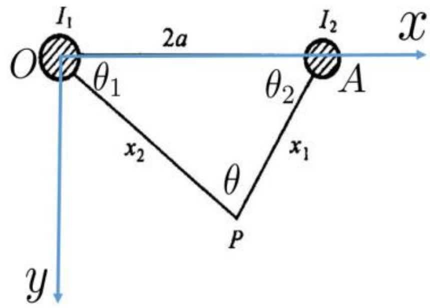
1.

两条无限长的平行直导线相距为 $2a$，分别载有电流 I_1 和 I_2, 空间中任一点 P 到两条导线的距离分别为 x_1 和 x_2(如图)，当两电流同向及反向时，P 点的磁感强度各为多少?



解:

取如图所示坐标，z 轴垂直纸面向内。I_1 和 I_2 均沿 z 轴方向。P 点的磁感强度为

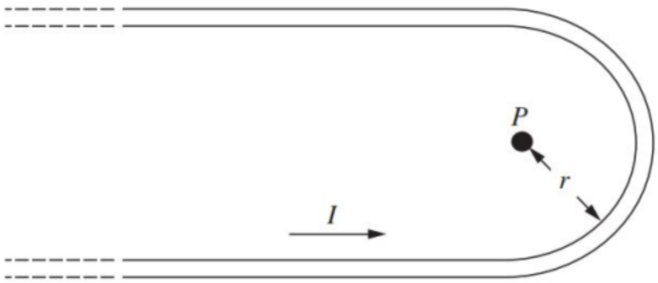
$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x_2}(\boldsymbol{k} \times \overrightarrow{OP}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_1}(\boldsymbol{k} \times \overrightarrow{AP}) \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x_1}(-\sin\theta_1 \boldsymbol{i} + \cos\theta_1 \boldsymbol{j}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_2}(-\sin\theta_2 \boldsymbol{i} - \cos\theta_2 \boldsymbol{j})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\left(\frac{I_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{x_2}\right)^2 + \frac{2I_1 I_2}{x_1 x_2}(\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2)\right)^{1/2} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\left(\frac{I_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{x_2}\right)^2 - \frac{2I_1 I_2}{x_1 x_2}\cos(\theta_1 + \theta_2)\right)^{1/2} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\left(\frac{I_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{x_2}\right)^2 + \frac{I_1 I_2}{x_1 x_2}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - 4a^2}{x_1 x_2}\right)\right)^{1/2} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi x_1 x_2}\left(I_1^2 x_2^2 + I_2^2 x_1^2 + I_1 I_2(x_1^2 + x_2^2) - 4a^2 I_1 I_2\right)^{1/2} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi x_1 x_2}\sqrt{(I_1 + I_2)(I_1 x_2^2 + I_2 x_1^2) - 4a^2 I_1 I_2}\end{aligned}$$

把 I_2 换为 $-I_2$，就得到反向电流的磁感应强度。

2.

一根长导线弯成如图所示形状，求出半圆中心位置 P 处的磁感应强度。



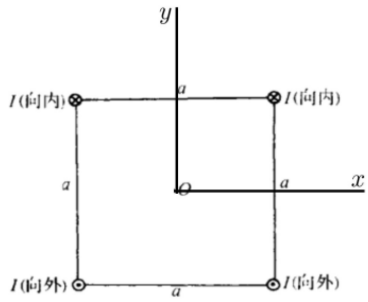
解：

每条半无限长导线贡献 $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 的一半，半圆周贡献圆周的一半即 $\frac{\mu_0 I}{4r}$。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{4r}$$

3.

如图，四根无穷长的平行直导线，其截面构成正方形的四个角，正方形边长为 $2a$，电流的方向如图。写出空间任一点磁感应强度的表达式。若 $I=10\mathrm{A}$，$a=10\mathrm{cm}$，计算正方形中心处的磁感应强度的大小。



解：

取坐标如图，由安培回路定律，求得每条电流的磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向与电流成右手螺旋的方向。用直角坐标写出，位于 (x_0,y_0) 处沿 z 方向的电流 I 的磁感强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{(x-x_0)\boldsymbol{j}-(y-y_0)\boldsymbol{i}}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

于是，四条导线的电流所产生的磁感强度为各个导线的磁感强度之和

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{(x+a)\boldsymbol{j}-(y+a)\boldsymbol{i}}{(x+a)^2+(y+a)^2}+\frac{(x-a)\boldsymbol{j}-(y+a)\boldsymbol{i}}{(x-a)^2+(y+a)^2}-\frac{(x+a)\boldsymbol{j}-(y-a)\boldsymbol{i}}{(x+a)^2+(y-a)^2}-\frac{(x-a)\boldsymbol{j}-(y-a)\boldsymbol{i}}{(x-a)^2+(y-a)^2}\right]$$

在正方形的中心处，$x=y=0$，磁感强度为

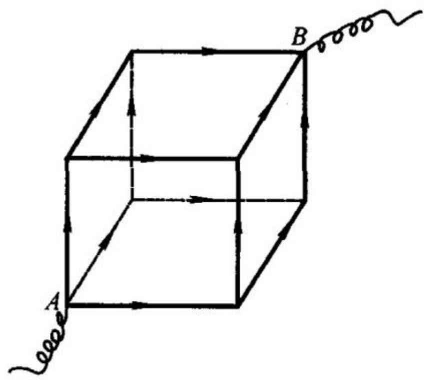
$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{-2\boldsymbol{i}}{a}=-\frac{\mu_0 I}{\pi a}\boldsymbol{i}$$

带入数值，得到

$$B=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10.}{\pi\times10.\times10^{-2}}=4.0\times10^{-5}\mathrm{T}$$

4.

