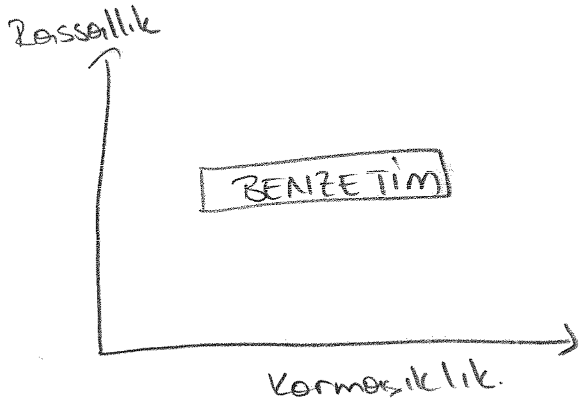
BENZETİM VE MODELLEME

Benzetim: Gercek hayattaki bir sistemin veya sürecin calışmasının taklit edilmesidir. Zaman içinde sistemin işleyişinin taklididir.

=> Sistemin yapay geçmişinin üretilmesine ve gerçek sistemin karakteristik özelliklerine dair çıkarımlar yapmak üzere bu geçmişin gözlemlenmesine olanak verir.

Benzetimin gerçekleştirilebilmesi için; karmaşıklık ve rassallık belirli bir düzeyde olmalıdır. Karmaşıklık arttıkça, performans düşeceğinden benzetim azalır.



Benzetimin Amaçları

Değerlendirme: Belirlenen kriterlere göre önerilen sistemin ne kadar iyi çalıştığının gösterilmesi.

Karşılaştırma: Önerilen sistem tasarımlarının veya politikaların karşılaştırılması.

Tahmin: Önerilen koşullar altında sistemin performansının tahmini

Duyarlılık Analizi: Sistem performansında etkili olan faktörlerin belirlenmesi.

Optimizasyon: En iyi performansı veren faktör düzeylerinin bir kombinasyonunun belirlenmesi.

Darboğaz Analizi: Belli bir sistemde ki darboğazların tespiti.

Problem sağduyulu bir analiz ile çözülebiliyorsa;

Problem analitik olarak çözülebiliyorsa

benzetim iyi bir fikir değildir.

Benzetimin ;

Avantajları

⇒ Benzetim modeli kurulduktan sonra, önerilen yeni tasarımların ve politikaların analizinde kullanılır.

⇒ Yeni bir sistemin analizine yardımcı olma da kullanılır.

⇒ Veri elde etmek için kullanılır.

⇒ Analitik teknikleri uygulamaktan daha kolaydır.

⇒ Analitik modellerde basitleştirici kabuller yapılır. Ancak benzetimde bu kısıtlama yoktur.

⇒ Analitik modeller ile kısıtlı sayıda performans ölçütleri alınabilir. BM de ise herhangi biri ölçüt alınabilir.

⇒ Bazı durumlarda benzetim tek araçtır.

Dezavantajları

⇒ Benzetim zaman alıcıdır. Modelin pc de kurulması maliyetlidir.

⇒ Maliyeti etkileyen en önemli faktör, benzetimin birçok kez çalıştırılmasıdır.

⇒ Analitik yöntemlerin yeterli olduğu durumlarda bile benzetim kullanılıyor.

⇒ Benzetim = Girdi - Çıktı sistemleri

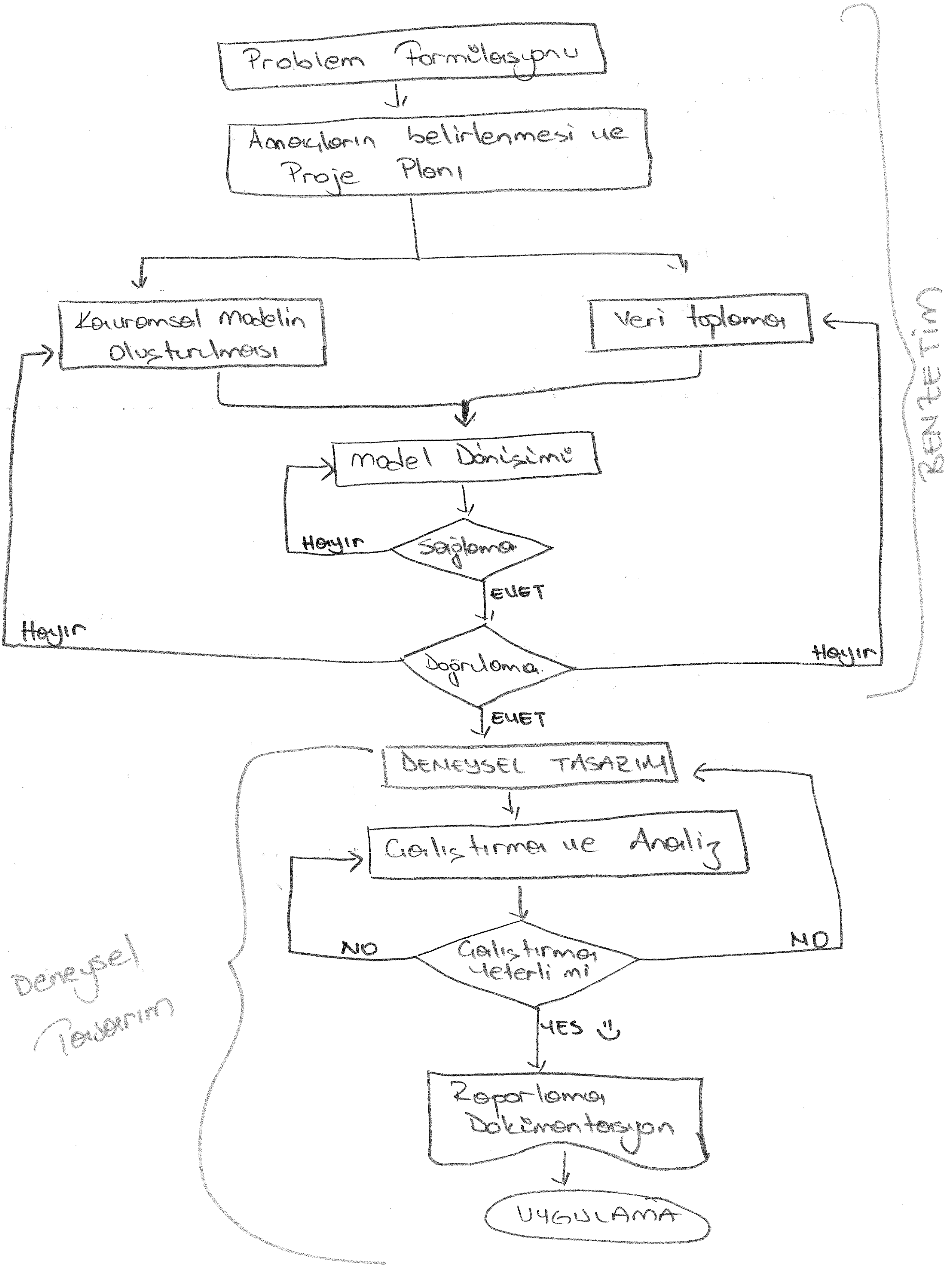
Yeni çalıştırılırlar, çözülmezler.

⇒ Analitik yöntemler tam sonuç üretirler. Benzetimden böyle bir sonuç almak zordur.

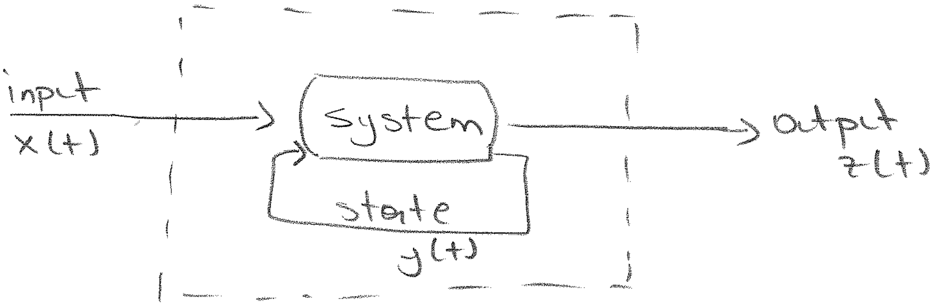
Uygulama Alanları :

↳ Bilgisayar
↳ Üretim
↳ İşletme
↳ Kamu hizmetleri
↳ Ekoloji ve çevre
↳ Sosyoloji
↳ Biyoloji

Benzetimin Aşamaları



Sistem : Bir amacı gerceklestirmek icin bağımsız olarak veya düzenli bir etkilesim icerisinde birlikte calısan nesnelerin bir grubudur. Genellikle aşağıdaki gibi bir kara kutu olarak ifade edilir.



Özellikleri;

① Sistem üzerindeki bütün cevresel etkiler giris vektörüdür.

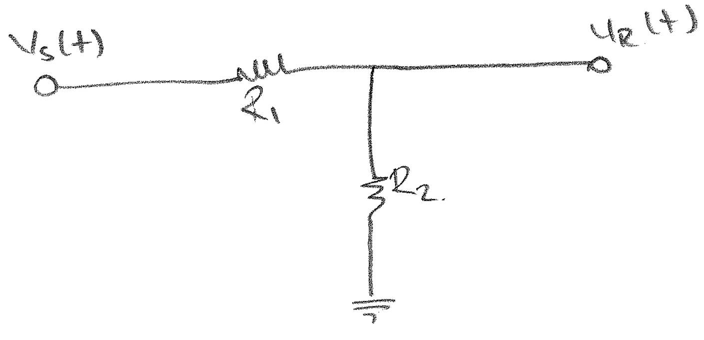
$x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$

② Sistemin cıkısı zamanla değisen bir vektördür.

$z(t) = [z_1(t), \ldots, z_n(t)]$

③ Eğer $x(t)$ dinamik olarak cıkısa bağlı ise sistem belli bir hafızaya sahiptir. Dolayısıyla sistemin girisinin $t-1$ zamanındaki değeri cıkısı etkiler.

Ör;



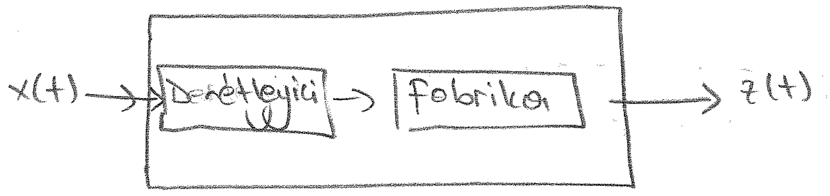
$x(t) = V_s(t)$ giris

$z(t) = V_R(t)$ cıkıs

$$z(t) = \left(\frac{R2}{R1+R2}\right) \cdot x(t)$$

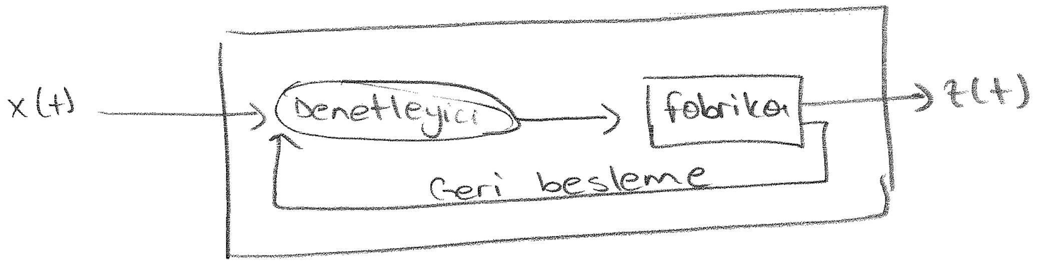
⇒

Kontrol Sistemleri



Açık çevrim kontrol sistemi

Giriş sinyallerine göre arzu edilen amaçları elde etmek için bir denetleyici alt sistem kurulmasıdır.



Ayrık Zamanlı Sistem:

⇒ Girişi bütün zaman dilimlerinde değişen sistemlerdir.

⇒ $\boxed{h = t_{k+1} - t_k}$ adım aralığı alınsın.

Ör: Sürekli zamanlı $x(t) = \cos(\pi t)$ sinyalini $t_k = 3 + \frac{1}{2}k$ ayrık zamanlarda örnekleyelim. $t_0 = 3$, $h = 1/2$ alınacak.

Çözüm: $x(t_k) = \cos[\pi(3 + \frac{1}{2}k)]$

$$= -\cos(\tfrac{1}{2}\pi k)$$

$$x(t_k) = \begin{cases} 0 & , \ k \text{ tek} \\ (-1)^{(k+2)/2} & , \ k \text{ çift} \end{cases}$$

Olay Sürümlü Modeller

⇒ Sistemin durumu düzensiz zamanlarda oluşmuş bir olay ile değişir.

