

# 自然科学中的数学 II- 单元测试 1

日期: 2023 年 4 月 16 日 时间: 15:00-17:00

(请将你的所有答案写在答题纸上, 标记好题目序号, 并保持卷面整洁.)

## Part A. 判断和填空题 (30 分)

题 1 (填空题, 每小题 3 分). 完成下面填空.

(1)  $z = x^y + y^x$  的全微分是\_\_\_\_\_.

(2) 已知  $f(x, y)|_{y=x^2} = 1$ ,  $f'_1(x, y)|_{y=x^2} = 2x$ , 求  $f'_2(x, y)|_{y=x^2} =$ \_\_\_\_\_.

(3) 求函数  $f(x, y, z) = xe^{x+y}$  在点  $M = (1, 1, 1)$  沿方向  $\vec{l} = (1, 2, 3)$  的方向导数为\_\_\_\_\_.

(4) 设  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , 求  $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz =$ \_\_\_\_\_.

(5) 设  $F(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$ , 其中  $x > 0$ , 求  $F(x, y)$  的一个势函数为\_\_\_\_\_.

题 2 (判断题, 每小题 3 分). 判断下列命题是否正确.

(1) 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

在原点  $(0, 0)$  连续。

(2) 点集  $\{(x, y) : y = x, x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$  是集合  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \neq x\}$  的聚点但不是边界点.

(3) 隐函数定理与反函数定理是等价的。

(4) 设  $L$  是平面中一条无重点、分段光滑的连续闭合曲线,  $L$  所围区域包含原点,  $L$  的方向为逆时针方向, 则  $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ .

(5)  $n$  维欧氏空间中由线性无关向量  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$  张成的  $n$  维平行多面体的体积为  $V = |\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)|$ .

## Part B. 多元微分学 (30 分)

题 3 (10 分). 求过点  $P(1, 2, 4)$  且与两平面  $x + 2z = 1$  和  $y - 3z = 2$  都平行的直线方程.

题 4 (10 分). 设  $z = f(2x - y, y \sin x)$ , 其中  $f$  具有连续的二阶偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

题 5 (10 分). 求旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $x + y - 2z = 2$  的最短距离. (提示: 考虑距离的平方为目标函数, 求得的驻点  $z$  分量为  $\frac{1}{8}$ ,  $\lambda \neq 0$ .)

### Part C. 多元积分学 (30 分)

题 6 (10 分). 求由曲面  $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$  及  $x^2 + y^2 = 4z$  所围成的立体图形的体积.

题 7 (10 分). 已知  $L$  是平面中一条无重点、分段光滑的连续曲线, 设  $\int_L (x^3 - \phi(y))dx + (y^3 - 6xy)dy$  与路径无关, 其中函数  $\phi$  具有连续的导数, 且  $\phi(0) = 0$ . 求一个二元函数  $u(x, y)$  使得  $du = (x^3 - \phi(y))dx + (y^3 - 6xy)dy$  并计算  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^3 - \phi(y))dx + (y^3 - 6xy)dy$

题 8 (10 分). 设  $\Sigma$  为曲面  $z = 2 - x^2 - y^2, 1 \leq z \leq 2$  取上侧, 求

$$\iint_{\Sigma} (x^3 z + x) dy dz - x^2 y z dz dx - x^2 z^2 dx dy.$$

(提示: 可借助 Gauss 公式)

### Part D. 论述题 (20 分)

题 9 (10 分). 在学习偏导数和全微分时, 有如下问题 (以二维问题为例): 若函数在点  $(x_0, y_0)$  的偏导数存在, 则该函数在该点是否可微? 若函数在点  $(x_0, y_0)$  的偏导数连续, 则函数在该点可微, 反之是否成立? 以如下函数为例子

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) 讨论该函数在  $(0, 0)$  的连续性.
- (2) 讨论该函数在  $(0, 0)$  偏导数的存在性.
- (3) 讨论该函数在  $(0, 0)$  偏导数的连续性.
- (4) 讨论该函数在  $(0, 0)$  的可微性.
- (5) 可得到什么结论?

题 10 (10 分). 请回答以下问题:

- (1) 叙述两类曲线积分的关联, 以及两类曲面积分的关联.
- (2) 对于第二类曲线积分, 二维情形的 Green 公式如何推广到三维?