1. Aufgabenblatt vom Mittwoch, den 18 . April 2018 zur Vorlesung

Lineare Algebra für Informatik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Montag, den 30. April 2018, 14 Uhr.

1. **Gruppenartige Strukturen** (wird im 1. Tutorium besprochen)
   Überprüfen Sie im Detail, welche Gruppenaxiome für die folgenden Grundmengen G und die angegebenen binären Verknüpfungen gelten.
   (a) Sei X beliebige Menge und $G = Abb(X, X)$ die Menge aller Abbildungen von X nach X zusammen mit der Funktionskomposition.
   (b) Sei X beliebige Menge und $G = Bij(X, X)$ die Menge aller Bijektionen von X nach X zusammen mit der Funktionskomposition.
   (c) Für die Grundmenge G betrachten wir $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0}$ zusammen mit der üblichen Addition bzw. Multiplikation.
   (d) Sei $G = \mathbb{Q}$ und $a \circ b := (a + b)/2$ (arithmetisches Mittel).

2. **Sehr kleine Gruppen** (wird im 1. Tutorium besprochen)
   Diskutieren Sie, welche Möglichkeiten es gibt, für die Grundmenge $G = \{e, a\}$ bzw. $G = \{e, a, b\}$ Verknüpfungstafeln für eine zweistellige Operation zu finden, so dass eine Gruppe entsteht. Dabei soll e das neutrale Element sein.
   Hinweis: Interessanter aber auch anspruchsvoller wird es für 4 Elemente.

3. **Grundsätzliches** (2+2+2 Punkte)
   (a) Leiten Sie aus den Axiomen für Vektorräume her, dass für beliebige K-Vektoren v gilt: $(-1) \cdot v = -v$. Dabei bezeichnet -1 den additiv inversen Skalar zum multiplikativen neutralen Skalar 1 im Körper K und $-v$ das additiv Inverse zum Vektor v.
   (b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \ | a, b \in \mathbb{Q} \}$ zusammen mit der üblichen Multiplikation und Addition von reellen Zahlen einen Körper bilden.
   (c) Lösen Sie die Gleichung
   $$4 \cdot x + 3 = 1$$
   einmal über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ und einmal über dem Körper $\mathbb{Z}_7$

4. **Untervektorräume I** (2 Punkte)
   V bezeichne den Vektorraum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{R}$, dabei werden Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren punktweise auf den Funktionswerten definiert.

Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von V?

$$
\begin{aligned}
A &= \{f \in V \mid f(-1) = f(1)\} \\
B &= \{f \in V \mid f(-1) = -f(1)\} \\
C &= \{f \in V \mid (f(-1))^2 = (f(1))^2\} \\
D &= \{f \in V \mid f \text{ ist schwach monoton wachsend bzw. fallend}\}
\end{aligned}
$$

Natürlich gehört zu jeder Antwort eine kurze Begründung, insbesondere sind negative Antworten durch konkrete Beispiele zu belegen.

5. **Untervektorräume II** (2+2+2 Punkte)

   (a) Seien U_1 und U_2 Teilräume eines Vektorraumes V mit $U_1 \cup U_2 = V$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $U_1 = V$ oder $U_2 = V$.

   (b) Zeigen Sie, dass für K–Vektorräume U, V gilt: $V \cap U$ und $V + U = \{v + u | v \in V, u \in U\}$ sind K–Vektorräume.

   (c) Wir betrachten K^3 als K–Vektorraum und sei $\alpha \in K$. Zeigen Sie, dass $U_\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\}$ Unterraum genau dann ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter, dem Namen des Tutors und (!) dem Tutorium versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!
Bei korrekten Lösungen wird erwartet, dass die Autoren diese an der Tafel vorstellen können.
Plagiate werden geahndet, im Wiederholungsfall mit dem Nichtbestehen der Übungen.