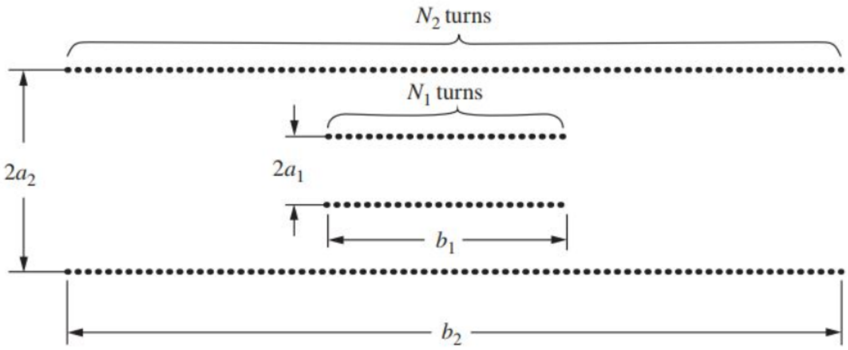
1.

如图，一个半径为 a_1, 长为 b_1 的 N_1 匝线圈位于半径为 a_2, 长为 b_2 的 N_2 匝线圈内。试求出二个线圈的互感系数 M。



解：

设线圈 1 中有电流 I_1，则其内部的磁感应强度为

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{b_1}$$

这个磁场对于线圈 2 的磁通量为

$$\Phi_{21} = \pi a_1^2 N_2 \frac{b_1}{b_2} B_1 = N_1 N_2 \pi a_1^2 \frac{\mu_0 I}{b_2}$$

即

$$M = N_1 N_2 m u_0 \frac{\pi a_1^2}{b_2}$$

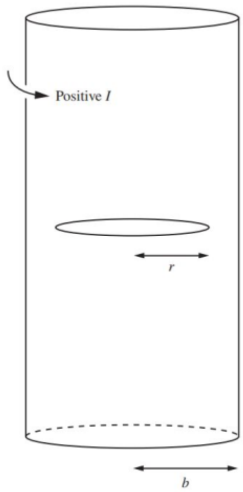
2.

一无限长半径为 b，单位长度 n 匝的螺线管，通以 $I(t) = I_0 \cos \omega t$ 的电流，电流的正向如图所示。一个半径为 $r < b$，电阻为 R 的小圆环放置在螺线管中心，其环面与螺线管轴线垂直。

(a) 环中的感应电流是多少？

(b) 环上的一小段将受到磁场力，在 t 为多少时，此力最大？

(c) 力对于环有何影响？即，此力将使得环平移、旋转、翻身、拉伸或压缩？



解：

螺线管中的磁场为（向上为正）

$$B = n\mu_0 I_0 \cos \omega t$$

(a) 环中的磁通量

$$\Phi = \pi r^2 B = \pi r^2 n \mu_0 I_0 \cos \omega t$$

感应电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\pi r^2 n \mu_0 I_0 \omega \sin \omega t}{R}$$

3.

* 一个半径为 R, 单位长度 n 匝的螺线管中通以电流 $I(t) = I_0 \cos \omega t$, 螺线管内的磁感应强度 $B(t) = \mu_0 n I(t)$.

(a) 求螺线管内半径为 r 处, 因变化的磁场 $B_0(t) = \mu_0 n I_0 \cos \omega t$ 产生的电场强度。

(b) 求螺线管内 r 处，因 (a) 中变化的电场产生的磁场，记为 $\Delta B(t)$。

(c) 考察 $\Delta B(t)/B_0(t)$, 试证明如下表述："如果电流随的变化发生的时间远大于光穿过螺线管直径所需的时间，则螺线管中的磁感应强度就可以简单地由 $B_0(t) = \mu_0 n I_0 \cos \omega t$ 表示".（对于日常所用的 ω，这个条件总能满足）。

解：

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \mu_o n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{1}{2} r \mu_o n I_0 \omega \sin \omega t$$

考虑长为 L，宽为 $\mathrm{d}r$ 的一个截面，

$$\frac{\mathrm{d}\Delta B(r)}{\mathrm{d}r} L \mathrm{d}r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} L \mathrm{d}r = \frac{1}{2} L r \mu_o^2 \varepsilon_0 n I_0 \omega^2 \cos \omega t \mathrm{d}r$$

积分，注意到 $r = 0$ 时，由对称性 $\Delta B(0) = 0$。

$$\Delta B(r) = \frac{1}{4} r^2 \mu_o^2 \varepsilon_0 n I_0 \omega^2 \cos \omega t = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} B$$

光穿过螺线管的时间 $t_1 \sim \frac{2R}{c}$，而电流的变化时间 $t_2 \sim \frac{1}{\omega}$，若 $t_2 \gg t_1$，或 $\frac{t_1}{t_2} = \frac{2R\omega}{c} \ll 1$，则 $\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \ll 1$，$|\Delta B| \ll |B|$.

