СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Акустика, применени акустики

Существуют разлиные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохраматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Распространие звуковых волн

1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Из книги Толоконников, Ларин или из лабы

1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

Переделать для упругих тел. Взять из Ландау-Лифшиц Теория упругости, Амензаде Теория упругости. Все в своих системах координат. Решение в специальных функциях.

2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ

2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

Взять у Филатовой + новые работы. Известия ТулГУ №3 - новые статьи. Статьи Ларина, Скобельцына, Толоконникова.

2.2. Постановка задачи

Рисунок и рассмотрим, пусть. И закончить Требуется найти волновые поля в упругом теле.

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом $R_\odot$, материал которого характеризуется плотностью $p_\odot$ и упругими постоянными $\lambda_\odot$ и $\mu_\odot$. Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом $R_\circ$. Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен $R_\circledcirc$. Для решения задачи ввдем цилиндрические системы координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ и $\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ$, связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости $\lambda_\circledcirc$ и $\mu_\circledcirc$ материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференциируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты $\rho_\odot$, а плотность $p_\circledcirc$ – непрерывной функцией координаты $\rho_\odot$.

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности $\rho_e, \rho_\circ$ и скорости звука $c_e, c_\circ$ соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_o = A_o \exp\{i[(\bar{k}_e) \cdot \bar{r}_\odot) - \omega t]\},$$

где A_o – амплитуда волны; $\bar{k}_e$ – волновой вектор падающей волны; $\bar{r}_\odot$ – радиус-вектор; ω – круговая частота. В дальнейшем временной множитель $\exp\{-i\omega t\}$ будем опускать.

В цилиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_o = A_o \exp\{ik_e[\rho_\odot \sin\hat{\theta}_e \cos(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e) + z_\odot \cos\hat{\theta}_e]\},$$

где $\hat{\theta}_e$ и $\hat{\varphi}_e$ – полярный и азимутальный углы падения волны; $k_e = \omega/c_e$ – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

2.3. Аналитическое решение задачи

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_o(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = A_0 \exp\{i\alpha z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta_e \rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n; $\alpha = k_e \cos\hat{\theta}_e$; $\beta_e = \sqrt{k_e^2 - \alpha^2}$.

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахождении решений уравнений Гельмгольца

$$\Delta\Psi_\circ + k_\circ^2 \Psi_\circ = 0, \tag{1}$$

$$\Delta\Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0, \tag{2}$$

где $\Psi_\circ$ – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра; $k_\circ = \frac{\omega}{c_\circ}$ – волновое число жидкости в полости цилиндра; Ψ_e – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \tag{3}$$

где Ψ_s – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta\Psi_s + k_e^2 \Psi_s = 0. \tag{4}$$

Уравнения (1) и (4) запишем в цилиндрических системах координат $\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ$ и $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ соответственно.

Отраженная волна Ψ_s должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра $\Psi_\circ$ – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы Ψ_s и $\Psi_\circ$ будем искать в виде

Беты одинаковые или разные (станет ясно в граничных условиях)

$$\Psi_s(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = \exp\{i\alpha z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_\odot \rho_\odot) \exp\{in\varphi_\odot\}, \tag{5}$$

$$\Psi_\circ(\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ) = \exp\{i\alpha z_\circ\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_\circ \rho_\circ) \exp\{in\varphi_\circ\}, \tag{6}$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка n.

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне и внутри цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_\circ = \operatorname{grad}\Psi_\circ; \quad P_\circ = i\rho_\circ\omega\Psi_\circ,$$
$$\bar{\nu}_e = \operatorname{grad}\Psi_e; \quad P_e = i\rho_e\,\omega\Psi_e.$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta\bar{\Phi}_\odot + k_\updownarrow^2\bar{\Phi}_\odot = 0, \tag{7}$$
$$\Delta\Psi_\odot + k_\leftrightarrow^2\Psi_\odot = 0, \tag{8}$$

где $k_\updownarrow = \omega/c_\updownarrow$ и $k_\leftrightarrow = \omega/c_\leftrightarrow$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; $\Psi_\odot$ и $\bar{\Phi}_\odot$ – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно; $c_\leftrightarrow = \sqrt{(\lambda_\odot + 2\mu_\odot)/\rho_\odot}$ и $c_\updownarrow = \sqrt{\mu_\odot/\rho_\odot}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения $\bar{u}_\odot$ представляется в виде:

$$\bar{u}_\odot = \operatorname{grad}\Psi_\odot + \operatorname{rot}\bar{\Phi}_\odot. \tag{9}$$

Векторное уравнение (8) в цилиндрической системе координат в обшем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{\Phi}_\odot$, а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор $\bar{\Phi}_\odot$ в виде

$$\bar{\Phi}_\odot = \operatorname{rot}(L\bar{e}_{z_\odot}) + \frac{1}{k_\updownarrow}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(M\bar{e}_{z_\odot}) = \operatorname{rot}(L\bar{e}_{z_\odot}) + k_\updownarrow M\bar{e}_{z_\odot} + \frac{1}{k_\updownarrow}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial M}{\partial z_\odot}\right),$$

где L и M – скалярные функции пространственных координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$; $\bar{e}_{z_\odot}$ – единичный вектор оси $z_\odot$.

