

BMÜ-421 Benzetim ve Modelleme

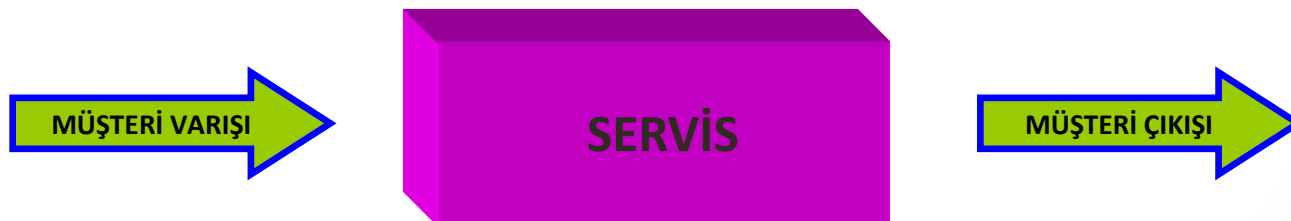
Kesikli Olay Benzetimi

İlhan AYDIN

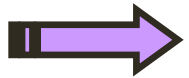
KESİKLİ-OLAY BENZETİMİ

- **Kesikli olay benzetimi**, durum değişkenlerinin zaman içinde belirli noktalarda değiştiği sistemlerin modellenmesi ile ilgilenir. Sistemin zamana göre benzetimidir. Zaman içinde kesikli noktalarda bir olay ortaya çıkar ve sistemin durumunu değiştirir.

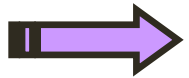
ÖRNEK 1 : Bir servisli kuyruk sistemi



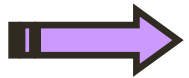
KESİKLİ-OLAY BENZETİMİ



Bir varış kanalı



Bir servis olanağı



FIFO ilk gelen ilk servis



Servis meşgul ise, müşteri kuyrukta bekler



Varışlararası zaman ve servis süreleri bilgisayar ortamında belirlenen dağılımlardan üretilir.

KESİKLİ-OLAY BENZETİMİ

- *M/M/1 Modelinde*



Varişlar arası zamanlar rassal değişkendir



Servis zamanları rassal değişkendir



İş veya müşteri servisleri bittiği an sistemden çıkar



Bir servis tamamlandığında en yakın müşteri servise alınır.

KESİKLİ-OLAY BENZETİMİ

- **Performans Ölçütü :**

Performans ölçütünün tahmin edilmesinde sistemin durum değişkenlerinin izlenmesi gerekir.

- **Durum Değişkenleri :**

1.Servisin Durumu: Servisin boş veya dolu olması gelen müşterinin servise veya kuyruğa girmesini belirler.

2.Kuyruktaki Müşteri Sayısı: Bir servis tamamlandığında kuyruktaki müşteri sayısı servisin yeni durumunu belirler. Kuyrukta müşteri yoksa **servis boş** duruma geçer. Müşteri varsa, kuyruğun başındaki müşteri servise alınarak **servis dolu** duruma geçecektir.

3.Varış Zamanları: Her bir müşteri için kuyrukta bekleme zamanının bulunmasında kullanılır

BENZETİM

KESİKLİ-OLAY BENZETİMİ

- Olaylar :

- 1. Müşteri Varışı (Varış Olayı) :

Sistemin durumunu değiştirir. Yani, servis boş ise dolu konuma geçer veya kuyruktaki müşteri sayısı 1 artar.

- 2. Servisin Tamamlanması (Servis Olayı – Çıkış Olayı):

Sistemin durumunu değiştirir. Servis dolu iken boş konuma geçer ya da kuyruktaki müşteri sayısı 1 azalır.

BENZETİM

KOB'DA KULLANILAN KAVRAMLAR

- KOB'da kullanılan önemli kavramlar aşağıda sıralanmıştır
 - 1.Sistem:** Bir veya daha fazla amacı gerçekleştirmek için çalışma zamanı boyunca etkileşimli nesnelerin (Örn; insan ve makine) toplamıdır.
 - 2.Model:** Bir sistemin gösterimidir. Bu gösterim, bir sistemi tanımlamak için sistem durumunu, nesnelerini, olaylarını, faaliyetlerini kullanan matematiksel ve mantıksal ilişkileri kapsar.
 - 3.Sistem Durumu:** Herhangi bir zamanda sistemi tanımlamak için gerekli olan bilgiyi kapsayan değişkenler setidir.

BENZETİM

KOB'DA KULLANILAN KAVRAMLAR

4.Nesne : Sistemin bir bileşenidir. (örn; bir servis, bir müşteri, bir makine)

2.Özellik: Verilen nesnenin özellikleri (örn; bekleyen bir müşterinin önceliği, atölye'de bir işin uğrayacağı makinaların sırası)

3.Olay : Bir sistemin durumunu değiştiren bir oluş. (Örn; müşteri varışı)

4.Faaliyet: Belirli bir zaman içinde tamamlanan iş veya işlem. Bir üretim hattında bir aşamada bir kesme işleminin tamamlanması gibi. Faaliyetlerin zamanları değişken ise ilgili istatistiksel dağılımlarla tanımlanır.

BENZETİM

- Performans Ölçütleri

$$\left(\begin{array}{c} \text{i. Müşterinin Kuyrukta} \\ \text{Bekleme Zamanı} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{i. Müşterinin Servise} \\ \text{Alınma Zamanı} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{i. Müşterinin Sisteme} \\ \text{Varış Zamanı} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{sistemde i. müşterinin} \\ \text{bekleme zamanı} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{i. müşterinin kuyrukta} \\ \text{bekleme zamanı} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{i. müşterinin} \\ \text{servis zamanı} \end{array} \right)$$

BENZETİM

KOB'DA ZAMAN İLERLETME

- Kesikli olay benzetim modelinin yapısı gereği, her adımda benzetim zamanının bilinmesi gerekir. Bu nedenle, benzetim zamanının bir değerden diğer bir değere artmasını sağlayacak bir işlem gerekir. Benzetim zamanını veren değişken **BENZETİM SAATİ** olarak adlandırılır. Modelde zaman birimi olarak, giriş parametrelerinde kullanılan birim alınır. Benzetim zamanı ile modelin bilgisayarda işletilmesi zamanı arasında bir ilişki yoktur.
- Benzetim saatinin iletilmesinde iki yaklaşım kullanılmaktadır.
 1. En yakın olay zamanı
 2. Sabit artışlar

