# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Существуют разлиные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохраматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

# 1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом $R_\odot$, материал которого характеризуется плотностью $p_\odot$ и упругими постоянными $\lambda_\odot$ и $\mu_\odot$. Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом $R_\circ$. Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен $R_\circledcirc$. Для решения задачи ввдем цилиндрические системы координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ и $\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ$, связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости $\lambda_\circledcirc$ и $\mu_\circledcirc$ материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференциируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты $\rho_\odot$, а плотность $p_\circledcirc$ – непрерывной функцией координаты $\rho_\odot$.

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности $\rho_e, \rho_\circ$ и скорости звука $c_e, c_\circ$ соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_o = A_o \exp\{i[(\bar{k}_e) \cdot \bar{r}_o) - \omega t]\},$$

где $A_o$ – амплитуда волны; $\bar{k}_e$ – волновой вектор падающей волны; $\bar{r}_o$ – радиус-вектор; $\omega$ – круговая частота. В дальнейшем временной множитель $\exp\{-i\omega t\}$ будем опускать.

В цидиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_o = A_o \exp\{ik_e[r_o \sin\hat{\theta}_e \cos(\varphi_e - \hat{\varphi}_e) + z\cos\hat{\theta}_e]\},$$

где $\hat{\theta}_e$ и $\hat{\varphi}_e$ – полярный и азимутальный углы падения волны; $k_e = \omega/c_e$ – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

# 2. Аналитическое решение задачи

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_o(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = A_0 \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta_\odot \rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_\odot)\},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка $n$; $\alpha_\odot = k_\odot \cos\hat{\theta}_e$; $\beta_\odot = k_\odot \sin\hat{\theta}_e$.

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахожждении решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Psi_\circ + k_\circ^2 \Psi_\circ = 0, \tag{1}$$

$$\Delta\Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0, \tag{2}$$

где $\Psi_\circ$ – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра; $k_\circ = \frac{\omega}{c_\circ}$ – волновое число жидкочти в полости цилиндра; $\Psi_e$ – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \tag{3}$$

где $\Psi_s$ – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения $\Psi_s$ :

$$\Delta\Psi_s + k_s^2 \Psi_s = 0. \tag{4}$$

Уравнения (4) и (2) запишем в цилиндрических системах координат $\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ$ и $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ соответственно.

Отраженная волна $\Psi_s$ должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра $\Psi_\circ$ – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы $\Psi_s$ и $\Psi_\circ$ будем искать в виде

$$\Psi_s(\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot) = \exp\{i\alpha_\odot z_\odot\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_\odot \rho_\odot) \exp\{in(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\}, \tag{5}$$

$$\Psi_\circ(\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ) = \exp\{i\alpha_\circ z_\circ\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_\circ \rho_\circ) \exp\{in(\varphi_\circ - \hat{\varphi}_e)\}, \tag{6}$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка $n$.

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне и внутри цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_\circ = \operatorname{grad}\Psi_\circ; \quad P_\circ = i\rho_\circ\omega\Psi_\circ,$$
$$\bar{\nu}_e = \operatorname{grad}\Psi_e; \quad P_e = i\rho_e\,\omega\Psi_e.$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta\bar{\mathbf{\Phi}} + k_\updownarrow^2\bar{\mathbf{\Phi}} = 0, \tag{7}$$
$$\Delta\Psi + k_\leftrightarrow^2\Psi = 0, \tag{8}$$

где $k_\updownarrow = \omega/c_\updownarrow$ и $k_\leftrightarrow = \omega/c_\leftrightarrow$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; $\Psi$ и $\bar{\mathbf{\Phi}}$ – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно; $c_\leftrightarrow = \sqrt{(\lambda_\odot + 2\mu_\odot)/\rho_\odot}$ и $c_\updownarrow = \sqrt{\mu_\odot/\rho_\odot}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения $\bar{u}$ представляется в виде:

$$\bar{u} = \operatorname{grad}\Psi + \operatorname{rot}\bar{\mathbf{\Phi}}. \tag{9}$$

Векторное уравнение (8) в цилиндрической системе координат в обшем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{\mathbf{\Phi}}$, а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор $\mathbf{\Phi}$ в виде

$$\mathbf{\Phi} = \operatorname{rot}(L\bar{e}_z) + \frac{1}{k_\updownarrow}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(M\bar{e}_z) = \operatorname{rot}(L\bar{e}_z) + k_\updownarrow M\bar{e}_z + \frac{1}{k_\updownarrow}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

где $L$ и $M$ – скалярные функции пространственных координат $\rho, \phi, z$; $\bar{e}_z$ – единичный вектор оси $z$.

