

Maß I: Logik & Diskrete Mathematik  
(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 17. November 2017, 10 Uhr

1. **Quantoren I** (2 Punkte)

Wir betrachten die folgende Aussageform:  $Q(x, y, z) : x \cdot y = z$

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten:

$$\forall z \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : Q(x, y, z)$$

$$\exists x \in \mathbb{Q} \forall z \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{Q} : Q(x, y, z)$$

2. **Quantoren II** (2 Punkte)

- (a) Schreiben Sie eine quantifizierte Formel, die ausdrückt, dass wenigstens 4 verschiedene Elemente aus einem Grundbereich  $U$  ein Prädikat  $P(x)$  erfüllen.
- (b) Schreiben Sie die folgende Formel in Negationsnormalform, das heißt, die verwendeten Negationen beziehen sich nur auf atomare Teilformeln und es werden außer den Quantoren nur die Junktoren  $\neg, \vee, \wedge$  benutzt.

$$\neg \forall x (\exists y (P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)) \wedge \exists z R(x, z))$$

3. **Eigenschaften von Mengen** (3 Punkte)

Welche Schlussfolgerungen für die Mengen  $A$  und  $B$  kann man aus den folgenden Voraussetzungen ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten!

$$a) A \cup B = A \cap B \quad b) A \setminus B = A \quad c) A \setminus B = B \setminus A$$

4. **Eigenschaften von Mengenoperationen** (2 Punkte)

Beweisen Sie für beliebige Mengen  $A, B, C$ .

$$(a) A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

$$(b) (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

5. **Symmetrische Mengendifferenz** (2 Punkte)

Seien  $A, B$  und  $C$  Untermengen einer Grundmenge  $U$ . Zeigen Sie:

$$(a) (A \oplus B) \oplus B = A$$

$$(b) \text{ Angenommen, } A \oplus C = B \oplus C. \text{ Folgt daraus } A = B?$$

6. **Mengenfamilien** (4 Punkte)

Für jede natürliche Zahl  $i > 0$  sei die Menge  $A_i = \{0, i, 2i, 3i, \dots\}$ ,  $B_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$  gegeben. Bestimmen Sie (mit Begründung) die Vereinigungen  $\bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i$  und  $\bigcup_{i=1}^n B_i$

und die Durchschnitte  $\bigcap_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_i$  sowie  $\bigcap_{i=1}^n B_i$ .

**Hinweis:** Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!