BENZETİM

- En yakın olay zamanı ile:

Örnek:

Bir servisli kuyruk modeli benzetimi

t_i = i. Müşterinin varış zamanı ($t=0$)

$A_i = t_i - (t_{i-1}) = i.$ ve $(i-1).$ müşterilerin varışlar arası zaman aralığı

S_i = i. müşteri için harcanan servis zamanı

D_i = i.müşterinin kuyrukta beklemesi

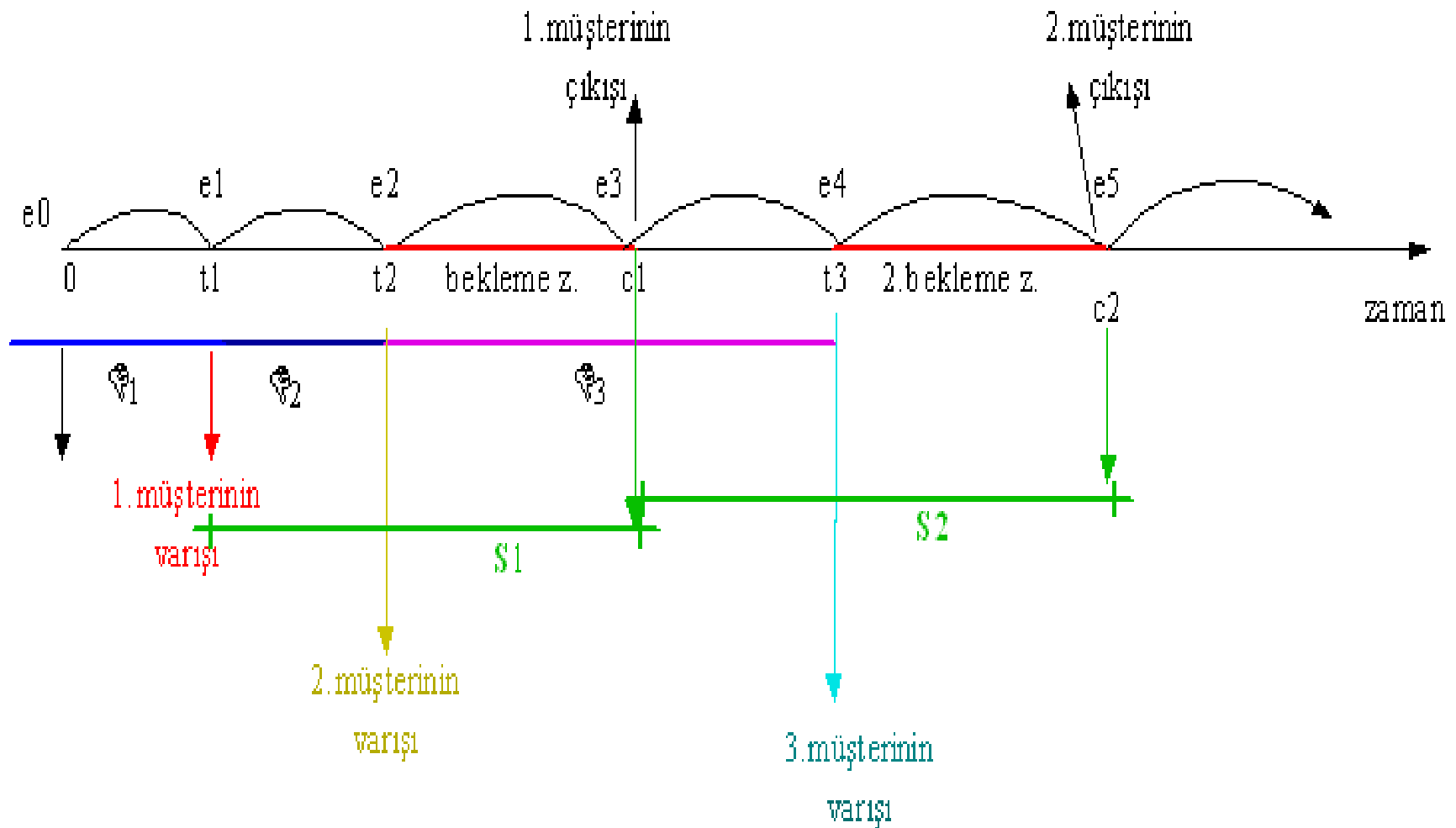
$c_i = t_i + D_i + S_i = i.$ müşterinin servisini tamamlaması ve çıkış zamanı

e_i = herhangi bir i. olayın ortaya çıkış zamanı

$A_1, A_2, \dots, \dots, F_A$: varışlar arası zaman aralığı dağılımı

$S_1, S_2, \dots, \dots, F_S$: servis süreleri dağılımı

BENZETİM



BENZETİM

- En yakın olay zamanı ile;

- $e_0 = 0$ anında servisin durumu boştur.

- $t_1 = 1$. müşterinin varış zamanı

- (FA dağılımından A_1 değişkeninin üretilmesiyle belirlenir)

- $$(0 + A_1 = t_1)$$

- Benzetim saati $e_0 = 0$ 'dan e_1 'e ilerletilir.

- t_1 'de gelen müşteri servisi boş bulur.

- $D_1 = 0$. Servisin durumu boştan doluya çevrilir.

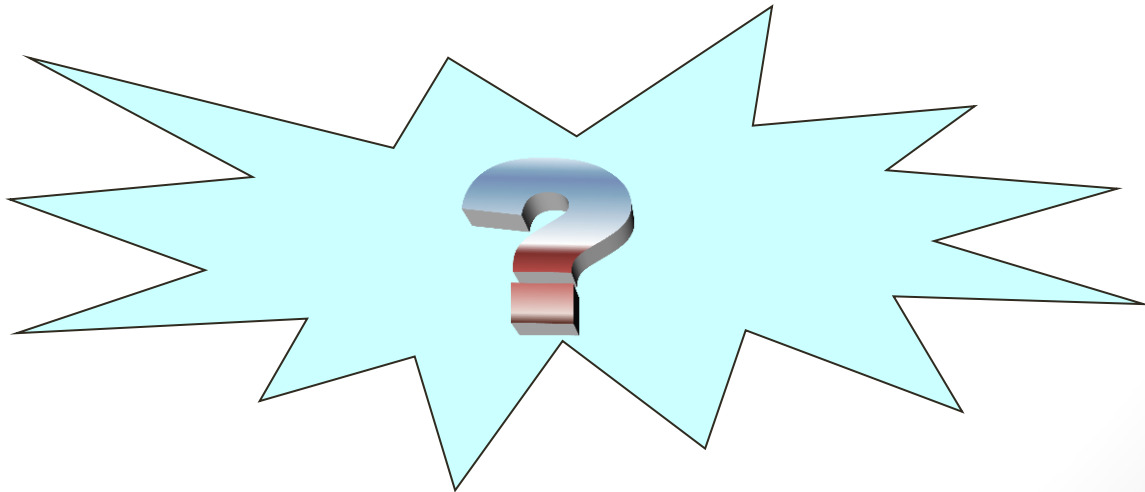
- 1. müşterinin çıkış zamanı $= c_1 = (t_1 + D_1 + S_1)$

- (t_1 zamanında gelen müşteri FS'den üretilen S_1 süresince servisini alarak sistemden çıkacaktır.)

