

## 《自然科学中的数学 III》期中小测试题

1. (10 分) 设  $A, B, C$  为三事件, 且  $P(A) = P(B) = 1/4$ ,  $P(C) = 1/3$  且  $P(AB) = P(BC) = 0$ ,  $P(AC) = 1/12$ , 求  $A, B, C$  至少有一事件发生的概率.

2. (15 分) 设

$$P\{X=k\} = C_2^k p^k (1-p)^{2-k}, \quad k=0,1,2$$

$$P\{Y=m\} = C_4^m p^m (1-p)^{4-m}, \quad m=0,1,2,3,4$$

分别为随机变量  $X, Y$  的概率分布, 如果已知  $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$ , 试求  $P\{Y \geq 1\}$ .

3. (20 分) 已知随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = Ae^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 求: (1)  $A$  值; (2)  $P\{0 < X < 1\}$ ; (3)  $F(x)$ . (4) 求  $P\{X+Y \leq 4\}$ .

4. (20 分) 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 确定常数  $k$ ;
- (2) 求  $P\{X < 1, Y < 3\}$ ;
- (3) 求  $P\{X < 1.5\}$ ;
- (4) 求  $P\{X+Y \leq 4\}$ .

5. (20 分) 假设一条生产线生产的产品合格率是 0.8. 要使一批产品的合格率达到在 76% 与 84% 之间的概率不小于 90%, 问这批产品至少要生产多少件? (利用中心极限定理解答, 提示  $\Phi(1.64) = 0.95$ )

6. (15 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的随机变量, 且有  $E(X_i) = \mu$ ,  $D(X_i) = \sigma^2$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

(1) 验证  $E(\bar{X}) = \mu$ ,  $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ ;

(2) 验证  $S^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)$ ;

(3) 验证  $E(S^2) = \sigma^2$ .