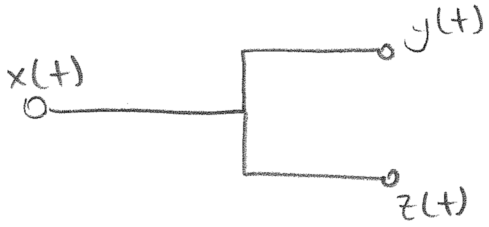
⇒ Olay sürümlü sistemler rastgeleliğe dayalıdır ve stokastiktir.

```
# t_k = 0
  for i=1 to n
      t_k = t_{k-1} + RND
  next k
```

n adet rastgele dağılım

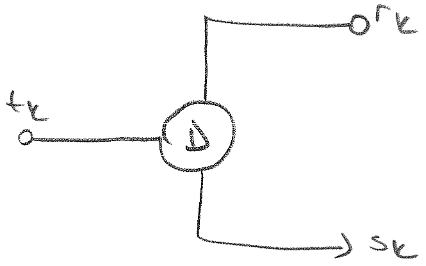
Benzetim Diyagramları

#



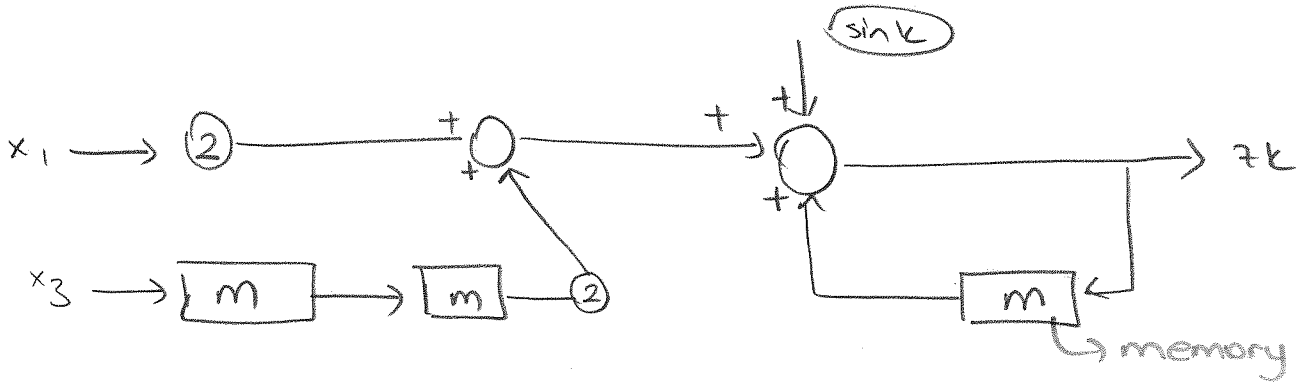
$y(t) = x(t) = z(t)$

#



$tk = rk \cup sk$

Dönüşüm Blokları



$\Rightarrow z(k) = z(k-1) + 2x_1(k) + 2x_3(k-2) + \sin k$

Ayrık Sistemlerin Bileşenleri

Varlık: Sistemde ilgilenilen bir nesnedir.
→ insan
→ Parça, evrak
→ e-posta, proje

Özellik: Bir nesnenin sahip olduğu özellik.

Faaliyet: Belirli bir zaman diliminde bir işlemin tamamlanması.

Kaynaklar: Sistemin çalışması için gerekli personel, alet, alan, enerji vs.

Kontrol: Faaliyetlerin nerede, ne zaman, nasıl ortaya çıkacağı

Olay: Herhangi bir durumda ortaya sistemin durumunu değiştiren herşeyin ifadesidir.

Durum Değişkenleri: Çalışmanın amacına bağlı olarak herhangi bir an için sistemi tanımlamaya yarar.

\# Haberleşme ⟶ sistem
mesaj ⟶ varlık
Gönderme ⟶ faaliyet
Gideceği yer ⟶ özellik
Uzunluğu ⟶ özellik
iletim raporu ⟶ olay
iletilmeyen mesajlar ⟶ durum değişkeni

DİNAMİK SİSTEMLER

Başlangıç Değer Problemi

\# Amacı yüksek mertebeden bir dif denklemi değişken değiştirme ile daha alt mertebeye indirmektir.

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$

★ $x(t_0) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ sistem durum vektörü

$x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]$ başlangıç durumları

Ör: $\alpha'' + 2\beta\alpha' + \beta^2\alpha = \cos t$

$\beta' + \alpha\beta = 4$ ve

$\alpha(0) = 2$
$\alpha'(0) = -1$
$\beta(0) = 1$ olsun.

Çözüm: ① $x_1 = \alpha$
$x_2 = \alpha'$
$x_3 = \beta$ değişken değiştirmelerini yap.

② $x_2' + 2x_3x_2 + x_3^2x_1 = \cos t$

$x_3' + x_1x_3 = 4$

③ $x_1' = x_2$
$x_2' = \cos t - 2x_3x_2 - x_3^2x_1$
$x_3' = -x_1x_3 + 4$
$x_1(0) = 2$
$x_2(0) = -1$
$x_3(0) = 1$

③ 3 birlesik durum vektörü haline getirilirse;

$x = [x_1 , x_2 , x_3] \Rightarrow f = [x_2 , -2x_2x_3 - x_3^2x_1 + \cos t , -x_1x_3+4]$

$x_0 = [2, -1, 1]$

$t_0 = 0$

EULER YÖNTEMİ

① Türevin tanımı $\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x)$

② küçük h değerleri için $\Rightarrow x(t+h) \cong x(t) + hf(t, x)$

③ $\boxed{x(k+1) = x(k) + ht^2[t(k) . x(k)]}$ ayrık zamanlı sistem çözümü.

$\boxed{t_{k+1} = t_k + h}$

Ör: $x' = x^2t$, $x(1) = 3$ ve $h = 0,05$ için Euler çözümü.

#$\;t(0) = 1$
$x(1) = 3$ ise $x(0) = 3$ alınır.

#$\;t_{k+1} = t_k + h \Rightarrow t_{k+1} = t_k + \overset{0,05}{\frac{1}{20}}$

#$\;x(k+1) = x(k) + \frac{1}{20}x^2(k) . t_k$ ve $k = 1, 2, ---, n.$

TAYLOR YÖNTEMİ

$$\left.\begin{matrix} h^{(i)} \\ x^{(i)} \end{matrix}\right\} \text{türev}$$

① $$x(t+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{(i)}(t)}{i!} h^{(i)}$$

$\Rightarrow x' = f(t,x)$

★ $x(t+h) = x(t) + h \underbrace{x'(t)}_{\hookrightarrow f(t,x)}$ ⇒ Euler yöntemi

② $$\boxed{x(t+h) = h x'(t) + \frac{1}{2} h^2 x''(t)}$$ ⇒ Taylor yöntemi

★ $$x'' = \frac{d f(t,x)}{\partial f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f \cdot dx}{\partial x \cdot dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot f(t,x)$$

③ $t_{k+1} = t_k + h$

$$x(k+1) = x(k) + h t^2 + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f(t,x) \right)$$

RUNGE KUTTA YÖNTEMİ

① $x(t+h) = x(t) + hx(t) + \frac{1}{2}h^2x'' + \frac{1}{6}h^3x^{(3)}(t) + \frac{1}{24}h^4x^{(4)}(t)$

②
$k_1 = f(t_k, x(k))$

$k_2 = f(t_k, \frac{1}{2}hx(k) + \frac{1}{2}hk_1)$

$k_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}hk_2)$

$k_4 = f(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{3}hk_3)$

③
$t_{k+1} = t_k + h$

$$\boxed{x(k+1) = x(k) + \frac{1}{6}h(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}$$

NOT: Denklem 2. mertebeden ise 1. mertebeye getirip çözüyoruz.

OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

\# Hiçbir girişe sahip olmayan, kendi kendine çalışan; dış etkilerden bağımsız sistemler otonomdur denir.

\# Otonom sistemin çözümü doğal tepki olarak adlandırılır.

\# Eğer lineer ise doğal tepkiler;

↳ Kararlı → kısa bir tepkiden sonra çıkış 0'a gid
↳ Kararsız → Tepki sürekli artar.
↳ Marjinal tepki → Tepki periyodik, sınırl

★ Herhangi bir etki olmaksızın var olan sistemin modeli;

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda . x \quad , \quad t=0 \quad , \quad x_0 \\ x(t) &= x_0 . e^{\lambda t} \end{aligned}\right\}$$

Malthesian denklemi.

★ Popülasyon belli bir noktaya kadar artacaksa;

$$x' = \lambda x \left(1 - \frac{x}{xm} \right) \Big\}$$

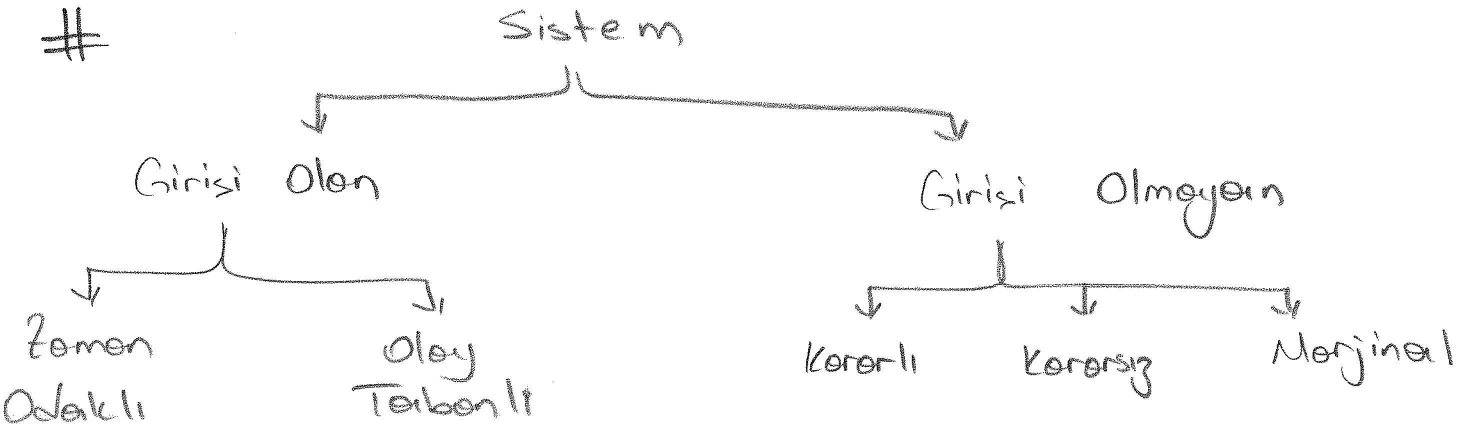
Lojistik denklemi
xm = taşıma kapasitesi

Lotka-Volterra Yöntemi

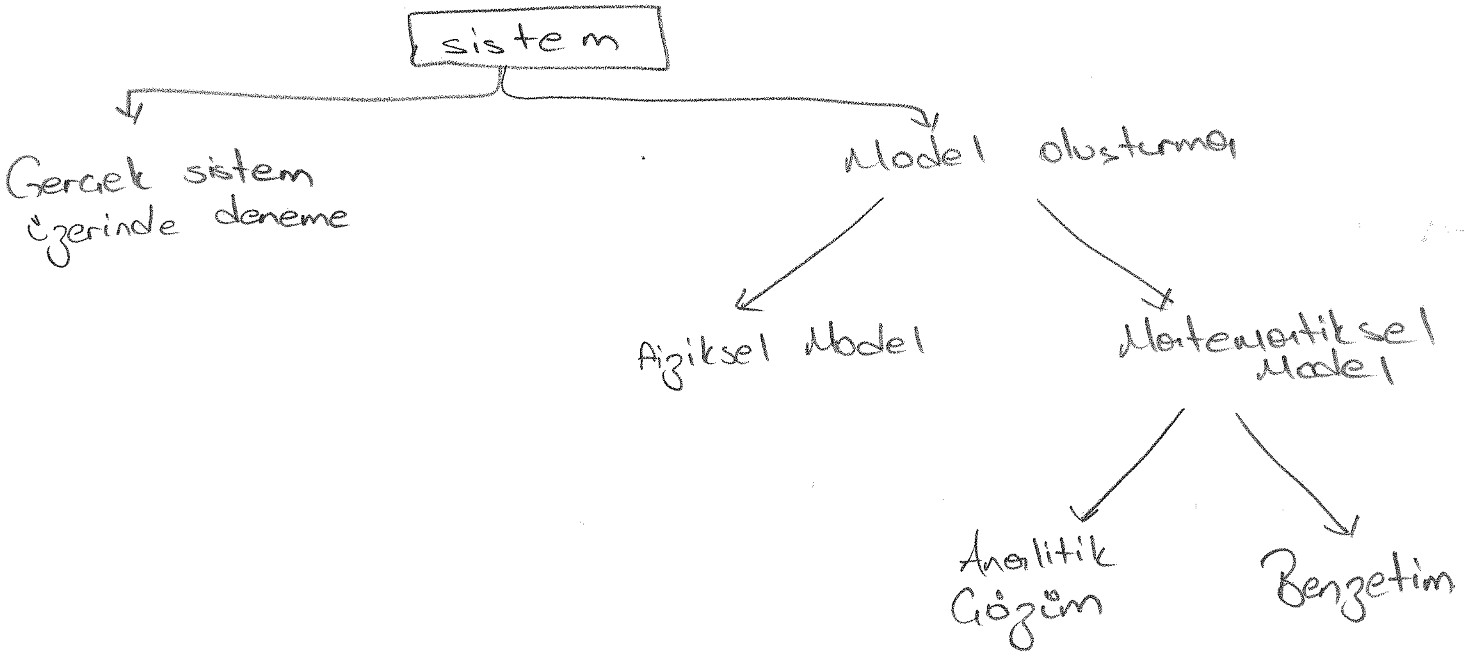
$$x' = \alpha_1 x \left(1 - \frac{y}{B_1} \right)$$

$$y' = \alpha_2 y \left(1 - \frac{y}{B_2} \right)$$

★ α_1, α_2
B_1, B_2
pozitif, kapasite
sabitleri



Bir sistemin çözüm yolları;



☆ Benzetim Modelleri ↳ Statik ve Dinamik
↳ Kesikli veya Sürekli
↳ Stokastik veya deterministik.

