

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ . . . . .	4
2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ . . . . .	5
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	11

# ВВЕДЕНИЕ

Существуют различные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом  $R_\odot$ , материал которого характеризуется плотностью  $p_\odot$  и упругими постоянными  $\lambda_\odot$  и  $\mu_\odot$ . Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом  $R_o$ . Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен  $R_\odot$ . Для решения задачи введем цилиндрические системы координат  $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$  и  $\rho_o, \varphi_o, z_o$ , связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости  $\lambda_\odot$  и  $\mu_\odot$  материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты  $\rho_\odot$ , а плотность  $p_\odot$  – непрерывной функцией координаты  $\rho_\odot$ .

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности  $\rho_e, \rho_o$  и скорости звука  $c_e, c_o$  соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_o = A_o \exp\{i[(\bar{k}_e) \cdot \bar{r}_o) - \omega t]\},$$

где  $A_o$  – амплитуда волны;  $\bar{k}_e$  – волновой вектор падающей волны;  $\bar{r}_o$  – радиус-вектор;  $\omega$  – круговая частота. В дальнейшем временной множитель  $\exp\{-i\omega t\}$  будем опускать.

В цилиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_o = A_o \exp\{ik_e[r_o \sin \hat{\theta}_e \cos(\varphi_e - \hat{\varphi}_e) + z \cos \hat{\theta}_e]\},$$

где  $\hat{\theta}_e$  и  $\hat{\varphi}_e$  – полярный и азимутальный углы падения волны;  $k_e = \omega/c_e$  – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_o(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = A_0 \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta_\odot \rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\},$$

где  $J_n(x)$  – цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ ;  $\alpha_\odot = k_\odot \cos \hat{\theta}_e$ ;  $\beta_\odot = k_\odot \sin \hat{\theta}_e$ .

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta \Psi_o + k_o^2 \Psi_o = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0, \quad (2)$$

где  $\Psi_o$  – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра;  $k_o = \frac{\omega}{c_o}$  – волновое число жидкости в полости цилиндра;  $\Psi_e$  – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \quad (3)$$

где  $\Psi_s$  – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения  $\Psi_s$ :

$$\Delta \Psi_s + k_s^2 \Psi_s = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) и (2) запишем в цилиндрических системах координат  $\rho_o, \varphi_o, z_o$  и  $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$  соответственно.

Отраженная волна  $\Psi_s$  должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра  $\Psi_o$  – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы  $\Psi_s$  и  $\Psi_o$  будем искать в виде

$$\Psi_s(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_\odot \rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\}, \quad (5)$$

$$\Psi_o(\rho_o, \varphi_o, z_o) = \exp\{i\alpha_o z_o\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_o \rho_o) \exp\{in(\varphi_o - \hat{\varphi}_e)\}, \quad (6)$$

где  $H_n(x)$  – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка  $n$ .

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне и внутри цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_o = \text{grad } \Psi_o; \quad P_o = i\rho_o \omega \Psi_o,$$

$$\bar{\nu}_e = \text{grad } \Psi_e; \quad P_e = i\rho_e \omega \Psi_e.$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta \bar{\Phi} + k_{\downarrow}^2 \bar{\Phi} = 0, \quad (7)$$

$$\Delta \Psi + k_{\leftrightarrow}^2 \Psi = 0, \quad (8)$$

где  $k_{\downarrow} = \omega/c_{\downarrow}$  и  $k_{\leftrightarrow} = \omega/c_{\leftrightarrow}$  – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно;  $\Psi$  и  $\bar{\Phi}$  – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно;  $c_{\leftrightarrow} = \sqrt{(\lambda_o + 2\mu_o)/\rho_o}$  и  $c_{\downarrow} = \sqrt{\mu_o/\rho_o}$  – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения  $\bar{u}$  представляется в виде:

$$\bar{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \bar{\Phi}. \quad (9)$$

Векторное уравнение (8) в цилиндрической системе координат в общем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора  $\bar{\Phi}$ , а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор  $\bar{\Phi}$  в виде

$$\bar{\Phi} = \text{rot}(L\bar{e}_z) + \frac{1}{k_{\downarrow}} \text{rot rot}(M\bar{e}_z) = \text{rot}(L\bar{e}_z) + k_{\downarrow} M\bar{e}_z + \frac{1}{k_{\downarrow}} \text{grad} \left( \frac{\partial M}{\partial z} \right),$$

где  $L$  и  $M$  – скалярные функции пространственных координат  $\rho, \phi, z$ ;  $\bar{e}_z$  – единичный вектор оси  $z$ .

Тогда векторное уравнение (8) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций  $L$  и  $M$

$$\Delta L + k_{\downarrow}^2 L = 0,$$

$$\Delta M + k_{\downarrow}^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции  $\Psi$ ,  $L$  и  $M$  будем искать в виде

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(k_1 \rho) \exp\{in(\varphi - \hat{\varphi})\}, \quad (10)$$

$$L(\rho, \varphi, z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(k_2 \rho) \exp\{in(\varphi - \hat{\varphi})\}, \quad (11)$$

$$M(\rho, \varphi, z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(k_2 \rho) \exp\{in(\varphi - \hat{\varphi})\}, \quad (12)$$

где  $k_1 = \sqrt{k_{\leftrightarrow}^2 - \alpha^2}$ ,  $k_2 = \sqrt{k_{\downarrow}^2 - \alpha^2}$ .