BENZETİM

- $t_2 = t_1 + A_2$ anında gelecek yeni bir müşteri ve
- c_1 'de çıkacak eski bir müşteri vardır.

- Bunlardan hangisi en yakın olay olacak???



BENZETİM

- **En yakın olay zamanı ile zaman ilerletme**
 - $t_2 < c_1$ ise benzetim saati $e_2 = t_2$ olarak ilerletilir.
 - $c_1 < t_2$ olsaydı , benzetim saati e_1 'den c_1 'e ilerletilmiş olacaktı.
 - t_2 zamanında gelen müşteri servisi meşgul bulacaktır.
 - Kuyruktaki müşteri sayısı , 0'dan 1'e arttırılacak ve bu müşterinin varış zamanı kaydedilecektir. Bu müşterinin servis zamanı şu anda üretilemez.
 - 3.varış zamanı t_3 , $t_3 = t_2 + A_3$ olarak hesaplanır.
 - $c_1 < t_3$ ise benzetim saati $e_3 = c_1$ olarak ilerletilir.

BENZETİM

- **En yakın olay zamanı ile;**
 - t_1 'de gelen müşteri c_1 de çıkıyor ve
 - t_2 'de gelen müşteri c_1 'de servise alınıyor.
 - $D_2 = c_1 - t_2$ ve $c_2 = c_1 + S_2$ (S_2 ; F_S 'den şimdi üretildi) .
 - Kuyruktaki müşteri sayısı 1 azaltılır.
 - $t_3 < c_2$ ise benzetim saati $e_4 = t_3$ 'e ilerletilir.

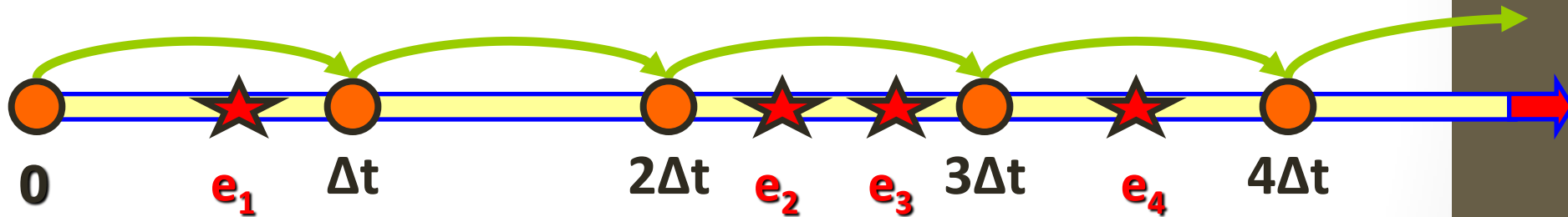
BENZETİM

- **Sabit artışlar ile zaman ilerletme:**

- Bu yaklaşımda benzetim saati, önceden belirlenen bir Δ_t zamanı kadar arttırılır.
- Benzetim saatindeki her Δ_t artış sonrası, Δ_t aralığında herhangi bir olayın ortaya çıkıp çıkmadığı kontrol edilir.
- Bu aralıkta bir veya birden fazla olay ortaya çıkmış ise, bu olaylar aralığın sonunda olmuş gibi dikkate alınır ve sistemin durumu güncelleştirilir.

BENZETİM

- Sabit artışlar ile zaman ilerletme:



BENZETİM

- Sabit artışlar ile zaman ilerletme:

- $[0, \Delta t]$ zaman aralığında, e_1 zamanında ortaya çıkan olay, modelde At zamanında olmuş gibi dikkate alınır.
- $[\Delta_t, 2 \Delta_t]$ aralığında hiçbir olay ortaya çıkmamıştır. Ancak, model bu durumu belirlemek için kontrol işlemini yapar.
- $[2 \Delta_t, 3 \Delta_t]$ aralığında e_2 ve e_3 zamanında 2 olay olmuştur. Ancak her iki olay da $3\Delta_t$ zamanında olmuş gibi dikkate alınır. Modelde, aynı zamanda birden fazla olay ortaya çıktığında, olayların hangi sırada dikkate alınacağına karar verecek bir kural bulunmalıdır. Bu yaklaşımın iki dezavantajı vardır:

BENZETİM

- **Sabit artışlar ile zaman ilerletme:**
 - Gerçekte aynı anda meydana gelmeyen olayların zaman aralığı sonunda birlikte dikkate alınması ve bunlardan hangisinin önce ortaya çıkacağına karar verme işlemi hata oluşur.
 - Δ_t çok küçük alınarak bu hata azaltılabilir. Ancak, her Δ_t aralığında yapılacak kontrolden dolayı modelin çalışma zamanı artacaktır.
 - Bu nedenle KOB'da, bu yaklaşım genellikle kullanılmaz.

