3.2.3. Gauss Yoketme Yöntemi

Bu yöntemin esası katsayı matrisinde uygun yok etmeleri (eliminasyonları) yaparak onu ya üst üçgen yada alt üçgen matris haline dönüştürerek çözmektir. Bu yöntemin kullanılabilmesi için matrisin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır. Ayrıca köşegen üzerindeki tüm elemanlar sıfırdan farklı olmalıdır. Eğer köşegen üzerinde sıfırdan farklı bir değer var ise satır veya sütun değiştirme işlemi yapılabilir. Açıklamamızı üst üçgen dönüştürme üzerine yapalım.

a- İlk adım olarak $a_{11}\neq 0$ varsayımı ile katsayı matrisinin ilk satırı a_{11} e bölünür,

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{13} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \qquad a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} \qquad b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

olduğunu hatırda tutmalıdır.

b- İkinci adım olarak ilk satırı a_{21} ile çarpıp ikinci satırdan ve aynı şekilde ilk satırı a_{31} ile çarpıp üçüncü satırdan çıkarsak

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$a'_{22} = a_{22} - a'_{12} \cdot a_{21}, \qquad a'_{23} = a_{23} - a'_{13} \cdot a_{21}, \qquad a'_{32} = a_{32} - a'_{12} \cdot a_{31},$$

$$a'_{33} = a_{33} - a'_{13} \cdot a_{31}, \qquad b'_2 = b_2 - b'_1 \cdot a_{21} \text{ ve } \quad b'_3 = b_3 - b'_3 \cdot a_{31}$$

olduğu hatırda tutulmalıdır.

c- Üçüncü adım olarak son matriste ikinci satır a'_{22} ile bölünerek,

$$a''_{23} = \frac{a'_{23}}{a'_{22}} \quad \text{ve} \quad b''_2 = \frac{b'_2}{a'_{22}}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a''_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

d- İkinci satır a'_{32} ile çarpılıp üçüncü satırdan çıkarılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a''_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

elde olunur. Burada da

$a''_{33} = a'_{33} - a''_{23}.a'_{32}$ ve $b''_3 = b'_3 - b''_2.a'_{32}$ elde edilir.

e- Son adım olarak $a''_{33} \neq 0$ varsayımı altında en son satırı a''_{33} ile bölersek

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a''_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b'''_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki burada da

$b'''_{33} = \dfrac{b'''_3}{a''_{33}}$ olduğu hatırlanmalıdır. Bu yok etmelerden sonra

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & 1 & a''_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b'''_3 \end{bmatrix}$$

den

$$x_3 = b'''_3$$

$$x_2 = b''_2 - a''_{23}.x_3$$

$$x_1 = b'_1 - a'_{12}.x_2 - a'_{13}.x_3$$

olarak çözümler elde edilir.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

denklem takımını çözünüz.

a – $\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -5.5 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

b – $\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ 15.5 \end{bmatrix}$

c – $\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 15.5 \end{bmatrix}$

d – $\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -5.5 \\ -5.4 \\ 2 \end{bmatrix}$

e – $\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -5.4 \\ 5.4 \\ -2 \end{bmatrix}$

