СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Существуют разлиные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохраматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ

2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

2.2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом $R_\odot$, материал которого характеризуется плотностью $p_\odot$ и упругими постоянными $\lambda_\odot$ и $\mu_\odot$. Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом $R_\circ$. Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен $R_\circledcirc$. Для решения задачи ввдем цилиндрические системы координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ и $\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ$, связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости $\lambda_\circledcirc$ и $\mu_\circledcirc$ материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференциируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты $\rho_\odot$, а плотность $p_\circledcirc$ – непрерывной функцией координаты $\rho_\odot$.

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности $\rho_e, \rho_\circ$ и скорости звука $c_e, c_\circ$ соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_o = A_o \exp\{i[(\bar{k}_e) \cdot \bar{r}_\odot) - \omega t]\},$$

где A_o – амплитуда волны; $\bar{k}_e$ – волновой вектор падающей волны; $\bar{r}_\odot$ – радиус-вектор; ω – круговая частота. В дальнейшем временной множитель $\exp\{-i\omega t\}$ будем опускать.

В цилиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_o = A_o \exp\{ik_e[\rho_\odot \sin\hat{\theta}_e \cos(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e) + z_\odot \cos\hat{\theta}_e]\},$$

где $\hat{\theta}_e$ и $\hat{\varphi}_e$ – полярный и азимутальный углы падения волны; $k_e = \omega/c_e$ – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

2.3. Аналитическое решение задачи

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_o(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = A_0 \exp\{i\alpha z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n; $\alpha = k_e \cos\hat{\theta}_e$; $\beta = k_e \sin\hat{\theta}_e$.

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахождении решений уравнений Гельмгольца

$$\Delta\Psi_\circ + k_\circ^2\Psi_\circ = 0, \tag{1}$$

$$\Delta\Psi_e + k_e^2\Psi_e = 0, \tag{2}$$

где $\Psi_\circ$ – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра; $k_\circ = \frac{\omega}{c_\circ}$ – волновое число жидкости в полости цилиндра; Ψ_e – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \tag{3}$$

где Ψ_s – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta\Psi_s + k_s^2\Psi_s = 0. \tag{4}$$

Уравнения (4) и (2) запишем в цилиндрических системах координат $\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ$ и $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ соответственно.

Отраженная волна Ψ_s должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра $\Psi_\circ$ – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы Ψ_s и $\Psi_\circ$ будем искать в виде

$$\Psi_s(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_\odot\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\}, \tag{5}$$

$$\Psi_\circ(\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ) = \exp\{i\alpha_\circ z_\circ\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_\circ\rho_\circ) \exp\{in(\varphi_\circ - \hat{\varphi}_e)\}, \tag{6}$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка n.

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне и внутри цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_\circ = \operatorname{grad}\Psi_\circ; \quad P_\circ = i\rho_\circ\omega\Psi_\circ,$$
$$\bar{\nu}_e = \operatorname{grad}\Psi_e; \quad P_e = i\rho_e\,\omega\Psi_e.$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta\bar{\Phi} + k_\updownarrow^2\bar{\Phi} = 0, \tag{7}$$
$$\Delta\Psi + k_\leftrightarrow^2\Psi = 0, \tag{8}$$

где $k_\updownarrow = \omega/c_\updownarrow$ и $k_\leftrightarrow = \omega/c_\leftrightarrow$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; Ψ и $\bar{\Phi}$ – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно; $c_\leftrightarrow = \sqrt{(\lambda_\odot + 2\mu_\odot)/\rho_\odot}$ и $c_\updownarrow = \sqrt{\mu_\odot/\rho_\odot}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения $\bar{u}$ представляется в виде:

$$\bar{u} = \operatorname{grad}\Psi + \operatorname{rot}\bar{\Phi}. \tag{9}$$

Векторное уравнение (8) в цилиндрической системе координат в обшем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{\Phi}$, а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор $\bar{\Phi}$ в виде

$$\bar{\Phi} = \operatorname{rot}(L\bar{e}_{z_\odot}) + \frac{1}{k_\updownarrow}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(M\bar{e}_{z_\odot}) = \operatorname{rot}(L\bar{e}_{z_\odot}) + k_\updownarrow M\bar{e}_{z_\odot} + \frac{1}{k_\updownarrow}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial M}{\partial z_\odot}\right),$$

где L и M – скалярные функции пространственных координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$; $\bar{e}_{z_\odot}$ – единичный вектор оси $z_\odot$.

