UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Aljaž Ostrež

Matrične potence

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Marjeta Kramar Fijavž
Somentor: doc. dr. Pavle Boškoski

Ljubljana, 2021

Kazalo

Matrične potence

Povzetek

Powers of Matrices

Abstract

Math. Subj. Class. (2020):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

Z naslednjimi zgledi bomo motivirali uporabo matričnih potenc.

1.1. Fibonaccijevo zaporedje.

Poglejmo si uporabo matričnih potenc na primeru Fibonaccijevega zaporedja.

Zgled 1.1 (Fibonaccijevo zaporedje)**.** Poznamo rekurzivno formulo za Fibonaccijevo zaporedje:

$$\begin{aligned} &f_0 = 0, f_1 = 1 \\ &f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \geq 1. \end{aligned}$$

Z uvedbo zaporedja $g_n = f_{n-1}$ dobimo sistem:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + g_n \\ g_{n+1} &= f_n \end{aligned}$$

ob začetnih pogojih $f_1 = 1$ in $g_1 = 0$. Ta sistem lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. Rekurzivno uporabljamo zgornji predpis, da dobimo

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo matričnih potenc torej lahko dobimo ekplicitno formulo za splošni člen v Fibonaccijevemu zaporedju

$$f_n = a_{21},$$

kjer je a_{21} prvi element v drugi vrstici matrike:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

$\diamondsuit$

Tekom študija smo že spoznali en način za računanje matričnih potenc – potence matrik lahko računamo s prevedbo na Jordanovo formo.

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrika. Potem velja:

$$A^n = PJ^nP^{-1},$$

kjer je J Jordanova forma matrike A, P pa pripadajoča prehodna matrika. Vemo, da:

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_k^n \end{bmatrix},$$

kjer so $J_i, i = 1, \ldots, k$ Jordanovi bloki. Za Jordanove bloke velja:

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{m_i}\lambda_i^{n-m_i} \\ & \lambda_i^n & \cdots & \binom{n}{m_i-1}\lambda_i^{n-(m_i-1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_i^n \end{bmatrix},$$

pri čemer je λ_i lastna vrednost matrike A, $m_i \times m_i$ pa velikost Jordanovega bloka. V posebnem primeru, ko je J diagonalna matrika, velja:

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^n \end{bmatrix},$$

Zgled 1.2 (Fibonaccijevo zaporedje – nadaljevanje)**.** Z izračunom lastnih vrednosti in lastnih vektorjev bi za matriko:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dobili Jordanovo formo (oziroma v tem primeru kar diagonalizacijo) matrike A in prehodno matriko:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naš sistem enačb lahko zapišemo kot:

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = PJ^nP^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo, da je:

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

S pomočjo matričnih potenc smo dobili eksplicitno formulo zaporedja iz rekurzivnega predpisa. ◊

Zakaj potrebujemo nove metode za računanje matričnih potenc, če jih že znamo računati s pomočjo Jordanove forme? Izkaže se, da je izračun Jordanove forme numerično zahteven, poleg tega pa nam Jordanova forma omogoča potenciranje matrik le v končnih dimenzijah. Velikokrat nam tudi ni potrebno izračunati celotne matrike A^n, ampak želimo le poznati nekatere njene lastnosti. Namesto Jordanove forme bomo uporabili spektralni razcep, ki ni odvisen od izbire baze matrike A.

Želeli bomo opisati asimptotsko obnašanje matričnih zaporedij s splošnim členom $A_n = A^n$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. To obnašanje se lahko razbere že iz spektra matrike, včasih pa celo le iz spektralnega radija.

1.2. **Markovske verige.** Uporabo matričnih potenc bomo prikazali na primeru markovskih verig. Navedimo definicijo markovske verige.

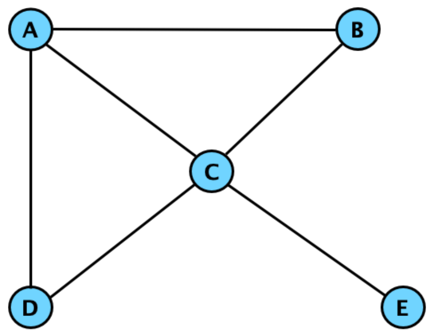
Definicija 1.3. Naj bo S števna množica, ki jo poimenujemo *množica stanj.* Njene elemente $s \in S$ imenujemo *stanja. Slučajni proces* (z diskretnim časom) je vsako zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$, katerih zaloga vrednosti leži v S. To zaporedje imenujemo *markovska veriga*, če ima markovsko lastnost:

$$(1) \quad P(X_n = s_n | \, X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n = s_n | \, X_{n-1} = s_{n-1}),$$

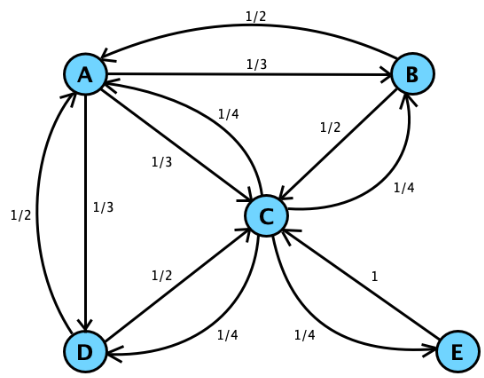
tj. verjetnost stanja na n-tem koraku je odvisna le od stanja na $(n-1)$-tem koraku. Vpeljemo še pojma *prehodne verjetnosti* $p_{ij} = P(X_n = s_j | \, X_{n-1} = s_i)$ in *prehodne matrike* $P = (p_{ij})$.

