BENZETİM MODELLEME

1. Hafta YAB

Benzetim: Gerçek hayattaki bir sistemin veya sürecin çalışmasının taklit edilmesidir. (Genellikle PC üzerinde)

Bir benzetim modeli gerçek bir sistem üzerinde yapılacak ~~~~ değişikliklerin etkilerini, yeni kurulacak bir sistemin performansını tahmin etmek için

- analiz aracı
- tasarım aracı

olarak kullanılır.

Benzetimin Amaçları:

Değerlendirme: Sistemin ne kadar iyi çalıştığının göstergesidir.

Karşılaştırma: Önerilen sistem tasarımlarının veya politikaların karşılaştırılması.

Tahmin: Önerilen koşullar altında sistemin performansının tahmin edilmesi.

Duyarlılık Analizi: Sistemin performansı üzerinde hangi faktörlerin etkili olduğunu belirlemesi.

Optimizasyon: En iyi performans değerini veren faktör düzeylerinin bir kombinasyonunun belirlenmesi.

Darboğaz Analizi: Bir sistemde darboğazların belirleme~~siyle~~ aracıyla benzetim kullanılır.

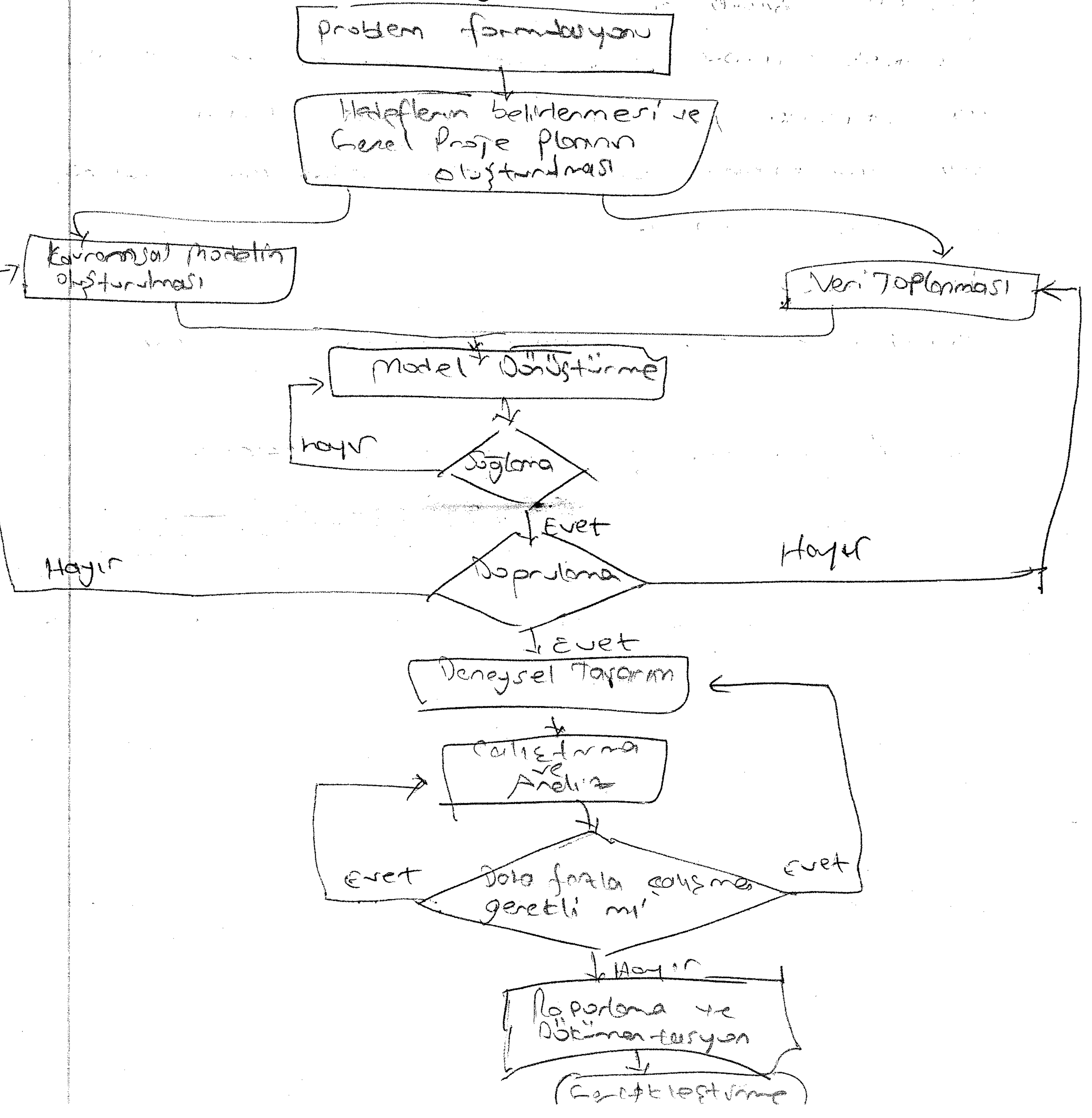
Ne zaman Kullanılır:

- Üzerinde çalışılacak sistem çalışmaya (deney yapmaya) uygun değilse,
- Sistem henüz tasarım aşamasında ise,
- Problemin analitik çözümü mümkün değilse
- Sistemin davranış analizi yapılacaksa,

Uygulama Alanları:

1.) PC Sistemleri: Yazılım, PC ağları, veritabanı, yazılım güvenliği...
2-) Üretim: Malzeme taşıma sist., montaj, otomatik üretim tesisleri
3-) İşletme: Stok ve mal analizi, ...
4-) Kamu Hizmeti: Askeri, silah, nüfus, karayolu, trafik, itfaiye...
5-) Ekoloji ve çevre: Su, çevre kirliliği
6-) Sosyoloji: Yiyecek nüfus analizi
7-) Biyoloji: Salgın hastalık kontrolü, biyolojik yaşam

Benzetim Akış Diyagramı:



Nezaman iyi bir fikir değildir?

- Bazen simülasyonu çok fazla pahalıysa
- Problem analitik olarak çözülebiliyorsa
- Gerçek sistem üzerinde değişiklik ve deney yapmak kolaysa
- Simülasyon nitelikli sağlayacak zaman üzerindeyse.
- Model sonuçlarından faydalanmaya yetecek süre yoksa
- Sistem çok karmaşık ise ve modellenebilir değilse,

Benzetimin Avantajları:

- Yeni bir sistemin analizine yardımcı olmak için kullanılır.
- Benzetim modeli kurulduktan sonra, önerilen yeni tasarımların veya yeni politikaların analizinde kullanılır.
- Veri elde etmek için; Benzetim modelinden veri elde etmek, gerçek sistemden aynı verileri elde etmekten daha ucuzdur.
- Benzetim tekniği, analitik metodları uygulamaktan daha kolaydır.
- Analitik modeller ile basitli sayıda performans ölçütleri hesaplanabilir. Benzetim modelleri ile akla gelebilen herhangi bir performans ölçütü tahmin edilebilir.
- Bazı durumlarda, benzetim, bir çözümün elde edilmesi için tek araçtır.

Dezavantajları

- Benzetim zaman alır. Bu nedenle analitik çözümün aksine en iyi çözümü üretmezler.

Dinamik Sistemler

Sürekli sistemlerin matematiksel modelleri sıklıkla dif. denklemler ile ifade edilir.

Dinamik model, zamana bağlı modeldir. Zamanla ilgili değişken tutar.

Pratikte sayısal fark metotlarını kullanan makul yaklaşımlar etkilidir.

Başlangıç Değer Problemleri:

Eğer başlangıç koşulları ile birleştirilmiş dif. denklemler sistemi tanımlıyorsa başlangıç koşulları ile tanımlanan ~~değer~~ değişkenler sistem durum değişkenlerini oluşturur.

