4.9 第 1 次小测

1.1 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$ 的全微分

参考解法：

$$\mathrm{dz} = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = [(1+x)e^{x+y} + \ln(1+y)]dx + (xe^{x+y} + \frac{x+1}{y+1})dy$$

常见错误：

1. 全微分概念不清楚，$\mathrm{dz} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$，漏掉$dx, dy$

2. 链式不完整，计算错误

1.2 $z = f(\cos x, \sin y, \ln(x+y))$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$

参考解法：

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1 \cdot 0 + f_2 \cdot \cos y + f_3 \cdot \frac{1}{x+y} = \cos y\, f_2 + \frac{1}{x+y} f_3$$

偏导符合可以有不同形式，$f_2 = \frac{\partial f}{\partial(\sin y)}, \cdots$

常见错误：

1. 与梯度弄混，$\left(f_1 \cdot 0, f_2 \cdot \cos y, f_3 \cdot \frac{1}{x+y}\right)$

2. 不会算或算错

1.3 $\mathrm{f(x,y)} = \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{y}^2$在点(3,1)处关于方向 $\mathrm{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 的方向导数为

参考解法：

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\left(x + \frac{3}{5}t\right)^2}{2} + \left(y + \frac{4}{5}t\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + y^2\right)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{3}{5}tx + \frac{9}{50}t^2 + \frac{8}{5}ty + \frac{16}{25}t^2}{t}$$

$$= \frac{3}{5} \times 3 + \frac{8}{5} \times 1 = \frac{17}{5}$$

常见错误：

1. 空白，方向导数不知道怎么代入计算

2. 与梯度弄混，$(x, 2y) = (3,2)$

1.4 广义极坐标变换$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$的雅克比行列式$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} =$

参考解法：(题目有个笔误，球坐标 → 极坐标)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = abr$$

常见错误：

1. 列出行列式未计算， 列出偏导数形式未代入求偏导

1.5 曲面$x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$ 在点 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 2\right)$ 处的单位法向量

参考解法：(题目改为：一个单位法向量为)

$$F = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} - 1$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{9}\right)^2}}\left(2x, 2y, \frac{2}{9}z\right)\Bigg|_{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},2\right)} = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

常见错误：

1. 没有归一化: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right)$

2. 单位法向量有 2 个，方向相反。基本都没有另一个 $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right)$

2.1 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$

参考解法：错误

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+k)x}{(1+k^2)x^2} = \frac{1+k}{1+k^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty, \text{极限不存在}$$

2.2 点$(0,0)$是集合$\{(x,y)|0 < x^2 + y^2 \le 1\}$的聚点但不是边界点

参考解法：错误

$P(0,0)$的任意领域$U(P,\delta)$都有集合里的点，是聚点。$U(P,\delta)$有集合里的点，

也有集合外的点$P(0,0)$, 是边界点

常见错误：可能是边界点上是否要去心，概念不明确

2.3 对于区域$D=\{(x,y)|0\le x^2+y^2\le 1\}$上的积分$\iint_D f(x,y)d\sigma$,

如果$f(x,y)$仅在有限个点上不为 0，则积分仍为 0

参考解法：正确

函数值不为 0 的有限个孤立点，其积分面积$d\sigma=0$，积分也为 0

2.4 函数$u(x,y)$在单连通区域G内存在连续偏导，则存在沿G内任意闭曲线的曲线积分

$\oint_L Pdx+Qdy=0$, 其中$P=\frac{\partial u}{\partial x}, Q=\frac{\partial u}{\partial y}$

参考解法：正确

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \int_L Pdx+Qdy$与积分路径无关,$\oint_L Pdx+Qdy=0$

或$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=Pdx+Qdy, \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}du=u-u_0$

2.5 在极坐标变换过程中$\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=1$

参考解法：错误

一元函数$r=r(x), \frac{dr}{dx}\cdot\frac{dx}{dr}=1$

多元函数$\begin{cases} y_1=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ y_n=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=G_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0 \\ \vdots \\ x_n=G_n(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0 \end{cases}$

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=I_n$$

本题中$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\arctan\frac{y}{x} \end{cases}$

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} & \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{-\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另外，$\left.\frac{\partial x}{\partial r}\right|_{\theta}=\cos\theta,\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{y}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta,$