Poglejmo si zgled markovske verige, ki bo hkrati tudi motiviral računanje limite zaporedja $A_n = A^n$, če ta obstaja.

Zgled 1.4. Izberimo si vozlišče na poljubnem neusmerjenem grafu. Izberemo si naključnega soseda izbranega vozlišča in se premaknemo v njega. Postopek ponavljamo. Kakšen je delež obiskov določenega vozlišča v grafu po dolgem času? Ker soseda izbiramo naključno, začetnemu grafu priredimo utežen usmerjen graf, kjer so uteži verjetnosti, da se premaknemo v povezanega soseda. Tu privzamemo, da so izbire sosedov enako verjetne, za vozlišče stopnje k so vse verjetnosti enake $\frac{1}{k}$.



SLIKA 1. Začetni neusmerjen graf.



SLIKA 2. Prirejen utežen usmerjen graf.

Naša množica stanj je $S = \{A, B, C, D, E\}$, prehodna matrika pa bo kar matrika sosednosti prirejenega uteženega usmerjenega grafa

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ker je izbira naslednjega vozlišče v zaporedju odvisna le od trenutnega vozlišča, ima naše zaporedje markovsko lastnost, torej bo naša pot v grafu markovska veriga. Kaj nam pa pove prehodna matrika?

- Matrika P nam pove, kakšna je verjetnost, da bomo prišli v določeno vozlišče v naslednjem koraku, če smo trenutno v vozlišču, ki ga predstavlja vrstica.
- P^2 nam pove, kakšna je verjetnost, da bomo prišli v določeno vozlišče čez 2 koraka.

- ...

Za naš primer se izkaže celo, da obstaja limita:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,17 & 0,33 & 0,17 & 0,08 \\ 0,25 & 0,17 & 0,33 & 0,17 & 0,08 \\ 0,25 & 0,17 & 0,33 & 0,17 & 0,08 \\ 0,25 & 0,17 & 0,33 & 0,17 & 0,08 \\ 0,25 & 0,17 & 0,33 & 0,17 & 0,08 \end{bmatrix}.$$

Ta limita nam pove delež obiskov za vsako vozlišče (če bi zelo dolgo potovali). Limita je tudi neodvisna od izbire začetnega vozlišča, če je le graf povezan. ♢

1.3. **Ponovitev iz linearne algebre.** Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika dimenzije $n \times n$. Definiramo *množico polinomov matrike* A s predpisom

$$\mathcal{P}_A := \Big\{ \sum_{i=0}^{m} \alpha_i A^i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}_0 \Big\} \subset \mathbb{C}^{n\times n}. \tag{2}$$

Če je $p(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ polinom, bomo pisali

$$p(A) := \sum_{i=0}^{m} \alpha_i A^i. \tag{3}$$

Definiramo preslikavo

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{C}[x] &\longrightarrow \mathcal{P}_A \\ p &\longmapsto p(A), \end{aligned} \tag{4}$$

kjer je $\mathbb{C}[x]$ množica polinomov s koeficienti iz $\mathbb{C}$. Jedro preslikave Φ_A je

$$\ker(\Phi_A) = \Big\{ p \in \mathbb{C}[x] \mid p(A) = 0 \Big\}, \tag{5}$$

torej $\ker(\Phi_A)$ je množica vseh polinomov, za katere je $p(A) = 0$.

Definicija 1.5. *Minimalni polinom $m_A \in \mathbb{C}[x]$ je neničeln monični polinom najmanjše stopnje iz $\ker(\Phi_A)$, tj. monični polinom p najnižje stopnje, za katerega je $p(A) = 0$.*

Opomba 1.6. *Monični polinom* je polinom z vodilnim koeficientom enakim 1.

Spomnimo se, da je minimalni polinom m_A enolično določen z matriko A. Potrebovali bomo še pojem *lastne vrednosti* in *lastnega vektorja* matrike A, osvežimo pa še definicijo *karakterističnega polinoma* matrike A. Poleg tega navedimo še definicijo *lastnega podprostora*.

Definicija 1.7. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

- Število $\lambda \in \mathbb{C}$ imenujemo *lastna vrednost* matrike A, če obstaja vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, tako da velja

$$Ax = \lambda x. \tag{6}$$

  Vektorji x, za katere velja zgornja enačba, so pripadajoči *lastni vektorji.*
- Polinom

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in \mathcal{P}_A \tag{7}$$

  v spremenljivki λ imenujemo *karakteristični polinom* matrike A.

- *Lastni podprostor* matrike A, ki pripada lastni vrednosti λ, je definiran kot $\ker(A - \lambda I)$.

Algebraična večkratnost lastne vrednosti λ je večkratnost λ kot ničle polinoma $\Delta_A(\lambda)$. *Geometrična večkratnost* lastne vrednosti λ pa je dimenzija pripadajočega lastnega podprostora $\ker(A - \lambda I)$. Brez dokaza se spomnimo naslednje trditve, s pomočjo katere med drugim tudi na roke iščemo lastne vrednosti matrike A.

Trditev 1.8. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, m_A pripadajoči minimalni polinom, Δ_A pripadajoči karakteristični polinom in $\lambda \in \mathbb{C}$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(1) *λ je lastna vrednost matrike A,*
(2) *λ je ničla polinoma m_A,*
(3) *λ je ničla polinoma Δ_A.*

Iz dejstva, da je lastna vrednost λ ničla polinoma Δ_A, torej $\det(A - \lambda I) = 0$, sledi, da matrika $A - \lambda I$ ni obrnljiva.