☆ Bir sistemin davranışı tamamen tahmin ediliyorsa deterministik tir.
Bütünüyle tahmin edilemiyorsa stokastik tir.

MONTE CARLO YÖNTEMİ

⑦

⇒ Temelde statik bir benzetim yöntemidir.
⇒ Zaman kavramı önemli değildir.
⇒ Temeli olasılığa dayalıdır.

Monte Carlo metodunda; istatistiksel veya matematiksel tekniklerle bir deneyi veya çözülmesi gereken bir fiziksel olayı tesadüfi sayıları defalarca kullanarak similasyon edilip çözmek esastır.

(0,1) aralığında rassal değişkenler kullanarak zaman faktörünün önemli olmadığı olasılıklı ve olasılıksız prob. çözümünde kullanışlıdır.

☆ Monte-Carlo 3 olasılık kullanır;

① Önsel savı ⟶ ispatlama
② Göreli sıklık savı ⟶ tespit
③ Öznel bakış

Örneğin: → Pi sayısının hesabında.
→ Bir eğrinin altında kalan alanı veren integral hesabı
→ Bir dairenin üzerine çizilmiş birim karelerin kaçının daire içinde old. hesabı.

SİMÜLATÖR

→ Belirli sistemlerin benzetimi yapılır.
→ Simülatör kullanılacaksa kodlamaya ihtiyaç çok yoktur azdır
→ Simülatör belirli sistemlere göre hazırlandığından kullanım alanı kısıtlıdır.
→ Simülatör ile kodlama zamanı çok azdır.

RASSAL SAYI ÜRETEÇLERİ

Rassal değişkenler U(0,1) ile ifade edilecek.
Aranılan özellikler;

① Rassallık
② Büyük Periyot
③ Yeniden üretilebilirlik
④ Hesaplama etkinliği

Özellikleri: Uniform olma ve bağımsızlık.

Uniform: (0,1) aralığı n tane sınıfa bölünmüşse her bir aralığın uzunluğunun, aralığın tamı n'e bölünmesi ile oluşturulmasıdır.

$n=5$ ise $\frac{1}{5} = 0,2$ aralıklı.

Bağımsızlık: Herhangi bir aralıkta bir değerin gözlenme olasılığı daha önceki değerlerden bağımsızdır.

ORTA KARE YÖNTEMİ

① m basamaklı ve genellikle tek olan bir sayı başlangıç alınır.

② Bu sayının karesi alınarak, bulunan sayının ortasından m basamaklı sayı alınır.

3) Bu bir rassal sayı olarak kaydedilir.

4) Bu sayının da karesi alınıp, orta değeri alınır.

Dezavantajı: → Tekrar uzunluğu kısadır.
→ Elde edilen sayılar rassal olmayabilir.
→ Sayılardan orta değer alınarak yeni sayı üretildiğinden bir sayı dizisi oluşturuluyor.

⑧

Tek Düze Dağılımlı Rastgele Sayılar

-> Dil derleyicileri [0,1] aralığında tek düze dağılımlı rastgele sayılar için olanak sağlar. $U(0,1)$

-> BASIC dili için RND komutu $0 \leq x \leq 1$ döndürür. 100 defa çalıştırmak %10'u 0-0.1 aralığında, %10'u 0.1 - 0.2 aralığında üretir.

LCG (Lineer Eşleşiksel Üreteçler)

\# Z_0 başlangıç değeri.
Z_k lar Z_0'ın formülizasyonu ile elde ediliyor.

\# $\boxed{Z_{k+1} = (a . Z_k + c) \text{ mod } m.}$

a = çarpan
c = artım
m = genlik

\# $\boxed{U_k = \frac{Z_k}{m}}$

\# Z_k = 0 ile m aralığında
U_k = 0 ile 1 aralığında

★ Bir üretecin maximum yoğunluğa sahip olması istenir. Olabildiğince periyot uzun tutulmalıdır. m max.

TAM PERİYOT OLMA KURALLARI

① $m = 2^b$ ve $c \neq 0$ ise;
En uzun periyot , $\boxed{P = m = 2^b}$ dir.

★ c ile m aralarında asal ise $\underline{P = m}$ dir.

Eğer $a = 1 + 4k$ ise $\underline{P = m}$ olur.

② $m = 2^b$ ve $c=0$ ise;
En uzun periyot $\boxed{P = \frac{m}{4}}$ dür.

★ Eğer z_0 tek sayı ise ve a çarpanı → $a=3+8k$
$a=5+8k$
iken $P = \frac{m}{4}$ dür.

③ Eğer m asal sayı ise ve $c=0$ ise; $\boxed{P = m-1}$ olabilir.

* Ancak a, en küçük k int sayısı için
$\underbrace{\frac{a^k - 1}{m}}$ olmalı ve $\underbrace{k = m-1}$ olmalıdır.

Ör: ① $a=5$
$c=3$
$m=16$
$z_0=7$

c ve m aralarında asal. 3 — 16.
$a = 5 \Rightarrow 1+4k$ $k=1$ için.
$\Rightarrow m = 2^b = 16$ $b=4$
$P = m = 16$ tam periyot ✓

② $a=13$
$m=2^b=64$
$c=0$
$x_0=1$, $x_0=2$, $x_0=3$, $x_0=4$

z_0 tek ve $\overset{x_0}{1}$, $\overset{x_0}{3}$ ol
$a=13$.
↳ $5+8k$ $k=1$
$P = \frac{m}{4} = \frac{64}{4} = 16$.
✓ tek değerde tam periy

③ $x_0=63$
$a=19$
$c=0$
$m=10^2=100$

$U_0 = \frac{63}{100} = 0,63$
$X_1 = 97$
$U_1 = 97/100 = 0,97$
$X_2 = 43$

?

Uniform Olma Testi

Ki-Kare Testi

Beklenen frekans değerleri ile deneysel frekans değerleri arasındaki benzerliği kontrol ediyor.

① $e_k = \frac{n}{m}$

n: toplam üretilen sayı
m: aralık sayısı.

② $$x^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k}$$

$$= \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(f_k - \frac{n}{m}\right)^2$$

③ $k = m - 1$ bağımsızlık derecesi.

TEK DÜZE OLMAYAN RASSAL SAYI ÜRETEÇLERİ

★ Inverse (Ters Dönüşüm) Methodu

f(x) olasılık yoğunluk fonk. rassal sayı üretiyoruz

★ $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx}$, $0 \le F(x) \le 1$

★ $u = F(x)$ için $\boxed{x = F^{-1}(u)}$ ters fonk.

U(0,1)

★ $$F(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \qquad F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Sürekli Deneysel Verilerden Rassal Sayı Üretme

\# Deneysel verileri küçükten büyüğe sırala.

\# Ardışık iki veri arası lineer bir doğru gibi alınıp doğrunun eğimi hesaplanacak.

\# Kümülatif olasılıklar ile yeni veriler üretilecek.

★ $x_{i-1} < x < x_i$ dir.

★ $a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{(1/n) - \frac{(i-1)}{n}}$ ★ Olaslık $= \frac{1}{n}$

★ $x = F^{-1}(u) = x_{i-1} + a_i\left(u - \frac{(i-1)}{n}\right)$

\# u değeri kümülatif olaslık tablosunda hangi aralığa denk geliyorsa x_i odur.

ÖNEMLİ: Eğer veri sayısı fazla ise hangi aralıkta ne kadar frekans olduğu üzerinden yola çıkılır.

\# $a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{c_i - c_{i-1}}$

\# $x = F^{-1}(u) = x_{i-1} + a_i \cdot (u - c_{i-1})$

\# $c_{i-1} < u \leq c_i$

KABUL-RED YÖNTEMİ

Sürekli ve sınırlı bir $f(x)$ olasılık fonk. üretiliyor.

★ Sürekli bir x rassal değişkeni için;

① $0 \le f(x) \le f_{max}$

$a \le x \le b$

② $t(x)$ fonksiyonu tanımlanıyor ve $t(x) \ge f(x)$ olmalıdır.

③ $$c = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx \ge \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$c > 1$ dir ve $t(x)$ olasılık yoğunluk fonk. değil.

④ $r(x) = \dfrac{t(x)}{c}$ olasılık-yoğunluk fonksiyonu.

Çünkü $\Rightarrow$ $$r(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx}{c} = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{c} \cdot c = \underline{1} \text{ oluyor.}$$

ÖNEMLİ: $t(x) = q$ olursa.

$$c = \int_{a}^{b} q\,dx \Rightarrow \boxed{c = q(b-a)}$$

$r(x) = \dfrac{t(x)}{c} \Rightarrow \boxed{r(x) = \dfrac{1}{b-a}}$

$F(x) = \displaystyle\int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dx \Rightarrow u = \frac{1}{b-a}(x-a)$

$r(x)$den üretilen rassal değişken $\Leftarrow$ $\boxed{x = u(b-a) + a}$

KONVOLÜSYON METODU

Bağımsız ve özdeş dağıtılan $(x_1, x_2, ---, x_n)$ rastgele değişkenlerinin toplamı olan X değişkeni.

★ $X = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ise, $f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes --- \otimes f_n(x)$

m- Earlang Dağılımı

Bağımsız m adet exponansiyel rastgele değişkenlerin toplamıdır.

$$\mu = E\left[\sum_{k=1}^{m} x_k\right] \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} E[x_k] = \frac{m}{\lambda}$$

m = 2 ise
Ortalama μ = 5 ise $\Big\}$ $\frac{2}{\lambda} = 5$ ve $\lambda = 0.4$ oluyor.

★ $$\boxed{f(x) = \frac{\lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!}}$$

NOT: $\mu = \frac{m}{\lambda}$

Varyans $= \frac{m}{\lambda^2}$

mod $= \frac{m-1}{\lambda}$

$E(a,b) = n \int_a^b f(x)\,dx$

herhangi bir aralıkta beklenilen frekans

OLAY-TABANLI MODELLEME

#Zaman sürümlü modeller; düzenli zaman aralıklarında senkron bir tarzda ilerleyen sinyallere sahip sistemleri karakterize eder.

#Olay sürümlü modeller; Asenkron olup, düzensiz ve çoğunlukla rastgele aralıklarla oluşan çok basit sinyallere sahiptir.

=> Sinyal çoğunlukla ikili olup, bir veya sıfır değeri alır.

=> Olaylar değil, ne zaman oluştukları önemlidir.

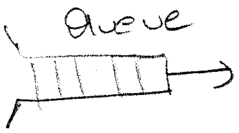
=> Örneğin sayısal bilgisayar sistemleri.

#Benzetim Diyagramı => -> Olay tabanlı sistemler 6-diyagramına sahipt

=>

belirli zamanlarda veren olaylar.

=>

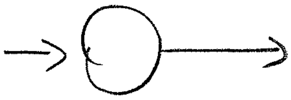


FIFO mantığı ile çalışan bir kuyruk.

