1.BÖLÜM

SAYISAL ÇÖZÜMLEME VE HATALAR

1.1. Giriş

Sayısal çözümleme; bilgisayarların gelişmesiyle matematiksel ifadelerin çözümü için geliştirilmiş yeni çözüm yöntemleridir. Bu çözüm yöntemleri klasik çözüm yöntemlerine göre işlem miktarı daha fazla yöntemlerdir. Fakat gelişen bilgisayar teknolojisiyle bilgisayarların hızlarının ve kapasitelerinin çok artması yüzünden işlem miktarlarının çok uzun olması sorun oluşturmamaktadır. Günümüzde gelişmiş bilgisayarlar insanın ancak bir ömür boyu çözebileceği problemleri birkaç saniye gibi kısa sürede çözebilmektedir.

Sayısal çözümleme yöntemleri, klasik yöntemlerle yapılamayan bazı problemlerin çözümlerini de yapabilme imkanı sağlamıştır. Sayısal çözümlemenin gelişmesiyle birlikte teknolojide buna paralel olarak gelişmeye başlamıştır. Bir uçağın mekanik donanımı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak analiz edilmektedir. Bir elektrik motorunun modeli bilgisayarda geliştirilerek performansı elde edilebildiği için, çok sayıda deneme motoru üretmeye gerek kalmamaktadır.

Sayısal çözümlemenin ne olduğunu anlamak için aşağıdaki şu örnekleri ele alalım.

a- Bir vasıtanın hızı 0,1 saniye aralıklarla ölçülerek aşağıdaki

t (sn)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
v (m/sn)	10.4	9.9	9.4	9.3	9.4	10.2	11.0

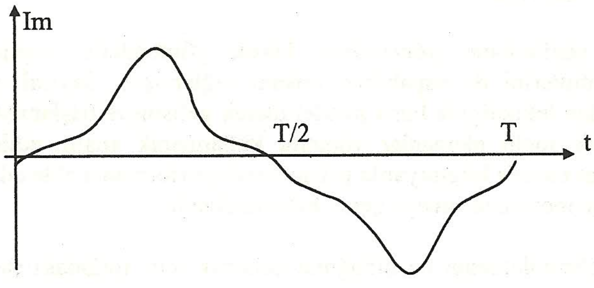
tablo elde ediliyor. Analitik bir ifade yerine böyle deneysel sonuçlar halinde ortaya çıkan bu değerlerden faydalanarak, bu vasıtanın 0,3 saniyede ivmesinin ne olduğunu bulmaya çalışalım veya 0,3 saniyede bu aracı aldığı yolu bulalım. V' yi t'ye bağlayan bir analitik ifade olsaydı bu sorunun çözümü kolay olacaktı. Hız ifadesini zamana göre türevini alarak ivmeyi, aynı ifadenin zamana göre integralini alarak da alınan yolu bulabilirdik. Böyle bir bağlantı olmadığına göre bu soruyu nasıl çözebiliriz?

b- Magnetik alan problemlerini karakterize eden aşağıdaki iki boyutlu Poisson denklemi (Burda A vektör potansiyeli, J akım yoğunluğu, ν çözüm yapılacak ortamın magnetik direncini göstermektedir.) ν 'nin A'ya bağımlı olmasından dolayı nonlineer bir denklem olmaktadır.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial A}{\partial y}\right)=J$$

Bu denklem 1800 yıllarından beri bilinmesine rağmen bazı özel haller dışında çözümü mümkün değildi. Oysa bugün geliştirilen sayısal çözümleme yöntemleriyle bu denklemi çok sayıda lineer denklem takımına dönüştürülerek çözülmektedir. Ancak, yüzlerce veya binlerce denklemin bilgisayar olmaksızın çözümü çok zordur. Yani; sayısal çözümleme bilgisayarların paralelinde gelişmiş ve geniş çapta bir uygulama alanı bulmuştur.

c- Elektrik mühendisliğinde sık sık karşılaşılan dalga formu analizinde harmoniklerin genliklerini belirlemede sürekli integrallerin alınabilmesi için analizi istenen fonksiyonun belirli olması gerekir. Örneğin transformatörlerin mıknatıslama akımı i_m nin şekil 1.1 deki değişiminde harmoniklerini nasıl bulabilirdik. Eğer i = f (t) ifade edilebilseydi basit integral alma işlemleriyle soruna



Şekil:1.1

cevap bulabilirdik. Oysa böyle bir ifade yerine ya şekil 1.1 deki gibi bir eğri yada tablo halinde verilmiş t ve i_m değerleriyle karşılaşırız.

Sayısal çözümlemeye neden ihtiyaç duyulduğu bu üç örneğe ek olarak daha bir çok örnekler verilebilir. Sayısal çözümlemenin sözü edildiği her yerde karşımıza bilgisayarlar çıkar. Bilgisayarlarla işlemler ise normal işlemlerde olduğu gibi bazı hatalar içermektedir. Bunları şimdi sırasıyla görelim.

1.2. Hatalar

Hata, genellikle " **Gerçek Değerle Yaklaşık Değer Arasındaki Fark**" olarak tanımlanır. x_g ile gerçek değeri, x_y ile yaklaşık değeri gösterecek olursak

$$\Delta X=\left|X_g-X_y\right|$$

ile tanımlanan ΔX'e **"Mutlak Hata"** denir. Mutlak hatanın gerçek değere oranı **"Bağıl Hata"**olarak tanımlanmasına rağmen gerçek değer bilinmediğinden bağıl hata;

Eksonomi

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{X_y}$$

ile hesaplanır. Gerçek değer de

$$X_g = X_y \pm \Delta X$$

olarak ifade edilir.

Bilgisayarlarla işlemlerde sayısal çözümleme yöntemlerinin sonucu olarak iki önemli hata ile karşılaşırız. Bunlar;

Yuvarlatma Hataları (Roundoff Error) : Bu hatayı açıklamak için 0.03 sayısı ile 1600 sayılarını toplayalım. Toplama işleminin makinayla yapılabilmesi için bu iki sayınında aynı üsse indirgenmesi gerekir. Diyelim ki makine noktadan sonra dört basamak üzerine işlem yapabilmektedir. o zaman makine

0.03 ü 0.000003×10^4
1600 ü 0.1600×10^4

ortak üslerine indirgedikten sonra 0.160003×10^4 ü 0.1600×10^4 alarak bir yuvarlatma yapar. İşte bu hataya yuvarlatma hatası denir.

Bilgisayarlarda bütün işlemler bellekte yapılır. Bellek belirli kapasitelerde olur. Bu nedenle π , e, $\sqrt{3}$ gibi sayıların değerleri tam olarak ifade edilemeyeceğinden yuvarlatma yapılır.

Kesme Hatası (Truncation Error) : Yine bir örnekle açıklayacak olursak sinx fonksiyonunun seriyel açınımını, sinx'in değerini bulmak için kullanabiliriz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots$$

Seri sonsuz terimli olduğundan şüphesiz bütün terimleri kullanmanın imkanı yoktur. Yani seriyi bir terimden sonra kesmek zorunda kalırız. Böylece işlemde de bir hata ortaya çıkacaktır. İşte bu hataya da **"Kesme Hatası "** denir.