

与自然科学中的数学 II- 单元测试 1

日期: 2023 年 4 月 16 日 时间: 15:00-17:00

(请将你的所有答案写在答题纸上, 标记好题目序号, 并保持卷面整洁.)

Part A. 判断和填空题 (30 分)

题 1(填空题, 每小题 3 分). 完成下面填空.

(1) $z = x^y + y^x$ 的全微分是_____.

(2) 已知 $f(x, y)|_{y=x^2} = 1, f'_1(x, y)|_{y=x^2} = 2x$, 求 $f'_2(x, y)|_{y=x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 求函数 $f(x, y, z) = ze^{x+y}$ 在点 $M = (1, 1, 1)$ 沿方向 $\vec{l} = (1, 2, 3)$ 的方向导数为_____.

(4) 设 $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 求 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$, 其中 $x > 0$, 求 $\mathbf{F}(x, y)$ 的一个势函数为_____.

题 2(判断题, 每小题 3 分). 判断下列命题是否正确.

(1) 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

在原点 $(0, 0)$ 连续.

(2) 点集 $\{(x, y) : y = x, x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$ 是集合 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \neq x\}$ 的聚点但不是边界点.

(3) 隐函数定理与反函数定理是等价的.

(4) 设 L 是平面中一条无重点、分段光滑的连续闭合曲线, L 所围区域包含原点, L 的方向为逆时针方向, 则 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$.

(5) n 维欧氏空间中由线性无关向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ 张成的 n 维平行多面体的体积为 $V = |\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)|$.

Part B. 多元微分学 (30 分)

题 3(10 分). 求过点 $P(1, 2, 4)$ 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 都平行的直线方程.

题 4(10 分). 设 $z = f(2x - y, y \sin x)$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

题 5(10 分). 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 的最短距离. (提示: 考虑距离的平方为目标函数, 求得的驻点 x 分量为 $\frac{1}{8}$, $\lambda \neq 0$.)

Part C. 多元积分学 (30 分)

题 6 (10 分). 求由曲面 $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$ 所围成的立体图形的体积.

题 7 (10 分). 已知 L 是平面中一条无重点、分段光滑的连续曲线，设 $\int_L (x^3 - \phi(y))dx + (y^3 - 6xy)dy$ 与路径无关，其中函数 ϕ 具有连续的导数，且 $\phi(0) = 0$. 求一个二元函数 $u(x, y)$ 使得 $du = (x^3 - \phi(y))dx + (y^3 - 6xy)dy$ 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^3 - \phi(y))dx + (y^3 - 6xy)dy$

题 8 (10 分). 设 Σ 为曲面 $z = 2 - x^2 - y^2, 1 \leq z \leq 2$ 取上侧，求

$$\iint_{\Sigma} (x^3 z + x) dy dz - x^2 y z dz dx - x^2 z^2 dx dy.$$

(提示：可借助 Gauss 公式)

Part D. 论述题 (20 分)

题 9 (10 分). 在学习偏导数和全微分时，有如下问题（以二维问题为例）：若函数在点 (x_0, y_0) 的偏导数存在，则该函数在该点是否可微？若函数在点 (x_0, y_0) 的偏导数连续，则函数在该点可微，反之是否成立？以如下函数为例子

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) 讨论该函数在 $(0, 0)$ 的连续性.
- (2) 讨论该函数在 $(0, 0)$ 偏导数的存在性.
- (3) 讨论该函数在 $(0, 0)$ 偏导数的连续性.
- (4) 讨论该函数在 $(0, 0)$ 的可微性.
- (5) 可得到什么结论？

题 10 (10 分). 请回答以下问题：

- (1) 叙述两类曲线积分的关联，以及两类曲面积分的关联.
- (2) 对于第二类曲线积分，二维情形的 Green 公式如何推广到三维？