=>

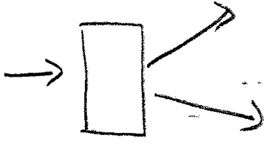
tek bir kuyruk oluşturmak için 2 veya daha fazla kuyruğun olay zamanını birleşti

=>



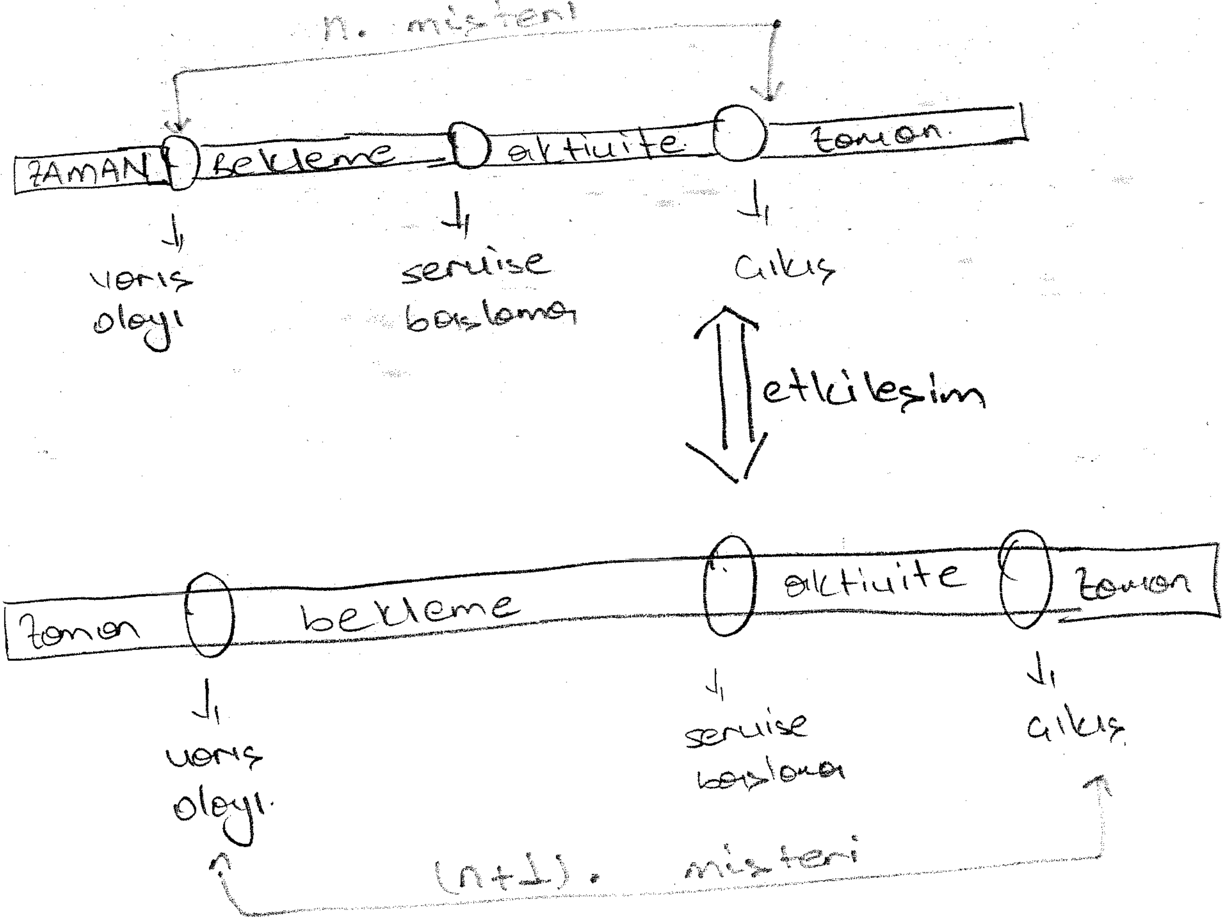
kuyruktan çıkan müşteriler burada bekler.

=>



Kuyrukta bekleyen müşterileri, servislere veya diğer kuyruklara iletir.

Bir nesnenin sistemde akısını belirleyen process;



Kuyruk sistemi tanımında;

Sistem	Servisler	Müsteri
Hastane	Doktor, hemsire yatak	Hasta
Pc sistemi	CPU, I/O	islemler

Bir kuyruk sisteminin bilesenleri;

★ Varış Prosesi (Arrival)
★ Servis Prosesi (Service)
★ Kuyruk Disiplini
★ Sistemde izin verilen müsteri sayısı.
★ Müsterinin geldiği yığının genişliği

Varış Prosesi

A_i = (i-1). ve i. müşteriler arası varışlar arası zaman.

a_1, a_2 --- rassal değişken

$E(a)$ = varışlar arası ortalama zaman.

$\boxed{\lambda = \frac{1}{E(A)}}$ Birim zamanda gelen müşteri sayısı.

⇒ 1 dakikada 5 varış olan sistem için $E(a) = ?$

$E(a) = \frac{1}{\lambda}$ ⇒ $E(a) = 0.20$ dak.

Deterministik Varış Süreci

Rassal Varış Süreci

↳ POISSON Dağılımı.

POISON DAĞILIMI

- ⇒ Düzenlilik
- ⇒ Durağanlık
- ⇒ Bağımsızlık

} Olmak zorunda olan şartlar.

☆ t süresinde k varışının olma olasılığı;

$$\boxed{P(x=k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}$$

λ = birim zamanda ortalama varış.

t = zaman

e = 2.7182818

k = 1, 2, 3, ----

Ör: Müşteriler Poison dağılımına uygun olarak varış yapıyor.
Salı 8:00 - 9:00 ortalama 6 müşteri vardır. ④
Bu durumda 8:00 - 8:30 arası varış yapma olasılığı nedir?

Çözüm;
$\lambda = 6$
$t = 30$ dk $= 0.5$ saat
$\lambda t = 6.(0,5) = 3$ müşteri olasıdır.

$$P(x=k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$\Rightarrow P(x=0) = \frac{3^0 . e^{-3}}{0!} = 0.049787$$

$$P(x=1) = \frac{3^1 . e^{-3}}{1!} = 0.149361$$

$$P(x=2) = \frac{3^2 . e^{-3}}{2!} = 0.224042$$

$$P(x=3) = \frac{3^3 . e^{-3}}{3!} = 0.224042$$

$$P(x=4) = \frac{3^4 . e^{-3}}{4!} = 0.168031$$

Ör: Bir sehirde ender rastlanan bir hastalıktan, bir hafta icerisinde ortalama 4 kisi ölüyor. Belli bir hafta icerisinde bu hastalıktan;

=> Hiç kimsenin ölmemesi ?

=> En az 2 kişinin ölmesi ?

=> 3 kişinin ölmesi olasılıkları nedir?

Çözüm: $X = 0$, $X \geq 2$ ve $X = 3$ olabilir.

$$P(X=k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$\boxed{\lambda = 4}$$

$$\# \; P(X=0) = \frac{4^0 \cdot e^{-4}}{0!} = \boxed{0.0183}$$

$$\# \; P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!}\right]$$

$$P(X \geq 2) = \boxed{0.9084}$$

$$\# \; P(X=3) = \frac{e^{-4} 4^3}{3!} = \boxed{0.195}$$

Servis Prosesi

S_i = i. müşterinin servis zamanı

S_1, S_2 - - - - , rassal değişkenler

E(s) = Bir müşterinin ortalama servis zamanı.

\# $\boxed{\mu = \frac{1}{E(s)}}$ Birim zamanda servis gören müşteri sayısı. (Servis oranı)

Ör: Ortalama servis zamanı 2 dakika ise;

Servis oranı => $\mu = \frac{1}{E(s)} = \frac{1}{2} = 0.5$ servis/dk.

Trafik yoğunluğu => $$\boxed{\rho = \frac{\text{Varış Oranı}}{(\text{Servis Oranı}) * c}}$$

↳ servis sayısı

=> $\rho = \frac{\lambda}{\mu x c}$ => $\boxed{\rho = \frac{E(s)}{E(a) * c}}$ ☆

NOT =>

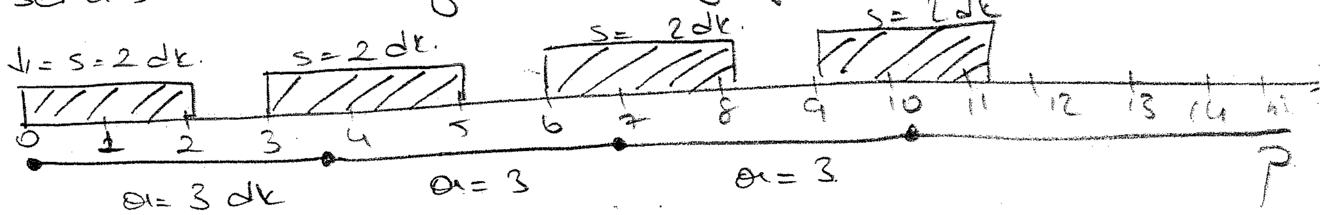
$\rho < 1$ ise servis $(1-\rho)$ oranında boştur

$\rho = 1$ ise servis %100 doludur. Kuyruk yok.

$\rho > 1$ ise sistemde sürekli artan bir kuyruk vardır.

ÖRNEK: 3 dakikada bir servisin olduğu bir sistemde. Gelişler ve servis zamanı 2 dakika olsun.

servis süresi zaman çizelgesi;



$$\rho = \frac{E(s)}{E(a)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\rho = 0.667}$$ doluluk

$$1 - \rho \Rightarrow 1 - 0.667 = \boxed{0.333}$$ servisin boş kalma oranı

Üssel Hizmet Dağılımının Süreye Bağlılığı

$$\boxed{f(x) = \mu e^{-\mu x}}$$

$\Rightarrow \mu$ = ort servis hızı

$\frac{1}{\mu}$ = ort servis zamanı

t süresinde hizmetin tamamlanma olasılığı $\Rightarrow$ $$\boxed{P(x \leq t) = 1 - e^{-\mu t}}$$

Ör: Servis süresi = 4 dk
Üssel dağılım mevcut.
Servis zamanının 3 dk dan küçük olma olasılığı ?

Çözüm: Ort servis zamanı $\Rightarrow \frac{1}{\mu} = 4$ dk.

Ort servis hızı $\Rightarrow \frac{1 \times 60}{4} = \mu \Rightarrow 15$ mş/saat

3 dk = 0.05 saat.

$$P(x < 0.05) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$= 1 - e^{(-15 \times 0.05)}$$

0.52763 ⟶ olur.

Kuyruk Modeli Notasyonu:

#1/2/3 ⇒ 1 = Varış Prosesi
2 = Servis prosesi
3 = Servis sayısı

#1/2/3/4/5/6 ⇒ 4 = Paralel servis sayısı
5 = Sistemde izin verilen müş. sayısı
6 = Müş. geldiği yığın genişliği

#1-2 için bileşenler
M = üssel dağılıma sahip servisler arası zaman
D = Sabit servis/varış arası zaman
Ek = k-Erlang dağılmış servis/varış arası zaman.
G = Genel dağılım.

4 için
FIFO,
SIRO = Rassal sırada servis
PRI = Öncelikli servis
GD = Genel kuyruk disiplini

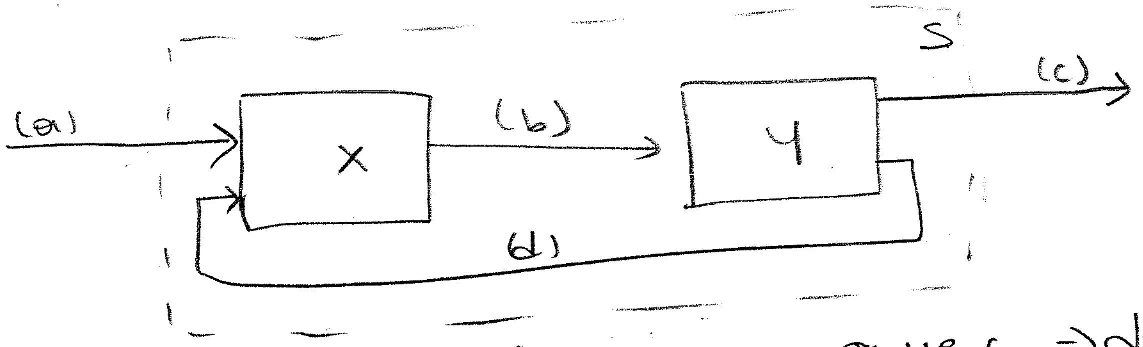
#M/D/3/PRI/50/∞
∞ → Yığın genişliği
50 → Sistemde 50 müş. sınırı
PRI → Öncelikli servis.
3 → 3 servis
D → Sabit servis süresi
M → üssel dağılımlı varışlar.

