Odvodi

funkcija	*odvod*
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$cos(x)$
$\cos(x)$	$-sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\mathrm{cth}(x)=\frac{1}{\mathrm{th}(x)}$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
$\mathrm{arsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arth}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Osnove kombinatorike

Rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \qquad \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a-q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$\frac{a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k}=a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+a_0^k+\ldots+a_{k-1}x^{2k-1}+\ldots$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$B_\lambda(x)=\sum_n \binom{\lambda}{n}x^n=(1+x)^\lambda; \qquad \binom{\lambda}{n}=\frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

Izbori

Imamo n oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s pon.	**brez pon.**
variacije *vrstni red je pomemben*	n^k	$n^{\underline{k}}$
kombinacije *vrstni red ni pomemben*	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k}=\frac{n^{\underline{k}}}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$$

Pravila za računanje z dogodki

$$\begin{aligned}
\text{idempotentnost}\quad & A\cup A=A=A\cap A\\
\text{komutativnost}\quad & A\cup B=B\cup A\\
& A\cap B=B\cap A\\
\text{asociativnost}\quad & (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\
& (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\\
\text{distibutivnost}\quad & (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(A\cap C)\\
& (A\cap B)\cup C=(A\cap C)\cup(A\cap C)\\
\text{De Morgan}\quad & \Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)^{\complement}=\bigcap_{i\in I}A_i^{\complement}\\
& \Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)^{\complement}=\bigcup_{i\in I}A_i^{\complement}\\
& A\cup\Omega=\Omega \quad A\cap\Omega=A\\
& A\cup\emptyset=A \quad A\cap\emptyset=\emptyset\\
& A\cup A^{\complement}=\Omega \quad A\cap A^{\complement}=\emptyset
\end{aligned}$$

Neprazna družina dogodkov $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja

- zaprtost za komplemente:

$$A\in\mathcal{F}\implies A^{\complement}\in\mathcal{F}$$

- zaprtost za števne unije:

$$A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{F}\implies\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je $\mathcal{F}$ le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu $\left(\bigcup_{i\in I}A_i^{\complement}\right)^{\complement}=\bigcap_{i\in I}A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je $A\setminus B=A\cap B^{\complement}$ je algebra zaprta tudi za razlike.

Najmanjša algebra je **trivialna**: $\{\emptyset,\Omega\}$.

Največja algebra je: $\mathcal{P}(\Omega)$.

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je $\{\emptyset,E,E^{\complement},\Omega\}$.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je $A\cup B=\emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i\in\mathcal{F}$ (končno ali števno mnogo) je **popoln sistem dogodkov**, če

$$\bigcup_i A_i=\Omega \qquad A_i\cup A_j=\emptyset,\ \forall i,j: i\neq j$$

Verjetnost na $(\Omega,\mathcal{F})$ je preslikava $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ z lastnostmi:

- $P(A)\geq 0$ za $\forall A\in\mathcal{F}$
- $P(\Omega)=1$
- Za paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ velja *števna aditivnost*

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset)=0$
- P je končno aditivna.
- P je *monotona*: $A\subseteq B\implies P(A)\leq P(B)$
- $P(A^{\complement})=1-P(A)$
- P je *zvezna*:

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\implies P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Big)=\lim_{i\to\infty}P(A_i)$$

$$B_1\supseteq B_2\supseteq\cdots\implies P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\Big)=\lim_{i\to\infty}P(B_i)$$

$$P(A^{\complement})=1-P(A)$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Če lahko prostor izidov razbijemo na paroma nezdružljive enako verjetne dogodke, jih lahko obravnavamo kot izide: če je dogodek A unija k od n takih dogodkov, je $P(A)=k/n$.

Načelo vključitev in izključitev

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$$

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq[n]}(-1)^{|S|+1}P\Big(\bigcap_{i\in S}A_i\Big)$$

Pogojna verjetnost

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Izrek o polni verjetnosti

Če $H_1,H_2,H_3,\ldots$ tvorijo **popoln sistem dogodkov** *(tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih)*, velja:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+\ldots$$

Dogodkom H_i često pravimo hipoteze in jih je lahko končno ali pa števno neskončno

Bayesova formula

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H1)P(A|H1)+P(H2)P(A|H2)+\ldots}$$

Brezpogojnim verjetnostim $P(H_i)$ pravimo **apriorne**, pogojnim verjetnostim $P(H_i|A)$ pa **aposteriorne** verjetnosti hipotez.

