2. Aufgabenblatt vom Freitag, den 27. Oktober 2017 zur Vorlesung

MafI I: Logik & Diskrete Mathematik

(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 10. November 2017, 10 Uhr

1. **Boolesche Funktionen** (2 Punkte)
   Sei f eine beliebige n-stellige Boolesche Funktion. Dann gilt für jede Variable b_i mit $1 \leq i \leq n$

   $$f(b_1, ..., b_n) = b_i \wedge f(b_1, ..., b_{i-1}, 1, ..., b_n) \vee \neg b_i \wedge f(b_1, ..., b_{i-1}, 0, ..., b_n)$$

2. **DNF,KNF I** (3 Punkte)
   Betrachten Sie den Booleschen Ausdruck:

   $$x \wedge \neg y \vee \neg z \Rightarrow x \wedge y$$

   Geben Sie zunächst die vollständige Klammerung für diesen Ausdruck an. Bilden Sie dazu die kanonische DNF und die kanonische KNF.

3. **DNF,KNF II** (3 Punkte)
   Finden Sie zu den folgenden Booleschen Ausdrücken semantisch äquivalente Terme sowohl in DNF als auch KNF.

   (a) $(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg q \wedge \neg r$

   (b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$

   (c) $\neg r \Rightarrow (((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q)$

4. **Funktional vollständige Signaturen** (6 Punkte)

   (a) Schreiben Sie $a \Rightarrow (b \wedge c)$ unter ausschließlicher Verwendung des NOR-Operators. (Sie können $\overline{\vee}$ als NOR–Operatorzeichen benutzen.)

   (b) Zeigen Sie, dass weder die Signatur $\{\wedge, \vee\}$ noch die Signatur $\{\Rightarrow\}$ funktional vollständig sind.

   (c) Zeigen Sie, dass die Implikation $\Rightarrow$ zusammen mit dem Term $false$ funktional vollständig ist.

   (d) (Schwerer! 3 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die Antivalenz $\{\oplus\}$ keine vollständige Signatur ist.
   Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\oplus$ assoziativ ist. Dann zeigen Sie, dass man zum Beispiel die konstante Funktion 1 nicht ausdrücken kann.

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter und (!) dem Namen des Tutors (+ welches Tutorium) versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!