СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 4

1.1. Распространение звука в идеальной жидкости 5

1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах 6

2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ 7

2.1. Обзор литературы по проблеме исследования 8

2.2. Постановка задачи 9

2.3. Аналитическое решение задачи 10

2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 14

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ 15

3.1. Диаграмма направленности 16

3.2. Частотные характеристики 17

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 18

ЛИТЕРАТУРА 19

ПРИЛОЖЕНИЕ 20

ВВЕДЕНИЕ

Акустика, применени акустики

Существуют разлиные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохраматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Распространие звуковых волн

1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Из книги Толоконников, Ларин или из лабы

1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

Переделать для упругих тел. Взять из Ландау-Лифшиц Теория упругости, Амензаде Теория упругости. Все в своих системах координат. Решение в специальных функциях.

2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ, ИМЕЮЩЕМ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ

2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

Взять у Филатовой + новые работы. Известия ТулГУ №3 - новые статьи. Статьи Ларина, Скобельцына, Толоконникова.

2.2. Постановка задачи

Рисунок и рассмотрим, пусть. И закончить Требуется найти волновые поля в упругом теле.

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом $R_{\odot}$, материал которого характеризуется плотностью $p_{\odot}$ и упругими постоянными $\lambda_{\odot}$ и $\mu_{\odot}$. Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом $R_{\circ}$. Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен $R_{\circledcirc}$. Для решения задачи ввдем цилиндрические системы координат $\rho_{\odot}, \varphi_{\odot}, z_{\odot}$ и $\rho_{\circ}, \varphi_{\circ}, z_{\circ}$, связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости $\lambda_{\circledcirc}$ и $\mu_{\circledcirc}$ материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференциируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты $\rho_{\odot}$, а плотность $p_{\circledcirc}$ – непрерывной функцией координаты $\rho_{\odot}$.

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности $\rho_e, \rho_{\circ}$ и скорости звука $c_e, c_{\circ}$ соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_o = A_o \exp\{i[(\bar{k}_e) \cdot \bar{r}_o) - \omega_e t]\},$$

где A_o – амплитуда волны; $\bar{k}_e$ – волновой вектор падающей волны; $\bar{r}_o$ – радиус-вектор; ω_e – круговая частота. В дальнейшем временной множитель $\exp\{-i\omega_e t\}$ будем опускать.

В цидиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_o = A_o \exp\{ik_e[r_o \sin\hat{\theta}_e \cos(\varphi_e - \hat{\varphi}_e) + z\cos\hat{\theta}_e]\},$$

где $\hat{\theta}_e$ и $\hat{\varphi}_e$ – полярный и азимутальный углы падения волны; $k_e = \omega_e/c_e$ – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

2.3. Аналитическое решение задачи

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_0(r_1,\varphi_1,z_1) = A_0\exp\{i\alpha_1 z_1\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta_1 r_1)\exp\{in(\varphi_1-\varphi_{1_0})\},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n; $\alpha_1 = k_1\cos\theta_0$; $\beta_1 = k_1\sin\theta_0$.

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахожждении решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Psi_1 + k_1^2\Psi_1 = 0, \tag{1}$$

$$\Delta\Psi_2 + k_2^2\Psi_2 = 0, \tag{2}$$

где Ψ_1 – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра; $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ – волновое число жидкочти в полости цилиндра; Ψ_2 – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_2 = \Psi_i + \Psi_s, \tag{3}$$

где Ψ_s – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta\Psi_s + k_s^2\Psi_s = 0. \tag{4}$$

Уравнения (4) и (2) запишем в цилиндрических системах координат r_1,φ_1,z_1 и r_2,φ_2,z_2 соответственно.

Отраженная волна Ψ_s должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра Ψ_1 – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы Ψ_s и Ψ_1 будем искать в виде

$$\Psi_s(r_2,\varphi_2,z_2) = \exp\{i\alpha_2 z_2\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_2 r_2)\exp\{in(\varphi_2-\varphi_{2_0})\}, \tag{5}$$

$$\Psi_1(r_1,\varphi_1,z_1) = \exp\{i\alpha_1 z_1\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_1 r_1)\exp\{in(\varphi_1-\varphi_{1_0})\}, \tag{6}$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка n.

