

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	4
1.1. Распространение звука в идеальной жидкости	5
1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах	6
2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ	7
2.1. Обзор литературы по проблеме исследования	8
2.2. Постановка задачи	9
2.3. Аналитическое решение задачи	10
2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифферен- циальных уравнений	20
3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	21
3.1. Диаграмма направленности	22
3.2. Частотные характеристики	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	24
ЛИТЕРАТУРА	25
ПРИЛОЖЕНИЕ	26

ВВЕДЕНИЕ

Акустика, применени акустики

Существуют различные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Распространение звуковых волн

1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Из книги Толоконников, Ларин или из лабы

1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

Переделать для упругих тел. Взять из Ландау-Лифшиц Теория упругости, Амензаде Теория упругости. Все в своих системах координат. Решение в специальных функциях.

**2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА
УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ
ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ
ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ
ПОКРЫТИЕ**

2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

Взять у Филатовой + новые работы. Известия ТулГУ №3 - новые статьи. Статьи Ларина, Скобельцына, Толоконникова.

2.2. Постановка задачи

Рисунок и рассмотрим, пусть. И закончить Требуется найти волновые поля в упругом теле.

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом R_\odot , материал которого характеризуется плотностью ρ_\odot и упругими постоянными λ_\odot и μ_\odot . Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом R_o . Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен R_\odot . Для решения задачи введем цилиндрические системы координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ и ρ_o, φ_o, z_o , связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости λ_\odot и μ_\odot материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты ρ_\odot , а плотность ρ_\odot – непрерывной функцией координаты ρ_\odot .

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности ρ_e, ρ_o и скорости звука c_e, c_o соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_o = A_o \exp\{i[(\bar{k}_e) \cdot \bar{r}_\odot) - \omega t]\},$$

где A_o – амплитуда волны; \bar{k}_e – волновой вектор падающей волны; \bar{r}_\odot – радиус-вектор; ω – круговая частота. В дальнейшем временной множитель $\exp\{-i\omega t\}$ будем опускать.

В цилиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_o = A_o \exp\{ik_e[\rho_\odot \sin \hat{\theta}_e \cos(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e) + z_\odot \cos \hat{\theta}_e]\},$$

где $\hat{\theta}_e$ и $\hat{\varphi}_e$ – полярный и азимутальный углы падения волны; $k_e = \omega/c_e$ – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

2.3. Аналитическое решение задачи

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_o(\rho_o, \varphi_o, z_o) = A_0 \exp\{i\alpha z_o\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta_e \rho_o) \exp\{in(\varphi_o - \hat{\varphi}_e)\},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k_e \cos \hat{\theta}_e$; $\beta_e = \sqrt{k_e^2 - \alpha^2}$.

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахождении решений уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Psi_o + k_o^2 \Psi_o = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0, \quad (2)$$

где Ψ_o – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра; $k_o = \frac{\omega}{c_o}$ – волновое число жидкости в полости цилиндра; Ψ_e – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \quad (3)$$

где Ψ_s – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta \Psi_s + k_e^2 \Psi_s = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1) и (4) запишем в цилиндрических системах координат ρ_o, φ_o, z_o и ρ_o, φ_o, z_o соответственно.

Отраженная волна Ψ_s должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра Ψ_o – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы Ψ_s и Ψ_o будем искать в виде

Беты одинаковые или разные (станет ясно в граничных условиях)

$$\Psi_s(\rho_o, \varphi_o, z_o) = \exp\{i\alpha z_o\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_o \rho_o) \exp\{in\varphi_o\}, \quad (5)$$

$$\Psi_o(\rho_o, \varphi_o, z_o) = \exp\{i\alpha z_o\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_o \rho_o) \exp\{in\varphi_o\}, \quad (6)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка n .

