Osnove kombinatorike

Izbori

Imamo n oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s pon.	brez pon.
variacije *vrstni red je pomemben*	n^k	$n^{\underline{k}}$
kombinacije *vrstni red ni pomemben*	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Elementarna verjetnost

$$\begin{aligned} n & \quad \dots \quad \text{št. ponovitev poskusa} \\ A & \quad \dots \quad \text{dogodek} \\ k_n(A) & \quad \dots \quad \text{frekvenca dogodka} \end{aligned}$$

Relativna frekvenca dogodka A:

$$f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

Statistična definicija verjetnosti

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A)$$

Klasična definicija verjetnosti

pri poguju, da so vsi izidi enako verjetni

$$P(A) = \frac{\#\text{ izidov } A}{\#\text{ vseh izidov}}$$

Geometirjska definicija verjetnosti

če je število izidov neskončno, pogledamo razmerje ploščine vseh dogodkov in ugodnih dogodkov.

Aksiomatična definicija verjetnosti

Imamo prostor vseh izidov oz. **vzorčni prostor** Ω. Dogodki so nekatere podmnožice $A \subseteq \Omega$.

Pravila za računanje z dogodki

$$\begin{aligned} \text{idempotentnost} \quad & A \cup A = A = A \cap A \\ \text{komutativnost} \quad & A \cup B = B \cup A \\ & A \cap B = B \cap A \\ \text{asociativnost} \quad & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ \text{distibutivnost} \quad & (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C) \\ & (A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (A \cap C) \\ \text{De Morgan} \quad & \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\complement} \\ & \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement} \\ & A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A \\ & A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \\ & A \cup A^{\complement} = \Omega \quad A \cap A^{\complement} = \emptyset \end{aligned}$$

Neprazna družina dogodkov $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja

- zaprtost za komplemente:

$$A \in \mathcal{F} \implies A^{\complement} \in \mathcal{F}$$

- zaprtost za števne unije:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je $\mathcal{F}$ le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu $\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$ je algebra zaprta tudi za razlike.

Najmanjša algebra je **trivialna**: $\{\emptyset, \Omega\}$.

Največja algebra je: $\mathcal{P}(\Omega)$.

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je $\{\emptyset, E, E^{\complement}, \Omega\}$.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je $A \cup B = \emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i \in \mathcal{F}$ (končno ali števno mnogo) je **popoln sistem dogodkov**, če

$$\bigcup_i A_i = \Omega \qquad A_i \cup A_j = \emptyset, \forall i,j : i \neq j$$

Verjetnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

- $P(A) \geq 0$ za $\forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- Za paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ velja *števna aditivnost*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset) = 0$
- P je končno aditivna.
- P je *monotona*: $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$
- P je *zvezna*:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \implies P(\bigcap_{i=1}^{\infty}) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

$$P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Če lahko prostor izidov razbijemo na paroma nezdružljive enako verjetne dogodke, jih lahko obravnavamo kot izide: če je dogodek A unija k od n takih dogodkov, je $P(A) = k/n$.

Načelo vključitev in izključitev

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} P(\bigcap_{i\in S} A_i)$$

Verjetnostni prostor

je trojček $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kjer je Ω množica vseh izidov, $\mathcal{F}$ σ-algebra in P preslikava verjetnosti.

Najmanjša algebra $\mathcal{F}$ na $\mathbb{N}$, ki vsebuje $\{1\}, \{2\}, \dots$, je algebra

$$g = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ končna ali } A^{\complement} \text{ neskončna}\}$$

Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Izrek o polni verjetnosti

Če $H_1, H_2, H_3, \dots$ tvorijo **popoln sistem dogodkov** *(tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih)*, velja:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

Dogodkom H_i često pravimo hipoteze in jih je lahko končno ali pa števno neskončno

Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H1)P(A|H1) + P(H2)P(A|H2) + \dots}$$

Brezpogojnim verjetnostim $P(H_i)$ pravimo **apriorne**, pogojnim verjetnostim $P(H_i|A)$ pa **aposteriorne** verjetnosti hipotez.

Neodvisnot dogodkov

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja:

$$P(A \cup B) = P(A)P(B)$$

Če je $P(B) > 0$, je to ekvivalentno pogoju, da je $P(A|B) = P(A)$. Če je $0 < P(B) < 1$, pa je to ekvivalentno tudi pogoju, da je $P(A|B) = P(A|B^{\complement})$. Dogodki $A1, A2, A3, \dots$ so neodvisni, če za poljubne različne indekse $i_1, i_2, \dots, i_k$ velja:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Neodvisnot izpeljanih dogodkov *

Naj bo $\mathcal{F}$ družina dogodkov. S $\sigma(\mathcal{F})$ označimo najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje $\mathcal{F}$, tj. družino vseh dogodkov, ki jih dobimo iz dogodkov iz $\mathcal{F}$ s števnimi unijami in komplementi. Naj bodo $A_{i,j}$ neodvisni dogodki. Tedaj so tudi poljubni dogodki $B_1 \in \sigma(A_{11}, A_{12}, \dots), B_2 \in \sigma(A_21, A22, ...), B_3 \in \sigma(A_{31}, A_{32}, \dots), \dots$ neodvisni.

Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ z lastnostijo, da je $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \equiv X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \leq x)$ dogodek.

Diskretne porazdelitve

Diskretna enakomerna porazdelitev na n točkah:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \text{Unif}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Binomska porazdelitev
$\text{Bin}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

Naj bo X št. uspelih (z verjetnostjo p) poskusov v zaporedju n poskusov. $X \sim \text{Bin}(n,p)$:

$$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bernulijeva porazdelitev $Ber(p) \sim Bin(1,p)$

Geometrijske porazdelitev
$\text{Geo}(p)$, $p \in (0,1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi.

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$$

Pascalova / negativna binomska porazdelitev
$Pas(m,p) = NB(m,p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se dogodek A zgodi m-tič v k-ti ponovitvi.

Oziroma X je število poskusov do vključno m-tega uspelega, pri katerig vsak uspe z verjetnostjo p. $X \sim Pas(m,p)$:

$$p_k = P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^k (1-p)^{k-n}$$

Hipergeometrijska porazdelitev
Iz posode, v kateri je n kroglic, od tega r rdečih, na slepo in brez vračanja izvlečemo s kroglic. Če z X označimo število rdečih med izvlečenimi, ima ta slučajna spremenljivka hipergeometrijsko porazdelitev: $X \sim \text{Hip}(s,r,n) = \text{Hip}(r,s,n)$. Velja

$$P(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Aproksimacija binomske porazdelitve

Poissonova porazdelitev
$Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Če imamo veliko ponovitev ($n \to \infty$) z malo verjetnostjo ($p \to 0$), je $\text{Bin}(n,p) \approx \text{Poi}(np)$

Laplaceova lokalna formula: Če je $p, 1-p \gg \frac{1}{n}$, lahko $X \sim \text{Bin}(n,p)$ aproksimiramo

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Laplaceova integralska formula:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sigma}\right)$$

Za majhno relativno napako zahtevamo še:

- $|a-np| \ll \sigma^{4/3}$ ali $|b-np| \ll \sigma^{4/3}$
- $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ali $b - a \gg 1$

Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Realna slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka integrabilna funkcija $p_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, da za poljubna $a \le b$ velja:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p_X(t)dx$$

Funkciji p_X pravimo **porazdelitvena gostota**

Komulativna funkcija slučajne spremenljivke X

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} p_X(t)dt$$

Če je F_X zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je X porazdeljena zvezno in za vse razen za končno mnogo točk x velja $p_x(x) = F'_X(x)$.

Zvezne porazdelitve

Enakomerna zvezna porazdelitev na $[a,b]$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

Normalna / Gaussova porazdelitev $N(\mu, \sigma)$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Standardizirana normalna porazdelitev: $N(0,1)$

Eksponentna porazdelitev $\text{Exp}(\lambda)$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Porazdelitev $\Gamma(b,c)$, $b > 0$, $c > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-cx} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Porazdelitev $\chi^2(n)$
$n \in \mathbb{N}$ je št. prostorskih stopenj

$$\chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$$

Cauchyjeva porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega -> R$

Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n)$$

Neodvisnot slučajnih spremenljivk

Slučajne spremenljivke so neodvisne, če je

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)$$

Torej so dogodki $(X_1 \le x_1), \dots, (X_n \le x_n)$ neodvisni.

Naj bo (X,Y) diskretno porazdeljen sluč. vektor:

$$p_{ij} = P(X \le x_i, Y \le y_j) \quad p_i = P(X \le x_i) \quad P(Y \le y_j)$$

potem velja:

$$X, Y \text{neodvisni} \iff p_{ij} = p_i q_j$$

Naj bo (X,Y) zvezno porazdeljen sluč. vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x,y)$, potem velja:

$$X, Y \text{neodvisni} \iff \exists p_X, p_Y : p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$$

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odprti množici in $h : A \to B$ taka bijekcija, da je funkcija $h^{-1} : B \to A$ zvezno odvedljiva. Nadalje naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, ki je izven množice A enaka nič. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y := h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X\left(h^{-1}(y)\right) \left|(h^{-1})'(y)\right| & y \in B \\ 0 & sicer \end{cases}$$

Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, skoncentrirana na odprti množici A. Naj bo $h : A \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $h'(x) \ne 0$ za $\forall x \in A$. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y = h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y = \sum_{\substack{x \in A \\ h(x) = y}} \frac{p_X(x)}{|h'(x)|}$$