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне $(j = 2)$ и внутри $(j = 1)$ цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_j = \operatorname{grad} \Psi_i; \;\; p_j = i\rho_j \omega \Psi_j \;\; (j = 1, 2). \tag{7}$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta\Psi + k_l^2 \Psi = 0, \tag{8}$$

$$\Delta\bar{\mathbf{\Phi}} + k_\tau^2 \bar{\mathbf{\Phi}} = 0, \tag{9}$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; Ψ и $\bar{\mathbf{\Phi}}$ – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно; $c_l = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_2}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_1/\rho_2}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения $\bar{u}$ представляется в виде:

$$\bar{u} = \operatorname{grad} \Psi + \operatorname{rot} \bar{\mathbf{\Phi}}. \tag{10}$$

Векторное уравнение (9) в цилиндрической системе координат в обшем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{\mathbf{\Phi}}$, а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор $\mathbf{\Phi}$ в виде

$$\mathbf{\Phi} = \operatorname{rot}(L\bar{e}_z) + \frac{1}{k_\tau} \operatorname{rot}\operatorname{rot}(M\bar{e}_z) = \operatorname{rot}(L\bar{e}_z) + k_\tau M\bar{e}_z + \frac{1}{k_\tau} \operatorname{grad}\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

где L и M – скалярные функции пространственных координат r, ϕ, z; $\bar{e}_z$ – единичный вектор оси z.

Тогда векторное уравнение (9) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0,$$

$$\Delta M + k_\tau^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции Ψ, L и M будем искать в виде

$$\Psi(r,\varphi,z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(k_1 r) \exp\{in(\varphi-\varphi_0)\}, \tag{11}$$

$$L(r,\varphi,z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(k_2 r) \exp\{in(\varphi-\varphi_0)\}, \tag{12}$$

$$M(r,\varphi,z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(k_2 r) \exp\{in(\varphi-\varphi_0)\}, \tag{13}$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - \alpha^2}, k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \alpha^2}$.

Компоненты вектора смещения $\bar{u}$, записанные через функции Ψ, L и M в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$u_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} + \frac{k_\tau}{r}\frac{\partial M}{\partial \varphi}, \tag{14}$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi\, \partial z} - k_\tau \frac{\partial M}{\partial r}, \tag{15}$$

$$u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2}. \tag{16}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\bar{u}$ в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\,\mu\,\frac{\partial u_r}{\partial r},\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\,\mu\,\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right),\\
\sigma_{zz} &= \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\,\mu\,\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
\sigma_{r\varphi} &= \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right),\\
\sigma_{rz} &= \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\\
\sigma_{\varphi z} &= \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho(r) u_r, \\
\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho(r) u_\varphi, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho(r) u_z,
\end{aligned} \tag{18}$$

где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора смещения $\bar{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\bar{u}$ в неоднородном упругом цилиндрическом слое аналогичны соотношениям для однородного упругого цилиндра, при этом упругие постоянные λ и μ следует заменить на функции $\lambda = lambda(r)$ и $\mu = \mu(r)$.

Используя эти соотношения, запишем уравнения ССЫЛКА!!! через компоненты вектора смещения μ. Получим

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} + 2\,\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\lambda + 2\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \\
&+ \mu\,\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{\lambda + 3\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\
&+ \left(\lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial r}\,\frac{\partial u_z}{\partial z} + \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \omega^2 p\right)u_r = 0, \\
&\frac{\lambda + \mu}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\lambda + 3\,\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \mu\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda + 2\,\mu}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \\
&+ \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \mu\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\lambda + \mu}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial z} + \left(-\frac{1}{r}\,\frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2 p\right)u_\varphi = 0, \\
&\left(\lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\lambda + \mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\lambda + \mu}{r}\,\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \mu\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \\
&+ \left(\lambda + 2\,\mu\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial u_z}{\partial r} + \omega^2 p u_z = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Диаграмма направленности

3.2. Частотные характеристики

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.

ЛИТЕРАТУРА

ПРИЛОЖЕНИЕ