自然科学中的数学 II- 单元测试 1

日期: 2024 年 4 月 21 日　时间: 10:00-12:00

(请将你的所有答案写在答题纸上，标记好题目序号，并保持卷面整洁.)

Part A. 判断和填空题 (30 分)

题 1 (填空题, 每小题 3 分). 完成下面填空.

(1) 函数 $u = e^{xyz}$ 在点 $P(1, 2, 1)$ 的全微分是____________.

(2) 设函数 $f(r)$ 可导，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，则函数 $f(r)$ 在非原点的梯度为____________.

(3) 函数 $\boldsymbol{u} = (y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2)$ 在点 $P(1, 3, 2)$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{u}|_P$ 为____________.

(4) 求 $\iint_\Omega x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,dxdy =$____________，其中区域 Ω 由 $y = 4 - x^2$, 以及 $y = -3x, x = 1$ 所围成.

(5) 设 $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2, x^2y)$，$\mathbf{F}(x, y)$ 的一个势函数为____________.

题 2 (判断题, 每小题 3 分). 判断下列命题是否正确.

(1) 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在原点 $(0, 0)$ 连续。

(2) 点集 $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ 是集合 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 的边界点但不是聚点.

(3) 设 $f(x, y) : D^2 \to R$ 是属于 C^2，且 $P_0 = (x_0, y_0)$ 是一个驻点。若 $|D^2f(P_0)| < 0$ 且 $f_{xx}(P_0) < 0$，则 $f(P_0)$ 是一个局部极大值.

(4) 设 Ω 是由 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), z = 3, z = 8$ 所围成的区域，则成立

$$\iiint_\Omega (x^2 + xy^2e^{x^2+y^2})dxdydz = \frac{1}{2}\iiint_\Omega (x^2 + y^2)dxdydz.$$

(5) 设 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 是三维空间开区域 D 上的一个向量场，则以下两个条件等价:*(1)* 存在函数 $\boldsymbol{u}$，使得 $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{u}$; *(2)* 设 L 是 D 中一条不相交的光滑曲线，$\int_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{t}ds$ 的积分与路径无关，其中 $\mathbf{t}$ 是曲线 L 上从起点到终点的单位切向量.

Part B. 多元微分学 (30 分)

题 3 (10 分). 设函数 $u = f(x - y, x\sin z, 2x + y)$, $f \in C^2$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$.

题 4 (10 分). 设 $z = \sqrt{|xy|}$.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}, \dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}$.

(2) 探讨该函数 $z=\sqrt{|xy|}$ 在原点 $(0,0)$ 的可微性.

题 5 (10 分). 求曲面 $\Sigma: x^2+y^2-2z=0$ 上的点到点 $P(2,2,0)$ 的最短距离.

Part C. 多元积分学 (30 分)

题 6 (10 分). 计算 $\iiint_\Omega(\sqrt{x^2+y^2}+e^z)dxdydz$，其中 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的区域.

题 7 (10 分). 计算曲线积分 $\int_L(x^2-2y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是由 $A(0,0)$ 到 $B(2,0)$ 的上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$.

题 8 (10 分). 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，利用 *Gauss* 公式计算曲面积分

$$\iint_\Sigma \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy,$$

其中 Σ 为任意不经过原点的闭曲面，曲面定向取外侧. *(提示：考虑 Σ 所围成的区域包含或不包含原点.)*

Part D. 论述题 (10 分)

题 9 (10 分). 请回答以下问题:

(1) 叙述两类曲面积分的关联，探讨二维情形的 *Green* 公式如何推广到三维情形的 *Gauss* 公式.

(2) 对于形如 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 或 $f(x)=e^{-x^2}$ 的函数无法解析得到其不定积分，探讨如何通过数值计算的方法近似求解这一类型函数的定积分，例如 $\displaystyle\int_1^2\frac{\sin x}{x}dx$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$.