

2022年自然科学中的数学多元微积分部分小测

1. 填空题

1.1 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$ 的全微分

1.2 $z = f(\cos x, \sin y, \ln(x+y))$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$

1.3 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$ 在点 $(3, 1)$ 处关于方向 $\boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 的方向导数为

1.4 广义球坐标变换 $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$ 的雅克比行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} =$

1.5 曲面 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ 在点 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$ 处的单位法向量

2. 判断题

2.1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$

2.2 点 $(0,0)$ 是集合 $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的聚点但不是边界点

2.3 对于区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$,

如果 $f(x, y)$ 仅在有限个点上不为 0, 则积分仍为 0

2.4 函数 $u(x, y)$ 在单连通区域 G 内存在连续偏导, 则存在沿 G 内任意闭曲线的曲线积分

$\oint_L P dx + Q dy = 0$, 其中 $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$

2.5 在极坐标变换过程中 $\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = 1$

计算题 (都是很常规的题目类似这样考计算题的概率很大)

3 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程

4 求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在有界闭区域 $x^2 + y^2 = 25$

的最大值和最小值。(提示 $\lambda = -1$ 或 3)

5 设 $\phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\phi(cx - az, cy - bz) = 0$

所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$

6 求 $\int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\mu$, 其中 Ω 是由平面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕着 x 轴旋转而成的曲面

与 $x = 5$ 所围成的闭区域

7 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 为介于平面 $z = 0$ 和 $z = 2$ 之间的

圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$

8 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy$, 其中 Σ 是

曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧。(提示: 使用高斯公式)

宋翀老师亲自出的两道题（重在理解课堂所讲）

9 在学习方向导数和函数连续性时，我们有个问题：若函数在点 (x_0, y_0) 的任意方向的方向导数存在，则该函数是否在该点连续？以下列函数为例子：

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (1) 讨论函数在 $(0,0)$ 处的极限
- (2) 讨论函数在 $(0,0)$ 点的方向导数
- (3) 通过上述讨论可得到什么结论

10 请回答以下问题

- (1) 叙述二维平面上的曲线积分与路径无关的定义，以及两个等价条件。
- (2) 如何把一元函数的不定积分推广到高维？