BENZETİM

Kesikli Olay Benzetimi Bileşenleri

- En yakın olay zamanı ile zaman ilerletme tekniğinin kullanıldığı kesikli olay benzetimi modellerinde aşağıdaki bileşenler bulunmaktadır.
- **Sistem durumu** : Durum değişkenlerinin bilinmesi herhangi bir zaman için sistemin durumunun açıklanmasını sağlar.
- **Benzetim saati** : Benzetim saatinin mevcut değerini veren bir değişkendir.
- **Olay listesi** : Olabilecek en yakın olay tipini gösteren listedir. (21)

BENZETİM

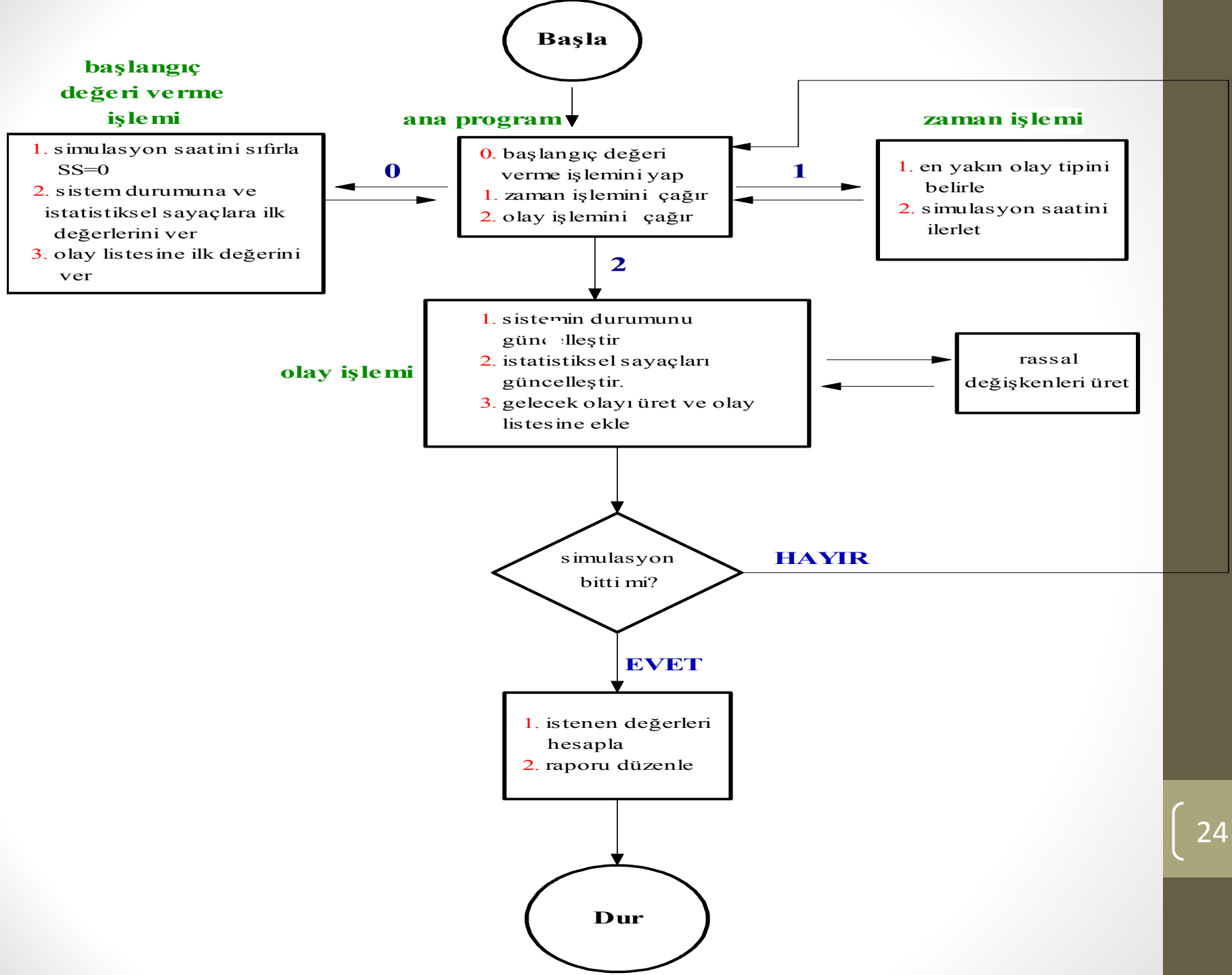
Kesikli Olay Benzetimi Bileşenleri

- **İstatistiksel sayaçlar** : Performans ölçütleri ile ilgili bilgilerin tutulması için tanımlanmış değişkenler listesi.
- **İlk değer verme işlemi** : Bir alt program (subroutine) olarak hazırlanır. Benzetim modellerinde kullanılan değişkenlere ilk değerlerini verir.
- **Zaman işlemi** : Olay listesindeki en yakın olayı belirleyen, benzetim saatini bir olay zamanından diğerine geçecek şekilde artıran bir alt programdır.
- **Olay işlemi** : i.olay ortaya çıktığında sistemin durumunu ve gerekli istatistikî sayaçları yeni duruma göre düzenleyen bir alt programdır.
- **Rapor üretici** : Benzetim sona erdiğinde istenilen istatistikleri hesaplatarak yazdıran bir alt programdır.

BENZETİM

- **Ana Program :**

- Zaman işlemini çağırarak en yakın olayı belirler ,
- Olay işlemlerini kontrol ederek sistemin yeni durumunu günceller.
- Kesikli olay benzetimi bileşenleri arasındaki mantıksal ilişki aşağıdaki şekilde görülmektedir



BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

- KOB'da üç tip istatistik vardır :

1. Değişkenlerin Gözlemlenmesine Dayalı İstatistik (Kesikli Zaman İstatistiği)

Örneğin; bir kuyruk sisteminde ortalama bekleme zamanı.

- Gözlem sayısı tutulur.
- Gözlemlerin toplam değerleri (bekleme zamanı) tutulur.
- Gözlemlerin kareleri veya daha yüksek dereceli üstlerinin toplamaları gerekliyse tutulur

BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

- **Örnek** : Kuyruk sisteminde kuyrukta ortalama bekleme zamanının ve varyansının hesaplanması isteniyor olsun.