Posledica 1.9. *Število $\lambda \in \mathbb{C}$ je lastna vrednost matrike A natanko tedaj, ko matrika $A - \lambda I$ ni obrnljiva.*

Matrika $A - \lambda I$ je *nilpotentna* reda ν, kjer je ν geometrična večkratnost lastne vrednosti λ. To pomeni, da velja $(A - \lambda I)^k = 0$ za $k \geq \nu$.

Iz zgornje trditve sledi, da lahko minimalni polinom m_A matrike A zapišemo kot

$$m_A(z) = (z - \lambda_1)^{\nu_1}(z - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (z - \lambda_m)^{\nu_m}, \tag{8}$$

kjer $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ lastne vrednosti matrike A, $\nu_1, \ldots, \nu_m$ pa pripadajoče geometrične večkratnosti.

V nadaljevanju bomo omenjali tudi *matrične* in *operatorske norme*, zato se spomnimo lastnosti norme.

Definicija 1.10. *Matrična norma* na $\mathbb{C}^{n\times n}$ je takšna preslikava $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, da za vsaki matriki $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in vsak skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ velja:

(1) $\|A\| \geq 0$ in $\|A\| = 0$ natanko tedaj, ko je $A = 0$ (pozitivnost),
(2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ (homogenost),
(3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (trikotniška neenakost),
(4) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (submultiplikativnost).

Matrične norme, ki so porojene iz vektorskih norm s predpisom

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \text{za } x \in \mathbb{C}^n, \tag{9}$$

imenujemo *operatorske norme.*

Operatorska norma je torej podrazdred matričnih norm in ima nekaj zanimivih lastnosti.

Trditev 1.11. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $\|\cdot\|$ operatorska norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$. Potem velja*

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \tag{10}$$

Dokaz. Za $x = 0$ trditev očitno velja. Za $x \neq 0$ pa velja

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|, \tag{11}$$

torej je $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. □

Posledica 1.12. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $\|\cdot\|$ neka operatorska norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$. Potem velja neenakost*

$$\|A\| \geq \max\{|\lambda_i|, \lambda_i \textit{ je lastna vrednost matrike } A\}. \tag{12}$$

Dokaz. Po definiciji lastne vrednosti velja $Ax = \lambda x$ za neki lastni vektor $x \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x \neq 0$. Zato velja tudi

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\,. \tag{13}$$

Ker je $\|\cdot\|$ operatorska norma, po trditvi 1.11 velja

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|\,. \tag{14}$$

Sledi, da je

$$|\lambda| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|\,, \tag{15}$$

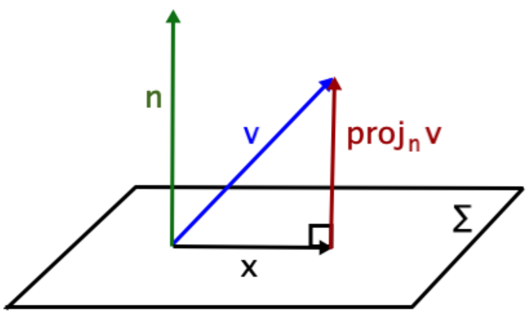
torej je $|\lambda| \leq \|A\|$. To velja za vsako lastno vrednost λ. Posledica sledi. □

Definicija 1.13. Matrika $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *projekcija*, če velja $P^2 = P$.

Zgled 1.14. Poglejmo si primer pravokotne projekcije v prostoru $\mathbb{R}^3$. Za pravokotno projekcijo velja, da je $\ker P \perp \operatorname{Im} P$. Projecirajmo vektor $v = (1, 1, 0)$ na ravnino Σ, ki je podana z enačbo $x + y + z = 0$. Ta ravnina ima normalni vektor $n = (1, 1, 1)$, ki ni normaliziran. Vemo, da s formulo

$$\operatorname{proj}_n(v) = \frac{n \cdot v}{n \cdot n} \cdot n \tag{16}$$

projeciramo vektor v na vektor n. S tem lahko izračunamo tudi projekcijo vektorja v na ravnino Σ.



Slika 3. Projekcija vektorja v na vektor ravnino Σ.

Če vstavimo v in n v formulo (16), dobimo

$$\operatorname{proj}_n(v) = \frac{2}{3} \cdot (1, 1, 1). \tag{17}$$

Ker velja $x = v - \operatorname{proj}_n(v)$, je torej

$$x = \operatorname{proj}_\Sigma(v) = \frac{1}{3} \cdot (1, 1, -2). \tag{18}$$

Bolj zanimiv, kot le izračun $\operatorname{proj}_\Sigma(v)$, pa je izračun projekcijske matrike, ki vektor v projecira na vektor n. Če pišemo skalarni produkt kot množenje matrik, tj. $a \cdot b = a^T \cdot b$, iz komutativnosti skalarjev in asociativnosti matričnega množenja sledi

$$\operatorname{proj}_n(v) = \frac{n^T v}{n^T n} \cdot n = \frac{(n^T v) n}{n^T n} = \frac{n(n^T v)}{n^T n} = \frac{n n^T}{n^T n} \cdot v. \tag{19}$$

S P označimo izraz $\frac{nn^T}{n^Tn}$. Izračunamo, da je

$$P = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

velja pa tudi $P^2 = P$, kar pomeni, da je P *projekcija.* Enačba $\mathrm{proj}_n(v) = Pv$ pa sledi direktno iz izpeljave. ♢

Definicija 1.15. Naj bosta X in Y vektorska prostora nad $\mathbb{C}$, da velja $X \cap Y = \emptyset$. Tedaj vsoti

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \tag{21}$$

pravimo *direktna vsota* in jo označimo z $X \oplus Y$.