Neodvisnot dogodkov

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Če je $P(B)>0$, je to ekvivalentno pogoju, da je $P(A|B)=P(A)$. Če je $0<P(B)<1$, pa je to ekvivalentno tudi pogoju, da je $P(A|B)=P(A|B^{\complement})$. Dogodki $A1,A2,A3,\ldots$ so neodvisni, če za poljubne različne indekse $i_1,i_2,\ldots,i_k$ velja:

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija $X:\Omega\to\mathbb{R}$ z lastnostjo, da je $\forall x\in\mathbb{R}$ množica $\{\omega\in\Omega: X(\omega)<x\}\equiv X^{-1}((-\infty,x])\equiv(X\leq x)$ dogodek.

Diskretne porazdelitve

Diskretna enakomerna porazdelitev na n točkah:

$$X\sim\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}=\mathrm{Unif}\{a_1,\ldots,a_n\}$$

Binomska porazdelitev
$\mathrm{Bin}(n,p)$, $n\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$

Naj bo X št. uspelih (z verjetnostjo p) poskusov v zaporedju n poskusov. $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$:

$$p_k=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Bernulijeva porazdelitev $Ber(p)\sim Bin(1,p)$

Geometrijske porazdelitev
$\mathrm{Geo}(p)$, $p\in(0,1)$

$(X=k)$ je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi.

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$

Pascalova / negativna binomska porazdelitev
$Pas(m,p)=NB(m,p)$, $m\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$

$(X=k)$ je dogodek, da se dogodek A zgodi m-tič v k-ti ponovitvi.

Oziroma X je število poskusov do vključno m-tega uspelega, pri katerig vsak uspe z verjetnostjo p. $X\sim Pas(m,p)$:

$$p_k=P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^k(1-p)^{k-n}$$

Hipergeometrijska porazdelitev

Iz posode, v kateri je n kroglic, od tega r rdečih, na slepo in brez vračanja izvlečemo s kroglic. Če z X označimo število rdečih med izvlečenimi, ima ta slučajna spremenljivka hipergeometrijsko porazdelitev: $X\sim\mathrm{Hip}(s,r,n)=\mathrm{Hip}(r,s,n)$. Velja

$$P(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}}=\frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Aproksimacija binomske porazdelitve

Poissonova porazdelitev
$Poi(\lambda)$, $\lambda>0$

$$p_k=P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Če imamo veliko ponovitev $(n\to\infty)$ z malo verjetnostjo $(p\to 0)$, je $\mathrm{Bin}(n,p)\approx\mathrm{Poi}(np)$

Laplaceova lokalna formula: Če je $p,1-p\gg\frac{1}{n}$, lahko $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$ aproksimiramo

$$P(X=k)\approx\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma=\sqrt{np(1-p)}$$

Laplaceova integralska formula:

$$P(a\leq X\leq b)\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sigma}\right)$$

Za majhno relativno napako zahtevamo še:

- $|a-np|\ll\sigma^{4/3}$ ali $|b-np|\ll\sigma^{4/3}$
- $a,b\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ ali $b-a\gg 1$

Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_X(x)=P(X\leq x)$$

Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Realna slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka integrabilna funkcija $p_X:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, da za poljubna $a\leq b$ velja:

$$P(a\leq X\leq b)=\int_a^b p_X(t)dx$$

Funkciji p_X pravimo **porazdelitvena gostota**

Komulativna funkcija slučajne spremenljivke X

$$F_X(x)=\int_{\infty}^{x}p_X(t)dt$$

Če je F_X zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je X porazdeljena zvezno in za vse razen za končno mnogo točk x velja $p_x(x)=F'_X(x)$.

Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $X=(X_1,\ldots,X_n):\Omega->R$

Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)=P(X_1\leq x_1,\ldots,X_n\leq x_n)$$

Neodvisnot slučajnih spremenljivk

Slučajne spremenljivke so neodvisne, če je

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\ldots F_{X_n}(x_n)$$

Torej so dogodki $(X_1\leq x_1),\ldots,(X_n\leq x_n)$ neodvisni.

Naj bo (X,Y) diskretno porazdeljen sluč. vektor.