➡ i. müşterinin bekleme zamanını hesapla

$$(d_i)$$

➡ n müşteri için toplam bekleme zamanını bul.

$$\sum_{i=1}^n d_i$$

➡ Bekleme zamanının kareleri toplamını bul.

$$\sum_{i=1}^n d_i^2$$

BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

Müşterinin Ortalama
Bekleme Zamanı

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

Müşterilerin Bekleme
Zamanı Varyansı

$$\text{var}(d) = \frac{\sum_{i=1}^n (d_i)^2 - n\bar{d}^2}{n-1}$$

BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

2. Zamana Göre Ortalama

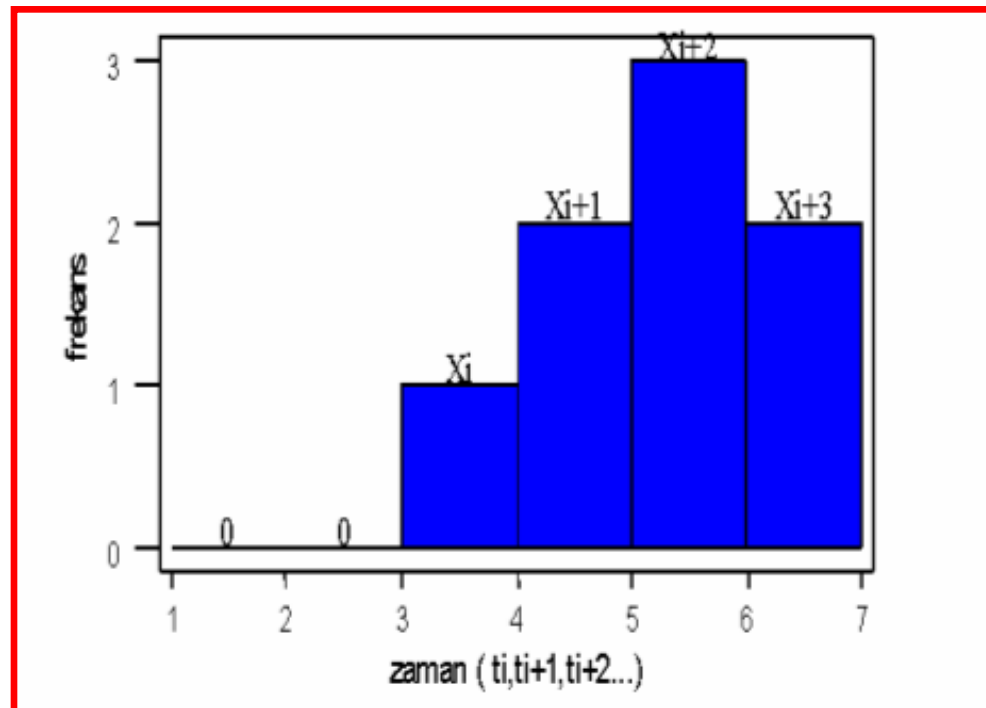
- Durum değişkenleri değerlerini belirli zamanlarda atlamalarla değiştirir.
- Zaman periyotları için değişkenlerin değerleri sabittir.
- Herhangi bir anda bir olayın ortaya çıkmasına bağlı olarak bir atlama yapar ve diğer bir zaman periyodu içinde sabit bir değerde kalırlar.

Örnek: Bir kuyruk sisteminde, birim zamandaki ortalama müşteri sayısındaki değişim zaman periyotları için takip eden grafikten görülebilir.

BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

- Bir kuyrukta zaman periyodu süresince bekleyen müşteri sayısı



BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

i : durum değişkeninin değiştiği noktayı belirtiyor.
(Müşteri sayısı azalıyor ya da artıyor.)

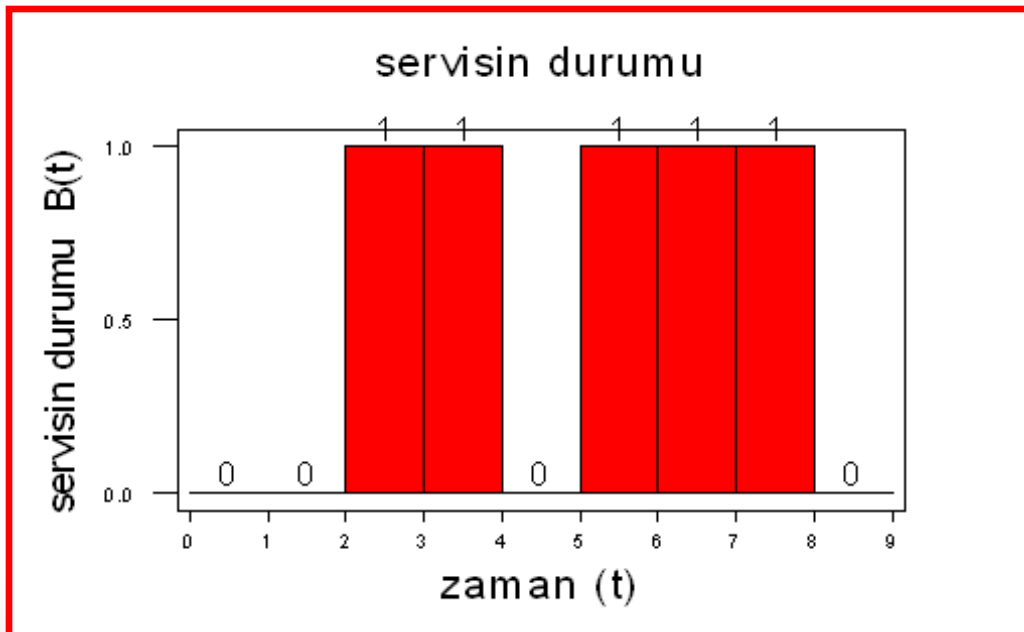
$$\left(\begin{array}{c} \text{Benzetim sonunda} \\ \text{toplam zamana göre} \\ \text{müşteri sayısı} \end{array} \right) = \sum_i x_i (t_{i+1} - t_i)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Kuyrukta bekleyen ortalama} \\ \text{müşteri sayısı} \end{array} \right) = \frac{\sum_i x_i (t_{i+1} - t_i)}{\text{toplam zaman}}$$

BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

Örnek: Kuyruk sisteminde zamana göre ortalamanın alındığı diğer bir performans ölçüsü servisin doluluk oranıdır.



$$\left. \begin{array}{l} \text{servis dolu ise} = 1 \\ \text{servis boş ise} = 0 \end{array} \right\} B(t)$$