1. Dereceden dif. denklemlerin herbirinin çıkış değişkenleri bir başlangıç durumları ile birlikte sistem durum değişkenlerinin bir kümesini oluşturur.

$x(t) = [x_1(t), x_2(t) \ldots x_n(t)] \rightarrow$ sistem durum vektörü

$x(0) = [x_1(0), x_2(0) \ldots x_n(0)] \rightarrow$ ilgili başlangıç durumları

Örnek 1: $\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \beta^2\alpha = \cos t$

$\dot{\beta} + \alpha\beta = 4$

Başlangıç durumları; $\alpha(0) = 2$, $\dot{\alpha}(0) = -1$, $\beta(0) = 1$

2 dinamik durum değişkenleri ve 1. ve 2. dereceden dif. denklemler old. için 3. dereceden bir sistemdir.

Bu yüzden 3 tane 1. dereceden bir dif. denklem sistemi olarak tanımlamak mümkündür.

$x_1 = \alpha(t)$, $x_2 = \dot{\alpha}(t)$, $x_3 = \beta(t)$ tanımlanan bu ifadeler denklemde yerine konursa;

$$\dot{x}_2 + 2x_2x_3 + x_3^2x_1 = \cos t$$

$$\dot{x}_3 + x_1x_3 = 4$$

x_2 x_1'in türevidir. Denklem buna göre tekrar düzenlenirse

Kontrol Sistemleri: Sistem uygulamalarından en popülerlerindir. Gelen giriş sinyallerine göre arzu edilen amaçları elde etmek için bir denetleyici alt sistem tasarlanır.

Ayrık Zamanlı Sistemler

Eğer sistem dayları sadece belirli zamanlarda düşüyorsa ayrık zamanlı bir sistemden bahsedilir.

$z(k) + 4z(k-1) = x(k)$ 1. Derece Ayrık sistem

$z(k) + 4z(k-1) + 3z(k-2) = x(k)$ 2 dereceden Ayrık Sistem

Sistemin Bileşenleri

Özellik (Atribute): Bir nesnenin sahip olduğu özellik

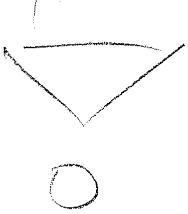
Faaliyet (Activity): Belirli ~~bir~~ zaman diliminde bir işlemin tanımlanması. Örnek; 1 paranın kesilmesi, makina tamir veya sipariş formunun doldurulması.

Kaynak (Resources): Personel, alet, alan, enerji, zaman, para

Kontrol (Control): Kontroller faaliyetlerin nerede, ne zaman, nasıl ortaya ~~çıkacağı~~ çıkacağını ~~belirler~~ programları.

Örnek: Proses alanı, üretim planı, iş programı, bakım politikası.

((Defter notu hocanın yazdırdıklarına bak mutlaka)



⇒ Açık çözümün bilinmediğini farz edelim. Keyfi verilmiş $h=0{,}05$ adım uzunluğu ile çeşit ayrık sistem başlangıç koşulları ile karakterize edilmiştir.

$t(0)=1 \qquad x(0)=3$

ve fark denklemleri $\quad t_{k+1} = t_k + 1/20$

$$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{20} \cdot x^2(k) \cdot t_k \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Dikkat edilirse t'nin eski değeri x güncellemesine ihtiyaç duyuyor, fakat x, t'nin güncellemesine ihtiyaç duymaz.

~~Sözde kod~~:

```
t = 1
x = 3
print t, x
for k=1 to n
  x = x + h x^2 t
  t = t + h
  print t, x
next k
```

Matlab kodu:

```
t0 = 1
x0 = 3
x = [x0];
t = [t0];
xg = [6/(5-3t0^2)];
h = 0.05
for i=1:5
xyeni = x0+h*x0^2*t0;
t0 = t0+h
xg = [xg 6/(5-3*t0^2)];

x = [x xyeni];
t = [t t0];
x0 = xyeni;
end
plot(t,x,'r-d')
hold on
plot(t,xg,'k-s')
```

Her hesaplamanın sonunda bir prosedürün sonuçlarının çıktısını almaktan ziyade, hesaplama periyodik sonuç çıktılarının alınması daha yararlıdır.

Bu "kontrol break" adı verilen bir işlem uygulanarak gerçekleştirilebilir. Bir kontrol break iç içe döngüler yoluyla çalışır.

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_2x_3 - x_3^2 \cdot x_1 + \cos t$

$\dot{x}_3 = -x_1 x_3 + 4$

$x_1(0) = 2$

$x_2(0) = -1$

$x_3(0) = 1$

3 bileşik durum vektörü $x = [x_1, x_2, x_3]$ olarak tanımlanır; bu sistem denklemde yerine yazılırsa;

$f = [x_2, -2x_2x_3 - x_3^2 \cdot x_1 + \cos t, x_1x_3 + 4]$,

$x_0 = [2, -1, 1]$

$t_0 = 0$

Çok sayıda genelleştirilebilir. Matlabda da çözülebilir.

Euler yöntemi

Türevin tanımından $\left(f(t,x) = \frac{dx}{dt} \right)$

$$\lim \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t,x)$$

① $x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t,x) \Rightarrow$ sürekli zamanlı

② $x(k+1) = x(k) + h \cdot f[t(k), x(k)] \Rightarrow$ ayrık zamanlı $(k = 0,1,2 \ldots)$

Zaman değişkeni t ise; sinyal sürekli yada analog olarak alınmıştır. Zaman ayrık ise, durum değişkeni $x(k)$ dır. Sürekli zamanın ayrık zamanlar yer değiştirdiği bu işleme "ayrıklaştırma" denir.

Örnek; $\dot{x} = x^2 t$ $\quad x(1) = 3$ (t'nin ilk değeri, x'in ilk değeri) şeklinde tanımlanan bir sistem için;

$$\frac{dx}{dt} = x^2 t \quad \text{ve} \quad x(1) = 3 \qquad \frac{dx}{x^2} = dt$$

$$\int_3^x \frac{dx}{x^2} = \int_1^t t \cdot dt = -\frac{1}{x}\Big|_3^x = \frac{t^2}{2}\Big|_1^t$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{6}{5 - 3t^2}}$$

gerçek çözüm

Örnek! $\dot{x} = x^2 t$ ve $x(1) = 3$ sistemine Taylor tekniğini uygulayınız?

$$f(t,x) = \dot{x} = x^2 t \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xt$$

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t,x) + \frac{1}{2} \cdot h^2 \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot f(t,x)\right]$$

$$= x(t) + h \cdot x^2(t) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot h^2 \left[x^2 t + 2x(t) \cdot t \cdot x^2(t) \cdot t\right]$$

$$= x(t) + h \cdot x^2(t) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot h^2 \left[x^2(t) + 2x^3(t) \cdot t^2\right]$$

ayrıklaştırırsak;

$$x(k+1) = x(k) + x^2(k) \cdot t_k \cdot h + x^2(k)\left[x(k)\, t_k^2 + \frac{1}{2}\right] \cdot h^2$$

Taylor, Euler'e göre daha doğru sonuçlar verir.

Runge Kutta yöntemi

Daha önceki örneklerde 1. dereceden denklemlere Euler, 2. derece denklemlere Taylor teknikleri uygulanıp karşılaştırıldı.

4. dereceden bir yaklaşım sıklıkla şu şekilde kullanılır.

$$x(t+h) = x(t) + h\dot{x}(t) + \frac{1}{2} h^2 \ddot{x}(t) + \frac{1}{6} h^3 x^3(t) + \frac{1}{24} h^4 x^4(t)$$

Bu formülü uygulamak için, Taylor için yapıldığı gibi ilk önce f'i birkaç kez ayırmak gereklidir.

f için bir analitik formül kullanılmıyor olabileceği için çoğu zaman bu imkansızdır ve en iyi ihtimalle sıkıcı olabilir.