Тогда векторное уравнение (8) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\updownarrow^2 L = 0,$$
$$\Delta M + k_\updownarrow^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции Ψ, L и M будем искать в виде

$$\Psi(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(k_1\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\}, \tag{10}$$

$$L(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(k_2\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\}, \tag{11}$$

$$M(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(k_2\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\}, \tag{12}$$

где $k_1 = \sqrt{k_{\leftrightarrow}^2 - \alpha_\odot^2}, k_2 = \sqrt{k_{\updownarrow}^2 - \alpha_\odot^2}$.

Компоненты вектора смещения $\bar{u}$, записанные через функции Ψ, L и M в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$u_{\rho_\odot} = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_\odot} + \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_\odot\, \partial z_\odot} + \frac{k_{\updownarrow}}{\rho} \frac{\partial M}{\partial \varphi_\odot}, \tag{13}$$

$$u_{\varphi_\odot} = \frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_\odot\, \partial z_\odot} - k_{\updownarrow} \frac{\partial M}{\partial \rho_\odot}, \tag{14}$$

$$u_{z_\odot} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_\odot} - \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_\odot^2} - \frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial L}{\partial \rho_\odot} - \frac{1}{\rho_\odot^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_\odot^2}. \tag{15}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\bar{u}$ в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho_\odot\rho_\odot} &= \lambda\left(\frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\left(\frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial \varphi_\odot} + u_{\rho_\odot}\right) + \frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial z_\odot}\right) + 2\,\mu\, \frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial \rho_\odot}, \\
\sigma_{\varphi_\odot\varphi_\odot} &= \lambda\left(\frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\left(\frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial \varphi_\odot} + u_{\rho_\odot}\right) + \frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial z_\odot}\right) + 2\,\mu\left(\frac{1}{\rho_\odot}\frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial \varphi_\odot} + \frac{u_{\rho_\odot}}{\rho_\odot}\right), \\
\sigma_{z_\odot z_\odot} &= \lambda\left(\frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\left(\frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial \varphi_\odot} + u_{\rho_\odot}\right) + \frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial z_\odot}\right) + 2\,\mu\, \frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial z_\odot}, \\
\sigma_{\rho_\odot\varphi_\odot} &= \mu\left(\frac{1}{\rho_\odot}\frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial \varphi_\odot} + \frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial \rho_\odot} - \frac{u_{\varphi_\odot}}{\rho_\odot}\right), \\
\sigma_{\rho_\odot z_\odot} &= \mu\left(\frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial \rho_\odot} + \frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial z_\odot}\right), \\
\sigma_{\varphi_\odot z_\odot} &= \mu\left(\frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial z_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot}\frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial \varphi_\odot}\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\,\sigma_{\rho_\odot\rho_\odot}}{\partial\rho_\odot}+\frac{1}{\rho_\odot}\,\frac{\partial\,\sigma_{\rho_\odot\varphi_\odot}}{\partial\varphi_\odot}+\frac{\partial\,\sigma_{\rho_\odot z_\odot}}{\partial z_\odot}+\frac{\sigma_{\rho_\odot\rho_\odot}-\sigma_{\varphi_\odot\varphi_\odot}}{\rho_\odot}=-\omega^2 p(\rho_\odot)u_{\rho_\odot},\\
\frac{\partial\,\sigma_{\rho_\odot\varphi_\odot}}{\partial\rho_\odot}+\frac{1}{\rho_\odot}\,\frac{\partial\,\sigma_{\varphi_\odot\varphi_\odot}}{\partial\varphi_\odot}+\frac{\partial\,\sigma_{\varphi_\odot z_\odot}}{\partial z_\odot}+\frac{2}{\rho_\odot}\,\sigma_{\rho_\odot\varphi_\odot}=-\omega^2 p(\rho_\odot)u_{\varphi_\odot},\\
\frac{\partial\,\sigma_{\rho_\odot z_\odot}}{\partial\rho_\odot}+\frac{1}{\rho_\odot}\,\frac{\partial\,\sigma_{\varphi_\odot z_\odot}}{\partial\varphi_\odot}+\frac{\partial\,\sigma_{z_\odot z_\odot}}{\partial z_\odot}+\frac{1}{\rho_\odot}\,\sigma_{\rho_\odot z_\odot}=-\omega^2 p(\rho_\odot)u_{z_\odot},
\end{gathered}
\tag{17}
$$