Компоненты вектора смещения  $\bar{u}$ , записанные через функции  $\Psi$ ,  $L$  и  $M$  в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$u_\rho = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial z} + \frac{k_{\downarrow}}{\rho} \frac{\partial M}{\partial \varphi}, \quad (13)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi \partial z} - k_{\downarrow} \frac{\partial M}{\partial \rho}, \quad (14)$$

$$u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2}. \quad (15)$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и вектора смещения  $\bar{u}$  в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \lambda \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\rho \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\rho \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\rho \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{\rho\varphi} &= \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right), \\ \sigma_{\rho z} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} \right), \\ \sigma_{\varphi z} &= \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\rho} &= -\omega^2 p(\rho) u_\rho, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\varphi} &= -\omega^2 p(\rho) u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho z} &= -\omega^2 p(\rho) u_z,\end{aligned}\tag{17}$$

где  $u_\rho, u_\varphi, u_z$  – компоненты вектора смещения  $\bar{u}$  частиц неоднородного слоя;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и вектора смещения  $\bar{u}$  в неоднородном упругом цилиндрическом слое аналогичны соотношениям для однородного упругого цилиндра, при этом упругие постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  следует заменить на функции  $\lambda = \lambda(\rho)$  и  $\mu = \mu(\rho)$ .

Используя эти соотношения, запишем уравнения (17) через компоненты вектора смещения  $\mu$ . Получим

$$\begin{aligned}&\left(\lambda + 2\mu\right) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \varphi^2} + \\&+ \mu \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \frac{\lambda + 3\mu}{\rho}\right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\&+ \left(\lambda + \mu\right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^2} + \omega^2 p\right) u_\rho = 0, \\&\frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\lambda + 3\mu}{\rho}\right) \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \\&+ \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\mu}{\rho}\right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} + \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial z} + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} - \frac{\mu}{\rho^2} + \omega^2 p\right) u_\varphi = 0, \\&\left(\lambda + \mu\right) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial z} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\lambda + \mu}{\rho}\right) \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \\&+ \left(\lambda + 2\mu\right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\mu}{\rho}\right) \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \omega^2 p u_z = 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Функции  $u_\rho(\rho, \varphi, z)$ ,  $u_\varphi(\rho, \varphi, z)$  и  $u_z(\rho, \varphi, z)$  будем искать в виде разложений

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \varphi, z) &= \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\rho n}(\rho) \exp\{in(\varphi - \hat{\varphi})\}, \\ u_\varphi(\rho, \varphi, z) &= \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\varphi n}(\rho) \exp\{in(\varphi - \hat{\varphi})\}, \\ u_z(\rho, \varphi, z) &= \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{zn}(\rho) \exp\{in(\varphi - \hat{\varphi})\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) и функции  $u_{\rho n}(\rho)$ ,  $u_{\varphi n}(\rho)$  и  $u_{zn}(\rho)$  из разложений (19) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\rho_\odot = R_\odot : -i\omega u_{\rho_\odot} = v_{\rho_e}, \quad \sigma_{\rho\rho_\odot} = -P_e, \quad \sigma_{\rho\varphi_\odot} = 0, \quad \sigma_{\rho z_\odot} = 0. \quad (20)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} \rho_\odot = R_\odot : \quad u_{\rho_\odot} &= u_{\rho_\odot}, \quad u_{\varphi_\odot} = u_{\varphi_\odot}, \quad u_{z_\odot} = u_{z_\odot}, \\ \sigma_{\rho\rho_\odot} &= \sigma_{\rho\rho_\odot}, \quad \sigma_{\rho\varphi_\odot} = \sigma_{\rho\varphi_\odot}, \quad \sigma_{\rho z_\odot} = \sigma_{\rho z_\odot}. \end{aligned} \quad (21)$$

На границе полости  $\rho_o = R_o$  должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений

$$\rho_o = R_o : -i\omega u_{\rho_o} = v_{\rho_o}, \quad \sigma_{\rho\rho_o} = -P_o, \quad \sigma_{\rho\varphi_o} = 0, \quad \sigma_{\rho z_o} = 0. \quad (22)$$

Используя формулы

$$v_{\rho_e} = \frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial \rho}, \quad P_e = i\omega p_e(\Psi_o + \Psi_s)$$

и выражение (16) запишем граничные условия (20) через функции  $\Psi_s$ ,  $u_\rho$ ,  $u_\varphi$ ,



$u_z$ . Получим при  $\rho_\odot = R_\odot$

$$\frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial \rho} = -i w u_{\rho_\odot}, \quad (23)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\rho \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2 \mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} = -i w p_e (\Psi_o + \Psi_s), \quad (24)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\mu} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \right) \right) = 0, \quad (25)$$

$$\mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} \right) = 0. \quad (26)$$

Аналогично, используя выражения (13), (16) запишем граничные условия (21) через функции  $u_\rho$ ,  $u_\varphi$ ,  $u_z$ ,  $\Psi_\odot$ ,  $L$  и  $M$ , а граничные условия (21) через  $\Psi_\odot$ ,  $L$  и  $M$ .

Подставив разложения (19) в уравнения (18), воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности этих многочленов, получим для каждого индекса  $n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ; системе линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $u_{\rho n}(\rho_\odot)$ ,  $u_{\varphi n}(\rho_\odot)$  и  $u_{z n}(\rho_\odot)$ ). А подставив разложения (19) в полученные граничные условия, найдем краевые условия и сможем решить систему дифференциальных уравнений. После ее решения определим коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) для каждой индекса  $n$ , а зная коэффициенты  $A_n$ , по формуле (5) найдем акустическое поле, рассеяное упругим цилиндром, имеющим произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругом цилиндре, имеющем произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды цилиндра, а также полости тела.