HARİCİ SİNYALLER VE OLAYLAR

İç ve Dış Sinyaller:

⇒ Dış sinyaller port olarak isimlendirilen giriş/çıkış ter gelen veya giden sinyallerdir.

⇒ İç sinyaller ise sadece sistem modüllerini bağ lar ve tamamen sistem içinden beslenir.



a ve c ⇒ dış siny
b ve d ⇒ iç sinyal

⇒ İç sinyaller ileri veya geri beslemeli olabilir.

⇒ İç sinyaller bazen açık sinyaller ve bozukluklara dönebilir.

Bozuk Sinyaller

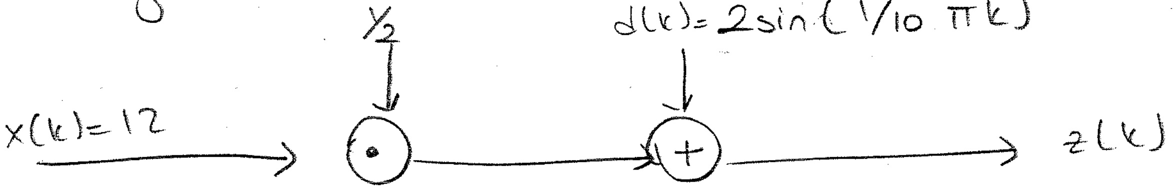
⇒ Eğer durum verilen bir zamanda biliniyorsa model durumun herhangi bir anda durumun ne olduğunu tahmi edebilir. Bu sistemler genelde olasılıksaldır.

⇒ Bunlar spesifik bir örnek için tam olmayan olas yanlış sonuçlar verir. Fakat bütün sistem için sonuç genelde mükemmeldir.

⇒ Olasılıklı modeller; bir otonom sistem rastgele bir formda bozukluk olarak adlandırılan bir sinyal aldığında oluşur.

②

ÖRNEK: giriş sinyali $x(k) = 12$ ve transfer fonk. $\frac{1}{2}$ olarak veriliyor. Deterministik bozukluk sinyali $d(k) = 2\sin(1/10\,\pi k)$. Sistemi analiz edip, bir geri besleme ile bozukluğun etkisini azaltın.



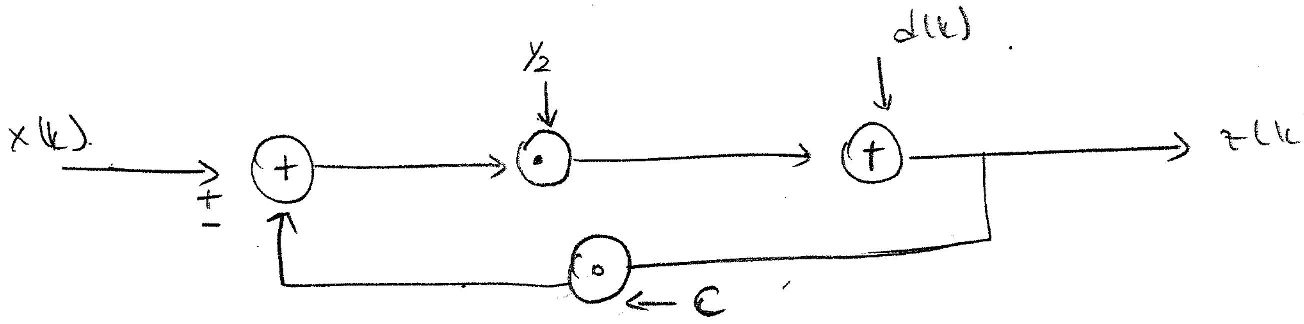
Çözüm: Bozukluk yoksa; $z(k) = 6$ olacaktır.
Bozukluk ∓ 2 'lik bir değişim uygular.
Bu durumda $z(k) = 6 + 2\sin(\frac{1}{10}\pi k)$ dır.

→ Burada bir C kazancı yapılarak d(k) etkisi azaltılabilir.

$$z(k) = d(k) + \frac{1}{2}\left[12 - C\,z(k)\right]$$

$$z(k) = \frac{4}{C+2}\left(3 + \sin\frac{1}{10}\pi k\right)$$

⇒



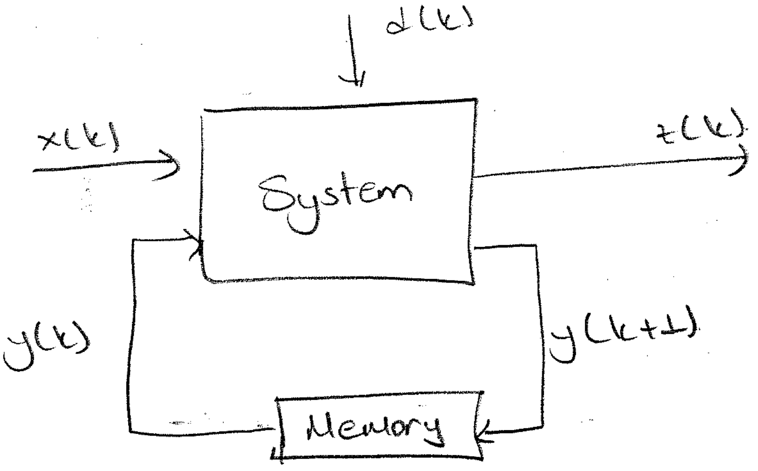
C = 0 alınırsa $z(k) = 6 + 2\sin(1/10\,\pi k)$ dır ve geri besleme olmaz.
C arttırıldıkça d(k) nın etkisi azaltılır.

(3)

Durum Makineleri:

#_Modeller açık girişin sonlu bir X, bozuk sinyalin sonlu bir D ve durumların sayısı Y olduğu durumda ortaktır.

⇒ Hem giriş kümesi hemde durumlar sonlu sayıda ise Z çıkışı da sonludur.

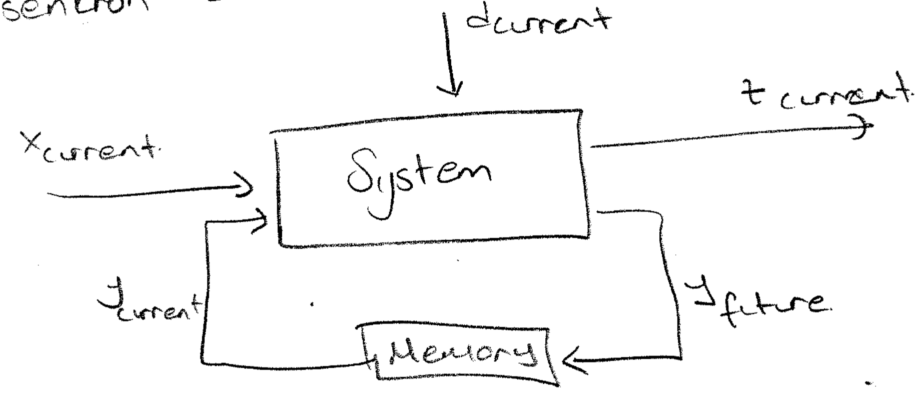


Senkron sonlu durum makinesi

$y(k+1) = f(x(k)), d(k), y$

$z(k) = g(x(k)), d(k), y(k$

#_Asenkron durum makinesi:



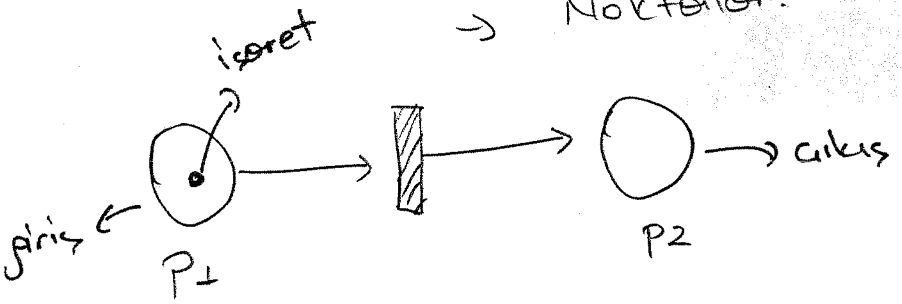
Petri Ağları

Cok islemcili makineler aynı anda birden fazla isin paralel olarak islemesini sağlar. Burada es zamanlı modellemeye ihtiyaca duyulur. Bu yapılar petri ağları olarak adlandırılır.

Temel Elemanlar: # → Yerler
→ Gecisler
→ Ark ⇒ Yalnızca bir yerden bir gecise yada tersi olabilir.

Bir yerde sıfır yada daha fazla isaret bulunabilir.

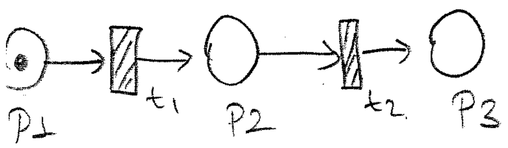
Gösterim sırası → daireler
→ Cizgiler
→ Oklar
→ Noktalar.



⇒ Giris yerlerinin her birinde en az bir isaret varsa, gecis düğümü iletime hazırdır.

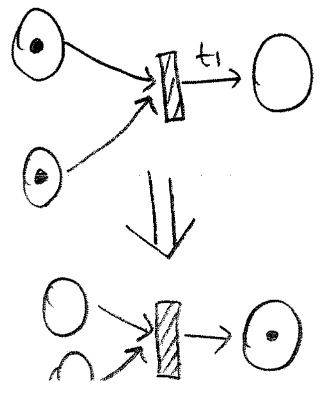
⇒ Durum gecisi (1,0) ⇒ (0,1)

Sıralı Gecis

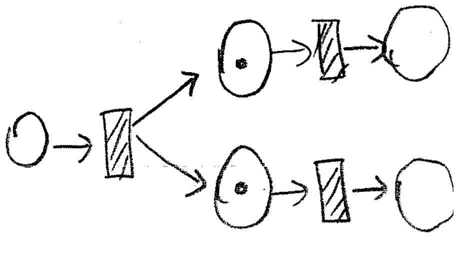


t₁ ' iletiminden sonra t₂ baslar.

Senkronize Gecis



Es zamanlılık

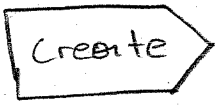


①

ARENA MODÜLLERİ

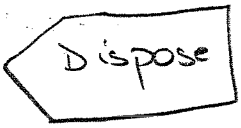
CREATE:

- → Varlıklar için başlangıç noktası tasarlar.
- → Üretilen geliş akımının tipi yazılır. Random EXPO, TRIAL gibi.



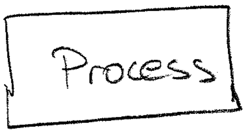
DISPOSE:

- → Varlıklar için son noktayı tasarlar.
- → Sistemden ayrılan varlık sayısınıda gösteri



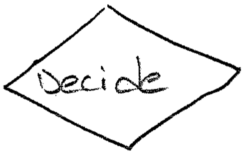
PROCESS:

- → Kaynak kısıtlarını tutmak ve bırakmak için opsiyonlar kullanılır.
- → Kullanılacak bir submodel varsa burada tanımla
- → İşlem önceliğini dikkate alır.
- → İşlemleri önceliğe göre kuyrukta bekletir.
- → Gecikme parametreleri girilir.



DECIDE:

- → Karar verme prosesi için izin verir.
- → True ve False uçları bağlantısı vardır.
- → Olasılığa dayalı olarak seçme yapar.



Variable = değişkene göre
attribute = varlık tipine göre
Entity type = isme göre
Expression = açıklamaya göre

BATCH:

-> Gruplama mekanizması tasarlar.
-> Sürekli veya geçici gruplanabilir.
-> Gerekli varlık sayısı tamamlanana kadar gelenler bir kuyrukta bekletilir.

EPARATE:

Çoklu varlıkların icine gelen bir varlığı kopyalamak ta yada önceden olusturulan bir varlık yığınını bölmek te kullanılabilir.

SSIGN:

-> Değişkenlere varlık özelliklerine, varlık tiplerine varlık resimlerine yada diğer sistem değişkenlerine yeni değer ataması için kullanılır.

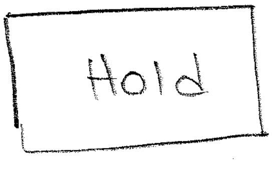
ECORD:

-> İstatistikleri biriktirmede kullanılır.

