

Lineare Algebra für Informatik
(F. Hoffmann)

Abgabe: bis Montag, den 07. Mai 2018, 14 Uhr.

1. **Verständnis** (3 Punkte)

- (a) Warum ist \mathbb{R}^n für $n > 1$ zusammen mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation kein Körper?
- (b) Richtig oder falsch? Für beliebige Unterräume V_1, V_2, V_3 des reellen Vektorraums \mathbb{R}^3 gilt :

$$V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$$

- (c) Finden Sie im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, n Vektoren derart, dass sie zusammen linear abhängig sind, aber jeweils beliebige $n - 1$ davon sind linear unabhängig. Lösen Sie die Aufgabe zunächst für den Fall $n = 3$ und versuchen dann, dies zu verallgemeinern.

2. **Neue Vektorräume** (2+2 Punkte)

Die folgende Konstruktion ist eine weitere Möglichkeit, Vektorräume zu “bauen”. Sie gibt es in ähnlicher Form für andere algebraischen Strukturen.

Sei V ein K -Vektorraum und U ein Unterraum. Wir definieren auf der Menge $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ der sogenannten Nebenklassen von U eine Vektorraumstruktur (der sogenannte *Quotientenvektorraum*). Beachten Sie, dass die Nebenklassen selbst wieder Mengen sind, nämlich $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$. Wir definieren Addition von Nebenklassen und Multiplikation mit einem Skalar auf kanonische Art:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U, \quad \lambda(v + U) = \lambda v + U$$

- (a) Zeigen Sie, dass diese Operationen wohldefiniert sind, das heißt, nicht von der Wahl des Repräsentanten v der Nebenklasse $v + U$ abhängen und dass man einen K -Vektorraum erhält.
- (b) Beschreiben Sie die Vektorräume V/V und $V/\{\vec{0}\}$. Beschreiben Sie geometrisch die Elemente von \mathbb{R}^2/U und U sei aufgespannt durch den Vektor $(2, 3)$.

3. **Untervektorräume** (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle 16 Unterräume des \mathbb{Z}_2 -Vektorraums \mathbb{Z}_2^3 .

Tipp: Beschreiben Sie die Unterräume mit Hilfe der Standardbasisvektoren.

4. **Gleiche Unterräume** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Unterräume des \mathbb{Z}_3^4 gleich sind. Beschreiben Sie zunächst kurz, wie Sie vorgehen.

$$\text{Lin}(\{(1, 2, 0, 1), (2, 2, 1, 1)\}) \quad \text{Lin}(\{(2, 0, 2, 0), (0, 2, 2, 1)\})$$

Welche Dimension haben diese Unterräume?

Hinweis: Bitte die Übungszettel immer mit den Namen aller Bearbeiter, und bei jedem (!) Bearbeiter mit den Namen des Tutors und (!) dem Tutorium versehen. Bitte beachten Sie den Abgabetermin!

Bei korrekten Lösungen wird erwartet, dass die Autoren diese an der Tafel vorstellen können. Plagiate werden geahndet, im Wiederholungsfall mit dem Nichtbestehen der Übungen.