Klasik bir Runge Kutta algoritması şöyledir;

$k_1 = f(t_k, x(k))$,

$k_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2} h k_1)$

$k_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2} h k_2)$,

$k_4 = f(t_k + h, x(k) + h k_3)$;

$t_{k+1} = t_k + h$

$$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Bu çoğunun klasik Runge-Kutta algoritmasıdır. Avantajı ver; doğru çözümüdür (4. dereceden Taylor'a eşdeğer) ve türev hesaplaması gerektirmediğinden kullanımı kolaydır.

```
t=1
x=3
print t,x
for i=1 to n
  for J=1 to m
    x=x+h x f(t,x)
    t=t+h
  next J
  Print t,x
next i
```

Taylor Yöntemi

Euler yöntemi, Taylor'un özel bir durumu olarak düşünebiliriz.

$$x(t+h)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{i}(t)}{i!}\cdot h^{i}$$

$\dot{x}=f(t,x)$ ve $x(t+h)=x(t)+h.\,f(t,x)$.

Bu formül daha yüksek mertebeli yaklaşım kullanılarak genişletilebilir. Mesela 2. dereceden yaklaşım şu formülü verir;

$$x(t+h)\approx x(t)+\underbrace{h.\dot{x}(t)+\frac{1}{2}h^{2}\ddot{x}(t)}_{h\left(\dot{x}(t)+\frac{1}{2}h\ddot{x}(t)\right)}$$

→ x'in türevi h'in integrali

$$\ddot{x}=\frac{d}{dt}f(t,x)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot f(t,x)$$

Buna göre;

$$x(t+h)=x(t)+h.\,f(t,x)+\frac{1}{2}h^{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot f(t,x)\right]$$

Bu formül aşağıdaki şekilde Euler gibi yakınlaştırılabilir.

$$t_{k+1}=t_k+h$$

$$x(k+1)=x(k)+h\underbrace{f}_{\dot{x}(t)}+\frac{1}{2}h^{2}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot f\right)}_{\ddot{x}(t)}$$

$l_3 = g(t_k, \frac{1}{2}h;\ x(k) + \frac{1}{2}k_2,\ y(k) + \frac{1}{2}h l_2)$

$k_4 = f(t_k + h,\ x(k) + hk_3,\ y(k) + hl_3)$

$l_4 = g(t_k + h,\ x(k) + hk_3,\ y(k) + hl_3)$

$$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{6}h\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y(k+1) = y(k) + \frac{1}{6}h\,(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Örnek 2: $\ddot{x} + 3x\dot{x} = u(t)$ ... $u(t) = t$, $t \geq 0$ $\quad x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 1$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{sistem}} \longrightarrow x(t)$$

$y(t) = \dot{x}(t)$ olarak tanımlarız. Böylece;

$\dot{x}(t) = y \qquad \dot{y} = t - 3xy \qquad x(0) = 2\ ;\ y(0) = 1$ olur

Euler yöntemi kullanılarak ayrıklaştırılmış sistem;

$t_{k+1} = t_k + h$

$x(k+1) = x(k) + hy(k)$

$y(k+1) = y(k) + h[t_k - 3x(k)y(k)]$

Sistemin Euler çözümü;

```
t=0
x=2
y=1
print x,t,y
for k=1 to n
    x1 = x + hy
    y1 = y + h(t-3xy)
    x = x1
    y = y1
    t = t+h
    print x,t,y
next k
```

Örnek: $\dot{x} = x^2 t$ $\quad x(1) = 3$ sistemine Runge-Kutta tekniğini uygulayınız?

k_1, k_2'den, k_2, k_3'den, k_3 k_4'ten x güncellemesinden önce hesaplanmalıdır.

Matlab kodu:

```
input t,x
 print t,x
for t=1 to n
k1= t x^2
k2= (t+1/2 h).(x + 1/2 h k1)^2
k3 = (t+1/2 h).(x +1/2 h k2)^2
k4 = (t+h).(x+h+k3)^2
x = x + 1/6 h(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)
   t = t+h
print t,x
   next
```

Yüksek Dereceden Sistemler

2 tane 1. dereceden denklem sistemi şöyle tanımlanabilir;

$$\dot{x} = f(t, x, y)$$
$$\dot{y} = g(t, x, y)$$
$$x(t_0) = x_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

Daha önce anlatıldığı gibi x değişkeni k_1, k_2, k_3, k_4 değerleriyle y değişkenini $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ değerleriyle ilişkilendirerek bu sisteme Runge-Kutta uygulamak basittir.

Ayrık çözüm denklemi şöyle elde edilir;

$$k_1 = f(t_k, x(k), y(k)),$$
$$\lambda_1 = g(t_k, x(k), y(k))$$
$$k_2 = f(t_k, \tfrac{1}{2} h x(k) + \tfrac{1}{2} h k_1 y(k) + 1/2 h \lambda_1)$$
$$\lambda_2 = g(t_k + \tfrac{1}{2} x(k) + \tfrac{1}{2} h k_1 y(k) + \tfrac{1}{2} h \lambda_1)$$
$$k_3 = f(t_k + \tfrac{1}{2} h, x(k) + \tfrac{1}{2} h k_2, y(k) + \tfrac{1}{2} h \lambda_2)$$

Örnek denkleme benzetirsek;

$$\ddot{x} + 2\zeta w \dot{x} + w^2 x = r(t) \qquad r(t) = 15t + 22$$

$$w = \sqrt{5} \quad , \quad 2\zeta w = 4 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x_{natural}(t) = A \cdot e^{-2t} \cos t + B \cdot e^{2t} \sin t$$

Giriş doğrusal ve türevi sabit oldu için $x_{forced} = C + Dt$ olacak.
(Denklem ($\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 15t + 22$) ve katsayıları yerine koyduğumuzda $x_{forced} = 3t + 2$ olur.

Süperpozisyon kullanarak toplam çözüm;

$$x(t) = 2 \cdot e^{-2t} \cos t - e^{2t} \sin t + 3t + 2$$ olarak elde edilir.

A ve B sabitleri başlangıç şartları yerine konularak bulunmuştur.)

Genel olarak kararlı sistemlerde

$$x(t) = \underbrace{x_{natural}}_{\text{Yalnızca başlangıç koşullarına bağlı}} + \underbrace{x_{forced}}_{\text{sadece Girişe bağlı}}$$

ÖRNEK:

$$\dot{x} = 3x\left(1 - \frac{1}{10} y\right) \qquad x(0) = 10$$

$$\dot{y} = 1{,}2y\left(-1 + \frac{1}{25} \cdot x\right) \qquad y = 5$$

verilen Lotka-Volterra sistemini [0, 5] aralığında çözün;

h = 0.001 alalım.

Grafik 5 birim zaman kadar olacak ve her bir aralıkta 10 örnek yeterlidir. Dolayısıyla 50 örnek iyidir.

m = (5 − 0) / (50 . 0.001) = 100 parçalama olur. Toplamda 5000 parçalama olur.

```
function [t, x, y]
   x = [x0]
   y = [y0]
    t = 0
 for i=1 to n
  for j=1 to 100
  xx = x0 * (1+3*h  3h*y0/10)
  yy = y0 + (1-12*h*x0/25);
   x0 = xx;
   y0 = yy;
   x = [x, xx];
   y = [y, yy];
   t = t+h
```

```
end
plot(x)
hold on
plot(y1, 'r-')
```

OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

Sistem

Girişi olan → Zaman odaklı, Olay tabanlı

Girişi olmayan (otonom) → lineerse → 1 Kararlı, 2 Kararsız, 3 Marjinal (3 tip doğal tepki)

Zaman odaklı: Girişler eş zamanlı

Ör; $\ddot{x} + 2\zeta w\dot{x} + w^2x = r(t)$

$r(t)$ girişine, $x(t)$ çıkışına, ζ ve w sabitlerine sahiptir.

$r(t) = 4-t$ gibi bir deterministik zaman fonksiyon ise sistem zaman odaklıdır.

