

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	4
1.1. Распространение звука в идеальной жидкости	5
1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах	6
2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ	7
2.1. Обзор литературы по проблеме исследования	8
2.2. Постановка задачи	9
2.3. Аналитическое решение задачи	10
2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифферен- циальных уравнений	14
3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	15
3.1. Диаграмма направленности	16
3.2. Частотные характеристики	17
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	18
ЛИТЕРАТУРА	19
ПРИЛОЖЕНИЕ	20

ВВЕДЕНИЕ

Акустика, применени акустики

Существуют различные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Распространение звуковых волн

1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Из книги Толоконников, Ларин или из лабы

1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

Переделать для упругих тел. Взять из Ландау-Лифшиц Теория упругости, Амензаде Теория упругости. Все в своих системах координат. Решение в специальных функциях.

**2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА
УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ
ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ
ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ
ПОКРЫТИЕ**

2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

Взять у Филатовой + новые работы. Известия ТулГУ №3 - новые статьи. Статьи Ларина, Скобельцына, Толоконникова.

2.2. Постановка задачи

Рисунок и рассмотрим, пусть. И закончить Требуется найти волновые поля в упругом теле.

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом R_\odot , материал которого характеризуется плотностью ρ_\odot и упругими постоянными λ_\odot и μ_\odot . Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом R_o . Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен R_\odot . Для решения задачи введем цилиндрические системы координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ и ρ_o, φ_o, z_o , связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости λ_\odot и μ_\odot материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты ρ_\odot , а плотность ρ_\odot – непрерывной функцией координаты ρ_\odot .

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности ρ_e, ρ_o и скорости звука c_e, c_o соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_o = A_o \exp\{i[(\bar{k}_e) \cdot \bar{r}_o] - \omega_e t\},$$

где A_o – амплитуда волны; \bar{k}_e – волновой вектор падающей волны; \bar{r}_o – радиус-вектор; ω_e – круговая частота. В дальнейшем временной множитель $\exp\{-i\omega_e t\}$ будем опускать.

В цилиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_o = A_o \exp\{ik_e[r_o \sin \hat{\theta}_e \cos(\varphi_e - \hat{\varphi}_e) + z \cos \hat{\theta}_e]\},$$

где $\hat{\theta}_e$ и $\hat{\varphi}_e$ – полярный и азимутальный углы падения волны; $k_e = \omega_e/c_e$ – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

2.3. Аналитическое решение задачи

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_0(r_1, \varphi_1, z_1) = A_0 \exp\{i\alpha_1 z_1\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta_1 r_1) \exp\{in(\varphi_1 - \varphi_{10})\},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha_1 = k_1 \cos \theta_0$; $\beta_1 = k_1 \sin \theta_0$.

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta \Psi_1 + k_1^2 \Psi_1 = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Psi_2 + k_2^2 \Psi_2 = 0, \quad (2)$$

где Ψ_1 – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра; $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ – волновое число жидкочти в полости цилиндра; Ψ_2 – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_2 = \Psi_i + \Psi_s, \quad (3)$$

где Ψ_s – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta \Psi_s + k_s^2 \Psi_s = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) и (2) запишем в цилиндрических системах координат r_1, φ_1, z_1 и r_2, φ_2, z_2 соответственно.

Отраженная волна Ψ_s должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра Ψ_1 – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы Ψ_s и Ψ_1 будем искать в виде

$$\Psi_s(r_2, \varphi_2, z_2) = \exp\{i\alpha_2 z_2\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_2 r_2) \exp\{in(\varphi_2 - \varphi_{20})\}, \quad (5)$$

$$\Psi_1(r_1, \varphi_1, z_1) = \exp\{i\alpha_1 z_1\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_1 r_1) \exp\{in(\varphi_1 - \varphi_{10})\}, \quad (6)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка n .

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне ($j = 2$) и внутри ($j = 1$) цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_j = \text{grad } \Psi_j; \quad p_j = i\rho_j\omega\Psi_j \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad (8)$$

$$\Delta\bar{\Phi} + k_\tau^2\bar{\Phi} = 0, \quad (9)$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; Ψ и $\bar{\Phi}$ – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно; $c_l = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_2}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_1/\rho_2}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения \bar{u} представляется в виде:

$$\bar{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \bar{\Phi}. \quad (10)$$

Векторное уравнение (9) в цилиндрической системе координат в общем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{\Phi}$, а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор $\bar{\Phi}$ в виде

$$\bar{\Phi} = \text{rot}(L\bar{e}_z) + \frac{1}{k_\tau} \text{rot rot}(M\bar{e}_z) = \text{rot}(L\bar{e}_z) + k_\tau M\bar{e}_z + \frac{1}{k_\tau} \text{grad}\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

где L и M – скалярные функции пространственных координат r, ϕ, z ; \bar{e}_z – единичный вектор оси z .

Тогда векторное уравнение (9) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0,$$

$$\Delta M + k_\tau^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции Ψ , L и M будем искать в виде

$$\Psi(r, \varphi, z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(k_1 r) \exp\{in(\varphi - \varphi_0)\}, \quad (11)$$

$$L(r, \varphi, z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(k_2 r) \exp\{in(\varphi - \varphi_0)\}, \quad (12)$$

$$M(r, \varphi, z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(k_2 r) \exp\{in(\varphi - \varphi_0)\}, \quad (13)$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - \alpha^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \alpha^2}$.

Компоненты вектора смещения \bar{u} , записанные через функции Ψ , L и M в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$u_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} + \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi \partial z} - k_\tau \frac{\partial M}{\partial r}, \quad (15)$$

$$u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2}. \quad (16)$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения \bar{u} в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho(r) u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho(r) u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho(r) u_z,\end{aligned}\tag{18}$$

Где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора смещения \bar{u} частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения \bar{u} в неоднородном упругом цилиндрическом слое аналогичны соотношениям для однородного упругого цилиндра, при этом упругие постоянные λ и μ следует заменить на функции $\lambda = \lambda(r)$ и $\mu = \mu(r)$.

Используя эти соотношения, запишем уравнения ССЫЛКА!!! через компоненты вектора смещения μ . Получим

$$\begin{aligned} & \left(\lambda + 2\mu \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \\ & \quad \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \\ & \quad \left(\lambda + \mu \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \end{aligned} \quad (19)$$

2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Диаграмма направленности

3.2. Частотные характеристики

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.

ЛИТЕРАТУРА

ПРИЛОЖЕНИЕ