Тогда векторное уравнение (8) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\updownarrow^2 L = 0,$$
$$\Delta M + k_\updownarrow^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции Ψ, L и M будем искать в виде

$$\Psi_{\odot}(\rho_{\odot},\varphi_{\odot},z_{\odot}) = \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(\beta_{\leftrightarrow}\rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \tag{10}$$

$$L(\rho_{\odot},\varphi_{\odot},z_{\odot}) = \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(\beta_{\updownarrow}\rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \tag{11}$$

$$M(\rho_{\odot},\varphi_{\odot},z_{\odot}) = \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(\beta_{\updownarrow}\rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \tag{12}$$

где $\beta_{\leftrightarrow} = \sqrt{k_{\leftrightarrow}^2 - \alpha^2}, \beta_{\updownarrow} = \sqrt{k_{\updownarrow}^2 - \alpha^2}$.

Компоненты вектора смещения $\bar{u}_{\odot}$, записанные через функции $\Psi_{\odot}, L$ и M в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$u_{\odot\rho} = \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_{\odot}\,\partial z_{\odot}} + \frac{k_{\updownarrow}}{\rho_{\odot}} \frac{\partial M}{\partial \varphi_{\odot}}, \tag{13}$$

$$u_{\odot\varphi} = \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \varphi_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_{\odot}\,\partial z_{\odot}} - k_{\updownarrow} \frac{\partial M}{\partial \rho_{\odot}}, \tag{14}$$

$$u_{\odot z} = \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial z_{\odot}} - \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_{\odot}^2} - \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial L}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_{\odot}^2}. \tag{15}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{\odot ij}$ и вектора смещения $\bar{u}_{\odot}$ в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

Здесь номер для системы уравнений находится внизу, а должен

быть посередине системы

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\odot\rho\rho} = \lambda_\odot \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_\odot} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_\odot} \right) + 2\, \mu_\odot \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot}, \\
&\sigma_{\odot\varphi\varphi} = \lambda_\odot \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_\odot} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_\odot} \right) + 2\, \mu_\odot \left(\frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_\odot} + \frac{u_{\odot\rho}}{\rho_\odot} \right), \\
&\sigma_{\odot zz} = \lambda_\odot \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_\odot} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_\odot} \right) + 2\, \mu_\odot \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_\odot}, \\
&\sigma_{\odot\rho\varphi} = \mu_\odot \left(\frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \varphi_\odot} + \frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \rho_\odot} - \frac{u_{\odot\varphi}}{\rho_\odot} \right), \\
&\sigma_{\odot\rho z} = \mu_\odot \left(\frac{\partial u_{\odot z}}{\partial \rho_\odot} + \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial z_\odot} \right), \\
&\sigma_{\odot\varphi z} = \mu_\odot \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial z_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial \varphi_\odot} \right).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\rho\rho}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\, \frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\rho\varphi}}{\partial \varphi_\odot} + \frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\rho z}}{\partial z_\odot} + \frac{\sigma_{\circledcirc\rho\rho} - \sigma_{\circledcirc\varphi\varphi}}{\rho_\odot} &= -\omega^2 p_\circledcirc u_{\circledcirc\rho}, \\
\frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\rho\varphi}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\, \frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\varphi\varphi}}{\partial \varphi_\odot} + \frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\varphi z}}{\partial z_\odot} + \frac{2}{\rho_\odot}\, \sigma_{\circledcirc\rho\varphi} &= -\omega^2 p_\circledcirc u_{\circledcirc\varphi}, \\
\frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\rho z}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\, \frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc\varphi z}}{\partial \varphi_\odot} + \frac{\partial\, \sigma_{\circledcirc zz}}{\partial z_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\, \sigma_{\circledcirc\rho z} &= -\omega^2 p_\circledcirc u_{\circledcirc z},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $u_{\circledcirc\rho}, u_{\circledcirc\varphi}, u_{\circledcirc z}$ – компоненты вектора смещения $\bar{u}_\circledcirc$ частиц неоднородного слоя;