Olay tabanlı: Girişler eş zamanlı değil. Örneğin; aynı denklem için $r(t)$;

$$r(t) = \begin{cases} 1, & \text{event occurs} \\ 0, & \text{event doesnot occurs} \end{cases}$$

olursa sistem olay odaklıdır

Kararlı: Kısa bir geçiş evresinden sonra çıktı sıfıra doğru yaklaşır.

Kararsız: Sınırlama olmaksızın doğal tepki artar.

Marjinal: Tepki periyodik ve sınırlıdır.

Otonom olmayan sistem durumunda süperpozisyon prensibi uygulanır.

Superposition: $r(t)$'nin giriş olduğu sabit katsayılı dan 2. dereceden bir denklem sistemi düşünelim:

$\ddot{x} + 2\zeta w\dot{x} + w^2x = r(t)$. Doğal tepki durumunda $r(t)=0$ dır ve ζ ve w sabitlerine bağlı çözümün üç tipten biri olduğu gösterilebilir.

$$x(t) = \begin{cases} A e^{-\cos t} \cos t(w\sqrt{1-\zeta^2}t) + Be^{-\zeta w t}(w\sqrt{1-\zeta^2 t}) & |\zeta|<1 \\ A\cos(wt) + B\sin(wt) & |\zeta| = 1 \\ Ae^{\zeta wt} + Be^{-\zeta wt} & |\zeta| > 1 \end{cases}$$

Örnek: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 15t + 22$ $\quad x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$

Superpozisyon kullanarak sistemi çözün. Bunu yaparken (1) başlangıç koşullarını içeren fakat girişten bağımsız bir terim ve (2) giriş içeren fakat başlangıç koşullarından bağımsız bir terim şeklinde 2 terimin toplamının toplam çözüm old. gösteriniz.

Sistemler
Kesikli ve sürekli o.ü 2'ye ayrılırlar.

Kesikli System (Discreate)

Sistemin durum değişkenleri, zaman sadece kesikli noktalarında değişir.

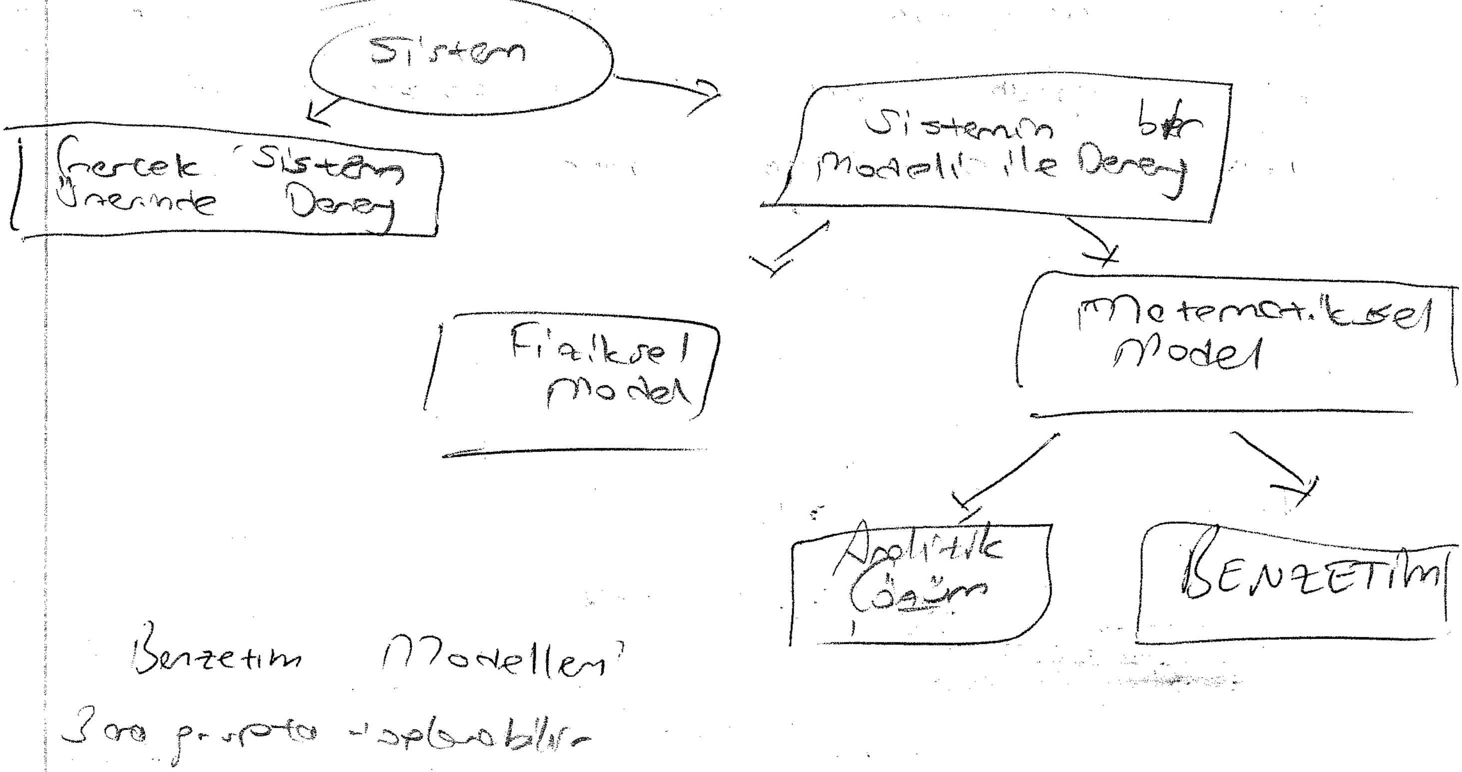
Örnek: banka

Kesikli bir sistemdir. Müşteri sayısı sisteme yeni bir müşteri geldiğinde veya müşteri servisini tamamladığında değişir.

Sürekli System (Continious): Sistemin durum değişkenleri, zamanın içinde sürekli olarak değişir.

Örnek: Havada bir uçağın hareketi sürekli sisteme bir örnektir. Hız ve pozisyon gibi durum değişkenleri sürekli olarak değişir.

Sistemin Çözümü



Benzetim Modelleri

3 ana grupta toplanabilir

- Statik veya Dinamik
- Belirli veya Olasılıklı
- Kesikli veya Sürekli

Avcının yiyecek kaynağı arttıkça avcı popülasyonu da artmaktadır. Fakat avın azalmasıyla avcı popülasyonu düşer. Dolayısıyla bir popülasyon bol bir besin kaynağına ulaştığında kendi başarısının kurbanı olur.

Logistik sistemin Lotka-Volterra'dan farkı;
- Başlangıç şartlarından bağımsız olması,
- Belli bir noktaya kadar artması

Çoklu Zamanlı Tabanlı Sistemler

Dinamik sistemlerdeki en önemli değişken zamandır.

$$\frac{\dot{x}}{x} = \begin{cases} 0 & , T(t) < T_0 \\ r(t)\,[T(t) - T_0] & , T(t) \geq T_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\tau(t) = \int (T(t) - T_0)\, dt$$

Deneysel Veri İşleme

Modeller olayların idealleştirilmesi olmasına rağmen, gerçekçi benzetimler oluşturmak için modele gerçek veriyi uygulamak istenir (Örneğin gerçek sıcaklık profili fiziksel ölçümlerden alınarak elde edilebilir.

Sistemin Performans Ölçütleri 3. slayt.