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j) \quad p_i=P(X=x_i) \quad P(Y=y_j)$$

potem velja:

$$X,Y\,\text{neodvisni}\iff p_{ij}=p_iq_j$$

Naj bo (X,Y) zvezno porazdeljen sluč. vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x,y)$, potem velja:

$$X,Y\,\text{neodvisni}\iff\exists p_X,p_Y: p_{(X,Y)}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bosta $A,B\subseteq\mathbb{R}$ odprti množici in $h:A\to B$ taka bijekcija, da je funkcija $h^{-1}:B\to A$ zvezno odvedljiva. Nadalje naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, ki je izven množice A enaka nič. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y:=h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|(h^{-1})'(y)\right| & y\in B\\ 0 & sicer\end{cases}$$

Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, skoncentrirana na odprti množici A. Naj bo $h:A\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $h'(x)\neq 0$ za $\forall x\in A$. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y=h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y=\sum_{\substack{x\in A\\ h(x)=y}}\frac{p_X(x)}{|h'(x)|}$$

Naj bosta $A,B\in\mathbb{R}^n$ odprti množici; $h:A\to B$ taka bijekcija, da je h^{-1} parcialno zvezno odvedljiva; X sl. vek. porazdeljen zvezno z gostoto p_X. Tedaj je $Y=h(X)$ porazdeljen:

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_X(h^{-1}(y)|\det J(h^{-1}(y))|) & y\in B\\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

$$J_g=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

Matematično upanje

Diskretno porazdeljena sl. sprem.
$X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots\\ p_1 & p_2 & \ldots\end{pmatrix}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k \quad \text{če} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<\infty$$

$$E(h(X))=\sum_{k=1}^{\infty}h(x_k)p_k$$

$$E(h(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}h(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$

Zvezno porazdeljena sl. sprem. X z gostoto p_X

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x)dx \quad \text{če} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|x|p_X(x)dx<\infty$$

$$E(h(X))=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)p_X(x)dx$$

$$E(h(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)p_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Za neko zvezno funkcijo h.

Lastnosti

Če ima $|X|$ mat. up., ga ima tudi X in velja

$$|E(X)|\leq E(|X|)$$

Če obstaja $E(X^2)$ in $E(Y^2)$, obstaja tudi $E(XY)$ in velja:

$$|E(XY)|\leq E(|XY|)\leq\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Za poljubne sl. sprem $X_1,\ldots,X_n$ velja:

$$E(a_1X_1+\ldots a_nX_n)=a_1E(X_1)+\cdots+a_nE(X_n)$$

Indikator dogodka

Indikator dogodka A je sl. sprem.:

$$1_A=\begin{cases}1 & A\text{se zgodi}\\ 0 & A\text{se ne zgodi}\end{cases} \qquad E(1_A)=P(A)$$

Disperzija (varianca)

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Lastnosti:

- $D(X) \geq 0$
- $D(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$
- $D(aX) = a^2 D(X)$

Standardna diviacija/odklon:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

zanjo velja $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

Nekoreliranost

Sl. sprem. X in Y sta nekorelirani, če velja:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$X, Y \text{ neodvisni} \implies X, Y \text{ nekorelirani}$$

Če imata X in Y, je nekoreliranost ekvivalentna zvezi:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

Kovarianca

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

- $K(X, X) = D(X)$
- $K(X, Y) = 0 \iff X, Y \text{nekorelirani}$
- $K(aX, bY, Z) = aK(X, Z) + bK(Y, Z)$
- $K(X, Y) = K(Y, X)$
- $K(aX + b, cY + d) = acK(X, Y)$
- $|K(X, Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)}$
- $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X, Y)$
- $D(X_1 + \cdots + X_n) = D(X_1) + \cdots + D(X_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} K(X_i, X_j)$

Standardizacija

$$X_S = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

Korelacijski koeficient

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = E(X_S, Y_S)$$

Lastnosti:

- $r(X, Y) = 0 \iff X, Y \text{nekorelirani}$
- $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$
- $r(X, Y) = 1 \iff P(X_S = Y_S) = 1$
- $r(X, Y) = -1 \iff P(X_S = -Y_S) = 1$
- $r(aX + b, cY + d) = r(X, Y)$

Pogojne porazdelitve

Pogojna porazdelitev sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$X|B \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ P(X = a_1|B) & P(X = a_2|B) & \ldots \end{pmatrix}$$

Pogojna porazdelitvena funkcija

sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$F_{X|B}(x) = F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P((X \leq x) \cap B)}{P(B)}$$