где $u_{\rho_\odot}, u_{\varphi_\odot}, u_{z_\odot}$ – компоненты вектора смещения $\bar{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\bar{u}$ в неоднородном упругом цилиндрическом слое аналогичны соотношениям для однородного упругого цилиндра, при этом упругие постоянные λ и μ следует заменить на функции $\lambda=\lambda(\rho_\odot)$ и $\mu=\mu(\rho_\odot)$.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (17) через компоненты вектора смещения μ. Получим

$$
\begin{aligned}
&\Big(\lambda+2\mu\Big)\frac{\partial^2 u_{\rho_\odot}}{\partial\rho_\odot^2}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_\odot}+2\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\odot}+\frac{\lambda+2\mu}{\rho_\odot}\right)\frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial\rho_\odot}+\frac{\mu}{\rho_\odot^2}\frac{\partial^2 u_{\rho_\odot}}{\partial\varphi_\odot^2}+\\
&+\mu\,\frac{\partial^2 u_{\rho_\odot}}{\partial z_\odot^2}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_\odot}\frac{\partial^2 u_{\varphi_\odot}}{\partial\rho_\odot\partial\varphi_\odot}+\frac{1}{\rho_\odot}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_\odot}-\frac{\lambda+3\mu}{\rho_\odot}\right)\frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial\varphi_\odot}+\\
&+\Big(\lambda+\mu\Big)\frac{\partial^2 u_{z_\odot}}{\partial\rho_\odot\partial z_\odot}+\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_\odot}\,\frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial z_\odot}+\left(\frac{1}{\rho_\odot}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_\odot}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho_\odot^2}+\omega^2 p\right)u_{\rho_\odot}=0,\\
&\frac{\lambda+\mu}{\rho_\odot}\frac{\partial^2 u_{\rho_\odot}}{\partial\rho_\odot\partial\varphi_\odot}+\frac{1}{\rho_\odot}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\odot}+\frac{\lambda+3\,\mu}{\rho_\odot}\right)\frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial\varphi_\odot}+\mu\,\frac{\partial^2 u_{\varphi_\odot}}{\partial\rho_\odot^2}+\\
&+\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho_\odot^2}\,\frac{\partial^2 u_{\varphi_\odot}}{\partial\varphi_\odot^2}+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\odot}+\frac{\mu}{\rho_\odot}\right)\frac{\partial u_{\varphi_\odot}}{\partial\rho_\odot}+\mu\,\frac{\partial^2 u_{\varphi_\odot}}{\partial z_\odot^2}+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{\rho_\odot}\frac{\partial^2 u_{z_\odot}}{\partial\varphi_\odot\partial z_\odot}+\left(-\frac{1}{\rho_\odot}\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\odot}-\frac{\mu}{\rho_\odot^2}+\omega^2 p\right)u_{\varphi_\odot}=0,\\
&\Big(\lambda+\mu\Big)\frac{\partial^2 u_{\rho_\odot}}{\partial\rho_\odot\partial z_\odot}+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\odot}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_\odot}\right)\frac{\partial u_{\rho_\odot}}{\partial z_\odot}+\frac{\lambda+\mu}{\rho_\odot}\,\frac{\partial^2 u_{\varphi_\odot}}{\partial\varphi_\odot\partial z_\odot}+\\
&+\mu\,\frac{\partial^2 u_{z_\odot}}{\partial\rho_\odot^2}+\frac{\mu}{\rho_\odot^2}\,\frac{\partial^2 u_{z_\odot}}{\partial{\varphi_\odot}^2}+\Big(\lambda+2\,\mu\Big)\frac{\partial^2 u_{z_\odot}}{\partial z_\odot^2}+\\
&+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\odot}+\frac{\mu}{\rho_\odot}\right)\frac{\partial u_{z_\odot}}{\partial\rho_\odot}+\omega^2 p\,u_{z_\odot}=0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Функции $u_{\rho_\odot}(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot)$, $u_{\varphi_\odot}(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot)$ и $u_{z_\odot}(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot)$ будем искать в виде разложений