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне и внутри цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_o = \text{grad } \Psi_o; \quad P_o = i\rho_o \omega \Psi_o,$$

$$\bar{\nu}_e = \text{grad } \Psi_e; \quad P_e = i\rho_e \omega \Psi_e.$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta \bar{\Phi}_\odot + k_\downarrow^2 \bar{\Phi}_\odot = 0, \quad (7)$$

$$\Delta \Psi_\odot + k_{\leftrightarrow}^2 \Psi_\odot = 0, \quad (8)$$

где $k_\downarrow = \omega/c_\downarrow$ и $k_{\leftrightarrow} = \omega/c_{\leftrightarrow}$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; Ψ_\odot и $\bar{\Phi}_\odot$ – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно; $c_{\leftrightarrow} = \sqrt{(\lambda_\odot + 2\mu_\odot)/\rho_\odot}$ и $c_\downarrow = \sqrt{\mu_\odot/\rho_\odot}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения \bar{u}_\odot представляется в виде:

$$\bar{u}_\odot = \text{grad } \Psi_\odot + \text{rot } \bar{\Phi}_\odot. \quad (9)$$

Векторное уравнение (8) в цилиндрической системе координат в общем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{\Phi}_\odot$, а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор $\bar{\Phi}_\odot$ в виде

$$\bar{\Phi}_\odot = \text{rot}(L\bar{e}_{z_\odot}) + \frac{1}{k_\downarrow} \text{rot rot}(M\bar{e}_{z_\odot}) = \text{rot}(L\bar{e}_{z_\odot}) + k_\downarrow M\bar{e}_{z_\odot} + \frac{1}{k_\downarrow} \text{grad} \left(\frac{\partial M}{\partial z_\odot} \right),$$

где L и M – скалярные функции пространственных координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$; \bar{e}_{z_\odot} – единичный вектор оси z_\odot .

Тогда векторное уравнение (8) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\downarrow^2 L = 0,$$

$$\Delta M + k_\downarrow^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции Ψ , L и M будем искать в виде

$$\Psi_{\odot}(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot}) = \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(\beta_{\leftrightarrow} \rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \quad (10)$$

$$L(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot}) = \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(\beta_{\downarrow} \rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \quad (11)$$

$$M(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot}) = \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(\beta_{\downarrow} \rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \quad (12)$$

где $\beta_{\leftrightarrow} = \sqrt{k_{\leftrightarrow}^2 - \alpha^2}$, $\beta_{\downarrow} = \sqrt{k_{\downarrow}^2 - \alpha^2}$.

Компоненты вектора смещения \bar{u}_{\odot} , записанные через функции Ψ_{\odot} , L и M в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\odot\rho} &= \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_{\odot} \partial z_{\odot}} + \frac{k_{\downarrow}}{\rho_{\odot}} \frac{\partial M}{\partial \varphi_{\odot}}, \\ u_{\odot\varphi} &= \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \varphi_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_{\odot} \partial z_{\odot}} - k_{\downarrow} \frac{\partial M}{\partial \rho_{\odot}}, \\ u_{\odot z} &= \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial z_{\odot}} - \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_{\odot}^2} - \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial L}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_{\odot}^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{\odot ij}$ и вектора смещения \bar{u}_{\odot} в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\odot\rho\rho} &= \lambda_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_{\odot}} \right) + 2\mu_{\odot} \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_{\odot}}, \\ \sigma_{\odot\varphi\varphi} &= \lambda_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_{\odot}} \right) + \frac{2\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + u_{\odot\rho} \right), \\ \sigma_{\odot zz} &= \lambda_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_{\odot}} \right) + 2\mu_{\odot} \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_{\odot}}, \\ \sigma_{\odot\rho\varphi} &= \mu_{\odot} \left(\frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \varphi_{\odot}} + \frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{u_{\odot\varphi}}{\rho_{\odot}} \right), \\ \sigma_{\odot\rho z} &= \mu_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot z}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial z_{\odot}} \right), \\ \sigma_{\odot\varphi z} &= \mu_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial z_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial \varphi_{\odot}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{\odot\rho\rho}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot\rho\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + \frac{\partial \sigma_{\odot\rho z}}{\partial z_{\odot}} + \frac{\sigma_{\odot\rho\rho} - \sigma_{\odot\varphi\varphi}}{\rho_{\odot}} &= -\omega^2 p_{\odot} u_{\odot\rho}, \\
\frac{\partial \sigma_{\odot\rho\varphi}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot\varphi\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + \frac{\partial \sigma_{\odot\varphi z}}{\partial z_{\odot}} + \frac{2}{\rho_{\odot}} \sigma_{\odot\rho\varphi} &= -\omega^2 p_{\odot} u_{\odot\varphi}, \\
\frac{\partial \sigma_{\odot\rho z}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot\varphi z}}{\partial \varphi_{\odot}} + \frac{\partial \sigma_{\odot zz}}{\partial z_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \sigma_{\odot\rho z} &= -\omega^2 p_{\odot} u_{\odot z},
\end{aligned} \tag{15}$$