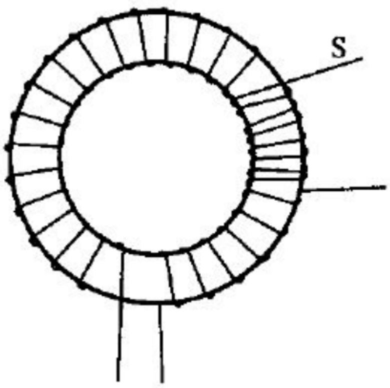
4.

一空心的螺线环, 其平均周长为 60 cm , 横截面积为 3cm^2, 总匝数为 2400, 现将一个匝数为 100 的小线圈 S 套在螺绕环上 (见图) , 求:

(1) 螺绕环的自感系数;

(2) 环与线圈 S 间的互感系数;

(3) 若 S 两端接于冲击电流计, 且知 S 和电流计的总电阻为 2000 , 问当螺绕环内的电流 $I = 3\ A$ 由正向变成反向时, 通过冲击电流计的电量共有多少 C?



解:

(1). 环内磁感强度

$$B = \mu_0 n I$$

磁通匝链数

$$\Psi = NS\mu_0 nI = \mu_0 n^2 VI$$

$$L = \mu_0 n^2 V = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{2400}{0.6}\right)^2 \cdot 0.6 \cdot 3 \times 10^{-4} = 3.6 \times 10^{-3}\mathrm{H}$$

(2) 通过小线圈的匝链数

$$\Psi_{21} = N_2 S\mu_0 nI$$

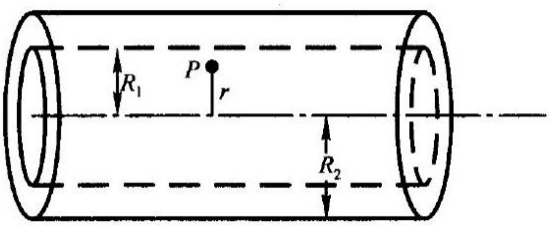
$$M = N_2 S\mu_0 n = 100 \cdot 3 \times 10^{-4} \cdot \frac{2400}{0.6} = 1.5 \times 10^{-4}$$

5.

一无限长的同轴电缆由两薄壁空心导体圆筒所组成, 内、外圆筒的半径分别为 R_1 和 R_2, 设电流沿内筒流出、由外筒流回, 大小为

$$I=\frac{1}{2}At^2$$

A 为一正的恒量, 试求出到电缆轴线的距离为 $r(r<R_1)$ 的 P 点的磁感强度.



解:
电流产生的磁场在两个筒之间，形成与圆筒同轴的圆形. 在内筒内的磁场由感应电场的变化产生。利用安培回路定理

$$B\,2\pi r=\mu_0\frac{1}{2}At^2,\quad B=\frac{\mu_0}{4\pi r}At^2$$

由这样的磁感应的变化产生的电场沿轴向，由对称性可知（类比于螺线管电流的磁场），电场在圆筒内部，在圆筒外面的电场为 0。单位长度上，沿径向的截面上的磁通量是

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}B\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0}{4\pi r}At^2\mathrm{d}r=\frac{\mu_0}{4\pi}At^2\ln\frac{R_2}{R_1}$$

利用电场的环路方程, 单位长度，跨圆筒径向的回路，只有 $r<R_1$ 内部一段有贡献，外部电场为 0，两桶之间的电场与回路垂直

$$E=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0}{2\pi}At\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由 E 的变化产生的感应磁场绕圆筒，其方向与原磁感应强度相反，利用环路定理求出其大小

$$B\,2\pi r=\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi r^2=\frac{\varepsilon_0\mu_0^2}{2}Ar^2\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$B=\frac{\varepsilon_0\mu_0^2}{4\pi}Ar\ln\frac{R_2}{R_1}$$