Trditev 1.16. *Martika $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je projekcija natanko tedaj, ko je*

$$\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \operatorname{Im} P \quad \textit{in} \quad P|_{\operatorname{Im} P} = I. \tag{22}$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) $P|_{\operatorname{Im} P} = I$ implicira $P(Px) = Px$, tj. $P^2 = P$, kar je ravno definicija projekcije.

($\Rightarrow$)Naj bo $x \in \mathbb{C}^n$ in $y \operatorname{Im} P$, tako da velja $y = Px$. Definirajmo $z := x - y$. Potem je $x = z + y$ in

$$Pz = Px - Py = Px - P^2x = Px - Px = 0, \tag{23}$$

torej je $z \ \in \ker P$. Lahko sklepamo tudi, da iz $y \in \operatorname{Im} P$ sledi $Py = y$.

Dokažimo še, da je da je razcep na direktno vsoto enoličen. Naj bosta $y' \in \operatorname{Im} P$ in $z' \in \ker P$. Naj bo $x = y' + z'$. Iz računa

$$y = Px = Py' + Pz' = y' \tag{24}$$

sledi, da je $y = y'$ in $z = z'$. □

2. Spektralni razcep

2.1. **Matrični polinomi.** V podpoglavju 1.3 smo že definirali množico matričnih polinomov $\mathcal{P}_A$ in minimalni polinom m_A matrike $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pa tudi preslikavo Φ_A iz množice polinomov $\mathbb{C}[x]$ v $\mathcal{P}_A$.

Trditev 2.1. *Naj bo m_A minimalni polinom. Potem je*

$$p \in \ker(\Phi_A) \Leftrightarrow p = m_A \cdot q \quad \textit{za} \quad q \in \mathbb{C}[x], \tag{25}$$

tj. $p(A) = 0$ natanko tedaj, ko je $p(A)$ večkratnik minimalnega polinoma m_A.

Dokaz. Najprej dokažimo implikacijo ($\Leftarrow$). Naj bo m_A minimalni polinom. Če je $p = m_A \cdot q$ za nek $q \in \mathbb{C}[x]$, potem je

$$p(A) = m_A(A) \cdot q(A) = 0 \cdot q(A) = 0, \tag{26}$$

torej je $p \in \ker(\Phi_A)$.

Dokažimo še ($\Rightarrow$). Naj bo $p \in \mathbb{C}[x]$, za katerega velja $p(A) = 0$. Če delimo p z m_A, dobimo:

$$p = m_A \cdot q + r$$

za $q, r \in \mathbb{C}[x]$, da velja $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(q)$. Velja

$$0 = p(A) = \underbrace{m_A(A)}_{=0} \cdot q(A) + r(A) = r(A),$$

torej je $r \in \ker(\Phi_A)$. Ker ima m_A najmanjšo stopnjo v $\ker(\Phi_A)$, sklepamo, da je $r \equiv 0$. $\square$

Za polinome $p, q, r \in \mathbb{C}[x]$ bomo uporabljali zapis

$$p \equiv q \mod r \iff p - q = s \cdot r \text{ za nek } s \in \mathbb{C}[x]. \tag{27}$$

Poglejmo si posledico trditve 2.1

Posledica 2.2. *Naj bosta $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Velja*

$$p(A) = q(A) \iff p \equiv q \mod m_A. \tag{28}$$

V posebnem primeru velja, da je $p(A)$ projekcija natanko tedaj, ko je

$$p^2 \equiv p \mod m_A. \tag{29}$$

Zgornja posledica nam pove, da polinoma p in q nista nujno enaka v $\mathbb{C}[x]$, da je $p(A) = q(A)$. Naslednja trditev pa nam pove, da lahko enakost po $\mod m_A$ preverimo le s pomočjo lastnih vrednosti matrike A in njihovih večkratnosti.

Trditev 2.3. *Naj bosta $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Za vsak $i = 1, \ldots, m$ in $\nu = 0, \ldots, \nu_i - 1$ velja*

$$p \equiv q \mod m_A \iff p^{(\nu)}(\lambda_i) = q^{(\nu)}(\lambda_i). \tag{30}$$

Dokaz. Trditev sledi iz dejstva, da za nek $n \in \mathbb{N}$ in neničeln $q \in \mathbb{C}[x]$ ter fiksen $z_1 \in \mathbb{C}$ velja

$$p(z) = (z - z_1)^n q(z) \iff p^{(i)}(z_1) = 0 \text{ za } i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

kar smo že dokazali pri študiju algebre. $\square$

2.2. **Gladke matrične funkcije.** Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrika z minimalnim polinomom m_A. Naj bodo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ničle m_A z večkratnostimi $\nu_1, \ldots, \nu_m$. Definirajmo množico funkcij, ki so definirane in neskončnokrat odvedljive na okolici $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, s predpisom

$$C_A^\infty := \{f : D(f) \to \mathbb{C} \mid \exists U \subset D(f) \text{ odprta}, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset U, f|_U \in C^\infty\}, \tag{31}$$

kjer je $D(f) \subset \mathbb{C}$ definicijsko območje funkcije f.

Definicija 2.4. Naj bo $f \in \mathbb{C}_A^\infty$. Definiramo:

$$f(A) := \Phi_A(p_f) = p_f(A), \tag{32}$$

kjer je p_f polinomska interpolacija funkcije f, ki zadošča pogoju

$$f^{(\nu)}(\lambda_i) = p_f^{(\nu)}(\lambda_i) \tag{33}$$

za vsak $i = 1, \ldots, m$ in $\nu = 0, \ldots, \nu_i - 1$.

