Verjetnost

n	...	št. ponovitev poskusa
A	...	dogodek
$k_n(A)$	...	frekvenca dogodka

Relativna frekvenca dogodka A:

$$f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

Statistična definicija verjetnosti

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A)$$

Klasična definicija verjetnosti

pri poguju, da so vsi izidi enako verjetni

$$P(A) = \frac{\#\text{ izidov } A}{\#\text{ vseh možnih izidov}}$$

Geometirjska definicija verjetnosti

če je število izidov neskončno, pogledamo razmerje ploščine vseh dogodkov in ugodnih dogodkov.

Aksiomatična definicija verjetnosti

Imamo prostor vseh izidov oz. **vzorčni prostor** Ω. Dogodki so nekatere podmnožice $A \subseteq \Omega$.

Pravila za računanje z dogodki

idempotentnost	$A \cup A = A = A \cap A$
komutativnost	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
asociativnost	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
distibutivnost	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C)$
	$(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (A \cap C)$
De Morgan	$(\bigcup_{i\in I} A_i)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\complement}$
	$(\bigcap_{i\in I} A_i)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}$

Neprazna družina dogodkov $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja

- zaprtost za komplemente:
$$A \in \mathcal{F} \implies A^{\complement} \in \mathcal{F}$$
- zaprtost za števne unije:
$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je $\mathcal{F}$ le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu $\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$ je algebra zaprta tudi za razlike.

Najmanjša algebra je **trivialna**: $\{\emptyset, \Omega\}$.

Največja algebra je: $\mathcal{P}(\Omega)$.

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je $\{\emptyset, E, E^{\complement}, \Omega\}$.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je $A \cup B = \emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i \in \mathcal{F}$ (končno ali števno mnogo) je **popoln sistem dogodkov**, če

$$\bigcup_i A_i = \Omega \qquad A_i \cup A_j = \emptyset, \forall i,j : i \neq j$$

Verjetnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

- $P(A) \geq 0$ za $\forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- Za paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ velja *števna aditivnost*
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset) = 0$
- P je končno aditivna.
- P je *monotona*: $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$
- P je *zvezna*:
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$
$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \implies P(\bigcap_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

Verjetnostni prostor

je trojček $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kjer je Ω množica vseh izidov, $\mathcal{F}$ σ-algebra in P preslikava verjetnosti.

Najmanjša algebra $\mathcal{F}$ na $\mathbb{N}$, ki vsebuje $\{1\}, \{2\}, \dots,$ je algebra

$$g = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ končna ali } A^{\complement} \text{ neskončna}\}$$

Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$