$\sigma_{\circledcirc ij}$ – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{\circledcirc ij}$ и вектора смещения $\bar{u}_\circledcirc$ в неоднородном упругом цилиндрическом слое аналогичны соотношениям (16) для однородного упругого цилиндра, при этом упругие постоянные $\lambda_\odot$ и $\mu_\odot$ следует заменить на функции $\lambda_\circledcirc = \lambda_\circledcirc(\rho_\odot)$ и $\mu_\circledcirc = \mu_\circledcirc(\rho_\odot)$.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (17) через компоненты вектора смещения $\bar{u}_{\circledcirc}$. Получим

$$
\begin{gathered}
\left(\lambda_{\circledcirc}+2\mu_{\circledcirc}\right)\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\rho}}{\partial\rho_{\odot}^2}+\left(\frac{\partial\lambda_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}+2\,\frac{\partial\mu_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}+\frac{\lambda_{\circledcirc}+2\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial\rho_{\odot}}+\frac{\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}^2}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\rho}}{\partial\varphi_{\odot}^2}+\\
+\mu_{\circledcirc}\,\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\rho}}{\partial z_{\odot}^2}+\frac{\lambda_{\circledcirc}+\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\rho_{\odot}\partial\varphi_{\odot}}+\frac{1}{\rho_{\odot}}\left(\frac{\partial\lambda_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}-\frac{\lambda_{\circledcirc}+3\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_{\odot}}+\\
+\left(\lambda_{\circledcirc}+\mu_{\circledcirc}\right)\frac{\partial^2 u_{\circledcirc z}}{\partial\rho_{\odot}\partial z_{\odot}}+\frac{\partial\lambda_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}\,\frac{\partial u_{\circledcirc z}}{\partial z_{\odot}}+\left(\frac{1}{\rho_{\odot}}\,\frac{\partial\lambda_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}-\frac{\lambda_{\circledcirc}+2\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}^2}+\omega^2 p_{\circledcirc}\right)u_{\circledcirc\rho}=0,\\
\frac{\lambda_{\circledcirc}+\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\rho}}{\partial\rho_{\odot}\partial\varphi_{\odot}}+\frac{1}{\rho_{\odot}}\left(\frac{\partial\mu_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}+\frac{\lambda_{\circledcirc}+3\,\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial\varphi_{\odot}}+\mu_{\circledcirc}\,\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\rho_{\odot}^2}+\\
+\frac{\lambda_{\circledcirc}+2\,\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}^2}\,\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_{\odot}^2}+\left(\frac{\partial\mu_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}+\frac{\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\rho_{\odot}}+\mu_{\circledcirc}\,\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial z_{\odot}^2}+\\
+\frac{\lambda_{\circledcirc}+\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc z}}{\partial\varphi_{\odot}\partial z_{\odot}}+\left(-\frac{1}{\rho_{\odot}}\,\frac{\partial\mu_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}-\frac{\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}^2}+\omega^2 p_{\circledcirc}\right)u_{\circledcirc\varphi}=0,\\
\left(\lambda_{\circledcirc}+\mu_{\circledcirc}\right)\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\rho}}{\partial\rho_{\odot}\partial z_{\odot}}+\left(\frac{\partial\mu_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}+\frac{\lambda_{\circledcirc}+\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial z_{\odot}}+\frac{\lambda_{\circledcirc}+\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\,\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_{\odot}\partial z_{\odot}}+\\
+\mu_{\circledcirc}\,\frac{\partial^2 u_{\circledcirc z}}{\partial\rho_{\odot}^2}+\frac{\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}^2}\,\frac{\partial^2 u_{\circledcirc z}}{\partial{\varphi_{\odot}}^2}+\left(\lambda_{\circledcirc}+2\,\mu_{\circledcirc}\right)\frac{\partial^2 u_{\circledcirc z}}{\partial z_{\odot}^2}+\\
+\left(\frac{\partial\mu_{\circledcirc}}{\partial\rho_{\odot}}+\frac{\mu_{\circledcirc}}{\rho_{\odot}}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc z}}{\partial\rho_{\odot}}+\omega^2 p_{\circledcirc}\,u_{\circledcirc z}=0.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Функции $u_{\circledcirc\rho}(\rho_\odot,\varphi_\odot,z_\odot)$, $u_{\circledcirc\varphi}(\rho_\odot,\varphi_\odot,z_\odot)$ и $u_{\circledcirc z}(\rho_\odot,\varphi_\odot,z_\odot)$ будем искать в виде разложений

