



厦门大学《自然科学中的数学 II》课程 期末试卷

_____学院_____系_____年级_____专业

1. (10 分) 在曲面 $z = x^2 y^2$ 上求出一点, 使曲面 $z = x^2 y^2$ 在该点的法向量与函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $P(2, 2, 1)$ 处的梯度平行, 并写出过该点的切平面方程。

得分	
评卷人	

2. (10 分) 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为 $z=1$, $z=4$ 和 $z=y^2+x^2$ 所围区域.

得分	
评卷人	

3. (10 分) 袋中装有 m 只正品硬币, n 只次品硬币, (次品硬币的两面均印有国徽)。在袋中任取一只, 将它投掷 r 次, 已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多少?

得分	
评卷人	

4. (10 分) 设总体 $X \sim N(\mu, 8)$, μ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的一组简单随机样本, 其均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 。如果以区间 $(\bar{X}-1, \bar{X}+1)$ 作为 μ 的置信区间。当 $n=36$ 时, 求置信区间 $(\bar{X}-1, \bar{X}+1)$ 的置信水平。($\Phi(2.12)=0.983$)

得分	
评卷人	

5. (10 分) 设 X 满足如下分布律:

$$P(X=x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, x=0,1,2,\cdots,m, 0 < p < 1$$

其中 p 为未知参数。若 X_1, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机抽样, 试求 p 的极大似然估计 \hat{p}_{mle} , 并求解它的数学期望 $E(\hat{p}_{mle})$ 和方差 $\text{Var}(\hat{p}_{mle})$ 。

得分	
评卷人	

6. (10 分) 定义 $f(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k$ 为有限取值离散型随机变量的信息

熵，求在什么分布情况下信息熵取到最大值，此时信息熵等于多少？

得分	
评卷人	

7. (10 分) 有两批棉纱, 为比较其断裂强度, 从中各取一个样本, 测试得到:

第一批棉纱样本: $n_1=200$, $\bar{x}=0.532\text{kg}$, $s_1=0.218\text{kg}$

第二批棉纱样本: $n_2=200$, $\bar{y}=0.57\text{kg}$, $s_2=0.176\text{kg}$

设两强度总体服从正态分布, 方差未知但相等, 两批

强度均值有无显著差异 ($\alpha=0.05$, $t_{0.025}(398)=1.96$)

得分	
评卷人	

8. (10 分) 将 $\ln x$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 的值。

得分	
评卷人	

9. (10 分) 求解下列常微分方程

(1) 初值问题 $y' = 2xe^y, y(1) = 0$; (2) $y' + 2xy = e^{x^2}y^2$ 。

得分	
评卷人	

10. (10 分) 求下列常微分方程组的通解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + 2e^{-t}, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

得分	
评卷人	

附加题:

11. 设 $F(x, y, z)$ 二阶连续可导, 且满足 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, 求证:

$$\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] dv = \iint_{\Sigma} F \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

其中 Ω 是光滑封闭曲面 Σ 所围的区域, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}}$ 是 F 沿曲面 Σ 的单位外法线方向 \mathbf{n} 的方向导数.

得分	
评卷人	

12. 某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8. 医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言。用中心极限定理计算 ($\Phi(1.09) = 0.8621, \Phi(1.25) = 0.8944$).

(1) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？

(2) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

得分	
评卷人	