где $u_{\odot\rho}, u_{\odot\varphi}, u_{\odot z}$ – компоненты вектора смещения \bar{u}_{\odot} частиц неоднородного слоя;

$\sigma_{\odot ij}$ – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{\odot ij}$ и вектора смещения \bar{u}_{\odot} в неоднородном упругом цилиндрическом слое аналогичны соотношениям (14) для однородного упругого цилиндра, при этом упругие постоянные λ_{\odot} и μ_{\odot} следует заменить на функции $\lambda_{\odot} = \lambda_{\odot}(\rho_{\odot})$ и $\mu_{\odot} = \mu_{\odot}(\rho_{\odot})$.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (15) через компоненты

вектора смещения \bar{u}_\odot . Получим

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_\odot + 2\mu_\odot \right) \frac{\partial^2 u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot^2} + \left(\frac{\partial \lambda_\odot}{\partial \rho_\odot} + 2 \frac{\partial \mu_\odot}{\partial \rho_\odot} + \frac{\lambda_\odot + 2\mu_\odot}{\rho_\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot} + \\
& + \frac{\mu_\odot}{\rho_\odot^2} \frac{\partial^2 u_{\odot\rho}}{\partial \varphi_\odot^2} + \mu_\odot \frac{\partial^2 u_{\odot\rho}}{\partial z_\odot^2} + \frac{\lambda_\odot + \mu_\odot}{\rho_\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot\varphi}}{\partial \rho_\odot \partial \varphi_\odot} + \\
& + \frac{1}{\rho_\odot} \left(\frac{\partial \lambda_\odot}{\partial \rho_\odot} - \frac{\lambda_\odot + 3\mu_\odot}{\rho_\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_\odot} + \left(\lambda_\odot + \mu_\odot \right) \frac{\partial^2 u_{\odot z}}{\partial \rho_\odot \partial z_\odot} + \frac{\partial \lambda_\odot}{\partial \rho_\odot} \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_\odot} + \\
& + \left(\frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial \lambda_\odot}{\partial \rho_\odot} - \frac{\lambda_\odot + 2\mu_\odot}{\rho_\odot^2} + \omega^2 p_\odot \right) u_{\odot\rho} = 0, \\
& \frac{\lambda_\odot + \mu_\odot}{\rho_\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot \partial \varphi_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot} \left(\frac{\partial \mu_\odot}{\partial \rho_\odot} + \frac{\lambda_\odot + 3\mu_\odot}{\rho_\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial \varphi_\odot} + \mu_\odot \frac{\partial^2 u_{\odot\varphi}}{\partial \rho_\odot^2} + \\
& + \frac{\lambda_\odot + 2\mu_\odot}{\rho_\odot^2} \frac{\partial^2 u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_\odot^2} + \left(\frac{\partial \mu_\odot}{\partial \rho_\odot} + \frac{\mu_\odot}{\rho_\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial \rho_\odot} + \mu_\odot \frac{\partial^2 u_{\odot\varphi}}{\partial z_\odot^2} + \\
& + \frac{\lambda_\odot + \mu_\odot}{\rho_\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot z}}{\partial \varphi_\odot \partial z_\odot} + \left(-\frac{1}{\rho_\odot} \frac{\partial \mu_\odot}{\partial \rho_\odot} - \frac{\mu_\odot}{\rho_\odot^2} + \omega^2 p_\odot \right) u_{\odot\varphi} = 0, \\
& \left(\lambda_\odot + \mu_\odot \right) \frac{\partial^2 u_{\odot\rho}}{\partial \rho_\odot \partial z_\odot} + \left(\frac{\partial \mu_\odot}{\partial \rho_\odot} + \frac{\lambda_\odot + \mu_\odot}{\rho_\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial z_\odot} + \frac{\lambda_\odot + \mu_\odot}{\rho_\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot\varphi}}{\partial \varphi_\odot \partial z_\odot} + \\
& + \mu_\odot \frac{\partial^2 u_{\odot z}}{\partial \rho_\odot^2} + \frac{\mu_\odot}{\rho_\odot^2} \frac{\partial^2 u_{\odot z}}{\partial \varphi_\odot^2} + \left(\lambda_\odot + 2\mu_\odot \right) \frac{\partial^2 u_{\odot z}}{\partial z_\odot^2} + \\
& + \left(\frac{\partial \mu_\odot}{\partial \rho_\odot} + \frac{\mu_\odot}{\rho_\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial \rho_\odot} + \omega^2 p_\odot u_{\odot z} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Функции $u_{\odot\rho}(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot})$, $u_{\odot\varphi}(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot})$ и $u_{\odot z}(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot})$ будем искать в виде разложений

