

Maß I: Logik & Diskrete Mathematik
(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 15. Dezember 2017, 10 Uhr

1. **Schubfachprinzip I** (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass bei der Wahl von 5 verschiedenen ganzen Zahlen aus $\{1, 2, \dots, 8\}$ notwendigerweise 2 dabei sind, deren Summe 9 ist. Zeigen Sie außerdem, dass für 4 gewählte Zahlen, dies nicht immer stimmt.

2. **Schubfachprinzip II** (1+2+1 Punkte)

Im Folgenden geht es um Gruppen von n Personen, die sich paarweise mögen oder nicht mögen, siehe Skript für $n = 6$.

- (a) Sei $n = 5$. Zeigen Sie, dass es nicht notwendigerweise 3 Personen geben muss die sich alle paarweise mögen bzw. alle nicht mögen.
- (b) Sei $n = 10$. Es gibt (i) 3 paarweise sich mögende Personen oder 4, die sich paarweise nicht mögen und (ii) 4 paarweise sich mögende Personen oder 3, die sich paarweise nicht mögen.
- (c) Sei $n = 20$. Jetzt gibt es 4 sich paarweise mögende oder 4 sich paarweise nicht mögende Personen.

Hinweis: Die Aussagen der letzten beiden Teilaufgaben gelten schon für $n = 9$ bzw. $n = 18$ und das ist bestmöglich.

3. **Vollständige Induktion** (3+1+2+3 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass für ungerade natürliche Zahlen n die Zahl $n^2 - 1$ immer durch 8 teilbar ist und zwar einmal mit einem direkten Beweis sowie ein zweites Mal mit vollständiger Induktion.
- (b) Sei $a \neq 0$ eine reelle Zahl. Was ist falsch an folgendem Induktionsbeweis. Wir zeigen $a^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n .
Induktionsanfang: $a^0 = 1$ stimmt.
Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Aussage stimmt für alle natürlichen Zahlen $\leq n$.
Dann ist $a^{n+1} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^n - 1} = \frac{1 \cdot 1}{1}$.
- (c) Für welche natürlichen Zahlen ist $n^2 \leq n!$? Beweisen Sie Ihre Antwort mit vollständiger Induktion.
- (d) Für $n \geq 1$ heißt die Summe $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ n -te harmonische Zahl. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \geq 1$ die Gleichung

$$H_1 + H_2 + \dots + H_n = (n+1)H_n - n$$

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!