Çevrim zamanı: 1 ürünün üretilme zamanı

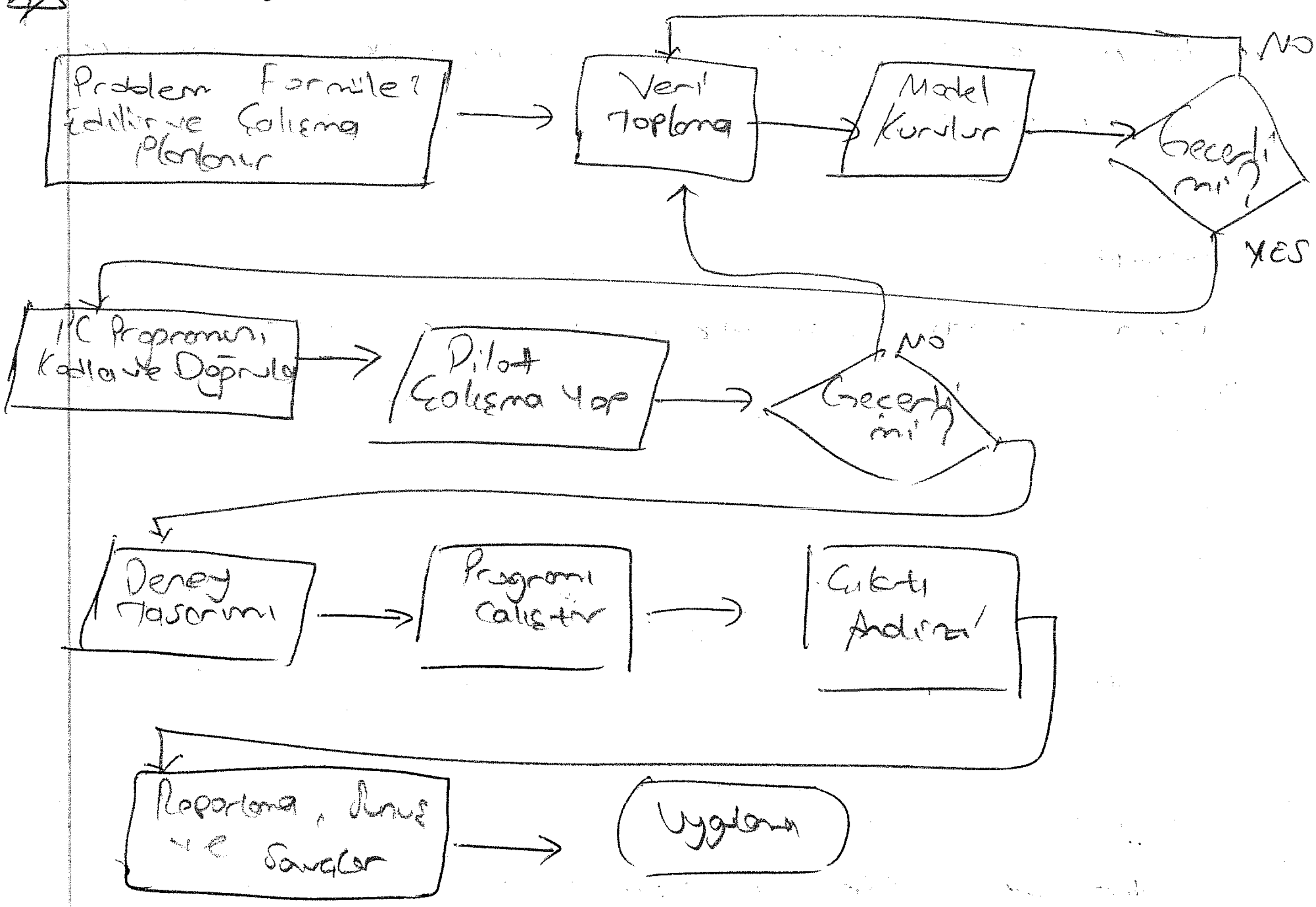
Doluluk (kullanım) oranı: Ekipman veya personelin üretken olduğu zaman yüzdesi

Bekleme Zamanı: 1 müşterinin servis görebilmek için veya 1 parçanın işlenebilmesi için kuyrukta geçirdiği zaman.

Kalite: Doğru özelliklere sahip ürün yüzdesi

Maliyet: Sistemin maliyeti

Benzetimin Aşamaları

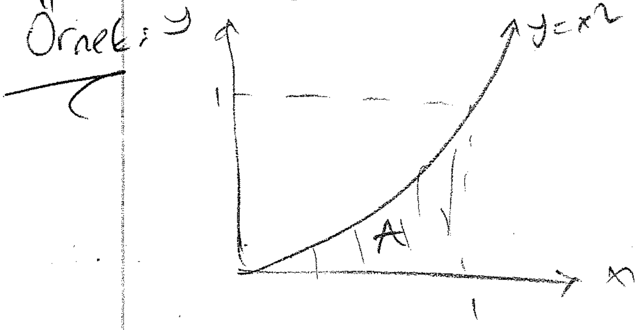


MONTE CARLO BENZETİM METODU

Monte carlo metodunda, istatistiksel ve matematiksel teknikler ile bir deneyi veya çözülmesi gereken bir fiziksel olayı tesadüfi sayıları defalarca kullanıp simülasyon edip çözmek esasıdır.

Monte carlo yöntemi, direkt analitik yaklaşımların mümkün olmadığı fonksiyonların integralinin sayısal elde edilmesinin bir yoludur.

Örnek:



Şekilde görülen $y=x^2$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan taralı alanı bulmak için monte carlo benzetimi kullanılabilir.

Statik Benzetim Modeli
Sistemin belirli bir andaki gösterimidir. Monte-Carlo bu türe örnektir.
Dinamik Benzetim Modeli
Sistemin çalışma zamanına göre (bir anlık veya tüm çalışma zamanı dikkate alınarak) yapılan modellemedir.
Örneğin; 1 banka için kurulan 1 benzetim modeli 8 saatlik bir çalışma zamanı dikkate alınarak çalıştırılır.
Belirli (Deterministik) Benz. Modeli
Rassal değişken içermeyen benzetim modelidir. Bu modellerde verilen girdi seti için bir çıktı seti vardır.
Olasılıklı (Stochastic) Benz. Modeli
1 veya 1'den fazla rassal değişken içeren benzetim modelidir. Stokastik benzetim modeli kullanılarak elde edilen çıktı rassal olup modelin karakteristiğinin tahminidir.
Banka örneğinde, varışlararası zaman aralığı ve servis zamanları rassal değişkenlerdir.
Zaman Dilimi mi? Sonraki olay mı?
Bak.
Stokastik mi? Deterministik mi?
Bir sistemin davranışı tümüyle tahmin edilebilir ise, deterministik.
Eğer bir sistemin davranışı bütünüyle tahmin edilmiyorsa stokastiktir.

Seçeceğimiz n adet sayıdan m tanesinin 11 ile tam bölündüğünü farzedelim.

Olasılık değeri = $\frac{m}{n}$ 'dir

Programı yazarken; rastgele seçilecek her sayı değeri için n artarken; 11 ile bölünmesi durumunda m arttırılmalıdır.

```
function sonuc = bolunebilme(n)
b=0;
s=0;
sonuc;
for i=0 in
sayi = round(rand*99)+1;
  sonuc = mod(sayi,11);
  if (sonuc == 0)
    b = b+1;
    end
    s = s+1
    end
    sonuc = b/s;
```

4 Slayt

Stokastik Üreteçler

Rastgele Sayı Üreteçleri

Gerçek sistemlerin olasılıklı ~~stokastik~~ davranışı her zaman düzgün (uniform) dağılımla açıklanamaz.

Bir sistem içinde karşılaşılan stokastik işlemler uniform dağılımdan daha çok ~~teorik~~ dağılımlarla (üstel, normal, poisson vb) açıklanabilmektedir.

Bu nedenle uniform dağılımdan [0,1] aralığından elde edilen rassal sayıların teorik ve deneysel dağılımlara dönüştürülmesi gerektir.

Bunun için bir dönüşüm tekniği kullanılarak 0-1 aralığında düzgün dağılımdan üretilen rassal sayı istenilen dağılım türünden bir rassal değişkene dönüştürülür

Eğer, dikdörtgen içerisinde rastgele noktalar (x_i, y_i) işaretleyip bu noktaların eğrinin altında olup olmadıklarını belirler ve bunu toplam nokta sayısına oranlarsak A alanını R karesine olan oranını yaklaşık olarak elde edebiliriz.