Če je pogojna porazdelitev zvezna, objstaja tudi **pogojna porazdelitvena gostota**:

$$p_{X|B}(x) = F'_{X|B}(x)$$

Pogojna gostota

$$p_X(x|Y = y) \equiv p_X(x|y) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Pogojno matematično upanje

$$E(h(X)|B) = \sum_x h(x)P(X = x|B)$$

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X|Y)(x|y)} dx \\ &= \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x p_{(X,Y)(x,y)} dx \end{aligned}$$

$$E(h(X, Y)|Y = y) = E(h(X, y)|Y = y)$$

$$E(h(X, Y)|Y) = \sum_x h(x, Y)P(X = x|Y)$$

$$E(h(X, Y)|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, Y)P_{X|Y}(x|Y)dx$$

Za vsako slučajno spremenlivko X in dogodek B veleja:

$$E(X|B) = \frac{E(XZ)}{P(B)} = \frac{E(XZ)}{E(Z)}$$

kjer je sl. sprem. Z indikator dogodka B.

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in popoln sistem dogodkov $H_1, H_2, \ldots$ velja **izrek o polni pričakovani vrednosti**

$$E(X) = P(H_1)E(X|H_1) + P(H_2)E(X|H_2) + \ldots$$

Regresijska funkcija

$$\varphi(y) = E(X|Y = y)$$

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in diskretno sl. sprem. Y velja:

$$E(Xg(Y)|Y) = E(X|Y)g(Y)$$

$$E(Xg(Y)) = E(E(X|Y)g(Y))$$

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

Za vsak dododek A in vsako sl. sprem Y velja:

$$E(P(A|Y)) = P(A)$$

Momenti

Moment reda k glede na točko a je

$$m_k(a) = E((X - a)^k) \quad \textit{če obstaja}$$

- **Začetni moment** $z_k := m_k(0) = E(X^k)$
- **Centralni moment** $m_k := m_k(E(X)) = E((X - E(x))^k)$
- **Faktorski moment** reda r: $E(X(X - 1)\ldots(X - r + 1)) = G_X^{(r)}(1)$

$$z_1 = E(X) \qquad m_2 = D(X)$$

Če obstaja $m_n(a)$, obstaja tudi $m_k(a)$ za $\forall k < n$.

Če obstaja z_n, obstaja tudi $m_n(a)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$

Centralne momente lahko izračunamo iz začetnih:

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k$$

Asimetrija

$$A(X) = E(X_S^3) = E\left(\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right)^3\right) = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}$$

$\forall \lambda > 0 : A(\lambda X) = A(X)$

Sploščenost (kurtozis)

$$K(X) = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)^4\right] = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Presežna sploščenost:

$$K^*(X) = K(X) - 3$$

Vrstilne karakteristike

Kvantil reda p

je vsaka vrednost x_p, za katero velja:

$$P(X \leq x_p) \geq p \text{ in } P(X \geq x_p) = 1 - p$$

oz. $F(x_p-) \leq p \leq F(x_p)$

- Mediana: $x_{\frac{1}{2}}$
- Kvartili: $x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{2}{4}}, x_{\frac{3}{4}}$
- (Per)centili: $x_{\frac{1}{100}}, \ldots, x_{\frac{99}{100}}$

Semi interkvartilni razmik

$$s = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}\right)$$

Rodovne funkcije

Naj bo X sl. sprem. z zalogo vrednosti $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$p_k = P(X = k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Rodovna funkcija sl. sprem. X:

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Obstaja za vse $|s| \leq 1$.

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)(0)}}{k!}$$

$$G_X(0) = p_0 \quad G_X(1) = 1 \quad G_X(s) = E(s^X)$$

Izrek o enoličnosti:

$$\begin{aligned} &\forall s \in [-1, 1] : G_X(s) = G_Y(s) \\ &\qquad \iff P(X = k) = P(Y = k)\ \forall k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$\lim_{s\uparrow 1} G'_X(s) = \lim_{s\uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{s\uparrow 1} kp_k s^{k-1} E(X)$$

Naj bo X sl. sprem. z rodovno funkcijo G_X, potem je:

$$G_X^{(n)}(1-) = E(X)(X - 1)(X - 2)\ldots(X - n + 1))$$

Naj bosta $X_1, \ldots, X_n$ nedovisne sl. sprem. z rodovnimi funkcijami $G_{X_1}, \ldots G_{X_n}$:

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G(X_1)\ldots G(X_n) \qquad \forall s \in [-1, 1]$$