两个偏导数的条件不同,它们之间没有直接关联

常见错误：和一元函数的隐函数微分弄混了，没有去计算

3 求过点$(2,0,-3)$且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程

参考解法：

1. 两个平面法向量的外积得到垂直平面的法向量，通过点法式求解

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$

$16x-14y-11z-65=0$

2. 取 2 个特殊x值(0 和 1)，解方程，得到直线上的 2 个点，求出直线的方向向量

即垂直平面的法向量，通过点法式求解

$$\begin{cases}0-2y+4z-7=0\\0+5y-2z+1=0\end{cases},\left(0,\frac{5}{8},\frac{33}{16}\right);\begin{cases}1-2y+4z-7=0\\3+5y-2z+1=0\end{cases},\left(1,-\frac{1}{4},\frac{11}{8}\right)$$

$$\boldsymbol{n}=\left(1,-\frac{7}{8},-\frac{11}{16}\right)=-\frac{1}{16}(-16,14,11)$$

3. 两个平面法向量在垂直平面内，通过参数式求解

$(x-2,y-0,z+3)=\lambda(1,-2,4)+\mu(3,5,-2)$

常见错误：

1. 把直线和平面的方程弄混，

$x-2y+4z-7=0\Rightarrow\frac{x}{1}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}+\frac{z}{\frac{1}{4}}=7\Rightarrow$法向量$\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$

设平面方程$\frac{x-2}{a}+\frac{y-0}{b}+\frac{z+3}{c}=0$ 则法向量为(a,b,c)

2. 写出两个平面的法向量，但不会求与这两个向量都垂直的向量，外积不熟悉

3. 计算错误，多个同学整理点法式为一般式时把常数算错为 55

4 求函数$z=x^2+y^2-12x+16y$在有界闭区域$x^2+y^2=25$

的最大值和最小值。(提示 $\lambda=-1$ 或 3)

参考解法：(题目的提示改为：$\lambda=1$ 或 -3)

1. Lagrange 参数法，求驻点，得到最值

依题意，求$z=x^2+y^2-12x+16y$在边界$x^2+y^2=25$ 上的条件极值

令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$，则

$\nabla L=(2x+2x\lambda-12,2y+2y\lambda+16,x^2+y^2-25)=\mathbf{0}$

解得$(x,y,\lambda)=(3,-4,1)$或$(x,y,\lambda)=(-3,4,-3)$

最小值：$z(3,-4)=-75$；最大值：$z(-3,4)=125$

2. 用参数化为一元函数，再求极值。未用到相关知识点，建议扣 2 分

由$x^2+y^2=25$, 设$x=5\cos\theta, y=5\sin\theta, 0\le\theta<2\pi$

$z=x^2+y^2-12x+16y=25-60\cos\theta+80\sin\theta$

$=25+100\left(-\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right)=25+100\sin(\theta+\phi)$

其中$\phi=\arctan(-\frac{3}{4}), \theta+\phi\in[\phi,\phi+2\pi)$时，$z$最大值为 125，最小值为 -75

常见错误：

1. 想到 Lagrange 参数法，但方程没列对，比如：

令$F(x,y,z)=x^2+y^2-12x+16y-z=0, G(x,y)=x^2+y^2-25=0$

$L=F+\lambda G$，$\nabla L=0$

2. 计算错误；或者就列个方程，不要计算的分数了

5 设$\phi(u,v)$具有连续偏导数，证明由方程$\phi(cx-az,cy-bz)=0$

所确定的函数$z=f(x,y)$满足$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$

3 月 3 日习题 3 原题：教材 91 页习题 9 – 5 第 7 题

参考解法：

1 隐函数定理求偏导

$u = cx - az, v = cy - bz$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\phi_x}{\phi_z} = -\frac{c\phi_u}{-a\phi_u - b\phi_v} = \frac{c\phi_u}{a\phi_u + b\phi_v}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\phi_y}{\phi_z} = -\frac{c\phi_v}{-a\phi_u - b\phi_v} = \frac{c\phi_v}{a\phi_u + b\phi_v}$$
$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\phi_u}{a\phi_u + b\phi_v} + \frac{bc\phi_v}{a\phi_u + b\phi_v} = c$$

2 直接用链式，分别求x, y的偏导，解方程组

$u = cx - az, v = cy - bz$

$$\begin{cases} \phi_u\left(c - a\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \phi_v\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \\ \phi_u\left(-a\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \phi_v\left(c - b\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c\phi_u}{a\phi_u + b\phi_v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\phi_v}{a\phi_u + b\phi_v} \end{cases}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$$

常见错误：

1. 对链式法则的链理解不够，由$u = cx - az, v = cy - bz$，

对u, v求偏导凑结果，而没有用到完整的链。

2. 关系链弄错，没有列对方程。或者方程没有解对

3. 空白。可能是题目给的是$\phi(u, v)$，而求的是$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，用链式法则不能直接得到，

