \le E(|X|)$$

Če obstaja $E(X^2)$ in $E(Y^2)$, obstaja tudi E(XY) in velja:

$$|E(XY)| \le E(|XY|) \le \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Za poljubne sl. sprem X_1, \ldots, X_n velja:

$$E(a_1X_1 + \dots a_nX_n) = a_1E(X_1) + \dots + a_nE(X_n)$$

Indikator dogodka

Indikator dogodka A je sl. sprem.:

$$1_A = \begin{cases} 1 & \text{Ase zgodi} \\ 0 & \text{Ase ne zgodi} \end{cases} \qquad E(1_A) = P(A)$$

Disperzija (varianca)

$$D(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 \label{eq:defD}$$
 Last
nosti:

• D(X) > 0

• $D(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$

• $D(aX) = a^2D(X)$

Standardna diviacija/odklon:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

zanjo velja $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

Nekoreliranost

Sl. sprem. X in Y sta nekorelirani, če velja:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

X, Y neodvisni $\implies X, Y$ nekorelirani

Če imata X in Y, je nekoreliranost ekvivalentna zvezi:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

$$K(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

= $E(XY) - E(X)E(Y)$

• K(X,X) = D(X)

• $K(X,Y) = 0 \iff X, Y$ nekorelirani

• K(aX, bY, Z) = aK(X, Z) + bK(Y, Z)

• K(X,Y) = K(Y,X)

• K(aX + b, cY + d) = acK(X, Y)

• $|K(X,Y)| \le \sqrt{D(X)D(Y)}$

• D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X, Y)

• $D(X_1 + \cdots + X_n) = D(X_1) + \cdots + D(X_n) +$ Momenti $2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} K(X_i, X_j)$

Standardizacija

$$X_S = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

Korelacijski koeficien

$$r(X,Y) = \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = E(X_S, Y_S)$$

Lastnosti

- $r(X,Y) = 0 \iff X, Y$ nekorelirani
- $-1 \le r(X, Y) \le 1$
- $r(X,Y) = 1 \iff P(X_S = Y_S) = 1$
- $r(X,Y) = -1 \iff P(X_S = -Y_S) = 1$
- r(aX + b, cY + d) = r(X, Y)

Pogojne porazdelitve

Pogojna porazdelitev sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$X|B \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ P(X=a_1|B) & P(X=a_2|B) & \dots \end{pmatrix}$$

Pogojna porazdelitvena funkcija

sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$F_{X|B}(x) = F_X(x|B) = P(X \le x|B) = \frac{P((X \le x) \cap B)}{P(B)}$$

Če je pogojna porazdelitev zvezna, objstaja tudi **pogojna** porazdelitvena gostota:

$$p_{X|B}(x) = F'_{X|B}(x)$$

Pogojna gostota

$$p_X(x|Y=y) \equiv p_X(x|y) = \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}$$

Pogojno matematično upanje

$$E(h(X)|B) = \sum_{x} h(x)P(X = x|B)$$

$$\begin{split} E(X|Y=y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X|Y)(x|y)} dx \\ &= \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X,Y)(x,y)} dx \\ E(h(X,Y)|Y=y) &= E(h(X,y)|Y=y) \\ E(h(X,Y)|Y) &= \sum h(x,Y) P(X=x|Y) \end{split}$$

$$E(h(X,Y)|Y) = \int_{-\infty}^{x} h(x,Y)P_{X|Y}(x|Y)dx$$

Za vsako slučajno spremenlivko X in dogodek B veleja:

$$E(X|B) = \frac{E(XZ)}{P(B)} = \frac{E(XZ)}{E(Z)}$$

kjer je sl. sprem. Z indikator dogodka B.