buradan

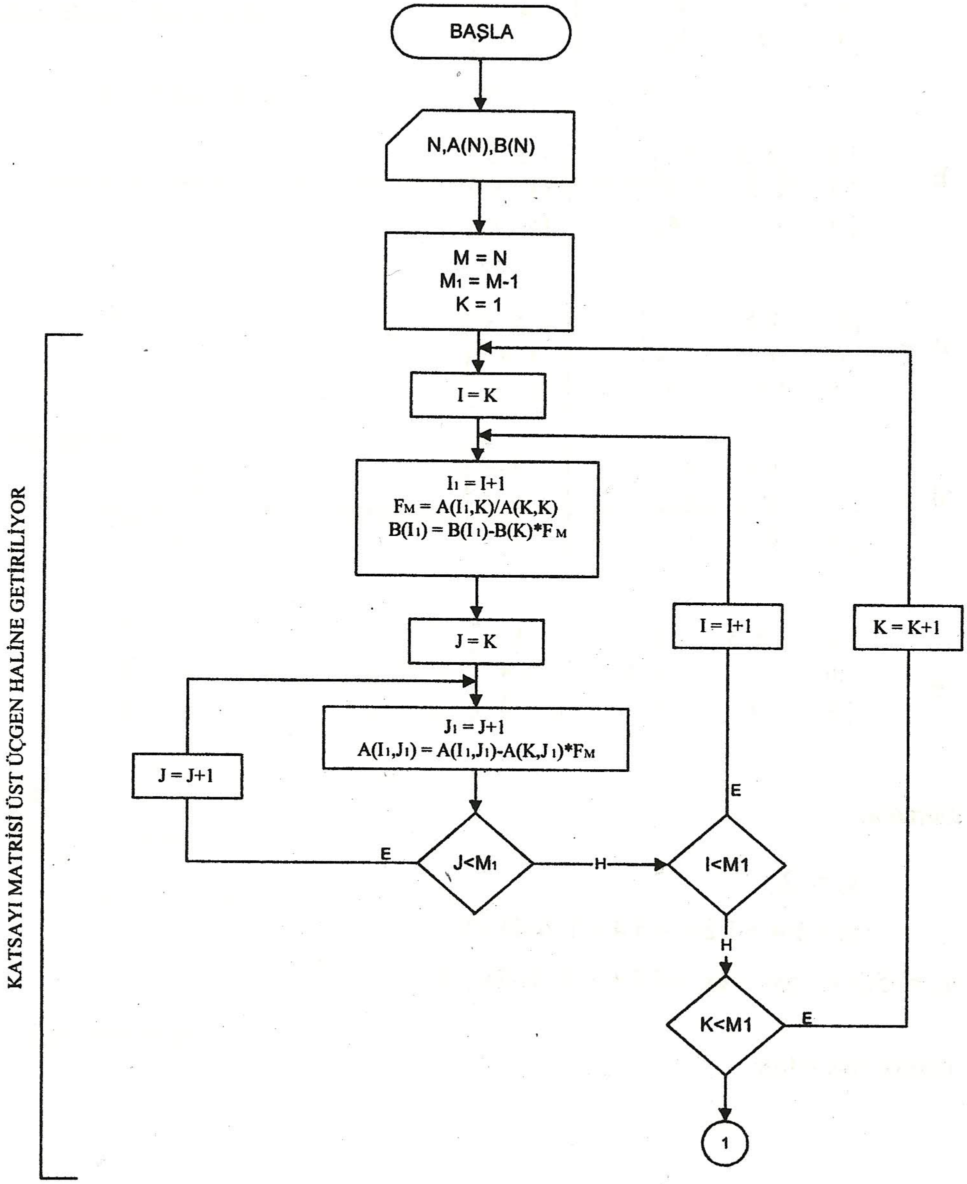
$x_3 = -2$

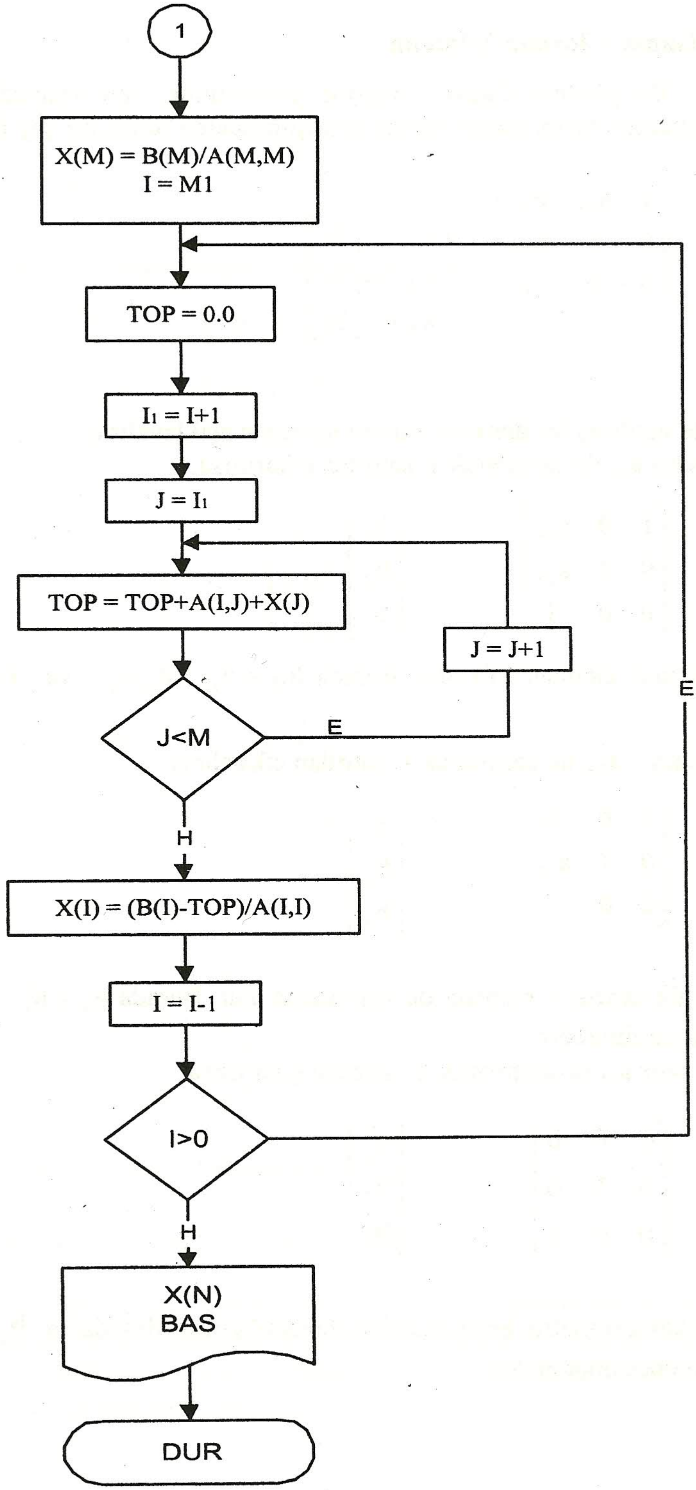
$x_2 = 5.4 + 1.2x_3 = 5.4 + 1.2(-2) = 3$