$$\begin{aligned} u_{\odot\rho}(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot}) &= \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\odot\rho n}(\rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \\ u_{\odot\varphi}(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot}) &= \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\odot\varphi n}(\rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}, \\ u_{\odot z}(\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot}) &= \exp\{i\alpha z_{\odot}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\odot z n}(\rho_{\odot}) \exp\{in\varphi_{\odot}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты A_n , B_n , C_n , D_n , E_n разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) и функции $u_{\odot\rho n}(\rho_{\odot})$, $u_{\odot\varphi n}(\rho_{\odot})$ и $u_{\odot z n}(\rho_{\odot})$ из разложений (17) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\rho_{\odot} = R_{\odot} : -i\omega u_{\odot\rho} = v_{e\rho}, \quad \sigma_{\odot\rho\rho} = -P_e, \quad \sigma_{\odot\rho\varphi} = 0, \quad \sigma_{\odot\rho z} = 0. \quad (18)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} \rho_{\odot} = R_{\odot} : \quad u_{\odot\rho} &= u_{\odot\rho}, \quad u_{\odot\varphi} = u_{\odot\varphi}, \quad u_{\odot z} = u_{\odot z}, \\ \sigma_{\odot\rho\rho} &= \sigma_{\odot\rho\rho}, \quad \sigma_{\odot\rho\varphi} = \sigma_{\odot\rho\varphi}, \quad \sigma_{\odot\rho z} = \sigma_{\odot\rho z}. \end{aligned} \quad (19)$$

На границе полости $\rho_o = R_o$ должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений

$$\rho_o = R_o : -i\omega u_{\odot\rho} = v_{o\rho}, \quad \sigma_{\odot\rho\rho} = -P_o, \quad \sigma_{\odot\rho\varphi} = 0, \quad \sigma_{\odot\rho z} = 0. \quad (20)$$

Используя формулы

$$v_{e\rho} = \frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial\rho_{\odot}}, \quad P_e = i\omega p_e(\Psi_o + \Psi_s)$$

и выражение (14) запишем граничные условия (18) через функции Ψ_o , Ψ_s , $u_{\odot\rho}$, $u_{\odot\varphi}$, $u_{\odot z}$. Получим при $\rho_{\odot} = R_{\odot}$

$$\frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial\rho_{\odot}} = -i\omega u_{\odot\rho}, \quad (21)$$

$$\lambda_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial\rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial\varphi_{\odot}} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_{\odot}} \right) + 2\mu_{\odot} \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial\rho_{\odot}} = -i\omega p_e(\Psi_o + \Psi_s), \quad (22)$$

$$\mu_{\odot} \left(\frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial\varphi_{\odot}} + \frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial\rho_{\odot}} - \frac{u_{\odot\varphi}}{\rho_{\odot}} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\mu_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot z}}{\partial\rho_{\odot}} + \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial z_{\odot}} \right) = 0. \quad (24)$$