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in popoln sistem dogodkov H_1, H_2, \ldots velja izrek o polni pričakovani vrednosti

$$E(X) = P(H_1)E(X|H_1) + P(H_2)E(X|H_2) + \dots$$

Regresiiska funkcija

$$\varphi(y) = E(X|Y = y)$$

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in diskretno sl. sprem. Y

$$E(Xg(Y)|Y) = E(X|Y)g(Y)$$

$$E(Xg(Y)) = E(E(X|Y)g(Y))$$

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

Za vsak dododek A in vsako sl. sprem Y velja:

$$E(P(A|Y)) = P(A)$$

Moment reda kglede na točko \boldsymbol{a} je

$$m_k(a) = E((X-a)^k)$$
 če obstaja

- Začetni moment $z_k := m_k(0) = E(X^k)$
- Centralni moment $m_k := m_k(E(X)) = E((X E(X)))$
- Faktorski moment reda r: E(X(X-1)...(X-r+ $1)) = G_{V}^{(r)}(1)$

$$z_1 = E(X) \qquad m_2 = D(X)$$

Če obstaja $m_n(a)$, obstaja tudi $m_k(a)$ za $\forall k < n$. Če obstaja z_n , obstaja tudi $m_n(a)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$ Centralne momente lahko izračunamo iz začetnih:

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k$$

$$A(X) = E(X_S^3) = E\left(\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right)^3\right) = \frac{m_3}{m_S^3}$$

 $\forall \lambda > 0 : A(\lambda X) = A(X)$

Sploščenost (kurtozis)

$$K(X) = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)^4\right] = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Presežna sploščenost:

$$K^*(X) = K(X) - 3$$

Vrstilne karakteristike

Kvantil reda p

je vsaka vrednost x_n , za katero velja:

$$P(X \le x_p) \ge p$$
 in $P(X \ge x_p) = 1 - p$

oz. $F(x_p-) \le p \le F(x_p)$

- Mediana: x_1
- Kvartili: $x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{2}{2}}, x_{\frac{3}{2}}$
- (Per)centili: $x_{\frac{1}{120}}, \dots, x_{\frac{99}{100}}$

Semi interkvartilni razmik

$$s = \frac{1}{2} \left(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}} \right)$$

Rodovne funkcije

Naj bo X sl. sprem. z zalogo vrednosti $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$p_k = P(X = k) \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Rodovna funkcija sl. sprem. X:

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Obstaja za vse $|s| \le 1$.

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)(0)}}{k!}$$

$$G_X(0) = p_0$$
 $G_X(1) = 1$ $G_X(s) = E(s^X)$

Izrek o enoličnosti:

$$\forall s \in [-1, 1] : G_X(s) = G_Y(s)$$

$$\iff P(X = k) = P(Y = k) \ \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{s \uparrow 1} G'_X(s) = \lim_{s \uparrow 1} \sum_{s \uparrow 1}^{\infty} k p_k s^{k-1} = \sum_{s \uparrow 1}^{\infty} \lim_{s \uparrow 1} k p_k s^{k-1} E(X)$$

Naj bo X sl. sprem. z rodovno funkcijo G_X , potem je:

$$G_X^{(n)}(1-) = E(X)(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)$$

Naj bosta X_1, \dots, X_n nedovisne sl. sprem. z rodovnimi funkcijami $G_{X_1}, \ldots G_{X_n}$:

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G(X_1)\cdots G(X_n) \quad \forall s \in [-1,1]$$

Naj bodo $\forall n \in \mathbb{N}$ sl. sprem N, X_1, \dots, X_n neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N in X_i rodovno funkcijo G_X $(X_1, \ldots, X_n$ so enako porazdeljene). Naj bo $S = X_1 + \cdots +$

$$G_S = G_N(G_X(s)) \quad \forall s \in [-1, 1]$$

Velja tudi E(S) = E(N)E(X)

$$G_{2X}(s) = G_X(s^2)$$

Znane rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{q^a-q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^{n} - b^{n} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0 + \dots + a_{k-1} x^{k-1}}{a_0 + \dots + a_{k-1} x^{k-1}} = a_0 + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_0^k + \dots + a_{k-1} x^{2k-1} + a_0^k$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$B_{\lambda}(x) = \sum_{n} {\lambda \choose n} x^{n} = (1+x)^{\lambda}; \qquad {\lambda \choose n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

Momentno rodovna funkcija

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
 $\forall t \in R$ če obstaja $= 1 + z_1 t + \frac{z_2}{2!} t^2 + \frac{z_3}{3!} t^3 + \dots$