BENZETİM

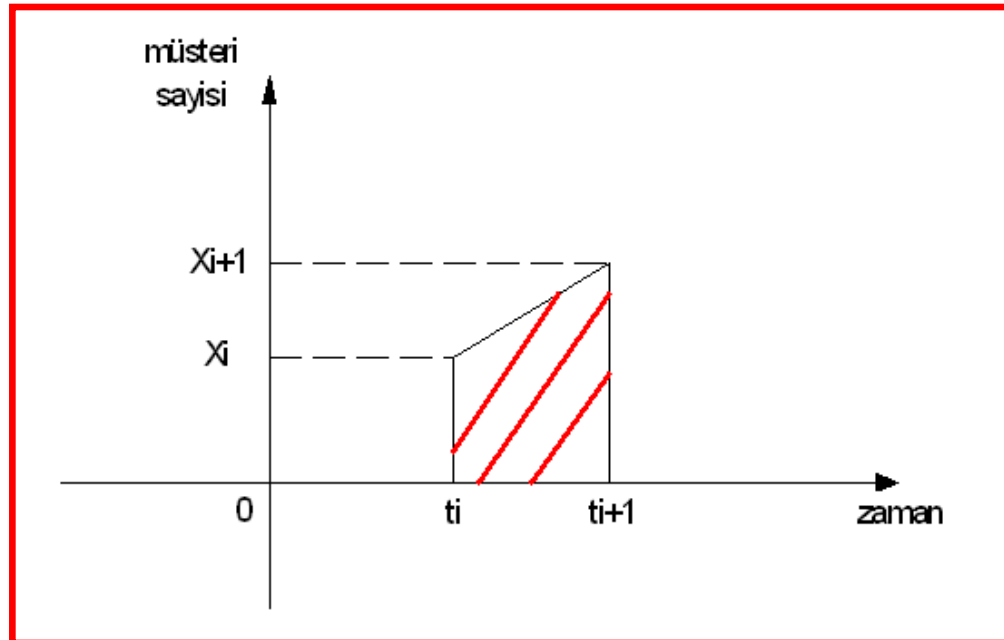
KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

$$\left(\begin{array}{c} \text{Servisin doluluk} \\ \text{oranı} \end{array} \right) = \frac{\sum_i B(t_i)(t_{i+1} - t_i)}{\text{toplam zaman}}$$

BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

3. Zamana Göre Ortalama Değerler Bir Aralık Boyunca Değişebilir



BENZETİM

KOB'da Kullanılan İstatistiksel Sayaçlar

$$\left(\begin{array}{c} \text{zamana göre ortalama} \\ \text{müşteri sayısı} \end{array} \right) = \frac{\sum_i \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) (t_{i+1} - t_i)}{\text{toplam zaman}}$$

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ

Örnek: Aşağıdaki sistemde gelen 7 iş ve her birinin sisteme varış zamanları tablo halinde verilmiştir

İŞ NO	VARIŞ ZAMANI
1	0
2	4
3	6
4	16
5	18
6	26
7	28

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ

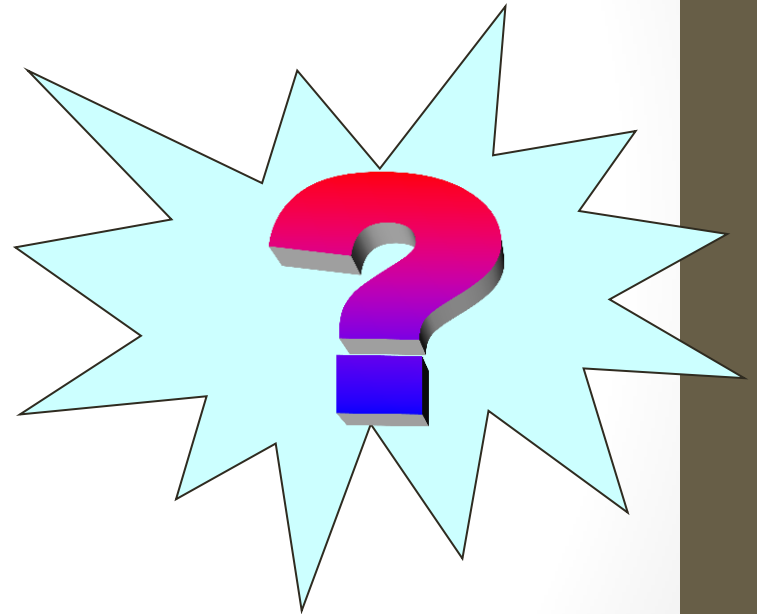
- Sistemdeki servis işlemi için 2 alternatif düşünülmektedir.
- **1.Alternatif:** Bir makina ve bir iş için servis süresi 5 dk.
- **2.Alternatif:** İki makina ve bir iş için servis süresi 10 dk.
- Sisteme gelen işler tek bir kuyruk oluşturmaktadır

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ

Her bir alternatif için sistemin benzetimini yaparak;

- a) Servisin boş zaman yüzdesini
- b) Bir işin sistemde ortalama bekleme zamanını bulunuz



BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ 1. ALTERNATİF TABLOSU

iş	Varış zamanı	Kuyrukta bekleme zamanı	Servise başlama zamanı	Servis bitiş zamanı	Servis süresi	Servisin dolu zamanı
1	0	0	0	5	5	5
2	4	1	5	10	5	10
3	6	4	10	15	5	15
4	16	0	16	21	5	20
5	18	3	21	26	5	25
6	26	0	26	31	5	30
7	28	3	31	36	5	35
TOPLAM		11			35	

(5. Sütundaki son değer (**36**) toplam sistem zamanını göstermektedir.)

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ 1. ALTERNATİF SONUÇLARI

$$\left(\begin{array}{c} \text{sistemde ortalama} \\ \text{bekleme zamanı} \end{array} \right) = \frac{\left(\sum \begin{array}{c} \text{kuyrukta} \\ \text{bekleme zamanı} \end{array} \right) + \left(\sum \begin{array}{c} \text{servis} \\ \text{zamanı} \end{array} \right)}{\left(\text{sisteme giren iş sayısı} \right)}$$

$$= \frac{11+35}{7} = 6,571 \text{ dk / müşteri}$$

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ 1. ALTERNATİF SONUÇLARI

$$\left(\begin{array}{c} \text{dolu zaman} \\ \text{yüzdesi} \end{array} \right) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{servisin toplam dolu} \\ \text{zamanı} \end{array} \right)}{\left(\text{sistemde geçen toplam zaman} \right)} \times 100$$

$$= \frac{35}{36} \times 100 = \%97,22$$

$$(\text{BOŞ ZAMAN YÜZDESİ}) = 1 - (\text{DOLU ZAMAN YÜZDESİ}) = 100 - 97,22 = \%2,78$$