S to definicijo lahko matrične polinome razširimo na množico gladkih matričnih funkcij:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi} : C_A^\infty &\longrightarrow \mathcal{P_A} \\ \widetilde{\Phi}_A(f) &= \Phi_A(p_f) = p_f(A) \end{aligned} \tag{34}$$

Opomba 2.5. Za $n+1$ različnih točk $(z_0, f(z_0)), (z_1, f(z_1)), \ldots, (z_n, f(z_n))$ je interpolacijski polinom stopnje največ n. Če pa zahtevamo, da se v teh točkah ujemajo tudi i_k-ti odvodi, pa je stopnja interpolacijskega polinoma navzgor omejena z $\sum_0^n (i_k + 1) - 1$.

Iz definicije 2.4 in trditev 2.1, 2.3 sledi:

Trditev 2.6. *Naj bodo oznake kot zgoraj. Velja:*

(1) *Definicija* $\widetilde{\Phi}_A(f)$ *ni odvisna od izbire metode za polinomsko interpolacijo* p_f.
(2) *Preslikava* $\widetilde{\Phi}_A$ *je razširitev funkcije* Φ_A.
(3) $\widetilde{\Phi}$ *je homomorfizem algeber, kar pomeni, da velja:*

$$\widetilde{\Phi}_A(\lambda f + \mu g) = \lambda \widetilde{\Phi}_A(f) + \mu \widetilde{\Phi}_A(g),$$
$$\widetilde{\Phi}_A(f \cdot g) = \widetilde{\Phi}_A(f) \cdot \widetilde{\Phi}_A(g)$$

za $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ *in* $f, g \in C_A^\infty$.

2.3. **Spektralna teorija.** Definirajmo *karakteristično funkcijo* χ_U s predpisom

(35)
$$\chi_U(\lambda) = \begin{cases} 1, \lambda \in U, \\ 0, \lambda \notin U \end{cases}$$

za odprte množice $U \subset \mathbb{C}$, za katere velja $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in U$. Funkcija χ_U je idempotent, kar pomeni, da velja $\chi_U \cdot \chi_U = \chi_U$. Po posledici 2.2 sklepamo, da je $\chi_U(A) \in \mathcal{P}_A$ projekcija, ki komutira z A. Vzemimo posebno množico takšnih projekcij.

Definicija 2.7. Naj bodo $U_1, \ldots, U_m \subset \mathbb{C}$ odprte množice, ki zadostujejo pogojema:

(1) $\lambda_i \in U_i$ za $i = 1, \ldots, m$ in
(2) $U_i \cap U_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Z χ_i označimo karakteristično funkcijo množice U_i. Matrike

(36)
$$P_i := \chi_i(A) \in \mathcal{P}_A \text{ za } i = 1, \ldots, m,$$

so *spektralne projekcije*, njihovo zalogo vrednosti pa bomo označili z

(37)
$$X_i := \operatorname{Im} P_i = P_i \mathbb{C}^n$$

in jo imenujemo *korenski podprostor* za lastno vrednost λ_i.

Omenimo, da je P_i neodvisna od izbire U_i, poleg tega pa velja še $P_i \neq 0$ za vsak i.

Trditev 2.8. *Naj* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *matrika z minimalnim polinomom* m_A, *z ničlami* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *in z večkratnostmi* $\nu_1, \ \ldots, \nu_m$. *Če vzamemo* P_i *in* X_i *kot v* (36) *in* (37), *potem je*

(38)
$$\mathbb{C}^n = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$$

razcep direktnih vsot v A*-invariantne podprostore z omejitvijo, da je* $A - \lambda_i I$ *nilpotentna reda* ν_i *na* X_i *za* $i = 1, \ldots, m$.

Dokaz. Ker so množice U_i disjunktne, velja $\chi_i(\sum_{i \neq j} \chi_j) = 0$, torej tudi $P_i(\sum_{i \neq j} P_j) = 0$. Iz tega sledi, da je

(39)
$$X_i \cap \big(\bigoplus_{i \neq j} X_j\big) = \{0\}.$$

Ker je $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset \bigcup_{i=1}^m U_i =: U$, je

(40)
$$\sum_{i=1}^m P_i = \widetilde{\Phi}_A\big(\sum_{i=1}^m \chi_i\big) = \widetilde{\Phi}_A(\chi_U) = I,$$

torej $X_1 \oplus \cdots \oplus X_m = X$. $\square$

Definicija 2.9. Razcepu $\mathbb{C}^n$ na invariante podprostore iz formule (38) rečemo *spektralni razcep* prostora C^n.

Opomba 2.10. Podprostor X_i je *invarianten za* A oziroma A*-invarianten*, kadar velja $Ax \in X_i$ za vsak $x \in X_i$, kar lahko zapišemo kot $AX_i \subseteq X_i$.

Spektralni razcep nam pove, da je matrika A podobna bločno diagonalni matriki,

$$A \sim \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{bmatrix}, \tag{41}$$

kjer ima A_i le eno samo lastno vrednost, in sicer λ_i. Ena takših bločno diagonalnih matrik je *Jordanova forma* matrike A, kjer za bloke A_i vzamemo Jordanove bloke J_i, ki pripadajo lastnim vrednostim λ_i. Iz tega dejstva bi lahko slutili, da bi za podprostore X_i vzeli kar korenske podprostore $\ker(A - \lambda_i I)^{\nu_i}$ za lastne vrednosti λ_i.

Trditev 2.11. *Korenski podprostori matirke A za lastne vrednosti λ_i so*

$$X_i = \ker(A - \lambda_i I)^{\nu_i}, \tag{42}$$

kjer je ν_i večkratnost lastne vrednosti λ_i.