Аналогично, используя выражения (13), (14) запишем граничные условия (19) через функции $u_{\odot\rho}$, $u_{\odot\varphi}$, $u_{\odot z}$, Ψ_{\odot} , L и M , а граничные условия (20) через Ψ_{\odot} , Ψ_o , L и M .

$$u_{\odot\rho} = \frac{\partial\Psi_{\odot}}{\partial\rho_{\odot}} + \frac{\partial^2 L}{\partial\rho_{\odot} \partial z_{\odot}} + \frac{k_{\downarrow}}{\rho_{\odot}} \frac{\partial M}{\partial\varphi_{\odot}}, \quad (25)$$

$$u_{\odot\varphi} = \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial\Psi_{\odot}}{\partial\varphi_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial^2 L}{\partial\varphi_{\odot} \partial z_{\odot}} - k_{\downarrow} \frac{\partial M}{\partial\rho_{\odot}}, \quad (26)$$

$$u_{\odot z} = \frac{\partial\Psi_{\odot}}{\partial z_{\odot}} - \frac{\partial^2 L}{\partial\rho_{\odot}^2} - \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial L}{\partial\rho_{\odot}} - \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \frac{\partial^2 L}{\partial\varphi_{\odot}^2}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial\rho_{\odot}} + \frac{1}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial u_{\odot\varphi}}{\partial\varphi_{\odot}} + u_{\odot\rho} \right) + \frac{\partial u_{\odot z}}{\partial z_{\odot}} \right) + 2\mu_{\odot} \frac{\partial u_{\odot\rho}}{\partial\rho_{\odot}} = \\ & = \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \left(-\lambda_{\odot} \frac{\partial^3 L}{\partial z_{\odot} \partial\varphi_{\odot}^2} + 2\mu_{\odot} \rho_{\odot}^2 \frac{\partial^3 L}{\partial z_{\odot} \partial\rho_{\odot}^2} + 2\rho_{\odot} \left(\left[\frac{1}{2}\rho_{\odot} - \frac{1}{2} \right] \lambda_{\odot} + \rho_{\odot} \mu_{\odot} \right) \cdot \right. \\ & \cdot k_{\downarrow} \frac{\partial^2 M}{\partial\rho_{\odot} \partial\varphi_{\odot}} + 2 \left(\frac{1}{2}\lambda_{\odot} + \mu_{\odot} \right) \rho_{\odot}^2 \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial\rho_{\odot}^2} + \left(\frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial\varphi_{\odot}^2} + \right. \\ & \left. \left. + \rho_{\odot} \left(\rho_{\odot} \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial z_{\odot}^2} + \frac{\partial\Psi_{\odot}}{\partial\rho_{\odot}} + k_{\downarrow} \frac{\partial M}{\partial\varphi_{\odot}} \right) \right) \lambda_{\odot} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mu_{\odot} \left(\frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot \rho}}{\partial \varphi_{\odot}} + \frac{\partial u_{\odot \varphi}}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{u_{\odot \varphi}}{\rho_{\odot}} \right) = \frac{\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} \left(2\rho_{\odot} \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot} \partial \varphi_{\odot}} + \rho_{\odot} \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot} \partial \varphi_{\odot} \partial z_{\odot}} + \right. \\ \left. + \rho_{\odot} k_{\uparrow} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi_{\odot}^2} - 2 \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \varphi_{\odot}} - k_{\uparrow} \rho_{\odot}^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho_{\odot}^2} + k_{\uparrow} \rho_{\odot} \frac{\partial M}{\partial \rho_{\odot}} \right), \quad (29)$$

$$\mu_{\odot} \left(\frac{\partial u_{\odot z}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\partial u_{\odot \rho}}{\partial z_{\odot}} \right) = \mu_{\odot} \left(2 \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot} \partial z_{\odot}} - \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot}^3} + \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \frac{\partial L}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_{\odot}^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\rho_{\odot}^3} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_{\odot}^2} - \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot} \partial \varphi_{\odot}^2} + \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot} \partial z_{\odot}^3} + k_{\uparrow} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi_{\odot} \partial z_{\odot}} \right). \quad (30)$$