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ 2. ALTERNATİF TABLOSU

			<u>1.makina için</u>		<u>2.makina için</u>					
iş	Varış zamanı	Kuyrukta bekleme zamanı	Servise başlama zamanı	Servis bitiş zamanı	Servise başlama zamanı	Servis bitiş zamanı	Her iş için servis bitiş zamanı	Servis zamanı	<u>1.makina</u> servisin dolu zamanı	<u>2.makina</u> servisin dolu zamanı
1	0	0	0	10	-	-	10	10	10	-
2	4	0	-	-	4	14	14	10	-	10
3	6	4	10	20	-	-	20	10	10	-
4	16	0	-	-	16	26	26	10	-	10
5	18	2	20	30	-	-	30	10	10	-
6	26	0	-	-	26	36	36	10	-	10
7	28	2	30	40	-	-	40	10	10	-
		8					(toplam geçen zaman)	70	40	30

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ 2.ALTERNATİF SONUÇLARI

$$\text{Sistemde bekleme zamanı ort.} = \frac{8 + 70}{7} = \frac{78}{7} = 11,14$$

$$\text{1.makina için dolu zaman yüzdesi} = \frac{40}{40} \cdot 100 = \%100$$

$$\text{2.makina için dolu zaman yüzdesi} = \frac{30}{40} \cdot 100 = \%75$$

BENZETİM

EL İLE BENZETİM ÖRNEĞİ 2. ALTERNATİF SONUÇLARI

$$\text{Sistemin doluluk oranı} = \frac{100 + 75}{2} = \%87,5$$

$$\text{Sistemin boş zaman yüzdesi} = 100 - 87,5 = \%12,5$$

BENZETİM

BİR SERVİSLİ KUYRUK SİSTEMİ (M/M/1) BENZETİMİ

- Bu sistemin benzetimi için kesikli olay benzetimi (KOB) modelleme yapısının çok iyi bilinmesi gerekir. Ancak, bu yapının bilinmesi ile etkin bir programın yazılması farklı olaylardır.
- KOB'un anlaşılmasının en iyi yolu M/M/1 kuyruk modelinin benzetimi için kullanılan ana ve alt programlarının akış şemalarının incelenmesidir.
- Daha önce de belirtildiği gibi, M/M/1'de, varışlararası zaman aralığı dağılımı ve servis süreleri dağılımı üstel dağılımdır

BENZETİM

BİR SERVİSLİ KUYRUK SİSTEMİ (M/M/1) BENZETİMİ

- Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

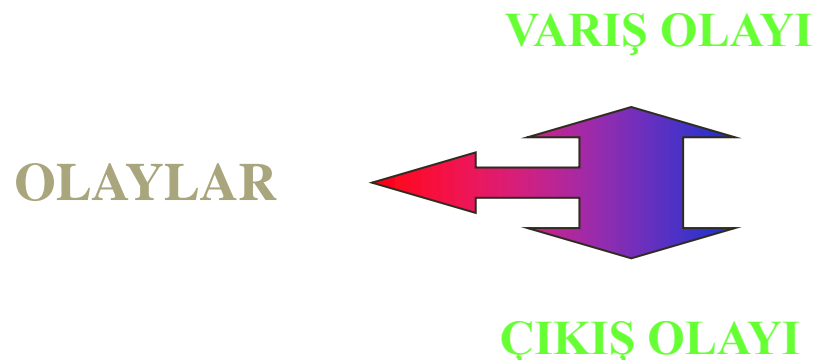
$$f(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} \quad x \geq 0, \beta \geq 0$$

BENZETİM

BİR SERVİSLİ KUYRUK SİSTEMİ (M/M/1) BENZETİMİ

- ➔ Varışlar arası zaman ortalaması = 1 dakika
- ➔ Servis zamanı ortalaması = 0,5 dakika
- Programın durma koşulu $n = 1000$ müşteri olarak dikkate alınmıştır.
(kuyrukta beklemeleri tamamlanmış 1000 müşteri.)

Bu sistemde ;



BENZETİM

BİR SERVİSLİ KUYRUK SİSTEMİ (M/M/1) BENZETİMİ

- **Nesne** : Müşteri
- **Nesnenin özelliği (attribute)** : Müşterinin geliş zamanı

- **Durum Değişkenleri:**

Kuyruktaki müşteri sayısı.