Eğrinin altında kalan alan = $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Monte carlo ile çözüm;

Toplam nokta sayısı = n olsun.

Eğrinin altında kalan nokta sayısı = m

$\frac{m}{n}$ = noktanın eğri altında kalma olasılığı.

2 denklemi eşlersek, integral ve monte carlo

$\frac{m}{n} = \frac{1}{3} = 0.333$ yöntemlerinin sonuçları eşit çıkar

Matlab Kodu:

```
function egriAlan = xkare(n)
   egri=0;
   Sayac=0;
   for i=0 : n
   x=rand ;
   y = rand ;
    if( y < x*x)
      egri=egri+1;
      end
    sayac = sayac +1
      end
    egriAlan = egri/sayac;
```

Örnek 4: 0 ile 100 arasında bulunan sayılar içinden rastgele seçilen bir sayının 11'e tam bölünebilme olasılığı nedir?

Bu sayılar: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 olup toplam 9 tanedir. Tüm sayılar 100 tane

$9/100 = 0{,}09$ olasılık değeri

Monte carlo ile çözüm;

Monte carlo benzetimi 0 ile 100 arasında rastgele n tane sayı seçmemizi ister.

Örnek: $x_0 = 5497$ olarak seçilsin.

$x_0^2 = (5497)^2 = 30.\underbrace{217.0}_{}09 = x_1 = 2170 \quad u_1 = 0,2170$

$x_1^2 = (2170)^2 = 4.\underbrace{708.9}_{}00 = 7089$

$x_2 = 7089 \quad , \quad u_2 = 0,7089$

$x_2^2 = (7089)^2 = 50.\underbrace{253.9}_{}21$

$x_3 = 2539 \quad , \quad u_3 = 0,2539$

Bu şekilde devam eder.

Bu tekniğin dezavantajları:

- İlk sayı ve dizinin tekrar uzunluğu arasındaki periyod önceden bilmek mümkün değildir. Çoğu kez tekrar uzunluğu kısadır.

Elde edilen sayılar rassal olmayabilir. Yani dizide dejenerasyon söz konusu olabilir.

Bu yöntemle belirli bir sayı aritmetik işleme başlangıç değeri (seed) olarak verilmekte ve buna bağlı olarak bir sayı hesaplanmaktadır.

Hesaplanan sayı, bu kez başlangıç değeri olarak alınmakta ve yeni bir sayı üretilmektedir.

Böylece her üretilen sayıdan yeni bir sayı üretilerek bir sayı dizisi elde edilmektedir.

Tekdüze Dağıtımlı Rastgele Sayılar

Tekdüze rastgele sayı üreteçlerin çoğu LCG (lineer Congruential Generators) - liner Eşleşiksel Üreteçler şeklindedir.

LCG, tahmin edilemez gibi görünen bir dizi sayılar oluşturur.

Başlamak için ilk değer çekirdeğe z_0 ihtiyaç duyar.

Bu çekirdek ve z_k dizisinin ardışıl terimleri bir LCG denklemine uygulanır.

Ardından, z_k; $0 \leq U_k \leq 1$ aralığında bir U_k çıktısına normalize edilir.

Rassal Sayı:

Stokastik faaliyetleri konu olan benzetim modellerinde olasılık dağılımlarından rassal değişkene üretmek için rassal sayılar gereklidir. Bu nedenle bazı yazarlar Monte-Carlo yöntemini rassal sayıların doğalı deneylerle uğraşan deneysel matematiğin bir dalı olarak tanımlarlar.

Rassal sayı üreteçlerinden istenen özellikleri;

- Rassallık
- Büyük Period
- Yeniden üretilebilirlik (Reproducibility)
- Hesaplama Etkinliği

Tek Düze Dağıtımlı Rastgele Sayılar

Dil ~~Rassal Sayı~~ derleyicileri [0,1] aralığında tek düze dağılımlı rastgele sayılar için olarak sağlar.

Böyle yordamlar U[0,1] üreteçleri olarak bilinir.

Rassal Sayı Üretimi için teknikler

1.) Orta Kare Yöntemi

Bu yöntemde ~~genellikle~~ m basamaklı ve genellikle tek dan bir sayı başlangıç değeri olarak alınır.

2. aşamada, bu sayının karesi alınarak bulunan sayının ortasındaki m kadar basamaklı sayı alınır.

Bu bir rassal sayı olarak kaydedilir.

Tekrar bu rassal ifadenin karesi alınır ve yine ortadaki m basamaklı sayı bir rassal sayı olarak kaydedilir.

Bu işlem istenilen rassal sayı elde edilinceye kadar devam eder.

Önceki örnekte

5 ve 3 sayıları asal şart 1

m=16 old. 16 sadece 2 asal sayısına bölünür ve
$a-1 = 5-1 = 4$ 'de 2'ye bölünür şart 2

16, 4'e bölünmekte ve a-1 de 4'e bölünmekte şart 3

Bütün şartlar sağlandığına göre tam periyottur.

Örnek: Önceki örnekteki problemi düşünelim.

Değişkenler $a=5$, $c=3$, $m=16=2^4$. Dolayısıyla LCG-
4-bit shift register ile tam sayıları gösterebilir.

$R=[r_1, r_2, r_3, r_4]$.

Reg. içeriği 4 bit olacaktır.

$Z_6 = 5$ old. $R:[0101]$'dir.

Z_7'yi elde etmek için $5Z_6+3 = R:[1\ 1100] = 28$

Burda soldaki 1 shift register 4bit old. kaybedilir.

$28 \bmod (16) = 12 = R[1100]$

$R \leftarrow 5R+3 : [1111]$ elde edilir. $Z_8 = 15$ 'dir.

Üreteçlerin İstatistiksel Özellikleri

Üreteç tekdüze olmalı: Herhangi bir L uzunluk aralığından oluşan sayıların miktarı, diğer bir L uzunluk aralığında oluşan miktara yakın olmalı.

Dizi Bağımsız Olmalı: Özellikle, herhangi bir sayı bir sonrakine etkisini göstermemelidir.

1. özelliği test etmek için Chi-square (ki-kare) testi uygulanır.

Ki-kare testi: Beklenen frekans değerleri ile gözlenen frekans değerlerinin karşılaştırılıp, aradaki uyuma bakılmasıdır.

Bu test için F.DT (frequency Distribution table)
Frekans Dağıtım Tablosuna bakılır.

Yani;

$z_0 =$ "çekirdek" , $z_{k+1} = (a z_k + c) \bmod(m)$

$U_k = \frac{z_k}{m}$

a: çarpan , c: artım , m: genlik.

Örnek:; $a=5$, $c=3$, $m=16$ ve $z_0=7$ değerleri ile LCG kullanarak oluşturulan sayı dizisini belirleyelim.

$U_0 = \frac{z_0}{m} = \frac{7}{16} \cong 0.437$

$z_{k+1} = (5 z_k + 3) \bmod(16)$

$z_0 = 7 = z_1 = (5.7+3) \bmod(16)$

$z_1 = 6$ $\quad U_1 = \frac{6}{16} = 0.375$ olur

$z_2 = (5.6+3) \bmod(16)$

$z_2 = 1$, $U_2 = \frac{1}{16} = 0.062$

Bu şekilde devam eder ve m kadar yeni rastgele sayı üretebilmektedir.

m adet tekrar için m farklı sayının oluşturduğu durumda seçilen LCG'nin tam periyoda sahip oldu söylenir.

Bu herbir z_k için tekrar ettiği için tam periyot oluşturmaktadır.

Hull-Dobell Teoremi:

Parametrelerin seçiminde Hull-Dobell teoremi oldukça kullanışlıdır. Bu teorem tam periyodu elde etmek için gerekli ve yeterli şartı sağlar.