Dokaz. Trditev 2.8 nam pove, da je $A - \lambda_i I$ nilpotentna reda ν_i na X_i, zato je

$$X_i \subset \ker(A - \lambda_i I)^{\nu_i}. \tag{43}$$

Recimo, da je vsebovanost stroga, torej obstaja neničeln vektor $x \in \ker(A-\lambda_i I)^{\nu_i} \setminus X_i$. Za neki $i \neq j$ obstaja $y := P_j x \in X_j \cap \ker(A - \lambda_i I)^{\nu_i}$. Vzamemo največji $p \in \mathbb{N}$, da velja

$$z := (A - \lambda_i I)^p y \neq 0. \tag{44}$$

Potem je $z \in X_j$ in $Az = \lambda_i z$, iz česar sledi, da

$$(A - \lambda_j I)^{\nu_j} z = (\lambda_i - \lambda_j)^{\nu_j} z \neq 0, \tag{45}$$

kar je protislovje s predpostavko, da je vsebovanost (43) stroga. □

Trditev 2.12. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, ki imajo po vrsti večkratnosti $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$. Definirajmo projekcije P_i kot v (36). Tedaj za vsako funkcijo $f \in C_A^\infty$ velja*

$$f(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\nu_i - 1} \frac{f^{(\nu)}(\lambda_i)}{\nu!} (A - \lambda_i)^\nu P_i. \tag{46}$$

Dokaz. Funkcija

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\nu_i - 1} \frac{f^{(\nu)}(\lambda_i)}{\nu!} (\lambda - \lambda_i)^\nu \chi_i(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{47}$$

sovpada z f, vključno z vsemi pomembnimi odvodi, na vseh točkah $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Po trditvah 2.3 in 2.6 sledi, da je $f(A) = g(A)$. □

Posledica 2.13. *Naj bodo predpostavke enake kot v trditvi 2.12. Za $k \in \mathbb{N}$ velja*

$$A^k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\min\{\nu_i - 1, k\}} \binom{k}{\nu} \lambda_i^{k-\nu} (A - \lambda_i)^\nu P_i. \tag{48}$$

Dokaz. V trditvi 2.12 za $k \in \mathbb{N}$ uporabimo funkcijo $f(\lambda) = \lambda^k$. □

Definicija 2.14. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Množico

$$\sigma(A) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \tag{49}$$

imenujemo *spekter* matrike A. Spektralni radij definiramo kot

$$r(A) := \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}, \tag{50}$$

tj. absolutno največja lastna vrednost matrike A.

Naslednja trditev nam pove, kako se preslika spekter matrike za neko preslikavo iz C_A^∞.

Izrek 2.15 (Izrek o preslikavi spektra)**.** *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $f \in C_A^\infty$. Potem velja*

$$\sigma\big(f(A)\big) = f\big(\sigma(A)\big) := \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{51}$$

Dokaz. Naj bo λ poljubna lastna vrednost matrike A in $\mu \notin f(\sigma(A))$. Definiramo $u(\lambda) := \frac{1}{f(\lambda)-\mu} \in C_A^\infty$, torej je $u \cdot (f(\lambda) - \mu) = 1$ na okolici $\sigma(A)$. Če v to enačbo vstavimo matriko A, dobimo

$$u(A) \cdot (f(A) - \mu I) = (f(A) - \mu I) \cdot u(A) = I, \tag{52}$$

torej matrika $f(A) - \mu I$ ni obrnljiva, zato po posledici 1.9 sledi $\mu \neq \sigma(f(A))$.

Naj bo x_i lastni vektor matrike A za pripadajočo lastno vrednost λ_i za $i = 1, \dots, m$. Po trditvi 1.9 za vse $i \neq j$ velja $P_j x_i = 0$. Iz trditve 2.12 sledi

$$f(A)x_i = f(\lambda_i)x_i, \tag{53}$$

torej je $f(\lambda_i) \in \sigma(f(A))$. □

Lema 2.16. *Naj bo $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$. Za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $\mu > r(A)$ obstajata konstanti $N > 0$ in $M > 1$, da za vse $k \in \mathbb{N}$ velja*

$$N \cdot r(A)^k \leq \left\|A^k\right\| \leq M \cdot \mu^k. \tag{54}$$

Če je $\|\cdot\|$ operatorska norma, izberemo $N = 1$.

Dokaz zgornje leme bo sledil v nadaljevanju. Ta lema pa implicira zanimivo formulo, s pomočjo katere lahko spektralni radij matrike izračunamo s pomočjo matričnih potenc.

Trditev 2.17 (Gelfandova formula)**.** *Za matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ velja:*

(1) $r(A) = \lim_{k \to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k}$ *za vsako matrično normo $\|\cdot\|$ na $\mathbb{C}^{n\times n}$,*
(2) *če je $\|\cdot\|$ operatorska norma na $C^{n\times n}$, potem je $r(A) = \inf_{k>0} \left\|A^k\right\|^{1/k}$.*

Dokaz. Uporabimo posledico leme 2.16

$$N^{1/k} r(A) \leq \left\|A^k\right\|^{1/k} \leq M^{1/k}\mu.$$

To smo dobili tako, da smo enačbo v lemi pomnožili z $\frac{1}{k}$. Če je $\|\cdot\|$ operatorska norma, za dopustno izbiro $N = 1$ dobimo $r(A) = \inf_{k>0} \left\|A^k\right\|^{1/k}$. □

3. Zaporedja matričnih potenc

3.1. **Koordinatna zaporedja.**

Lema 3.1. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ z večkratnostmi $\nu_1, \dots, \nu_m$.*

(1) *Za $i = 1, \dots, m$ in $0 \neq z \in X_i$ je množica*

(55) $$\{(A - \lambda_i I)^\nu \mid \nu = 0, \dots, \nu_i - 1\} \backslash \{0\}$$

linearno neodvisna v X_i.

