Odvodi

funkcija	*odvod*
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$cos(x)$
$\cos(x)$	$-sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\mathrm{cth}(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
$\mathrm{arsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Osnove kombinatorike

Rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \qquad \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a - q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0 + ... + a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k} = a_0 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + a_0^k + ... + a_{k-1}x^{2k-1} + ...$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$B_\lambda(x) = \sum_n \binom{\lambda}{n} x^n = (1+x)^\lambda; \qquad \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

Izbori

Imamo n oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s pon.	**brez pon.**
variacije *vrstni red je pomemben*	n^k	$n^{\underline{k}}$
kombinacije *vrstni red ni pomemben*	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Pravila za računanje z dogodki

$$\begin{array}{rl}
\text{idempotentnost} & A \cup A = A = A \cap A \\
\text{komutativnost} & A \cup B = B \cup A \\
 & A \cap B = B \cap A \\
\text{asociativnost} & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
 & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
\text{distibutivnost} & (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C) \\
 & (A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (A \cap C) \\
\text{De Morgan} & (\bigcup_{i \in I} A_i)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement} \\
 & (\bigcap_{i \in I} A_i)^{\complement} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\complement} \\
 & A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A \\
 & A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \\
 & A \cup A^{\complement} = \Omega \quad A \cap A^{\complement} = \emptyset
\end{array}$$

Neprazna družina dogodkov $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja

- zaprtost za komplemente:

$$A \in \mathcal{F} \implies A^{\complement} \in \mathcal{F}$$

- zaprtost za števne unije:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je $\mathcal{F}$ le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu $\left(\bigcup_{i \in I} A_i^{\complement}\right)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$ je algebra zaprta tudi za razlike.

Najmanjša algebra je **trivialna**: $\{\emptyset, \Omega\}$.

Največja algebra je: $\mathcal{P}(\Omega)$.

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je $\{\emptyset, E, E^{\complement}, \Omega\}$.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je $A \cup B = \emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i \in \mathcal{F}$ (končno ali števno mnogo) je **popoln sistem dogodkov**, če

$$\bigcup_i A_i = \Omega \qquad A_i \cup A_j = \emptyset, \forall i, j : i \neq j$$

Verjetnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

- $P(A) \geq 0$ za $\forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- Za paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ velja *števna aditivnost*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset) = 0$
- P je končno aditivna.
- P je *monotona*: $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$
- P je *zvezna*:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \implies P(\bigcap_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i \to \infty} P(B_i)$$

$$P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Če lahko prostor izidov razbijemo na paroma nezdružljive enako verjetne dogodke, jih lahko obravnavamo kot izide: če je dogodek A unija k od n takih dogodkov, je $P(A) = k/n$.

Načelo vključitev in izključitev

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} P(\bigcap_{i \in S} A_i)$$

Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Izrek o polni verjetnosti

Če $H_1, H_2, H_3, \dots$ tvorijo **popoln sistem dogodkov** *(tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih)*, velja:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

Dogodkom H_i često pravimo hipoteze in jih je lahko končno ali pa števno neskončno

Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H1)P(A|H1) + P(H2)P(A|H2) + \dots}$$

Brezpogojnim verjetnostim $P(H_i)$ pravimo **apriorne**, pogojnim verjetnostim $P(H_i|A)$ pa **aposteriorne** verjetnosti hipotez.

Neodvisnot dogodkov

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja:

$$P(A \cup B) = P(A)P(B)$$

Če je $P(B) > 0$, je to ekvivalentno pogoju, da je $P(A|B) = P(A)$. Če je $0 < P(B) < 1$, pa je to ekvivalentno tudi pogoju, da je $P(A|B) = P(A|B^{\complement})$. Dogodki $A1, A2, A3, \dots$ so neodvisni, če za poljubne različne indekse $i_1, i_2, \dots, i_k$ velja:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ z lastnostjo, da je $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \equiv X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \leq x)$ dogodek.