LCG ancak ve ancak bu 3 şartı sağlarsa tam periyoda sahiptir:

I a ve c asal sayı olmalı

II- m sayısının bölünebildiği bütün asal sayılara a-1'de bölünebilmelidir.

Eğer m dörde bölünüyorsa a-1'de 4'e bölünmelidir.

Ters Dönüşüm Tekniği

$f(x)$ olasılık yoğunluklu fonksiyonun verildiğini kabul edelim

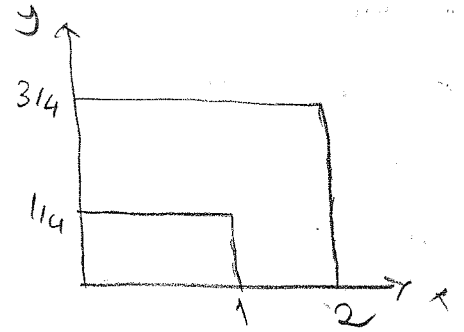
Amaç $f(x)$'ten bir rassal değişken üretmektir.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad 0 \le F(x) \le 1$$

$u = F(x)$ için $\quad x = F^{-1}(u) \Rightarrow$ ters fonksiyon

$u \sim U(0,1)$

Örnek:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

$0 \le x < 1$ için;

$f(x) = 1/4$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{4}\,dx = \frac{x}{4}\Big|_0^x = \frac{x}{4} = u \rightarrow \boxed{x = 4u}$$

$1 \le x < 2$ için;

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dx + \int_1^x \frac{3}{4}\,dx$$

$$= \frac{x}{4}\Big|_0^1 + \frac{3x}{4}\Big|_1^x = \frac{1}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} = u$$

$$\boxed{x = \frac{4u}{3} + \frac{2}{3}}$$

$$x = F^{-1}(u) = \begin{cases} 4u, & 0 \le u < \frac{1}{4} \\ \frac{4u}{3} + \frac{2}{3}, & \frac{1}{4} \le u < 1 \end{cases}$$

yerine koyarak bulunuyor

$u = rand(0,1)$

m rastgele sayı oluşturulacak ve her birini bir m sınıfına atayarak . f1, f2 --- fm frekanslı çizelgeye taşın.

$e_k = \frac{n}{m}$ frekansları karşılaştırılır

$$x^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k}$$

$$= \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(f_k - \frac{n}{m}\right)^2$$

$v = m-1$ bağımsızlık derecesi.

Örnek; SNAFU olarak isimlendirilen U[0,1] "üreteci" (100 sayı üretilerek test edilmiş ve frekansları sayılmıştır. Frekans değerleri aş. verilmiş

$0.00 \leq x < 0.25$

$0.25 \leq x < 0.50$

$0.50 \leq x < 0.75$

$0.75 \leq x < 1.00$

Sonuçlar $f_1 = 21$, $f_2 = 31$ $f_3 = 26$, $f_4 = 22$ şeklinde dir. Üretecin uniform dur olmadığını bulunuz?

Çözüm: $n=100$, $m=4$ sınıf var

$\frac{n}{m} = \frac{100}{4} = 25$ sayı her sınıfta olmalı

Ki-Kare testi ile;

$$x^2 = \frac{4}{100}\left[(21-25)^2 + (31-25)^2 + (26-25)^2 + (22-25)^2\right]$$

$x^2 = 2.48$

Bağımsızlık derecesi $v = 4-1 = 3$, x2 değeri

$a = 95\%$ x_c^2 $x_c^2 = 7.81$ (Appendix F)

old. Ki-kare tablosunda bulunabilir.

$x^2 < x_c^2$ old. uniform old. söylenebilir.

Tekdüze Olmayan Rastgele Değişkenlerin Üretimi

- Ters Dönüşüm Metodu
- Ret Metod
- Konvolusyon Metod

$$= \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow u = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3u}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$x = F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{3u} , & 0 \leq u < \frac{1}{3} \\ \frac{3u}{2} + \frac{1}{2} , & \frac{1}{3} \leq u < 1 \end{cases}$$

Örnek: $F(x) = \begin{cases} x , & 0 < x \leq 1 \\ 2-x , & 1 < x \leq 2 \\ 0 , & d.d \end{cases}$ Bu olasılık durumlarını kullanarak rassal üretim yapan ters dönüşüm tekniğiyle yapılan Algoritmasını yaz.

$0 < x \leq 1$ için

$$F(x) = \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^x = \frac{1x^2}{2} = u \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2u}}$$

$1 < x \leq 2$ için

$$F(x) = \int_0^1 x\,dx + \int_1^x (2-x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_1^x$$

$$= \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - \frac{x^2}{2} - 1 = u$$

$$u = 1 + \frac{4x - x^2 - 4}{2} \Rightarrow 1 - \frac{x^2 - 4x - 4}{2}$$

$$1 - \frac{(x-2)^2}{2} = u$$

$$\boxed{x = 2 + \sqrt{2.(1-u)}}$$

$$F^{-1}(u) = x = \begin{cases} \sqrt{2u} , & 0 < u \leq \frac{1}{2} \\ 2 + \sqrt{2(1-u)} , & \frac{1}{2} < u \leq 1 \end{cases}$$

~~Örnek~~: Üstel Fonksiyonda Rassal Değişken Üretimi

$$F(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

1.adım: İstenen x değişkeninin kümülatif olasılık dağılımını hesaplayınız.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

2.adım: $F(x) = u$ atamasını yap.

3.adım: Denklemi çözüp x'i elde et.

$$u = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\ln e^{-\lambda x} = \ln(1-u)$$

4.adım: u_1, u_2, u_3 rastgele değişkenleri üretip x değerlerini elde et.

$$x = \frac{-1}{\lambda} . \ln(1-u) \longrightarrow rnd(0,1)$$

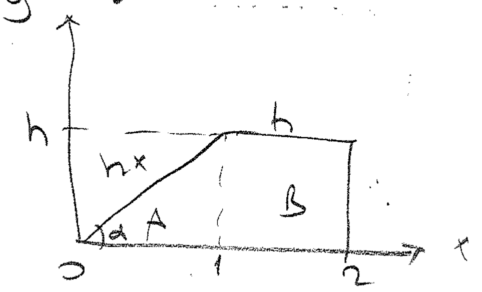
$$x = \frac{-1}{\lambda} . \ln u$$

$\Rightarrow$ aynı ifade.

(11) Örnek: Aş. verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna uygun rassal değişken üreten alg. ters dönüşüm tekniğiyle açıklayınız?

$$tg\, \alpha = \frac{h}{1} = h$$

$F(x)$



$A + B = 1$

$$\frac{h.1}{2} + h = 1 \Rightarrow \boxed{h = \frac{2}{3}}$$

$0 \leq x < 1$ için

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{3} x\,dx = \frac{\cancel{2}}{3} . \frac{x^2}{\cancel{2}} \Big|_0^x = \frac{1}{3} x^2 = u \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{3u}}$$

$1 \leq x < 2$ için;

$$F(x) = \int_0^1 \frac{2}{3} x\,dx + \int_1^x \frac{2}{3} dx = \frac{1 x^2}{3} \Big|_0^1 + \frac{2x}{3} \Big|_1^x$$

i	Aralık (saat)		Frekans	olasılık	Kümülatif olasılık		$a_i = \frac{x(i) - x(i-1)}{c(i) - c(i-1)}$
1	$0{,}25 \le x \le 0{,}5$	x_1	31	0,31	0,31	a_1	0,8
2	$0{,}5 < x \le 1{,}0$	x_2	10	0,1	0,41	a_2	5.0
3	$1{,}0 < x < 1{,}5$	x_3	25	0,25	0,66	a_3	2,0
4	$1{,}5 < x < 2{,}0$	x_4	34	0,34	1,00	a_4	1,47

Bu bilgiler bilinmektedir.

$$\frac{0{,}5 - 0{,}25}{0{,}31 - 0} = 0{,}8$$

$u = 0{,}83$ ile değeri bul.?