Граничные условия (20) примут вид:

$$\frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} = -i w u_{\odot \rho}, \quad (31)$$

$$\frac{1}{\rho_{\odot}^2} \left(-\lambda_{\odot} \frac{\partial^3 L}{\partial z_{\odot} \partial \varphi_{\odot}^2} + 2\mu_{\odot} \rho_{\odot}^2 \frac{\partial^3 L}{\partial z_{\odot} \partial \rho_{\odot}^2} + \left([\rho_{\odot}^2 - \rho_{\odot}] \lambda_{\odot} + 2\rho_{\odot}^2 \mu_{\odot} \right) k_{\uparrow} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho_{\odot} \partial \varphi_{\odot}} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{1}{2} \lambda_{\odot} + \mu_{\odot} \right) \rho_{\odot}^2 \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}^2} + \lambda_{\odot} \left(\frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial \varphi_{\odot}^2} + \rho_{\odot}^2 \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial z_{\odot}^2} + \rho_{\odot} \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{\uparrow} \rho_{\odot} \frac{\partial M}{\partial \varphi_{\odot}} \right) \right) = -i w p_{\odot} \Psi_{\odot}, \quad (32)$$

$$\frac{\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} \left(2\rho_{\odot} \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot} \partial \varphi_{\odot}} + \rho_{\odot} \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot} \partial \varphi_{\odot} \partial z_{\odot}} + \rho_{\odot} k_{\uparrow} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi_{\odot}^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \Psi_{\odot}}{\partial \varphi_{\odot}} - k_{\uparrow} \rho_{\odot}^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho_{\odot}^2} + k_{\uparrow} \rho_{\odot} \frac{\partial M}{\partial \rho_{\odot}} \right) = 0, \quad (33)$$

$$\mu_{\odot} \left(2 \frac{\partial^2 \Psi_{\odot}}{\partial \rho_{\odot} \partial z_{\odot}} - \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot}^3} + \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \frac{\partial L}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial^2 L}{\partial \rho_{\odot}^2} + \frac{2}{\rho_{\odot}^3} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi_{\odot}^2} - \frac{1}{\rho_{\odot}^2} \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot} \partial \varphi_{\odot}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3 L}{\partial \rho_{\odot} \partial z_{\odot}^3} + k_{\uparrow} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi_{\odot} \partial z_{\odot}} \right) = 0. \quad (34)$$

Подставив разложения (17) в уравнения (16), сократив на $\exp\{i\alpha z_{\odot}\}$, по-