$$
\begin{aligned}
u_{\circledcirc\rho}(\rho_\odot,\varphi_\odot,z_\odot) &= \exp\{i\alpha z_\odot\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\circledcirc\rho\, n}(\rho_\odot)\exp\{in\varphi_\odot\},\\
u_{\circledcirc\varphi}(\rho_\odot,\varphi_\odot,z_\odot) &= \exp\{i\alpha z_\odot\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\circledcirc\varphi\, n}(\rho_\odot)\exp\{in\varphi_\odot\},\\
u_{\circledcirc z}(\rho_\odot,\varphi_\odot,z_\odot) &= \exp\{i\alpha z_\odot\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\circledcirc z\, n}(\rho_\odot)\exp\{in\varphi_\odot\}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n, E_n разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) и функции $u_{\circledcirc\rho\, n}(\rho_\odot)$, $u_{\circledcirc\varphi\, n}(\rho_\odot)$ и $u_{\circledcirc z\, n}(\rho_\odot)$ из разложений (19) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$
\rho_\odot = R_\circledcirc:\ \ -iwu_{\circledcirc\rho} = v_{e\rho},\ \ \sigma_{\circledcirc\rho\rho} = -P_e,\ \ \sigma_{\circledcirc\rho\varphi} = 0,\ \ \sigma_{\circledcirc\rho z} = 0. \tag{20}
$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$
\begin{aligned}
\rho_\odot = R_\odot:\quad u_{\circledcirc\rho} = u_{\odot\rho},\quad & u_{\circledcirc\varphi} = u_{\odot\varphi},\quad u_{\circledcirc z} = u_{\odot z},\\
\sigma_{\circledcirc\rho\rho} = \sigma_{\odot\rho\rho},\ \ & \sigma_{\circledcirc\rho\varphi} = \sigma_{\odot\rho\varphi},\ \ \sigma_{\circledcirc\rho z} = \sigma_{\odot\rho z}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

На границе полости $\rho_\circ = R_\circ$ должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангециальных составляющих тензора напряжений

$$
\rho_\circ = R_\circ:\ \ -iwu_{\odot\rho} = v_{\circ\rho},\ \ \sigma_{\odot\rho\rho} = -P_\circ,\ \ \sigma_{\odot\rho\varphi} = 0,\ \ \sigma_{\odot\rho z} = 0. \tag{22}
$$

Используя формулы

$$
v_{e\rho} = \frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial\rho_\odot},\quad P_e = iwp_e(\Psi_o + \Psi_s)
$$

и выражение (16) запишем граничные условия (20) через функции Ψ_o, Ψ_s, $u_{\circledcirc\rho}$, $u_{\circledcirc\varphi}$, $u_{\circledcirc z}$. Получим при $\rho_\odot = R_\circledcirc$

$$\frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial \rho_\odot} = -iwu_{\circledcirc\rho}, \tag{23}$$

$$\lambda_\circledcirc\left(\frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial \rho_\circledcirc} + \frac{1}{\rho_\circledcirc}\left(\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial \varphi_\circledcirc} + u_{\circledcirc\rho}\right) + \frac{\partial u_{\circledcirc z}}{\partial z_\circledcirc}\right) + 2\,\mu_\circledcirc\,\frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial \rho_\circledcirc} = -iwp_e(\Psi_o + \Psi_s), \tag{24}$$

$$\lambda_\circledcirc\left(\frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial \rho_\circledcirc} + \frac{1}{\rho_\circledcirc}\left(\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\mu_\circledcirc}\left(\frac{1}{\rho_\circledcirc}\frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial \varphi_\circledcirc} + \frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial \rho_\circledcirc} - \frac{u_{\circledcirc\varphi}}{\rho_\circledcirc}\right) = 0, \tag{25}$$

$$\mu_\circledcirc\left(\frac{\partial u_{\circledcirc z}}{\partial \rho_\circledcirc} + \frac{\partial u_{\circledcirc\rho}}{\partial z_\circledcirc}\right) = 0. \tag{26}$$

Аналогично, используя выражения (13), (16) запишем граничные условия (21) через функции u_ρ, u_φ, u_z, $\Psi_\odot$, L и M, а граничные условия (21) через $\Psi_\odot$, L и M.

Подставив разложения (19) в уравнения (18), воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности этих многочленов, получим для каждого индекса n $\quad(n = 0, 1, \ldots;$ систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_{\rho\,n}(\rho_\odot)$, $u_{\varphi\,n}(\rho_\odot)$ и $u_{z\,n}(\rho_\odot)$. А подставив разложения (19) в полученные граничные условия, найдем краевые условия и сможем решить систему дифференциальных уравнений. После ее решения определим коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n, E_n разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) для каждой индекса n, а зная коэффициенты A_n, по формуле (5) найдем акустическое поле, рассеяное упругим цилиндром, имеющим произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие.

2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Диаграмма направленности

3.2. Частотные характеристики

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.

ЛИТЕРАТУРА

ПРИЛОЖЕНИЕ