(2) *Množica*

(56) $$B_A = \{(A - \lambda_i I)^\nu P_i \mid i = 1, \dots, m;\ \nu = 0, \dots, \nu_i - 1\}$$

je linearno neodvisna v $\mathbb{C}^n$.

Dokaz. (1) Naj bo $i = 1, \dots, m$ in $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$. Preveriti moramo, da so vektorji $(A - \lambda_i I)^\nu, \nu = 0, \dots, \nu_i - 1$ neodvisni. Ker je matrika $A - \lambda_i I$ nilpotentna reda ν_i, je

(57) $$(A - \lambda_i I)^\nu = 0 \text{ za } \nu \geq \nu_i,$$

torej moramo preveriti linearno neodvisnost ν_i vektorjev. Po definiciji linearne neodvisnosti mora iz enačbe

(58) $$\sum_{\nu=0}^{\nu_i - 1} \alpha_\nu (A - \lambda_i I)^\nu z$$

slediti, da je $\alpha_\nu = 0$ za $\nu = 0, \dots, \nu_i - 1$. Če enačbo 58 pomnožimo z $(A - \lambda_i I)^{\nu_i - 1}$ iz leve, enačba (58) z upoštevanjem (57) preide v

(59) $$0 = \alpha_0 (A - \lambda_i I)^{\nu_i - 1} z.$$

Ker $(A - \lambda_i I)^{\nu_i - 1} z \neq 0$, je $\alpha_0 = 0$. Če bi enačbo (58) pomnožili z $(A - \lambda_i I)^{\nu_i - 2}$ in upoštevali, da je $\alpha_0 = 0$, bi dobili $\alpha_1 = 0$ itd. Sledi, da so $\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu_i - 1} = 0$ in posledično vektorji $(A - \lambda_i I)^\nu, \nu = 0, \dots, \nu_i - 1$ neodvisni.

(2) Podobno kot v dokazu točke (1) bi dokazali, da je množica

(60) $$B_A^{(i)} := \{(A - \lambda_i I)^\nu P_i \mid \nu = 0, \dots, \nu_i - 1$$

linearno neodvisna v $\mathbb{C}^{n\times n}$ za vsak $i = 1, \dots, m$. Dokazati moramo, da so matrike $(A - \lambda_i I)^\nu P_i$ neodvisne, torej

(61) $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\nu_i - 1} \alpha_{i,\nu} (A - \lambda_i I)^\nu P_i = 0.$$

Če to enačbo za fiksen i pomnožimo s P_i in ker je $P_i \cdot P_j = 0$ za $i \neq j$ in $P_i^2 = P_i$ dobimo

(62) $$\sum_{\nu=0}^{\nu_i - 1} \alpha_{i,\nu} (A - \lambda_i I)^\nu P_i = 0.$$

Iz linearne neodvisnosti množice $B_A^{(i)}$ sledi, da je $\alpha_{i,\nu} = 0$ za $i = 1, \dots, m$ in $\nu = 0, \dots, \nu_i - 1$.

□

Zanima nas asimptotsko obnašanje zaporedij oblike A^k. Za razumevanje asimptotskega obnašanja bomo uporabili neodvisnost množice

$$B_A := \{(A - \lambda_i I)^\nu P_i \mid i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, \nu_i - 1\} \tag{63}$$

iz leme 3.1. Če to množico razširimo na bazo na bazo $\mathbb{B}_A$ prostora $\mathbb{C}^{n\times n}$, potem iz formule (48) sledi, da so neničelne kooordinate zaporedja A^k v bazi $\mathbb{B}_A$ enake

$$\left\{\binom{k}{\nu}\lambda_i^{k-\nu} \mid i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, \nu_i - 1\right\}. \tag{64}$$

Ker gre $k \to \infty$, lahko poenostavimo $\nu = \min\{\nu_i - 1, k\}, ..., \nu_i - 1$. Podobne koordinate dobimo, če gledamo zaporedje $A^k x$, torej če gledamo množico

$$\{(A - \lambda_i I)^\nu P_i x \mid i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, \nu_i - 1\} \backslash \{0\}. \tag{65}$$

Ker je konvergenca v končno dimenzionalnih vektorskih prostorih ekvivalentna konvergenci koordinat, se neodvisno od izbire baze obnašanje zaporedja A^k, ko gre $k \to \infty$, odraža s *koordinatnimi zaporedji*

$$z_{\lambda,\nu}(k) := \binom{k}{\nu}\lambda^{k-\nu} \tag{66}$$

za $\lambda \in \sigma(A), \nu = 0, \ldots, n-1$ – tukaj upoštevamo, da je $\nu_i \leq n$ za vsak i. V primeru, da vsa koordinatna zaporedja konvergirajo, konvergira tudi zaporedje A^k oziroma $A^k x$. Koordinate limite zaporedja A^k, ko gre $k \to \infty$, se izražajo s pripadajočimi limitami koordinatnih zaporedij.

Konvergenca koordinatnih zaporedij se lahko razbere iz velikosti lastnih vrednosti λ in pripadajoče večkratnosti ν.

