СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Существуют разлиные подходы к изменению звукоотражающих характеристик тел в определенных направлениях. Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью специальных покрытий. Представляет интерес исследовать звукоотражающие свойства тел с покрытиями в виде непрерывно неоднородного упругого слоя. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных).

В настоящей работе решается задача о рассеянии плоской монохраматической звуковой волны, падающей наклонно на упругий круговой цилиндр с неконцентрической полостью, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный упругий цилиндр с внешним радиусом R_2, материал которого характеризуется плотностью r_2 и упругими постоянными λ_2 и μ_2. Цилиндр имеет произвольно расположенную цилиндрическую полость с радиусом R_1. Оси цилиндра и полости являются параллельными. Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен R_3. Для решения задачи ввдем цилиндрические системы координат r_2, φ_2, z_2 и r_1, φ_1, z_1, связанные с цилиндром и его полостью соответственно.

Полагаем, что модули упругости λ_3 и μ_3 материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференциируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты r, а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r.

Будем считать, что окружающая цилиндр и находящаяся в его полости жидкость являются идеальными и однородными, имеющими в невозмущенном состоянии плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_0 = A_0 \exp\{i[(\bar{k} \cdot \bar{r}) - \omega t]\},$$

где A_0 – амплитуда волны; $\bar{k}$ – волновой вектор падающей волны; $\bar{r}$ – радиус-вектор; ω – круговая частота. В дальнейшем временной множитель $\exp\{-i\omega t\}$ будем опускать.

В цидиндрической системе координат падающая волна запишется в виде

$$\Psi_0 = A_0 \exp\{ik[r \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + z \cos\theta_0]\},$$

где θ_0 и φ_0 – полярный и азимутальный углы падения волны; $k = \omega/c$ – волновое число во внешней области.

Определим отраженную от цилиндра волну и возбужденную в его полости звуковые волны, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

2. Определение волновых полей

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_0(r_1,\varphi_1,z_1) = A_0 \exp\{i\alpha_1 z_1\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta_1 r_1) \exp\{in(\varphi_1 - \varphi_{1_0})\},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n; $\alpha_1 = k_1 \cos\theta_0$; $\beta_1 = k_1 \sin\theta_0$.

В установившемся режиме колебаний задача определения акустических полей вне цилиндра и внутри его полости заключается в нахожждении решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Psi_1 + k_1^2\Psi_1 = 0, \tag{1}$$

$$\Delta\Psi_2 + k_2^2\Psi_2 = 0, \tag{2}$$

где Ψ_1 – потенциал скоростей акустического поля в полости цилиндра; $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ – волновое число жидкочти в полости цилиндра; Ψ_2 – потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде.

В силу линейной постановки задачи

$$\Psi_2 = \Psi_i + \Psi_s, \tag{3}$$

где Ψ_s – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta\Psi_s + k_s^2\Psi_s = 0. \tag{4}$$

Уравнения (4) и (2) запишем в цилиндрических системах координат r_1, φ_1, z_1 и r_2, φ_2, z_2 соответственно.

Отраженная волна Ψ_s должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности, а звуковая волна в полости цилиндра Ψ_1 – условию ограниченности.

Поэтому потенциалы Ψ_s и Ψ_1 будем искать в виде

$$\Psi_s(r_2,\varphi_2,z_2) = \exp\{i\alpha_2 z_2\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(\beta_2 r_2) \exp\{in(\varphi_2 - \varphi_{2_0})\}, \tag{5}$$

$$\Psi_1(r_1,\varphi_1,z_1) = \exp\{i\alpha_1 z_1\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n(\beta_1 r_1) \exp\{in(\varphi_1 - \varphi_{1_0})\}, \tag{6}$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка n.

Скорости частиц жидкости и акустические давления вне $(j = 2)$ и внутри $(j = 1)$ цилиндра определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\nu}_j = \operatorname{grad}\Psi_i;\ \ p_j = i\rho_j\omega\Psi_j \ \ (j = 1, 2). \tag{7}$$

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \tag{8}$$

$$\Delta\bar{\mathbf{\Phi}} + k_\tau^2\bar{\mathbf{\Phi}} = 0, \tag{9}$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно; Ψ и $\bar{\mathbf{\Phi}}$ – скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно; $c_l = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_2}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_1/\rho_2}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения $\bar{u}$ представляется в виде:

$$\bar{u} = \operatorname{grad}\Psi + \operatorname{rot}\bar{\mathbf{\Phi}}. \tag{10}$$

Векторное уравнение (9) в цилиндрической системе координат в обшем случае не распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора $\bar{\mathbf{\Phi}}$, а представляет собой систему трех уравнений, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями.

Представим вектор $\mathbf{\Phi}$ в виде

$$\mathbf{\Phi} = \operatorname{rot}(L\bar{e}_z) + \frac{1}{k_\tau}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(M\bar{e}_z) = \operatorname{rot}(L\bar{e}_z) + k_\tau M\bar{e}_z + \frac{1}{k_\tau}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

где L и M – скалярные функции пространственных координат r, ϕ, z; $\bar{e}_z$ – единичный вектор оси z.

Тогда векторное уравнение (9) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0,$$

$$\Delta M + k_\tau^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции Ψ, L и M будем искать в виде

$$\Psi(r,\varphi,z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(k_1 r) \exp\{in(\varphi-\varphi_0)\}, \tag{11}$$

$$L(r,\varphi,z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(k_2 r) \exp\{in(\varphi-\varphi_0)\}, \tag{12}$$

$$M(r,\varphi,z) = \exp\{i\alpha z\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(k_2 r) \exp\{in(\varphi-\varphi_0)\}, \tag{13}$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2-\alpha^2}, k_2 = \sqrt{k_\tau^2-\alpha^2}$.

Компоненты вектора смещения $\bar{u}$, записанные через функции Ψ, L и M в цилиндрической системе координат, имеют вид

$$u_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} + \frac{k_\tau}{r}\frac{\partial M}{\partial \varphi}, \tag{14}$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi\, \partial z} - k_\tau \frac{\partial M}{\partial r}, \tag{15}$$

$$u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2}. \tag{16}$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\bar{u}$ в однородном изотропном упругом цилиндре записываются следующим образом:

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\,\mu\,\frac{\partial u_r}{\partial r}, \tag{17}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\,\mu\,\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right), \tag{18}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\,\mu\,\frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{19}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right), \tag{20}$$

$$\sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \tag{21}$$

$$\sigma_{\varphi z} = \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right). \tag{22}$$

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\omega^2 \rho(r) u_r, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = -\omega^2 \rho(r) u_\varphi, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} = -\omega^2 \rho(r) u_z. \tag{25}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.