↳ Kümülatif değere bakılır ve 4 noktadadır.

$$x = F^{-1}(u) = x(4-1) + a_4 \cdot (u - c_3)$$

$$x = F^{-1}(u) = x_3 + a_4 \cdot (0{,}83 - 0{,}66)$$

$$= 1{,}5 + 1{,}47 (0{,}83 - 0{,}66)$$

$$= 1{,}5 + 1{,}47 \cdot (0{,}17)$$

$$\boxed{x = 1{,}75}$$

⇒ $u = 0{,}33$ dursa 2 nokta

$$x = x(2-1) + a_2 \cdot (0{,}33 - 0{,}31)$$

$$x = 0{,}5 + 5{,}0 (0{,}02)$$

$$\boxed{x = 0{,}6}$$

Örnek: 15 gün sonunda verilen sipariş sayıları 0, 1 veya 2 alınmaktadır.
0 ⇒ %50 'dir
1 ⇒ %30
2 ⇒ %20

Buna göre rassal değişken üretimi için gerekli fonksiyon elde ediniz.

x	olasılık	Kümülatif olasılık
0	0,5	0,5
1	0,3	0,8
2	0,2	1,0

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \\ 0{,}5 & ; \; 0 \le x < 1{,}0 \\ 0{,}8 & ; \; 1{,}0 \le x < 2{,}0 \\ 1{,}0 & ; \; x \ge 2{,}0 \end{cases}$$

↓

Integral hesabı oldu için kümülatif değere bakılır

$$x = \begin{cases} 0 & ; \; u \le 0{,}5 \\ 1 & ; \; 0{,}5 < u \le 0{,}8 \\ 2 & ; \; 0{,}8 < u \le 1{,}0 \end{cases}$$

Deneysel Sürekli Veriden Rassal Değişken Üretmek

(3) Örnek: 1 yangın alarm sistemi için alarm verme dk'ları şu şekilde verilmiştir; 2.76, 1.83, 0.8, 1.45 ve 1.24 şeklinde alarm vermiş. Bu verileri kullanıp rassal değişken üreten metot üreteceğiz. $n = 5$ (veri sayısı)

Her bir olay olasılığı $= \frac{1}{5} = 0.2$

$$a_i = \frac{x(i) - x(i-1)}{\frac{i}{n} - \frac{(i-1)}{n}} \Rightarrow [i. \text{ [eğrinin eğimi]}]$$

$$\boxed{a_i = n \cdot x(i) - x(i-1)}$$

$$F^{-1}(x) = x(i-1) + a_i \left[u - \left(\frac{i-1}{n}\right)\right]$$

i	Aralık $x(i-1) < x < x_i$	olasılık	Kümülatif Olasılık	a_i
1	$0 < x < 0.8$ x_1	0.2	0.2	a_1 4.0
2	$0.8 < x < 1.24$ x_2	0.2	0.4	a_2 2.20 $\Rightarrow a_i = n\,[x(i) - x(i-1)]$
3	$1.24 < x < 1.45$ x_3	0.2	0.6	a_3 1.05
4	$1.45 < x < 1.82$ x_4	0.2	0.8	a_4 1.9
5	$1.82 < x < 2.76$ x_5	0.2	1.0	a_5 4.65

$u = 0.71 \Rightarrow$ 4. aralıktadır. (Çünkü kümülatif olasılığa baktığın görüldüğü gibi 0.8'den küçüktür)

$$F^{-1}(x) = x(4-1) + a_4 \cdot \left(u - \frac{3}{5}\right)$$

$$= 1.45 + 1.9\,(0.71 - 0.6)$$

$\boxed{F^{-1}(x) = 1.66}$ olur.

Deneysel Değerler yerine Frekans Verilirse;

$$a_i = \frac{x(i) - x(i-1)}{c(i) - c(i-1)} \qquad c: \text{ i. kümülatif olasılık}$$

$$x = F^{-1}(u) = x(i-1) + a_i \cdot (u - c(i-1))$$

(4) Örnek: 100 makinenin tamir zamanlarının toplandığını varsayalım. Makinelerin tamir zamanları ile ilgili şöyle bir tablo verilmiştir;

Reddetme Tekniği

Reddetme tekniği, sürekli ve sınırlı olan herhangi bir $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonundan rassal değişken üretmek için kullanılan genel bir metodtur.

$0 \leq f(x) \leq f_{max}$ $a \leq x \leq b$ 'dir

Adımları:

- Öncelikle bir t fonksiyonunun tanımlanması gerek $f_{max} = t$, $t(x)$
- c noktası bulunur.
- $c = \int t(x)\,dx$
- $r(x)$ bulunur $r(x) = \frac{t(x)}{c}$
- $R(x) = \int r(x)$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{d.d} \end{cases}$$

- Büyük olan seçilir. $t(x) = 1$
- c noktası bul. $\int_0^2 1 \cdot dx = x \Big|_0^2 = 2 - 0 = 2$
- $r(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{1}{2}$
- $R(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}\Big|_0^x = \frac{x}{2} = u$ $\boxed{x = 2u}$

Algoritması: $u_1 \sim U(0,1)$ üret $y = x = 2u_1$

$u_2 \sim U(0,1)$ üret

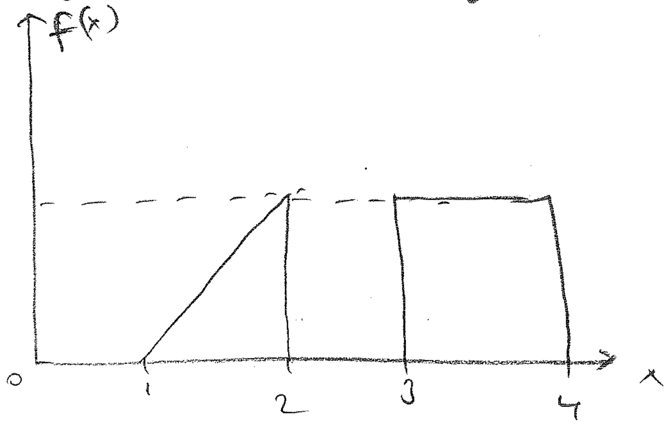
$y \leq 1$ ve $u_2 \leq \frac{y}{1} \Rightarrow x = y$

$y > 1$ ve $u_2 \leq \frac{(2-y)}{1} \Rightarrow x = y$

ve lerden

değilse Adım 1

Örnek: Şekilde görülen $f(x)$ fonksiyonundan ters dönüşüm tekniği ile rassal değişken üreten algoritmayı yazın.



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 1 \le x \le 2 \\ f_2(x), & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$A + B = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot h \cdot 1 + h \cdot 1 = 1 \Rightarrow h = \frac{2}{3}, \quad m = \frac{2}{3} \text{ eğim}$$

$$f_1(x) = m(x - x_1) \Rightarrow f_1(x) = \frac{2}{3} \cdot (x-1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-1), & 1 \le x \le 2 \\ \frac{2}{3}, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{2}{3}(x-1)\,dx = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} \Big|_1^x = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = (x^2 - 2x + 1) \cdot \frac{1}{3} \\ \int_1^2 \frac{2}{3}(x-1)\,dx + \int_3^x \frac{2}{3}\,dx = \end{cases}$$

$$= \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} \Big|_1^2 + \frac{2x}{3} \Big|_3^x$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{6}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2x-6}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-3)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 1), & 1 \le x \le 2 \Rightarrow \begin{matrix} x=1 & u=0 \\ x=2 & u=1/3 \end{matrix} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-3), & 3 \le x \le 4 \Rightarrow \begin{matrix} x=3 & u=1/3 \\ x=4 & u=1 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\cancel{F(x) =} \quad F^{-1}(u) = x = \begin{cases} \sqrt{3u} + 1, & 0 \le u_1 \le 1/3 \\ \frac{3}{2}u + 3 - \frac{1}{2}, & 1/3 \le u_2 \le 1 \end{cases}$$