OLD:

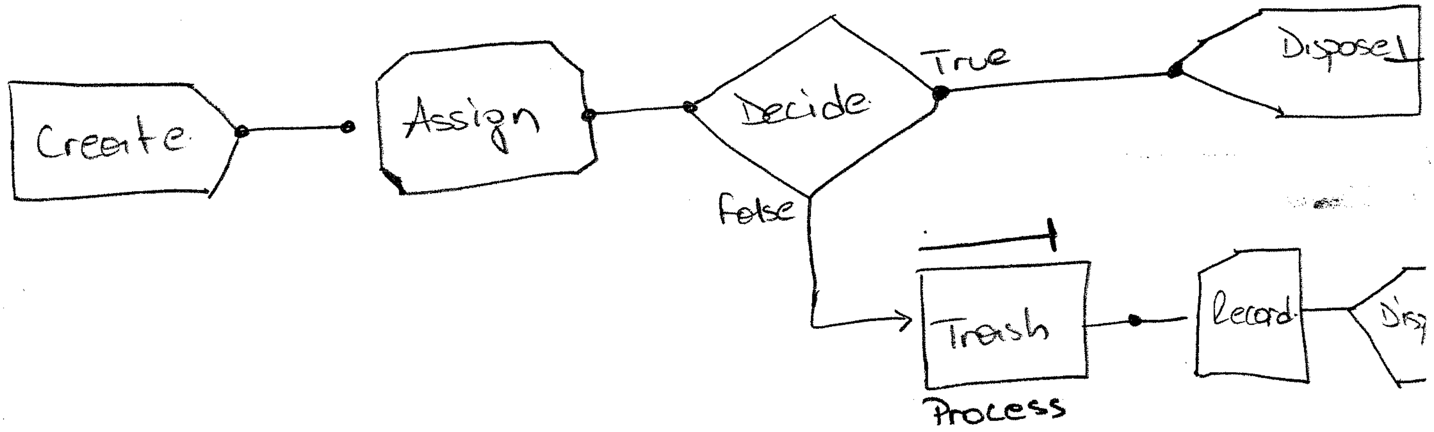
-> Eğer; varlık bir sinyal için tutuluyorsa, sinyal modülü varlığa sonraki modüle geçmek için izin verir.

-> Eğer; verilmiş bir halin doğruluğu için kullanılıyorsa, varlık hal doğru oluncaya dek modülde kalır.



ÖRNEK!

Bir erkek kuaföründe traş kuyruğu simule ediliyor. Kuaföre gelen müşteriler sırayla giren müşteri sırası FIFO mantığı ile çalışıyor. Bir müşteri kuaföre gelip, kuyruk 3 kişi ise kuaförden çıkıyor. Kuyruk 3'den az ise müşteri kuyruğa giriyor.



Create : Random (Expo) — 1 — Dakika → Max = 100

Assign : Attribute , MüşteriNo , MüşteriNo + 1.
Attribute , GelişAni , TNOW

Decide : Expression —— NQ (Trash.Queue) >= 3

Process : Resource , Berber, 1 —— Triangular (2, 3, 5)

Record : GelişAni

SORULAR

① Her 10 sn'de bir kutunun ulaştığı bir fabrika taşıyıcı sistemi düşünelim. Kutuların ağırlıkları sırasıyla 5, 10, 15 kg. Fakat 5 ve 15 kg'lik kutuların gelme olasılığı 10 kg'ın olasılığından 2 kat fazladır. Bu sistemin benzetimi ?

Çözüm:

w	Pw (olaslık)
5	0,4
10	0,2
15	0,4
	1.0

$w = \{5, 10, 15\}$

$P_r = (W = w)$

$\boxed{t = 10k}$ her 10 sn bir

# Kümülatif	Olaslık
5	0,4
10	0,6
15	1.0.

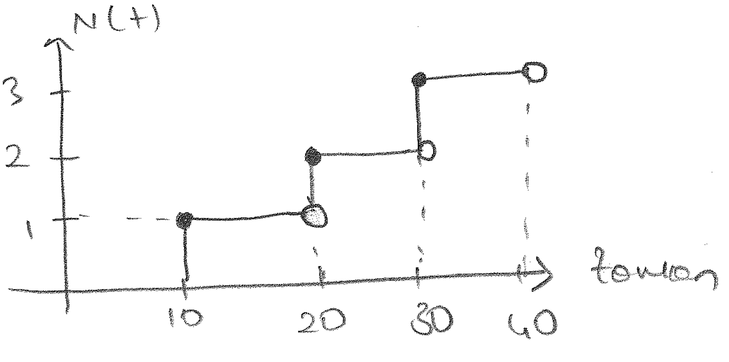
$\Rightarrow$

$0 < x \leq 0,4$

$0,4 < x \leq 0,6$

$0,6 < x \leq 1.$

#



#

```
for k=1 to n
    r = 10 * RND
    if r< 4 then w(k)=5
    if 4<r<=6 then w(k)= 10
    if r>=6 then w(k)= 15
next k
```

② 5,10,15 kg 'lik paketlerin ilk taşıyıcıdan sonra ikinci bir taşıyıcıya geldiğini düşünelim. Bir taşıyıcının da en fazla 3 kutu taşıyacağı biliniyor.

Çözüm:

$$z(k) = \begin{cases} x(k) , & k=1 \\ x(1)+x(2) , & k=2 \\ x(k-2)+x(k-1)+x(k) , & k>2 \end{cases}$$

Dif. denklemleri elde edilirse;

$$z(1) = x(1)$$

$$z(2) = x(1) + x(2)$$

$$z(k) = x(k-2) + x(k-1) + x(k)$$

```
#   for k=1 to n
    r= 10 * RND
    if r<4 then x(k)=5
    if 4<=r<6 then x(k)= 10
    if r>6 then x(k)= 15
```

kutuların ağırlık olasılıkları

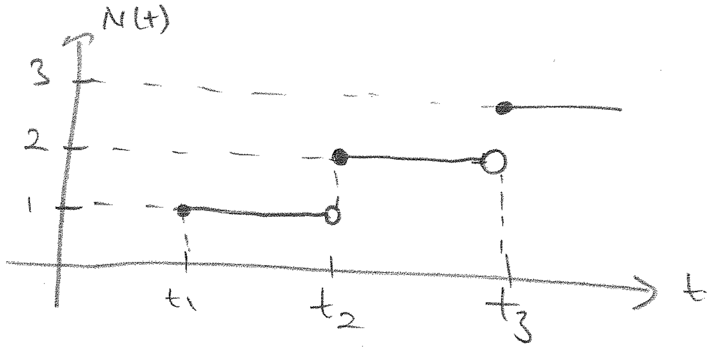
```
    if k=1 then z(1) = x(1)
    if k=2 then z(2) = x(2)
    if k>2 then z(k)= x(k-2) + x(k-1) + x(k)
    next k
```

taşıyıcı üzerinde en çok hangi kutu var?

③ 5, 10, 15 kg 'lık tasıma sisteminde geliş zamanlarının esit aralıkta olmadığını düşünelim. Yani kutular farklı zaman aralıklarında geliyor.

t zamanına kadar gelen kutuların sayısı nedir?

Çözüm:



```
#   t0 = 0
    for k=1 to n
        tk = tk-1 + RND          } Paketlerin geliş zamanı
    next k

    for t=0 to tn step h.
        for k=1 to n
          if tk-1 <= t < tk   then  N=k.     } h = 0,1
        next k                                  h adımlarla
                                                iletim
    Print t, N                                  yapılması

  next t
```

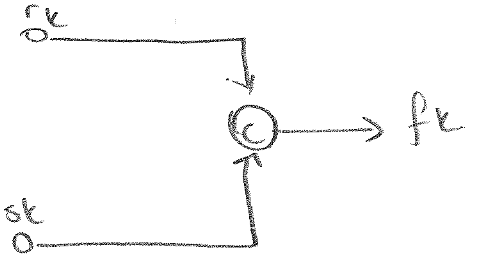
NOT: Olay sürümlü sistemlerdir.

Ardışık olaylar arası zamanlar.

$t_{k+1} - t_k = RND$

```
#  tk = 0
   for k=1 to n
       tk = tk-1 + RND
```

④



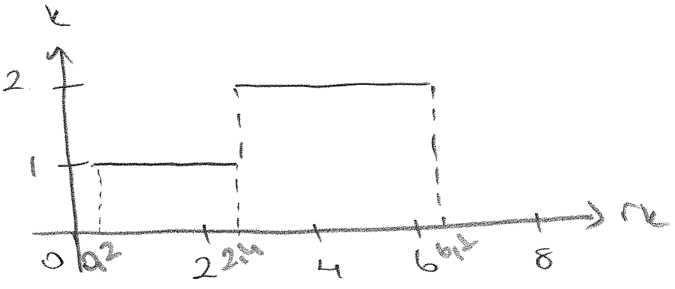
$[rk] = [0{,}2,\ 2.4,\ 6.1]$

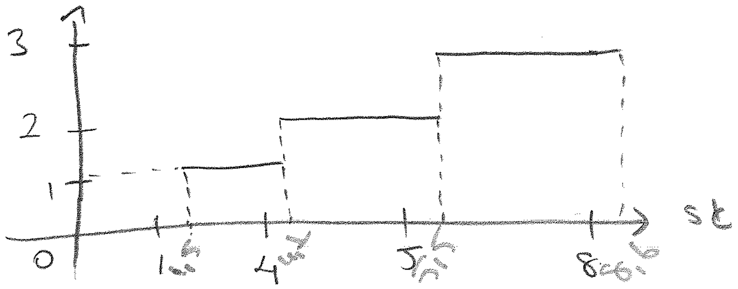
$[sk] = [1.5,\ 4.1,\ 5.5,\ 8.6]$

$f(k) = ?$

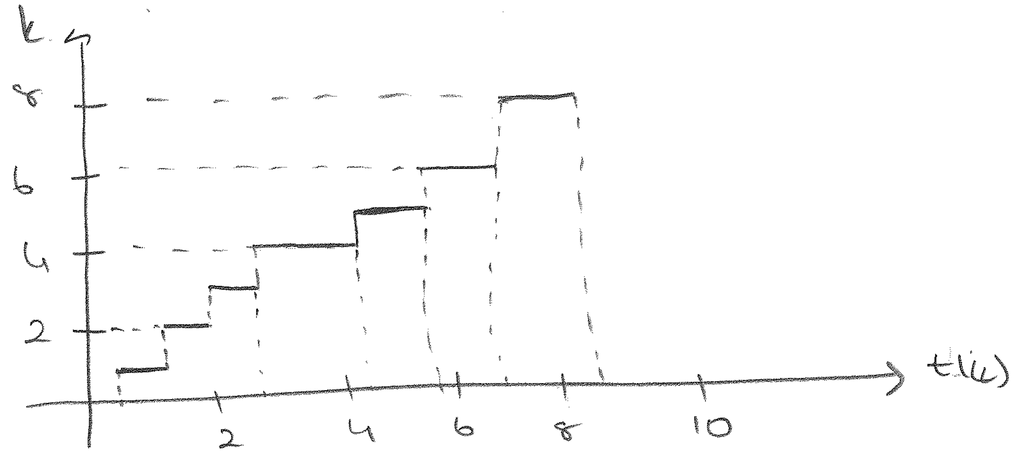
İki sinyali birlestirme operatörü ile birlestiriyoruz?

Çözüm:





$[tk] = [0{,}2,\ 1.5,\ 2.4,\ 4.1,\ 5.5,\ 6.1,\ 8.6]$



⑥ Başlangıç değer problemi;

$$\alpha'' + 2\beta\alpha' + \beta^2\alpha = \cos t$$

$$\beta' + \alpha\beta = 4.$$

$$\alpha(0) = 2$$

$$\alpha'(0) = -1$$

$$\beta(0) = 1$$ için çözüm nedir.