无从下手，要加强隐函数定理的使用。用方程组解，数学概念稍差些

6 求 $\int_\Omega (y^2 + z^2)d\mu$，其中 Ω 是由平面上曲线$y^2 = 2x$绕着x轴旋转而成的曲面

与$x = 5$ 所围成的闭区域

参考解法：$\int_\Omega (y^2 + z^2)d\mu$ 改成 $\iiint_\Omega (y^2 + z^2)dv$？由$xOy$平面上

1 Ω 投影到yOz平面，$D_{yz}: y^2 + z^2 \le \left(\sqrt{10}\right)^2$

Ω 表示为: $(y, z) \to (\rho, \theta), 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le \sqrt{10}, \frac{\rho^2}{2} \le x \le 5$

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{5}\rho^2dx=2\pi\times(\frac{5}{4}\rho^4-\frac{1}{12}\rho^6)\Big|_0^{\sqrt{10}}=\frac{250}{3}\pi$$

2 Ω 投影到yOz平面，$D_{yz}: y^2+z^2\le(\sqrt{10})^2$

Ω 表示为: $0\le y\le\sqrt{10}, -\sqrt{10-y^2}\le z\le\sqrt{10-y^2}, \frac{y^2+z^2}{2}\le x\le 5$

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\int_0^{\sqrt{10}}dy\int_{-\sqrt{10-y^2}}^{\sqrt{10-y^2}}dz\int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^{5}(y^2+z^2)dx=$$

3 Ω 投影到xOy平面，$D_{xy}: y^2=2x$与$x=5$ 所围成

Ω 表示为: $0\le x\le 5, -\sqrt{2x}\le y\le\sqrt{2x}, -\sqrt{2x-y^2}\le z\le\sqrt{2x-y^2}$

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)dv=\int_0^5dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}dy\int_{-\sqrt{2x-y^2}}^{\sqrt{2x-y^2}}(y^2+z^2)dz=$$

积分区域和积分变量的选择会影响计算难度，投影的积分区域应选取规则的

三角形、方形(直接坐标)或圆形(柱坐标或球坐标)

常见错误：

1. 积分区域上下限没写对

2. 积分的顺序错，关联变量的积分后算 $\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{5}dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^2\cdot\rho d\rho$

3. 坐标变换积分微元漏乘 ρ

4. 积分区域和积分变量不合适，计算复杂，未能算出来

7 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$,其中 Σ 为介于平面$z=0$ 和$z=2$ 之间的

圆柱面$x^2+y^2=4$

参考解法：

圆柱面分成 2 部分,$\Sigma_1: y=-\sqrt{4-x^2}$和$\Sigma_2: y=\sqrt{4-x^2}$

Σ_1,Σ_2投影到zOx平面均为$D_{zx}: 0\le z\le 2, -2\le x\le 2$

$$dS = \sqrt{1 + y_z^2 + y_x^2}dzdx = \sqrt{1 + 0 + \frac{x^2}{4 - x^2}}dzdx = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}dzdx$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \int_0^2 dz \int_{-2}^2 \frac{1}{4 + z^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2} \times 2d\frac{z}{2} \cdot \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \times 2d\frac{x}{2}$$

$$= (\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2})\Big|_0^2 \times (2\arcsin\frac{x}{2})\Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \times 2\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

由于被积函数关于y是偶函数，积分曲面Σ_1、Σ_2关于zOx面对称，故

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = 2\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

常见错误：

1. 由于比较习惯投影到xOy平面，本题投影到xOy平面后一个点有无限个积分函数对应点，积分区域为 0，不能进行积分计算。空白较多

2. 左右两侧的投影重叠，也就是投影后的点对应了 2 个函数值，需要分块处理。漏掉一侧的积分。

3. 计算错误，积分微元，积分区域，定积分计算等

8 计算曲面积分$I = \iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy$，其中 Σ 是曲面$z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$的上侧.(提示：使用高斯公式)

参考解法 1：构造闭区域，用高斯公式

取Σ_1为xOy平面$z = 0$ 被$x^2 + y^2 = 1$ 所围部分的下侧，Ω 为由 Σ, Σ_1围成闭区域

$$I_0 = \iint\limits_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} (6x^2 + 6y^2 + 6z)dxdydz$$

$$\xRightarrow{\text{柱坐标}} 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho^2} (\rho^2 + z) \cdot \rho dz = 12\pi \int_0^1 \left(-\frac{\rho^5}{2} + \frac{\rho}{2}\right) d\rho = 2\pi$$

Σ_1在xOy平面的投影为$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$,

$z=0$,令$F(x,y,z)=z,\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}=(0,0,1)$,方向朝下,$\boldsymbol{n}=(0,0,-1)$

$$I_1=\iint_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$\xRightarrow{z=0,dz=0}\iint_{D_{xy}}-3\cdot(-dxdy)=3\pi$$

$$I=\iint_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=I_0-I_1=2\pi-3\pi=-\pi$$