$$\begin{aligned} u_{\rho_\odot}(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) &= \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\rho_\odot\, n}(\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\}, \\ u_{\varphi_\odot}(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) &= \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\varphi_\odot\, n}(\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\}, \\ u_{z_\odot}(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) &= \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{z_\odot\, n}(\rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n, E_n разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) и функции $u_{\rho_\odot n}(\rho_\odot)$, $u_{\varphi_\odot n}(\rho_\odot)$ и $u_{z_\odot n}(\rho_\odot)$ из разложений (19) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\rho_\odot = R_\circledcirc: \;\; -iwu_{\rho_\circledcirc} = v_{\rho_e}, \;\; \sigma_{\rho\rho_\circledcirc} = -P_e, \;\; \sigma_{\rho\varphi_\circledcirc} = 0, \;\; \sigma_{\rho z_\circledcirc} = 0. \qquad (20)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} \rho_\odot = R_\odot: \quad & u_{\rho_\circledcirc} = u_{\rho_\odot}, \quad u_{\varphi_\circledcirc} = u_{\varphi_\odot}, \quad u_{z_\circledcirc} = u_{z_\odot}, \\ & \sigma_{\rho\rho_\circledcirc} = \sigma_{\rho\rho_\odot}, \;\; \sigma_{\rho\varphi_\circledcirc} = \sigma_{\rho\varphi_\odot}, \;\; \sigma_{\rho z_\circledcirc} = \sigma_{\rho z_\odot}. \end{aligned} \qquad (21)$$

На границе полости $\rho_\circ = R_\circ$ должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангециальных составляющих тензора напряжений

$$\rho_\circ = R_\circ: \;\; -iwu_{\rho_\odot} = v_{\rho_\circ}, \;\; \sigma_{\rho\rho_\odot} = -P_\circ, \;\; \sigma_{\rho\varphi_\odot} = 0, \;\; \sigma_{\rho z_\odot} = 0. \qquad (22)$$

Используя формулы

$$v_{\rho_e} = \frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial \rho}, \quad P_e = iwp_e(\Psi_o + \Psi_s)$$

и выражение (16) запишем граничные условия (20) через функции Ψ_s, u_ρ, u_φ, u_z. Получим при $\rho_\odot = R_\circledcirc$

$$\frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial\rho} = -iwu_{\rho_\circledcirc}, \tag{23}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_\rho\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\,\mu\,\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} = -iwp_e(\Psi_o + \Psi_s), \tag{24}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\mu}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho} - \frac{u_\varphi}{\rho}\right) = 0, \tag{25}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial\rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right) = 0. \tag{26}$$

Аналогично, используя выражения (13), (16) запишем граничные условия (21) через функции u_ρ, u_φ, u_z, $\Psi_\odot$, L и M, а граничные условия (21) через $\Psi_\odot$, L и M.

Подставив разложения (19) в уравнения (18), воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности этих многочленов, получим для каждого индекса $n \quad (n = 0, 1, \ldots;$ систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_{\rho\, n}(\rho_\odot)$, $u_{\varphi\, n}(\rho_\odot)$ и $u_{z\, n}(\rho_\odot)$. А подставив разложения (19) в полученные граничные условия, найдем краевые условия и сможем решить систему дифференциальных уравнений. После ее решения определим коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n, E_n разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) для каждой индекса n, а зная коэффициенты A_n, по формуле (5) найдем акустическое поле, рассеяное упругим цилиндром, имеющим произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие.

2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Диаграмма направленности

3.2. Частотные характеристики

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.

ЛИТЕРАТУРА

ПРИЛОЖЕНИЕ