V primeru, ko ima X zalogo vrednosti v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = G_X(e^t)$$

Za zvezno porazdeljeno sl. sprem. X velja:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$$

Naj pri nekem $\delta > 0$ $M_X(t)$ obstaja za vse $t \in (-\delta, \delta)$. Potem je porazdelitev za X natanko določana z M_X in vsi začetni momenti obstajajo:

$$z_k = E(X^k) = M_X^{(k)}(0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Trditey:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Če sta X in Y neodvisni, ie:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

Izreka o velikih številih Zaporedje sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verjetnostno konvergira proti sl. sprem. X, če

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \ge \varepsilon) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim P(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1$$

Zaporedje sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ skoraj gotovo (s.g.) konvergira proti sl. sprem. X, če

$$P(\lim) = 1$$

Če $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{s.g.} X$, potem

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon, \forall n \ge m) = 1$$

 $\overset{s.g.}{\longrightarrow} X, \text{ potem } X_n \xrightarrow[n \to \infty]{ver.} X$

Naj bo X_1, X_2, X_n, \ldots zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo $S = X_1 + \cdots + X_n, Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n}$. Potem je

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja šibki zakon o velikih številih, če zap $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 verjetnostno, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} < \varepsilon\right) = 1$$

 $\frac{a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k}=a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+a_0^k+\ldots+a_{k-1}x^{2k-1}+\ldots \\ \text{Za}_1\left\{X_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ velja krepki zakon o velikih številih, če zap. } \left\{Y_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergira proti 0 skoraj gotovo, tj.}$

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-E(S_n)}{n}=0\right)=1$$

Neenakost Markova

 $\check{\text{Ce}}$ ie X sl. sprem. z mat. up., potem je

$$P(|X| \ge a) \le \frac{E(|X|)}{a} \quad \forall a > 0$$

Neenakost Čebiševa

Če ima X disperzijo, je

$$P(|X - E(X)| \ge a\sigma(X)) \le \frac{1}{a^2} \quad \forall a > 0$$

oziroma za $\varepsilon := a\sigma(X)$

$$P(|X - E(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

 Izrek $\mathit{Markova}$. Če za sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\xrightarrow[n^2]{D(S_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$ potem velja ŠZVŠ.

IzrekČibiševa: Če so sl. sprem. X_1,X_2,\ldots paroma nekorelirane in je $\sup_{n\in\mathbb{N}}D(X_n)<\infty,$ potem velja ŠZVŠ.

Izrek~Kolmogorova Naj za neodvisne slučajne spremenljivke – Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ veljaj **centralni limitni zakon**, če X_1, X_2, \ldots velja pogoj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$$

potem za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja KZVŠ.

Zgornji pogoj velja, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$

Naj bodo X_1, X_2, \ldots neodvisne in enako porazdeljene sl. sprem. z disperzijo. Potem velja KZVŠ.

Centralni limitni izrek

Naj bo X_1,X_2,X_n,\ldots zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo $S=X_1+\cdots+X_n,\ Z_n=\frac{S_n-E(S_n)}{n}.$ Potem je $E(Z_n)=0$ in $D(Z_n)=1.$ Naj za zaporedje $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sl. sprem. velja $M_{Z_n}(t)\to M_{N(0,1)}(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$ $\forall t$

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_{N(0,1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Če so X_1, X_2, \ldots neodvisne in enako porazdeljene, velja centralni limitni zakon. Za velike n je $S_n \sim N(E(S_n), \sigma(S_n))$

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \le x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$$P(a \le S_n \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right) - \Phi\left(\frac{a - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right)$$

Izrek o zveznosti rodovne funkcije

$$M_{Z_n}(t) \to M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

potem

$$F_{Z_n}(x) \to F_{N(0,1)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funkcija Γ

•
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$
, $\forall s > 0$

• $\Gamma(1) = 1$

•
$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

•
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

•
$$\Gamma(n+1) = n!$$
 $n \in \mathbb{N}$

•
$$\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Funkcija B

•
$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$
, $\forall p, q > 0$

•
$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$$

•
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

•
$$\frac{1}{2}B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$$

• simetričnost:
$$B(p,q) = B(q,p)$$