Çözüm: $x_1 = \alpha(t)$

$x_2 = \alpha'(t)$

$x_3 = \beta(t)$ denklemde yerine yazalım.

$$\Rightarrow \quad x_2' + 2x_3x_2 + x_3^2x_1 = \cos t.$$

$$x_3' + x_1x_3 = 4.$$

$$x_1(0) = 2$$

$$x_2(0) = -1$$

$$x_3(0) = 1.$$

$$\Rightarrow \quad x_2' = \cos t - 2x_3x_2 - x_3^2x_1$$

$$x_3' = 4 - x_1x_3$$

$$x_1(0) = 2$$

$$x_2(0) = -1$$

$$x_3(0) = 1.$$

★ (x_1, x_2, x_3) üçlüsü halinde $f(x)$'i yazalım;

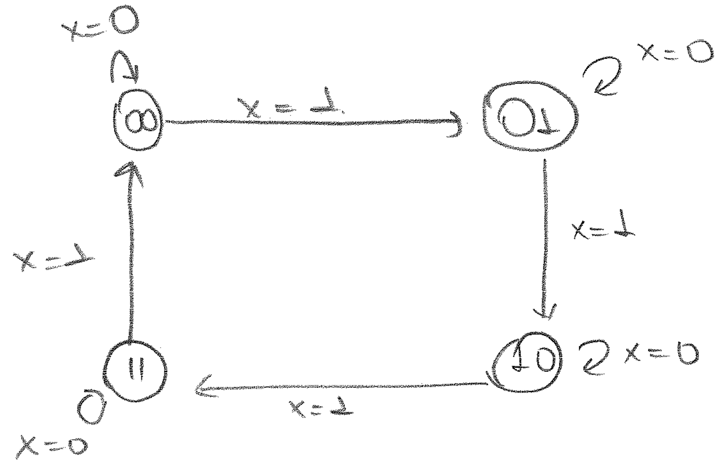
$$f = [\, x_2 \;,\; -2x_3x_2 - x_3^2x_1 + \cos t \;,\; 4 - x_1x_3 \,]$$

$$x_0 = [\,2 \;\; -1 \;\; 1\,]$$

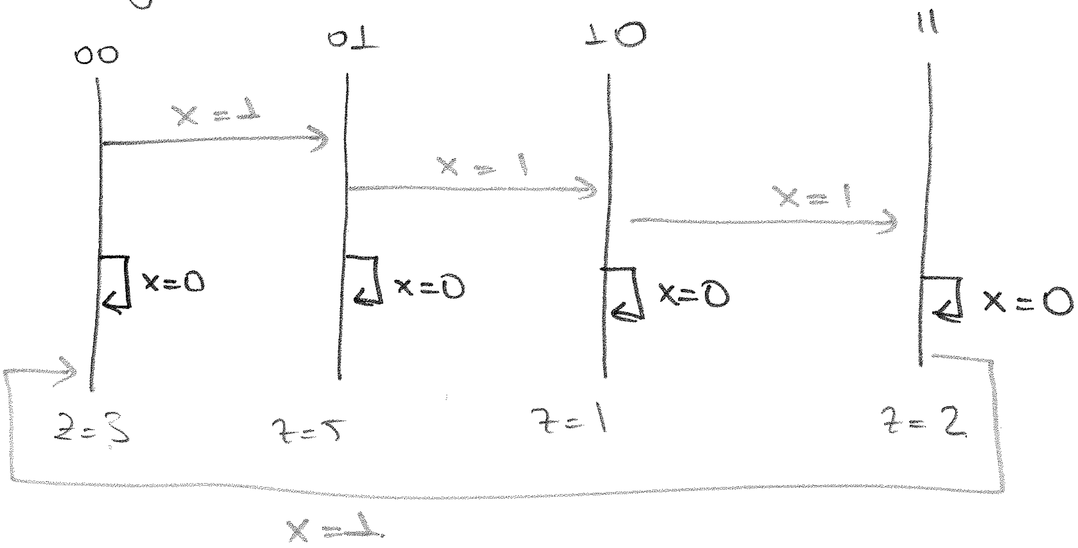
$$t_0 = 0$$

⑤ Sonlu durum makinesi ile iki bitlik bir sayıcı tasarlanacaktır. Eğer x=0 giriş ise sayma olmayacak. x=1 ise 3,5,1,2, 3,5,1,2 --- şeklinde sayacak.

#



Benzetim ve modelleme ile;



⑦ $\frac{dx}{dt} = \bar{x} = x^2 t$ normal çözümü ve EULER çöz ?

$x(1) = 3.$

Çözüm ; $\frac{dx}{dt} = x^2 t$

$$dx = x^2 t \, dt.$$

$$\frac{dx}{x^2} = t\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int t \, dt.$$

$$= \int_3^x x^{-2} dx = \int_1^t t \, dt.$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_3^x = \frac{t^2}{2} \Big|_1^t$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{5-3t^2}}$$

Euler Çözümü! $\bar{x} = x^2 t.$

$x(1) = 3$ ve $h = 0,05$

$\#$ $t_0 = 1.$

$x(0) = 3.$

$h = \frac{1}{20}$

$\#$ $t_{k+1} = t_k + h \Rightarrow \boxed{t_{k+1} = t_k + \frac{1}{20}}$

$\#$ $x(k+1) = x(k) + h.F(t,x).$

$$\boxed{x(k+1) = x(k) + \frac{1}{20} x^2(k)\, t_k}$$

$F(t,x)$

$\Downarrow$

$\bar{x} = x^2 t$

Algoritması :

```
t= 1
x = 3
print   t, x
for  k= 1  to  n
  x =  $x + h x^2 t$
  t =  t+h
  print   t, x
next  k.
```

Matlab kodu:

```
t0 = 1 ;
x0 = 3 ;
x = [ x0 ] ;
t = [ to ];
xg = [ 6 /(5-3* to^2)
h= 0,0,5
for  i = 1:5
xyeni = x0 + h * xo^2 * to;
  to = to + h.
 xg = [ xg  6 / (5-3*to^2)]
  x = [ xyeni ];
  t = [ t  to ];
 end
plot ( t, x, 'r-d')
  hold  on
  plot  ( t, xg, 'k-s')
```

Sınav sorusu:

⑧
$$x'' + 2x' + 5y = 0$$
$$x' + 2y = y'$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = 0$$
$$y(0) = 1$$

birinci dereceden dif. denklem olarak yazın.

$\#$ $\quad z(t) = x'(t)$

$$\Rightarrow \; z' + 2z + 5y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z' = -2z - 5y$$
$$z + 2y = y' \qquad\qquad y' = z + 2y$$
$$z(0) = 0$$
$$x(0) = 0$$
$$y(0) = 1$$

halini alır.

$\#$ Euler çözümü $\Rightarrow$ $h = 0,1$ için; $[0, 10]$ aralığında

$$t_{k+1} = t_k + h \Rightarrow \boxed{t_{k+1} = t_k + \frac{1}{10}}$$

$$x_{k+1} = x_k + h\,\bar{x}(t) \Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{1}{10}\left(-2z - 5y\right)}$$

```
#   h = 0.1;
    x(0) = 0;
    y(0) = 1;
    z(0) = 0;
    for h = 0.0 : 0.1 : 10      0 - 10 aralığında 0,1 arttır

        x(k+1) = x(k) + h z(k)
        y(k+1) = y(k) + h (z(k) + 2y(k)) = h y'(k)
        z(k+1) = z(k) + h (-2 z(k) - 5y(k)) => h z'(k)

    end
```

④ $x' = x^2 t$

$x(1) = 3.$ sistemi için Taylor açılımı nedir?

Çözümü:

$$f(t,x) = x' = \underset{(A)}{x^2 t} \qquad \underset{(B)}{\frac{\partial f}{\partial t} = x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \underset{(C)}{2xt}$$

$$x(t+h) = x(t) + h \overset{(A)}{f(t,x)} + \frac{1}{2} h^2 \left[\overset{(B)}{\frac{\partial f}{\partial t}} + \overset{(C)}{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot \overset{(A)}{f(t,x)} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t+h) = x(t) + h\, x^2(t).t + \frac{1}{2} h^2 \left[x^2(t) + (2x(t)t. \; x^2(t)\, t) \right]}$$

$t_{k+1} = t_k + h$ adımları ile.

$$\Rightarrow x(t+1) = x(k) + h x^2(k) t_k + x^2(k) h^2 \left[\frac{1}{2} + x(k)\, t^2{}_k \right]$$

düzenlenmiş hali.

Sözde Kodu:

```
input  t, x, h
print  t, x
for  k=1  to  n
$x_{k+1} = x(k) + h x^2(k) t + x^2(k) h^2 [ \frac{1}{2} + x(k) t^2{}_k ]$
    t = t+h
next  k.
```

⑩ Aşağıdaki verileri zaman dilimleme ve sonraki olay tekniklerine göre çözümleyin. Önce A mak sonra B mak işliyor.

İş No	Yığın Büyüklüğü	Sipariş günü
1	200	1
2	400	8
3	100	14
4	2000	18.

makine A = (Yığın Büyüklüğü /50 +1) günde yapıyor.
makine B = (yığın Büyüklüğü /100 +3) gün.

Zaman dilimleme;

İş NO	A	B mak.
1	5	5
2	9	7
3	3	4
4	5	5

Gün	İşler A	İşler B	İşlem gören işler A	İşlem gören işler B
1			1 (iş no)	
2			1	
3			1	
4			1	
5			1	
6			–	1
7			–	1
8			2	1
9			2	1
10			2	1.
11			2	–
12			2	–
13			2	–
14	3		2	–
15	3		2	–
16	3		2	–
17			3	2

1. iş biter.

Sonraki Olayı

→ Sipariş gibi

		A		B	
İş No	Geliş Zamanı	Başlar	Bitiş	Başlar	Bitiş
1	1	1	5	6	10
2	8	8	16	17	23
3	14	17	19	24	27
4	16	20	24	28	32

boş değ

---

① Ör; Duyuların sabah 8:10 saatleri arası gelme olasılığı %40, 10-12 arası %20, 13:15 arası %25, 15 dan sonra %15 dir. Her mailin hazırlanma süresi 10 dk. Sistemin tipi nedir. Çözüm önerisi nedir?

Çözüm; Sistem olasılığa dayalı bir sistemdir ve sonucu bütünüyle tahmin edilemediğinden **stokastik** bir sistemdir.

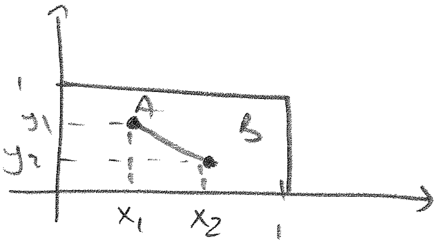
\# Sistem çözümü için kümülatif olasılıklar hesaplanır. [0,1] aralığında rastgele bir sayı üretilir ve uygun aralığa göre mailin saati belirlenerek çözüm (modelleme) yapılır.

Zaman	Olasılık	Kümülatif Olasılık
8 - 10	0.40	0.00 - 0.40
10 - 12	0.20	0.40 - 0.60
13 - 15	0.25	0.60 - 0.85
15 - - -	0.15	0.85 - 1.00
	1.00	

⑪ Monte-Carlo

Kenarları birim uzunlukta olan bir karemiz var. Bu karenin içerisinde seçilen iki nokta arasındaki mesafenin 0,8 den küçük olma olasılığı nedir?

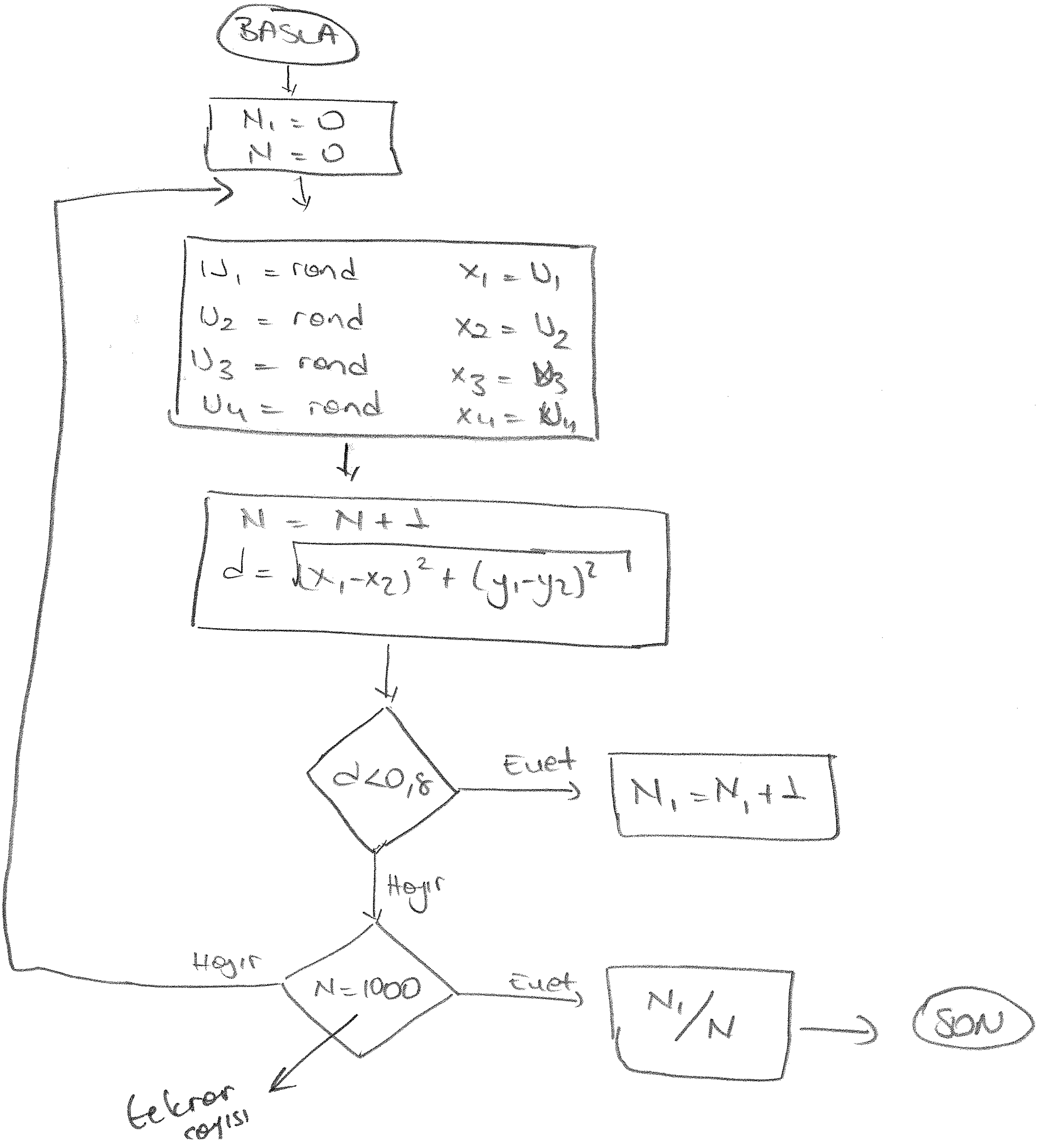
Çözüm:



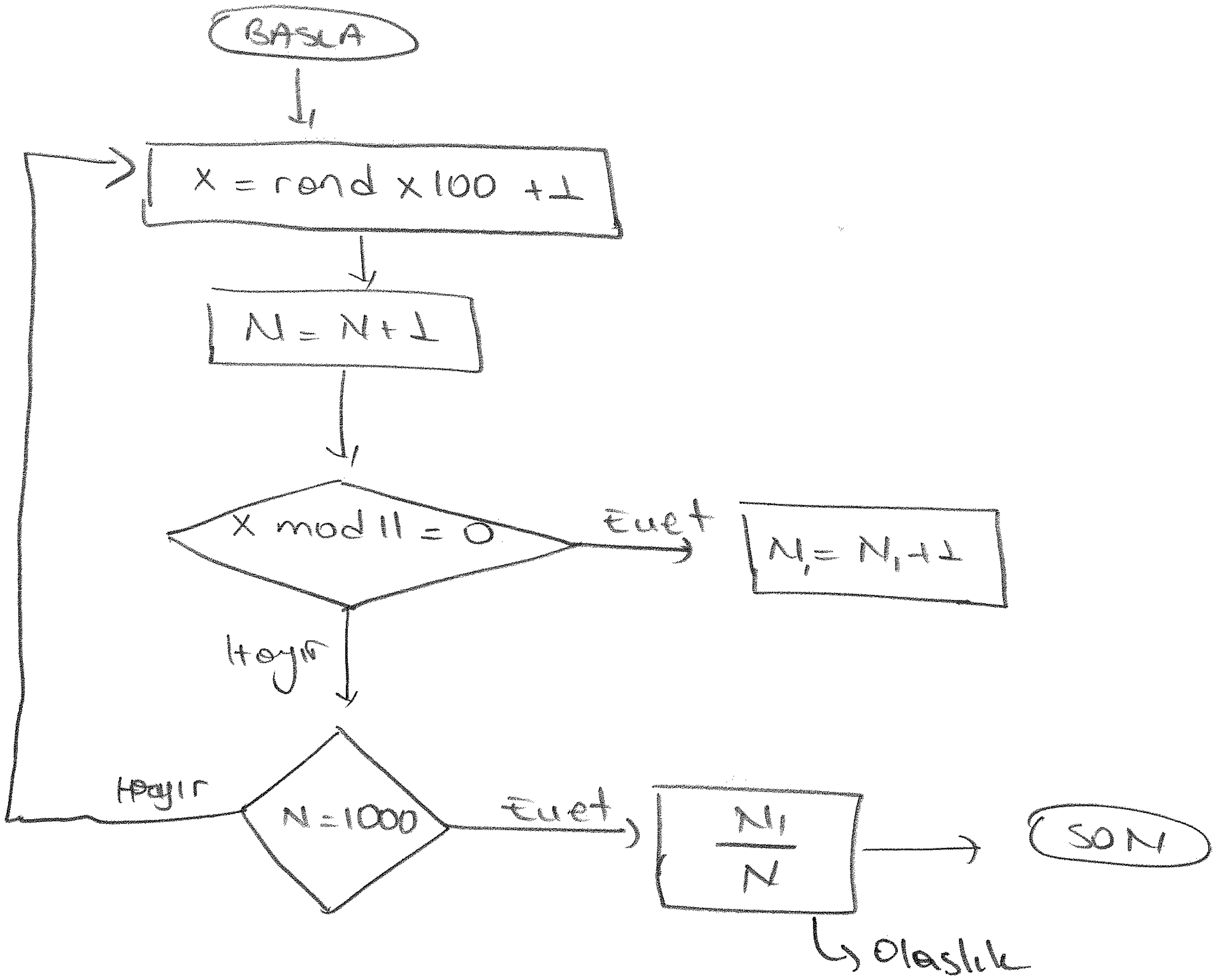
$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

N_1 = d nin 0,8 den küçük olduğu durumlar

N = toplam ikili nokta sayısı.



⑫ 0 - 100 arasından seçilen bir sayının 11'e bölinme olasılığı nedir.



Matlab kodu:

```
function sonuc = hesapla(n)
  N= 0
  N1 =0
  for i=0: 1000
     xA = Rnd        yA= Rnd
     xB = Rnd        yB = Rnd

  d= sqrt((xA-xB)^2 + (yA -yB)^2)
       if (d<0,8)
          N1 = N1 + 1
     end
  N=N+1 ;
  end
  Sonuc = N1/N;
```

⑬ $a=5$

$c=3$

$m=16$

$z_0=7$ değerleri ile LCG yönteminde rastgele sayılar.

Çözüm: $\boxed{U_k = \frac{z_k}{m}}$ $\boxed{z_{k+1} = (a z_k + c) \bmod m}$

$U_0 = \frac{z_0}{m} \Rightarrow U_0 = \frac{7}{16} = 0,437$

$z_1 = (a.z_0 + c) \bmod m \Rightarrow z_1 = (5.7 + 3) \bmod 16$

$\boxed{z_1 = 6}$

$U_1 = \frac{z_1}{m} = \frac{6}{16} = 0,375$

$z_2 = (5.6 + 3) \bmod 16$ $\boxed{z_2 = 1}$

$U_2 = \frac{1}{16} = 0,063$

⋮

Belli bir değerden sonra kendini tekrarlayacaktır.

Tam Periyot Olma Kuralları

① $m=2^b$ ve $c \neq 0$

max $\boxed{P = m = 2^b}$

c ile m aralarında asal

$a = 1+4k$ şeklinde olmalı.

② $m=2^b$ ve $c=0$

z_0 tek sayı

$a = 3+8k$
$= 5+8k$

$\boxed{P = \frac{m}{4}}$ olur.

③ m asal sayı $c=0$ iken

$\frac{a^k - 1}{m}$ tam bölünmeli

$k = m-1$ olmalı

$\boxed{P = m-1}$

⑭ SNAFV üreteci $U(0,1)$ aralığında 100 sayı üretiyor ve frekanslar şöyledir. $x_c^2 = 7,81$ dir.

$0.00 \leq x < 0,27$	$f_1 = 21$
$0,25 \leq x < 0,5$	$f_2 = 31$
$0,5 \leq x < 0,75$	$f_3 = 26$
$0,75 \leq x < 1.00$	$f_4 = 22$

Bu üreteç uniform mudur? Ki-kare ile test et.

Çözüm: # $n = 100$, $m = 4$ $\Big\}$ $\boxed{E_k = \frac{n}{m}} = 25$ her aralıktaki örnek sayısı.

$$\boxed{x^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k}} = \frac{1}{e_k} \sum_{i=1}^{m} (f_k - e_k)^2$$

$$\# \quad x^2 = \frac{4}{100}\left[(21-25)^2 + (31-25)^2 + (26-25)^2 + (22-25)^2\right]$$

$$x^2 = 2,48$$

$\#$ $V = m - 1 = 3$ bağımsızlık derecesi.

$\#$ $\boxed{x^2 < x_c^2}$ ise sistem uniformdur denir.

$x^2 = 2,48$ ve $x^2 < x_c^2$ old. uniform.

⑮ 100 deneysel veri as. gibi frekanslarla elde ediliyor. Uniform mudur? $x_c^2 = 9.488$ alınacaktır.

id	Aralık	frekans
1	0 , 0,2	27
2	0.2 , 0.4	25
3	0.4 , 0.6	17
4	0.6 , 0.8	15
5	0.8 , 1.0	16

Çözüm: $n = 100$, $m = 5$ $\Big\}$ $E_k = \frac{100}{5} = \underline{20}$

$$\# \quad x^2 = \frac{5}{100}\left[(27-20)^2 + (25-20)^2 + (17-20)^2 + (15-20)^2 + (16-20)^2\right]$$

$$x^2 = \frac{5}{100} \cdot 131 \Rightarrow \boxed{x^2 = 6.55}$$

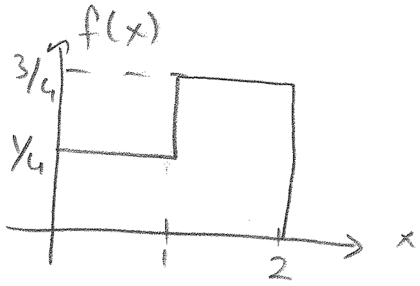
\# $v = m - 1 = 4$ bağımsızlık derecesi.

\# $x^2 < x_c^2 \Rightarrow 6.55 < 9.48$ old. uniformdur.

Ör: 0 ile π aralığında $\sin(x)$ 'in integralini veren Monte-Carlo çözümü.

```
function sonuc= sinusor1(iter)
 x_max= 3.14159;
 y-max = 1;
 hitcount= 0;
  for i=1:iter
        x= rand*x_max;
        y= rand*y_max;
        if (y<sin(x))
             hitcount =hitcount+1;
        end
    end
     sonuc= ( hitcount /iter)* x_max * y-max
```

⑯



ters dönüşüm metodu ile rassal sayılar üret.

Çözüm: $f(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3/4 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\#$ $f(x) = u = \int_0^x \frac{1}{4}\,dt$ ve $0 \leq x \leq 1$

$$u = \frac{1}{4}x \Rightarrow \boxed{x = 4u}$$

$\#$ $f(x) = u = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dt + \int_1^x \frac{3}{4}\,dt = \frac{1}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{4}$

$$u = \frac{3x}{4} - \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{4u}{3} + \frac{2}{3}}$$

$\#$ $F^{-1}(u) = \begin{cases} 4u & , \; 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4u}{3} + \frac{2}{3} & , \; \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$

⑰ 100 makinenin tamir zamanları ile ilgili veriler şöyledir;

i	Aralık (saat	Frekans	ilgili frekans	Kümülatif frekans	Eğim
1	$0,25 < x \leq 0,5$	31	0.31	0,31	0,81
2	$0,5 < x \leq 1.0$	10	0.10	0,41	5.0
3	$1 < x \leq 1,5$	25	0.25	0,66	2.0
4	$1,5 < x \leq 2$	34	0.34	1.00	1,47

a_i

c_i

$u = 0,83$ için $x = ?$

Çözüm: Eğim hesabı $a_1 = \frac{0,5 - 0,25}{0,31 - 0} = \boxed{\frac{x_i - x_{i-1}}{c_i - c_{i+1}}}$

eğim

$\#$ $u = 0,83$ olduğundan 4. aralığa denk gelir.

$$x = F^{-1}(u) = \boxed{x_{i-1} + a_i \cdot (u - c_{i-1})}$$

$\#$ $x = x_3 + a_4 \cdot (u - c_3)$

$x = 1,5 + 1,47(0,83 - 0,66)$

$x = 1,75$

⑱ $$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

kabul red yöntemi ile çözün.

Çözüm:

$f'(x) = x' = 1$ VE $f'(x) = (2-x)' = -1$

$$t(x) = \begin{cases} 1 \; ; & 0 \leq x < 2 \\ 0 \; ; & \text{diğer} \end{cases}$$

\# $c = \int_0^2 t(x)\,dx = \int_0^2 1\,dx \Rightarrow \boxed{c = 2}$

\# $\boxed{r(x) = \frac{t(x)}{c}}$ $r(x) = \frac{1}{2}$

\# $R(x) = \int_0^x t(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{2}\,dx \Rightarrow \boxed{R(x) = \frac{1}{2}x}$

\# $R(x) = U$ ve $U = \frac{1}{2}x$

☆ $\boxed{x = 2U}$ rassal sayılar