Servisin durumu

- **Faaliyetler:** Varışlar arası zaman, servis zamanı

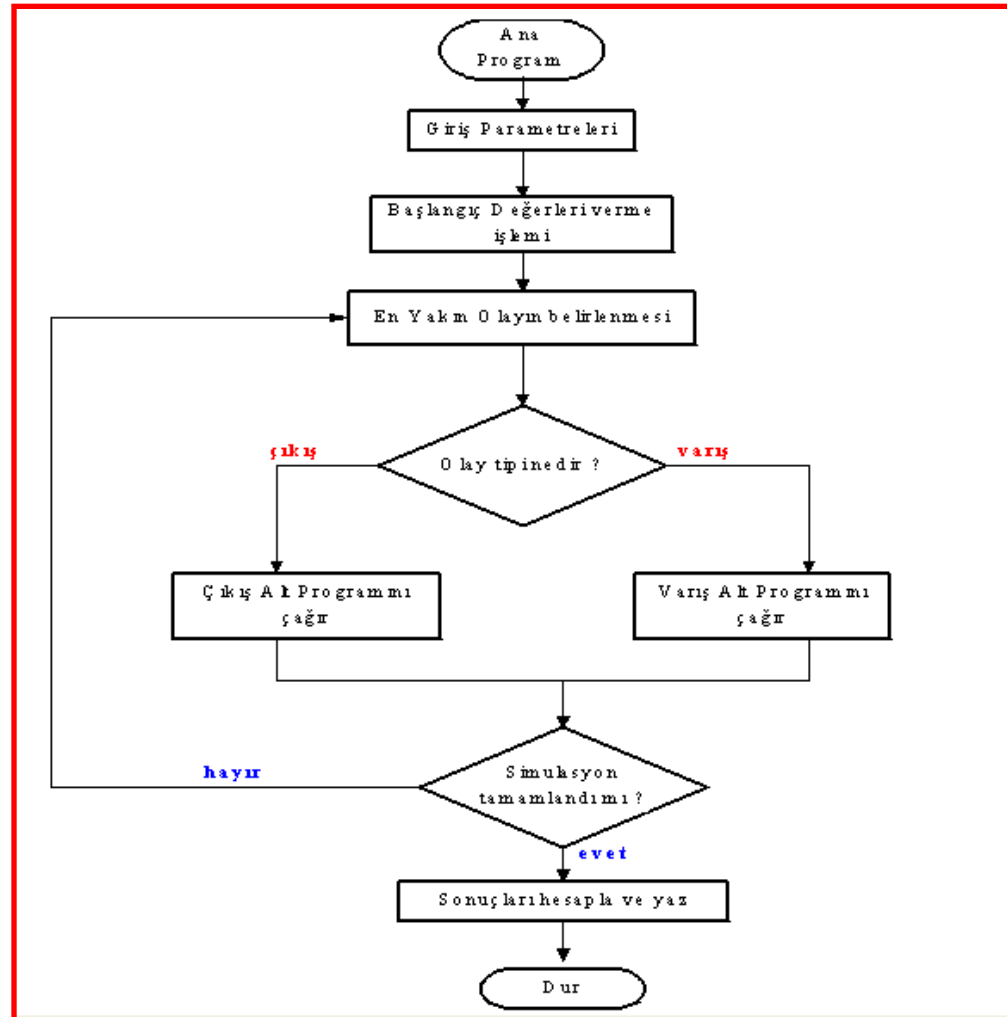
- **Performans (Başarım) Ölçütleri:**

Kuyrukta ortalama bekleme zamanı

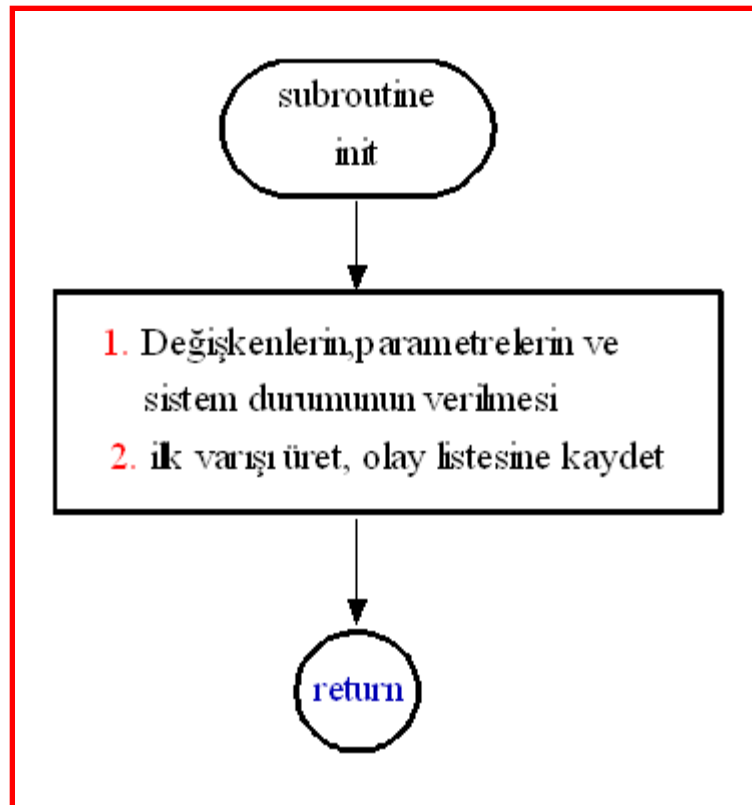
Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı

Servisin doluluk oranı

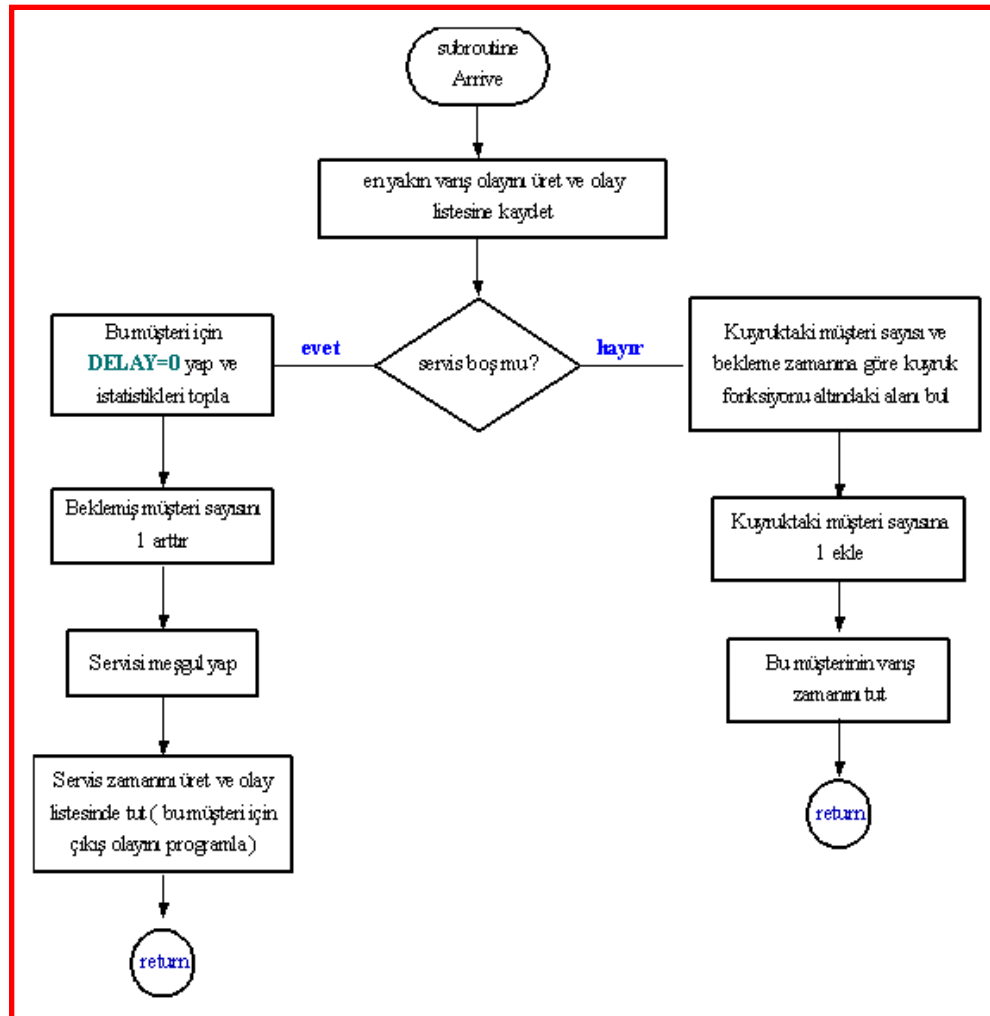
BENZETİM



BENZETİM



BENZETİM



BENZETİM