Diskretne porazdelitve

Diskretna enakomerna porazdelitev na n točkah:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \text{Unif}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Binomska porazdelitev
$\text{Bin}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

Naj bo X št. uspelih (z verjetnostjo p) poskusov v zaporedju n poskusov. $X \sim \text{Bin}(n,p)$:

$$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bernulijeva porazdelitev $Ber(p) \sim Bin(1,p)$

Geometrijske porazdelitev
$\text{Geo}(p)$, $p \in (0,1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi.

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$$

Pascalova / negativna binomska porazdelitev
$Pas(m,p) = NB(m,p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se dogodek A zgodi m-tič v k-ti ponovitvi.

Oziroma X je število poskusov do vključno m-tega uspelega, pri katerig vsak uspe z verjetnostjo p. $X \sim Pas(m,p)$:

$$p_k = P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^k (1-p)^{k-n}$$

Hipergeometrijska porazdelitev
Iz posode, v kateri je n kroglic, od tega r rdečih, na slepo in brez vračanja izvlečemo s kroglic. Če z X označimo število rdečih med izvlečenimi, ima ta slučajna spremenljivka hipergeometrijsko porazdelitev: $X \sim \text{Hip}(s,r,n) = \text{Hip}(r,s,n)$. Velja

$$P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Aproksimacija binomske porazdelitve

Poissonova porazdelitev
$Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Če imamo veliko ponovitev ($n \to \infty$) z malo verjetnostjo ($p \to 0$), je $\text{Bin}(n,p) \approx \text{Poi}(np)$

Laplaceova lokalna formula: Če je $p, 1-p \gg \frac{1}{n}$, lahko $X \sim \text{Bin}(n,p)$ aproksimiramo

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Laplaceova integralska formula:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sigma}\right)$$

Za majhno relativno napako zahtevamo še:

- $|a-np| \ll \sigma^{4/3}$ ali $|b-np| \ll \sigma^{4/3}$
- $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ali $b - a \gg 1$

Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Realna slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka integrabilna funkcija $p_X : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, da za poljubna $a \le b$ velja:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p_X(t)dx$$

Funkciji p_X pravimo **porazdelitvena gostota**

Komulativna funkcija slučajne spremenljivke X

$$F_X(x) = \int_\infty^x p_X(t)dt$$

Če je F_X zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je X porazdeljena zvezno in za vse razen za končno mnogo točk x velja $p_x(x) = F_X'(x)$.

Zvezne porazdelitve

Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a,b]$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

Normalna / Gaussova porazdelitev $N(\mu, \sigma)$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Standardizirana normalna porazdelitev: $N(0,1)$

Eksponentna porazdelitev $\text{Exp}(\lambda)$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Porazdelitev $\Gamma(b,c)$, $b > 0$, $c > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-cx} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Funkcija Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad \forall s > 0$$

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Porazdelitev $\chi^2(n)$
$n \in \mathbb{N}$ je št. prostorskih stopenj

$$\chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

Cauchyjeva porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega -> R$

Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n)$$

Neodvisnot slučajnih spremenljivk

Slučajne spremenljivke so neodvisne, če je

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1)\dots F_{X_n}(x_n)$$

Torej so dogodki $(X_1 \le x_1), \dots, (X_n \le x_n)$ neodvisni.

Naj bo (X,Y) diskretno porazdeljen sluč. vektor:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad p_i = P(X = x_i) \quad P(Y = y_j)$$

potem velja:

$$X, Y \text{neodvisni} \iff p_{ij} = p_i q_j$$

Naj bo (X,Y) zvezno porazdeljen sluč. vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x,y)$, potem velja:

$$X, Y \text{neodvisni} \iff \exists p_X, p_Y : p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$$

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odprti množici in $h : A \to B$ taka bijekcija, da je funkcija $h^{-1} : B \to A$ zvezno odvedljiva. Nadalje naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, ki je izven množice A enaka nič. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y := h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X\left(h^{-1}(y)\right) \left|(h^{-1})'(y)\right| & y \in B \\ 0 & \textit{sicer} \end{cases}$$

Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, skoncentrirana na odprti množici A. Naj bo $h : A \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $h'(x) \ne 0$ za $\forall x \in A$. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y = h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y = \sum_{\substack{x \in A \\ h(x) = y}} \frac{p_X(x)}{|h'(x)|}$$