$x_1 = -5.5 + 1.5x_2 - 1x_3 = 5.5 + 1.5 - 1(-2) = 1$

olarak elde edilir.

GAUSS YOKETME YÖNTEMİ İLE DENKLEM TAKIMI ÇÖZÜMÜNE
AİT İŞARET AKIŞ DİYAGRAMI




1
X(M) = B(M)/A(M,M)
I = M1
TOP = 0.0
I1 = I+1
J = I1
TOP = TOP+A(I,J)+X(J)
J = J+1
J<M
E
H
X(I) = (B(I)-TOP)/A(I,I)
I = I-1
I>0
E
H
X(N)
BAS
DUR

3.2.4 Gauss – Jordan Yöntemi

Bu yöntem Gauss Yoketme yönteminde, son aşamada elde edilen üçgen matrisi birim matris haline dönüştürmekten başka bir şey değildir. Şimdi bunu

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

halinde verilmiş bir denklem takımı üzerinde açıklayalım.

a- 2. satır a_{12} ile çarpılarak 1. satırdan çıkarılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a'_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b'_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ilk satırın 2. elemanı sıfır olur. Burada $a'_{13} = a_{13} - a_{12}a_{23}$ ve $b'_1 = b_1 - a_{12}b_2$ dir.

b- 3. satır a'_{13} ile çarpılarak 1. satırdan çıkarılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b''_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

olarak ilk satırın 3. elemanı da sıfırlanmış olur. Burada $b''_1 = b'_1 - a'_{13}b_3$ olduğu hatırda tutulmalıdır.

c- 3. satır a_{23} ile çarpılarak 2. satırdan çıkarılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b''_1 \\ b'_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

olarak katsayı matris birim matrise dönüşmüş olur. Burada da $b'_2 = b_2 - a_{23}b_3$ olduğu unutulmamalıdır.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrisinin tersi A^{-1} i Gauss-Jordan dönüşümüyle bulunuz.

$$A.I = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada ilk matris Gauss yoketme yönteminde olduğu gibi üst üçgen haline dönüştürülürse 2. matris de artık Birim Matris olmaktan çıkmış, aşağıdaki şekle gelmiştir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1..2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \\ 2.75 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bu işlemin sonucunda ikinci matrisin alt üçgen matrise dönüştüğüne dikkat edilmelidir. Şimdi ilk matrisi birim matrise dönüştürürsek

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1.4 & -0.8 \\ 1 & 1.6 & -1.2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

olarak A^{-1} elde edilir . Doğruluğunu anlamak için A^{-1} A ile çarpılır. Sonuçta birim matris elde edilirse bulunan A^{-1} doğrudur.

GAUSS-JORDAN YÖNTEMİ İÇİN İŞARET AKIŞ DİYAGRAMI

[A] nxn [X]nx1 = [B]nx1 G-J YÖNTEMİ [I].[X] = [B']
[X] = [B']