лучим

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in\varphi_{\odot}\} \left[\left(\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot} \right) \frac{\partial^2 u_{\odot\rho n}}{\partial \rho_{\odot}^2} + \left(\frac{\partial \lambda_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + 2 \frac{\partial \mu_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \right) \frac{\partial u_{\odot\rho n}}{\partial \rho_{\odot}} - n^2 \frac{\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} u_{\odot\rho n} - \alpha^2 \mu_{\odot} u_{\odot\rho n} + \right. \\
& \left. + in \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot\varphi n}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{in}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial \lambda_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{\lambda_{\odot} + 3\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \right) u_{\odot\varphi n} + \right. \\
& \left. + i\alpha \left(\lambda_{\odot} + \mu_{\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot zn}}{\partial \rho_{\odot}} + i\alpha \frac{\partial \lambda_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} u_{\odot zn} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial \lambda_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} + \omega^2 p_{\odot} \right) u_{\odot\rho n} \right] = 0, \\
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in\varphi_{\odot}\} \left[in \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot\rho n}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{in}{\rho_{\odot}} \left(\frac{\partial \mu_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\lambda_{\odot} + 3\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \right) u_{\odot\rho n} + \right. \\
& \left. + \mu_{\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot\varphi n}}{\partial \rho_{\odot}^2} - n^2 \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} u_{\odot\varphi n} + \left(\frac{\partial \mu_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \right) \frac{\partial u_{\odot\varphi n}}{\partial \rho_{\odot}} - \alpha^2 \mu_{\odot} u_{\odot\varphi n} - \right. \\
& \left. - \alpha n \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} u_{\odot zn} + \left(-\frac{1}{\rho_{\odot}} \frac{\partial \mu_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} - \frac{\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} + \omega^2 p_{\odot} \right) u_{\odot\varphi n} \right] = 0, \\
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in\varphi_{\odot}\} \left[i\alpha \left(\lambda_{\odot} + \mu_{\odot} \right) \frac{\partial u_{\odot\rho n}}{\partial \rho_{\odot}} + i\alpha \left(\frac{\partial \mu_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \right) u_{\odot\rho n} - \right. \\
& \left. - \alpha n \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} u_{\odot\varphi n} + \mu_{\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot zn}}{\partial \rho_{\odot}^2} - \frac{n^2 \mu_{\odot}}{\rho_{\odot}^2} u_{\odot zn} - \alpha^2 \left(\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot} \right) u_{\odot zn} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial \mu_{\odot}}{\partial \rho_{\odot}} + \frac{\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}} \right) \frac{\partial u_{\odot zn}}{\partial \rho_{\odot}} + \omega^2 p_{\odot} u_{\odot zn} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Подставив разложения (6), (5) и (17) в уравнения (18)

сделать ссылку на выраженные граничные условия (21-24), сокра-

тив на $\exp\{i\alpha z_\odot\}$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_0 \beta_e i^n J'_n(\beta_e \rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\} +$$

$$+ A_n \beta_\odot H'_n(\beta_\odot \rho_\odot) \exp\{in\varphi_\odot\} = -iw \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{\odot \rho n}(\rho_\odot) \exp\{in\varphi_\odot\}, \quad (36)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in\varphi_\odot\} \left[\lambda_\odot \left(\frac{\partial u_{\odot \rho n}}{\partial \rho_\odot} + \frac{1}{\rho_\odot} \left(in u_{\odot \varphi n} + u_{\odot \rho n} \right) + i\alpha u_{\odot zn} \right) \right.$$

$$\left. + 2 \mu_\odot \frac{\partial u_{\odot \rho n}}{\partial \rho_\odot} \right] = -iwp_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_0 i^n J_n(\beta_e \rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\} +$$

$$+ A_n H_n(\beta_\odot \rho_\odot) \exp\{in\varphi_\odot\}, \quad (37)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in\varphi_\odot\} \left[\mu_\odot \left(\frac{in}{\rho_\odot} u_{\odot \rho n} + \frac{\partial u_{\odot \varphi n}}{\partial \rho_\odot} - \frac{u_{\odot \varphi n}}{\rho_\odot} \right) \right] = 0,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in\varphi_\odot\} \left[\mu_\odot \left(\frac{\partial u_{\odot zn}}{\partial \rho_\odot} + i\alpha u_{\odot \rho n} \right) \right] = 0. \quad (38)$$

Переделать Подставив разложения (17) в уравнения (16), воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности этих многочленов, получим для каждого индекса n ($n = 0, 1, \dots$); систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_{\rho n}(\rho_\odot)$, $u_{\varphi n}(\rho_\odot)$ и $u_{zn}(\rho_\odot)$. А подставив разложения (17) в полученные граничные условия, найдем краевые условия и сможем решить систему дифференциальных уравнений. После ее решения определим коэффициенты A_n , B_n , C_n , D_n , E_n разложений (5), (6), (5), (10), (11), (12) для каждой индекса n , а зная коэффициенты A_n , по формуле (5) найдем акустическое поле, рассеяное упругим цилиндром, имеющим произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие.

2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Диаграмма направленности

3.2. Частотные характеристики

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомым функций для внешней среды сферы, а также полости тела.

ЛИТЕРАТУРА

ПРИЛОЖЕНИЕ