- Če je $|\lambda| < 1$, potem gre $z_{\lambda,\nu}(k) \to 0$, ko gre $k \to \infty$, za vse ν, ker je $\lim_{k\to\infty} k^\nu \lambda^k = 0$.
- Če je $|\lambda| > 1$, potem gre $|z_{\lambda,\nu}(k)| \to 0$, ko gre $k \to \infty$, za vse ν.
- Če je $|\lambda| = 1$ in $\nu = 0$, potem je $z_{\lambda,0}(k) = \lambda^k$.
- Če je $|\lambda| = 1$ in $\nu \geq 0$, potem gre $|z_{\lambda,\nu}(k)| \to \infty$, ko gre $k \to \infty$.

Z uvedbo koordinatnih zaporedij lahko dokažemo lemo 2.16, iz katere sledi Gelfandova formula 2.17.

Dokaz. (Lema 2.16) Po izreku o preslikavi spektra 2.15 velja

$$\big(r(A)\big)^k = r(A^k), \tag{67}$$

torej izbira $N = 1$ za operatorske norme sledi iz posledice 1.12. Ocena

$$N \cdot r(A)^k \leq \left\|A^k\right\| \tag{68}$$

za neki $N > 0$ sledi iz dejstva, da so norme na končno dimenzionalnih prostorih ekvivalentne.

Dokazati moramo še oceno navzgor. Koordinate zaporedja A^k glede na bazo $\mathbb{C}^{n\times n}$, ki vsebuje množico

$$B_A := \{(A - \lambda_i I)^\nu P_i \mid i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, \nu_i - 1\}, \tag{69}$$

so enake

$$z_{\lambda,\nu}(k) := \binom{k}{\nu}\lambda^{k-\nu}, \tag{70}$$

kjer je $i = 1, \ldots, m$ in $\nu = 0, \ldots, \nu_i - 1$. Ker velja ocena

$$\binom{k}{\nu} \leq k^\nu, \tag{71}$$

in ker za $|\lambda| < 1$ velja $k^\nu \lambda^{k-\nu} \to \infty$, ko gre $k \to \infty$, za vse $\nu \in \mathbb{N}$, je zaporedje $\frac{1}{\mu^k} A^k$ omejeno, ko gre $k \to \infty$. Torej je

$$\frac{1}{\mu^k} \left\| A^k \right\|_\infty \leq M \text{ oziroma } \left\| A^k \right\|_\infty \leq M \mu^k \tag{72}$$

za neko konstanto $M \in \mathbb{N}$ in vsak $n \in \mathbb{N}$. Ocena

$$\left\| A^k \right\| \leq M \mu^k \tag{73}$$

spet sledi iz dejstva, da so si norme ekvivalentne. □

Opomba 3.2.

(1) To, da so matrične norme med seboj ekvivalentne, pomeni, da za poljubni normi $\|\cdot\|_a$ in $\|\cdot\|_b$ obstajata konstanti $C_1, C_2 > 0$, da za vsako matriko $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ velja

$$C_1 \|A\|_a \leq \|A\|_b \leq C_2 \|A\|_a . \tag{74}$$

(2) Norma $\|\cdot\|_\infty$ je za $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definirana kot

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{75}$$

Ta norma je ena izmed matričnih norm v razredu p-norm in ji pravimo ∞-*norma.*

3.2. **Asimptotsko obnašanje.**

Definicija 3.3. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}(X)$ in $\|\cdot\|$ neka matrična norma. Zaporedje (A^k) je:

- *omejeno*, če je $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| A^k \right\| < \infty$,
- *stabilno*, če je $\lim_{k \to \infty} \left\| A^k \right\| = 0$,
- *konvergentno*, če je $\lim_{k \to \infty} A^k = P$ za neko matriko $P \in \mathbb{C}^{n \times n}(X)$,
- *periodično* s periodo p, če je $A^p = I$,
- *Cesàrovo konvergentno*, če obstaja limita $\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l \right)$.

Členom zaporedja $A^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l$ pravimo *Cesàrova povprečja.*

Pokazali bomo, da se asimptotsko obnašanje A^k odraža z velikostjo $r(A)$ v primerjavi z 1. Pred tem se dogovorimo za nekaj oznak.

Koreni enote v $\mathbb{C}$ so rešitve enačbe $z^q = 1$, torej

$$\Gamma_q := \{ e^{\frac{2k\pi i}{q}} \mid k = 0, \ldots, q-1 \}. \tag{76}$$

Z Γ bomo označili enotsko kronico v $\mathbb{C}$.

V izreku bomo uporabili tudi naslednjo definicijo.

Definicija 3.4. Lastna vrednost $\lambda_0 > 0$ matrike $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *dominantna lastna vrednost*, če je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ in velja $|\lambda| < \lambda_0$ za vse $\lambda \in \sigma(A) \backslash \{\lambda_0\}$.

Izrek 3.5. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Naj bo $\{A^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ matrično zaporedje. Veljajo naslednje trditve:*

(1) $\{A^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je stabilno natanko tedaj, ko je* $|r(A)| < 1$.
(2) $\{A^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je omejeno natanko tedaj, ko je* $|r(A)| \leq 1$ *in so vse lastne vrednosti* ....
(3) $\{A^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je periodično s periodo* p *natanko tedaj, ko je omejeno in je* $\sigma(A) \subseteq \Gamma_p$.
(4) *d)* ....

Dokaz. DOKAZ TRDITVE 3.5. □

Zgled 3.6.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, T_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{77}$$

♢

4. Primer uporabe

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] J. I. Agbinya, *Applied Data Analytics – Principles and Applications*, River Publishers, Denmark, 2020.
[2] A. Bátkai, M. Kramar Fijavž in A. Rhandi, *Positive Operator Semigroups From Finite To Infinite Dimensions*, Birkhäuser/Springer, 2017.
[3] C. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.