Тогда векторное уравнение (8) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций $L$ и $M$

$$\Delta L + k_\updownarrow^2 L = 0,$$
$$\Delta M + k_\updownarrow^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции $\Psi, L$ и $M$ будем искать в виде

$$\Psi(\rho,\varphi,z)=\exp\{i\alpha z\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nH_n(k_1r)\exp\{in(\varphi-\hat{\varphi})\}, \tag{10}$$

$$L(\rho,\varphi,z)=\exp\{i\alpha z\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}D_nH_n(k_2r)\exp\{in(\varphi-\hat{\varphi})\}, \tag{11}$$

$$M(\rho,\varphi,z)=\exp\{i\alpha z\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E_nH_n(k_2r)\exp\{in(\varphi-\hat{\varphi})\}, \tag{12}$$

где $k_1=\sqrt{k_{\leftrightarrow}^2-\alpha^2}, k_2=\sqrt{k_{\updownarrow}^2-\alpha^2}$.

Компоненты вектора смещения $\bar{u}$, записанные через функции $\Psi, L$ и $M$ в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$u_\rho=\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2L}{\partial\rho\partial z}+\frac{k_{\updownarrow}}{\rho}\frac{\partial M}{\partial\varphi}, \tag{13}$$

$$u_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2L}{\partial\varphi\,\partial z}-k_{\updownarrow}\frac{\partial M}{\partial\rho}, \tag{14}$$

$$u_z=\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial^2L}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial L}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2L}{\partial\varphi^2}. \tag{15}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}$ и вектора смещения $\bar{u}$ в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}&=\lambda\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_\rho\right)+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\,\mu\,\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho},\\
\sigma_{\varphi\varphi}&=\lambda\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_\rho\right)+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\,\mu\,\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\right),\\
\sigma_{zz}&=\lambda\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_\rho\right)+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\,\mu\,\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
\sigma_{\rho\varphi}&=\mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}\right),\\
\sigma_{\rho z}&=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial\rho}+\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right),\\
\sigma_{\varphi z}&=\mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_{\rho\rho}-\sigma_{\varphi\varphi}}{\rho}=-\omega^2p(\rho)u_\rho,\\
\frac{\partial\sigma_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z}+\frac{2}{\rho}\sigma_{\rho\varphi}=-\omega^2p(\rho)u_\varphi,\\
\frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\sigma_{\rho z}=-\omega^2p(\rho)u_z,
\end{gathered}\tag{17}$$

где $u_\rho, u_\varphi, u_z$ – компоненты вектора смещения $\bar{u}$ частиц неоднородного слоя; $\sigma_{ij}$ – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}$ и вектора смещения $\bar{u}$ в неоднородном упругом цилиндрическом слое аналогичны соотношениям для однородного упругого цилиндра, при этом упругие постоянные $\lambda$ и $\mu$ следует заменить на функции $\lambda=\lambda(\rho)$ и $\mu=\mu(\rho)$.

Используя эти соотношения, запишем уравнения через компоненты вектора смещения $\mu$. Получим

$$\begin{gathered}
\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2u_\rho}{\partial\rho^2}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}+2\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+\frac{\mu}{\rho^2}\frac{\partial^2u_\rho}{\partial\varphi^2}+\\
+\mu\,\frac{\partial^2u_\rho}{\partial z^2}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}-\frac{\lambda+3\mu}{\rho}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\\
+\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial^2u_z}{\partial\rho\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}+\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho^2}+\omega^2p\right)u_\rho=0,\\
\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2u_\rho}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\lambda+3\,\mu}{\rho}\right)\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\mu\,\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho^2}\,\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\varphi^2}+\\
+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}+\mu\,\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial z^2}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial^2u_z}{\partial\varphi\partial z}+\left(-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho}-\frac{\mu}{\rho^2}+\omega^2p\right)u_\varphi=0,\\
\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial^2u_\rho}{\partial\rho\partial z}+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\right)\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\lambda+\mu}{\rho}\,\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial\varphi\partial z}+\mu\,\frac{\partial^2u_z}{\partial\rho^2}+\frac{\mu}{\rho^2}\,\frac{\partial^2u_z}{\partial\varphi^2}+\\
+\left(\lambda+2\,\mu\right)\frac{\partial^2u_z}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}+\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial u_z}{\partial\rho}+\omega^2pu_z=0.
\end{gathered}\tag{18}$$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.