参考解法 2：直接采用对坐标的曲面积分

Σ 投影到xOy平面$D_{xy}: x^2+y^2\le 1, z=1-x^2-y^2, F(x,y,z)=z+x^2+y^2-1$

曲面上侧，$\boldsymbol{n}=\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x,2y,1)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$dS=\frac{dydz}{\cos\alpha}=\frac{dzdx}{cos\beta}=\frac{dxdy}{cos\gamma}$$

$$I=\iint_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[2x^3\cdot 2x+2y^3\cdot 2y+3(1-x^2-y^2)^2-3]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[7x^4+7y^4+6x^2y^2-6x^2-6y^2]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[7(x^2+y^2)^2-8x^2y^2-6(x^2+y^2)]dxdy$$

$$\xRightarrow{极坐标}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(7\rho^4-6\rho^2-8\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta)\cdot\rho d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{7}{6}-\frac{6}{4}-\frac{1}{6}(1-\cos 4\theta)\right)d\theta=\left(-\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{24}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=-\pi$$

常见错误：

1. 高斯公式适用封闭区域，漏扣缺的底面

2. 底面的定向或面积微元错

3. 用错公式，写成斯托克斯公式的行列式

4. 计算错误，积分函数错为 $\iiint\limits_{\Omega} 1dv$, $\iiint\limits_{\Omega}(6x^2+4y+6z)dxdydz$

9 在学习方向导数和函数连续性时，我们有个问题：若函数在点(x_0,y_0)的任意方向的方向导数存在，则该函数是否在该点连续？以下列函数为例子：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0.0)\end{cases},$$

(1)讨论函数在(0,0)处的极限

(2)讨论函数在(0,0)点的方向导数

(3)通过上述讨论可得到什么结论

参考解法

(1)函数$f(x,y)$在(0,0)处的极限，令$y^2=kx$，则

$$\lim_{\substack{y^2=kx\\x\to0}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

极限值依赖于(x,y)趋于(0,0)的路径，故$f(x,y)$在(0,0)处的极限不存在

(2)函数$f(x,y)$在(0,0)点的方向导数，记方向向量为$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(0+tv_1,0+tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^3v_1v_2^2}{t(t^2v_1^2+t^4v_2^4)}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{v_1v_2^2}{v_1^2+t^2v_2^4}=\begin{cases}0 & ,v_1=0\\ \dfrac{v_2^2}{v_1} & ,v_1\neq0\end{cases}$$

函数$f(x,y)$在(0,0)点的任意方向的方向导数都存在

(3)结论：函数在点(x_0,y_0)的任意方向的方向导数存在 $\nRightarrow$ 该函数在该点连续

常见错误：

1. 趋于(0,0)的路径选取不理想，没得到不同的极限值。

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=0,\text{极限为 }0.$$

选取不同路径的方法只能用于证明极限不存在

2. 不知道连续和偏导之间关系(题目的意图)，尝试证明极限存在失败

3. 不知道设方向向量代入计算方向导数，无从下手，方向导数部分空白

4. 方向导数没有考虑$(0,\pm 1)$的情况

10 请回答以下问题

(1)叙述二维平面上的曲线积分与路径无关的定义，以及两个等阶条件。

(2)如何把一元函数的不定积分推广到高维？

参考解法

(1)定义在连通集合$D\subset\mathbb{R}^2$上的向量场$\boldsymbol{F}=(P,Q)$，如果对于任意两点$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$,

以及在D中从$\boldsymbol{a}$到$\boldsymbol{b}$的所有曲线L，曲线积分$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$都有相同的值，则称在$D$中的

曲线积分$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$与路径无关，此时可记$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

在D中的曲线积分$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$与路径无关的等价条件：

(i)存在势函数$f(x,y):D\to\mathbb{R}^1$, 使得$\nabla f=\boldsymbol{F}$

$$\nabla f=\boldsymbol{F}，\text{即}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(P,Q),\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=Pdx+Qdy$$

(ii)D中任意光滑闭曲线L都有$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0$

(2)一元函数的不定积分：在$[a,b]$上的连续函数$f(x)$, 存在原函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$$

n维时，定义在$D\subset\mathbb{R}^n$的向量场$\boldsymbol{F}$，如果曲线积分$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$与路径无关，则存在一个原函数(势函数) $f(\boldsymbol{x})=\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}+C,\boldsymbol{a}$为$D$中任意一定点

常见错误：

1. 把等价条件作为定义

2. 没有注意到是不定积分，对定积分进行了一些分析

3. 不知道题目意图，没有理解 2 个问题间的关联。空白