BOJ 31987 - ESC와 쿼리 1 (C+26)

\- by aflat

$i, j, k \to \sum_{x=i}^{j}(a_{kx}+b_{kx}+c_{kx})$

$ESC^{(n)}(x) = a_n e^x \sin^2 x + b_n e^x \cos^2 x + c_n e^x \sin x \cos x$.

$$\begin{aligned} ESC^{(n+1)}(x) = &\ a_n e^x(\sin^2 x + 2\sin x\cos x) \\ &+ b_n e^x(\cos^2 x - 2\sin x \cos x) \\ &+ c_n e^x(\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

$= (a_n-c_n)e^x\sin^2 x + (b_n+c_n)e^x\cos^2 x + (2a_n-2b_n+c_n)e^x s$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - c_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = b_n + c_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = 2a_n - 2b_n + c_n & \cdots ③ \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = 0 \cdots ④$ $(\because ① + ②)$ 이므로 $\sum_{x=i}^{j}(a_{kx}+b_{kx}+c_{kx}) = \sum_{x=i}^{j} c_{kx}$

④을 ③에 대입하면

$c_{n+1} = 4a_n + c_n \quad \cdots ⑤$

따라서 $V_n = \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ 에 대해 $V_n = B^n V_0$ $\left(V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ 이다.

$\Rightarrow$ c_n을 $O(\log n)$에 구할 수 있다

하지만 $\sum_{x=i}^{j} c_{kx}$ 를 반복문으로 그냥 구하게 되면 $O(j\log(jk))$ 나 걸려서, 이 부분은 다른 접근이 필요하다.

C_n의 recurrence relation 이 linear 하므로
eigendecomposition을 통해 일반항을 직접 구해보기로 했다.

(Linear Algebra의 Difference Equation 참고)

※ 2 by 2 matrix B를 발견하기 전에 풀은거다 A를 이용해서 고생하며 구했다...

$$u_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

A를 eigendecomposition 하면 $A = X \Lambda X^{-1}$

where $X = \begin{bmatrix} 1 & -i & i \\ 1 & i & -i \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ i & -i & 1 \\ -i & i & 1 \end{bmatrix}$

$$v = X^{-1} u_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 1-2i, \ \lambda_3 = 1+2i$$

$$u_n = \sum_{t=1}^{3} v_t (\lambda_t)^n x_t$$

$$= \frac{1}{4}(1-2i)^n \begin{bmatrix} -i \\ i \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(1+2i)^n \begin{bmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ \frac{(1-2i)^n + (1+2i)^n}{2} \end{bmatrix} \qquad \therefore C_n = \frac{(1-2i)^n + (1+2i)^n}{2}$$

$\alpha = (1-2i)^k, \quad \beta = (1+2i)^k \quad \left(\alpha^n + \beta^n = 2C_{kn}, \quad \alpha\beta = 5^k \right)$

$$C_{kx} = \frac{\alpha^x + \beta^x}{2}$$

$$\sum_{x=0}^{s} C_{kx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha^{s+1}}{1-\alpha} + \frac{1-\beta^{s+1}}{1-\beta} \right)$$

$$= \frac{(1-\alpha^{s+1})(1-\beta) + (1-\beta^{s+1})(1-\alpha)}{2(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$(1-\alpha)(1-\beta) = 1 - (\alpha+\beta) + \alpha\beta$$

$$= 1 - 2C_k + 5^k$$

$$(1-\alpha^{s+1})(1-\beta) = 1 - (\alpha^{s+1} + \beta) + \alpha^s 5^k$$

$$+ \quad (1-\beta^{s+1})(1-\alpha) = 1 - (\beta^{s+1} + \alpha) + \beta^s 5^k$$

$$= 2 - (\alpha^{s+1} + \beta^{s+1}) + 5^k(\alpha^s + \beta^s) - (\alpha+\beta)$$

$$= 2 - 2C_{k(s+1)} + 2 \cdot 5^k C_{ks} - 2C_k$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{s} C_{kx} = \frac{1 - C_{k(s+1)} + 5^k C_{ks} - C_k}{1 - 2C_k + 5^k}$$

$$\sum_{x=0}^{j} C_{kx} - \sum_{x=0}^{i-1} C_{kx} = \frac{\{1 - C_{k(j+1)} + 5^k C_{kj} - C_k\} - \{1 - C_{ki} + 5^k C_{k(i-1)} - C_k\}}{1 - 2C_k + 5^k}$$

$$= \frac{5^k(C_{kj} - C_{k(i-1)}) - (C_{k(j+1)} - C_{ki})}{5^k - 2C_k + 1}$$

$$\therefore \sum_{x=i}^{j} (a_{kx} + b_{kx} + c_{kx}) = \frac{5^k(c_{kj} - c_{k(i-1)}) - (c_{k(j+1)} - c_{ki})}{5^k - 2c_k + 1}$$

time complexity: $O(Q \log(jk))$

10^9+7 은 소수이므로, $5^k - 2c_k + 1$ 의 곱셈 역원을 구하기 위해 페르마 소정리(FLT)를 이용할 수 있다.

<소수 p에 대해 $a^{p-2} \equiv a^{-1} \pmod{p}$ (단, $\gcd(a,p) = 1$)>

유의 사항: C++ 에서 matrix exponentiation by squaring 을 vector를 이용해 구현했더니 시간 초과를 받아버려서, 2차원 array로 다시 구현했다.