Naj bodo $\forall n \in \mathbb{N}$ sl. sprem $N, X_1, \ldots, X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N in X_i rodovno funkcijo G_X ($X_1, \ldots, X_n$ so enako porazdeljene). Naj bo $S = X_1 + \cdots + X_n$. Potem je:

$$G_S = G_N(G_X(s)) \qquad \forall s \in [-1, 1]$$

Velja tudi $E(S) = E(N)E(X)$.

$$G_{2X}(s) = G_X(s^2)$$

Znane rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \qquad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1 - q^{b+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1 - q} \qquad \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a - q^{b+1}}{1 - q}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}}{1 - x^k} = a_0 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + a_0^k + \ldots + a_{k-1}x^{2k-1} + \ldots$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n + k - 1}{k} x^k$$

$$B_\lambda(x) = \sum_n \binom{\lambda}{n} x^n = (1 + x)^\lambda; \qquad \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

Momentno rodovna funkcija

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \qquad \forall t \in R \quad \textit{če obstaja} \\ &= 1 + z_1 t + \frac{z_2}{2!}t^2 + \frac{z_3}{3!}t^3 + \ldots \end{aligned}$$

V primeru, ko ima X zalogo vrednosti v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = G_X(e^t)$$

Za zvezno porazdeljeno sl. sprem. X velja:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$$

Naj pri nekem $\delta > 0$ $M_X(t)$ obstaja za vse $t \in (-\delta, \delta)$. Potem je porazdelitev za X natanko določana z M_X in vsi začetni momenti obstajajo:

$$z_k = E(X^k) = M_X^{(k)}(0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Trditev:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Če sta X in Y neodvisni, je:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

Izreka o velikih številih

Zaporedje sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **verjetnostno** konvergira proti sl. sprem. X, če

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$$

Zaporedje sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **skoraj gotovo** (s.g.) konvergira proti sl. sprem. X, če

$$P(\lim_{n\to\infty}) = 1$$

Če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} X$, potem

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{m\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon, \forall n \geq m) = 1$$

Če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} X$, potem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{ver.} X$

Naj bo $X_1, X_2, X_n, \ldots$ zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo $S = X_1 + \cdots + X_n$, $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n}$. Potem je $E(Y_n) = 0$.

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja **šibki zakon o velikih številih**, če zap. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 verjetnostno, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} < \varepsilon\right) = 1$$

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja **krepki zakon o velikih številih**, če zap. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 skoraj gotovo, tj.

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0\right) = 1$$

Neenakost Markova

Če je X sl. sprem. z mat. up., potem je

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a} \quad \forall a > 0$$

Neenakost Čebiševa

Če ima X disperzijo, je

$$P(|X - E(X)| \geq a\sigma(X)) \leq \frac{1}{a^2} \quad \forall a > 0$$

oziroma za $\varepsilon := a\sigma(X)$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Izrek Markova: Če za sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, potem velja ŠZVŠ.

Izrek Čibiševa: Če so sl. sprem. $X_1, X_2, \ldots$ paroma nekorelirane in je $\sup_{n\in\mathbb{N}} D(X_n) < \infty$, potem velja ŠZVŠ.

Izrek Kolmogorova Naj za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ velja pogoj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$$

potem za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja KZVŠ.

Zgornji pogoj velja, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$

Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene sl. sprem. z disperzijo. Potem velja KZVŠ.

Centralni limitni izrek

Naj bo $X_1, X_2, X_n, \ldots$ zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo $S = X_1 + \cdots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n}$. Potem je $E(Z_n) = 0$ in $D(Z_n) = 1$.

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ veljaj **centralni limitni zakon**, če

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{N(0,1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Če so $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene, velja centralni limitni zakon. *Za velike n je $S_n \sim N(E(S_n), \sigma(S_n))$*

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right) - \Phi\left(\frac{a - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right)$$

Izrek o zveznosti rodovne funkcije

Naj za zaporedje $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sl. sprem. velja

$$M_{Z_n}(t) \to M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

potem

$$F_{Z_n}(x) \to F_{N(0,1)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funkcija Γ

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad \forall s > 0$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n + 1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x)\Gamma(x + 1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Funkcija B

- $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx, \qquad \forall p, q > 0$
- $B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{u^{p-1}}{(1 + u)^{p+q}} du$
- $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$
- $\frac{1}{2}B(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$
- simetričnost: $B(p, q) = B(q, p)$