以相同的几根导线焊成立方形 (如图)，在 A 、 B 两端接上一电源. 在立方形中心的磁感强度 B 等于多少?



解：

注意到每个电流元在中心的磁感应强度成对相消，结果为 0.

5.

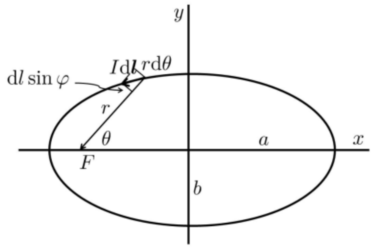
解：

如图，设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

若取焦点为原点，则在极坐标中的方程是

$$r=\frac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}$$



由比奥-萨伐尔定律，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在焦点的磁感强度方向垂直纸面向外，大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\varphi}{r^2}$$

由图可见，$\mathrm{d}l\sin\varphi=r\mathrm{d}\theta$，于是

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\theta}{r}$$

积分得

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{I}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi b^2}2\pi a=\frac{\mu_0 Ia}{2b^2}$$

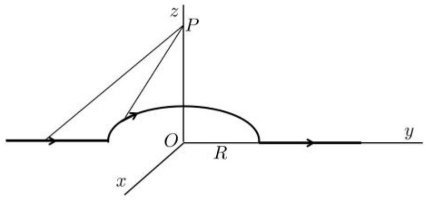
我们也可以计算椭圆上的一段电流在焦点的磁感强度，但为了能使电流闭合，还需要有其他导线接入。

6.

例题 3.6. 一载流导线的电流强度为 I，由负无穷大沿直线到离开原点 R 处完成一个以原点为圆心，半径 R 的半圆，在沿直线到正无穷大，如图所示，求与半圆面垂直且过圆心的直线上一点 P 处的磁感强度。

解:

取坐标如图，P 点为 $z\boldsymbol{k}$，对于左边直线上的一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I\mathrm{d}y\boldsymbol{j}$，设位置为 $y\boldsymbol{j}$，则在 P 点的磁感强度为



$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1 = \mathrm{km}\frac{I\mathrm{d}y\boldsymbol{j}\times(z\boldsymbol{k}-y\boldsymbol{j})}{|z\boldsymbol{k}-y\boldsymbol{j}|^3} = \mathrm{km}\frac{I\mathrm{d}yz\boldsymbol{i}}{(z^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \int_{-\infty}^{-R}\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1 = \mathrm{km}\frac{I}{z}\frac{\sqrt{R^2+z^2}-R}{\sqrt{R^2+z^2}}\boldsymbol{i}$$

类似，对于右边的一段，

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_1 = \mathrm{km}\frac{I}{z}\frac{\sqrt{R^2+z^2}-R}{\sqrt{R^2+z^2}}\boldsymbol{i}$$

在圆弧上，$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + I\mathrm{d}y\boldsymbol{j}$，

$$\mathrm{d}B_3 = \mathrm{km}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(z\boldsymbol{k}-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j})}{|z\boldsymbol{k}-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}|^3} = \mathrm{km}\frac{I(-z\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{k})\mathrm{d}x+(z\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k})\mathrm{d}y}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

做变换 $x=-R\sin\theta$, $y=R\cos\theta$，上式成为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_3 = \mathrm{km}\frac{I(zR\cos\theta\boldsymbol{j}-zR\sin\theta\boldsymbol{i}+R^2\boldsymbol{k})}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

对 θ 在 $[\pi,0]$ 之间积分，得到

$$\boldsymbol{B}_3 = \mathrm{km}\frac{I}{(z^2+R^2)^{3/2}}\left(2zR\boldsymbol{i}-R^2\pi\boldsymbol{k}\right)$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{B}_3$$

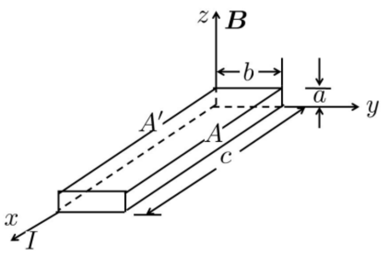
在 O 点，$z=0$，得到

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{k}$$

7.

例题 3.7.

半导体样品的体积为 $a\times b\times c$，如图所示, 载有电流 I, 并置于磁场中，磁感强度沿 z 方向，电流沿 x 方向，$B=3.0\times10^{-2}\mathrm{T}$，$I=1.0\times10^{-3}\mathrm{A}$, $a=1.0\mathrm{mm}$, 测得电势差 $U_{AA'}=6.6\times10^{-3}\mathrm{V}$. 请判断这个半导体的载流子带正电还是带负电? 若载流子所带电荷大小为 $1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$，载流子浓度是多少?



解:

由电流方向和磁场方向判定霍尔电压的正方向是 $A'A$，现 $U_{AA'}>0$, 与正方向相反，故载流子电荷为负。

设载流子的漂移速度为 u, 达到平衡时

$$E_H=\frac{U_{AA'}}{b}=uB$$

而

$$I=Jab=Nqu\,ab,\quad u=\frac{I}{Ne\,ab}$$

即

$$\frac{U_{AA'}}{b}=\frac{IB}{Nq\,ab},\quad N=\frac{IB}{U_{AA'}qa}$$

带入数据得

$$N=\frac{10^{-3}\times3.0\times10^{-2}}{6.6\times10^{-3}\times1.6\times10^{-19}\times10^{-3}}=2.9\times10^{-19}\mathrm{m}^{-3}$$