НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Факультет прикладної математики
Кафедра прикладної математики

Курсова робота
із дисципліни «Дослідження операцій»
на тему: Модифікований метод Ньютона

Виконав:
студент групи КМ-93
Костенко О. А.

Керівник:
старший викладач Ладогубець Т. С.
Кількість балів:
Оцінка:

Київ — 2022

ЗМІСТ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дослідити збіжність модифікованого методу Ньютона при мінімізації кореневої функції в залежності від:

1. Величини кроку h при обчисленні першої та другої похідних.
2. Схеми обчислення першої та другої похідних.
3. Виду методу одновимірного пошуку (ДСК-Пауелла або Золотого перетину).
4. Точності методу одновимірного пошуку.
5. Значення параметру в алгоритмі Свена.
6. Вигляду критерію закінчення.

$$\begin{cases} \frac{\|x^{k+1}-x^k\|}{\|x^k\|} \le \varepsilon \\ \left|f(x^{k+1}) - f(x^k)\right| \le \varepsilon \end{cases} \text{ або } ||\nabla f(x^{(k)})|| \le \varepsilon \;.$$

Використати метод штрафних функцій (метод внутрішньої точки) для умовної оптимізації в залежності від:

1. Розташування локального мінімума (всередині/поза допустимою областю).
2. Виду допустимої області (випукла/невипукла).

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Модифікований метод Ньютона

Для неквадратичних функцій загального виду метод Ньютон не відрізняється надійністю. Схожість методу залежить від вибору початкової точки $x^{(0)}$. Якщо $x^{(0)}$ знаходиться на значній відстані від шуканого мінімуму, крок за методом Ньютона може виявитися досить великим, і це може призвести до відсутності збіжності даного методу. Для зменшення значення цільової функції від ітерації до ітерації вводиться наступний параметр довжини кроку λ:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} \frac{\left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^{(k)})}{\left\| \left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^{(k)}) \right\|},$$

Де відношення $\dfrac{\lambda^{(k)}}{\left\| \left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^{(k)}) \right\|}$ - деякий скаляр $\lambda^{*(k)}$, тому

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{*(k)} \cdot \left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^{(k)}) .$$

Напрямок пошуку задається вектором $s^{(k)}$:

$$s^{(k)} = -\left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^{(k)}) .$$

Вибір $\lambda^{*(k)}$ здійснюється таким чином, щоб

$$f(x^{(k+1)}) \to \min .$$

Такий вибір $\lambda^{*(k)}$ гарантує виконання нерівності

$$f(x^{(k+1)}) \le f(x^{(k)}) .$$

Методи штрафних функцій

Ці методи можуть використовуватися як при лінійних, так і при нелінійних обмеженнях типу рівностей і нерівностей.

Зміст методів полягає в тому, що вихідна цільова функція $f_0(\bar{u})$ розширюється за рахунок введення додаткових коефіцієнтів і функцій, що враховують вплив обмежень таким чином, що при порушенні обмежень різко зростає (спадає) значення розширеної цільової функції $I_0(\bar{u})$. Тим самим рішення задачі умовної оптимізації $f_0(\bar{u})$ зводиться до розв'язку задачі безумовної оптимізації $I_0(\bar{u})$.

Математична постановка задачі умовної оптимізації:

$$f_0(\bar{u})\,min, \qquad V = \bar{u} \in R^n | g(\bar{u}) \geq 0, j = \overline{1, m}; \qquad h(\bar{u}) = 0, i = \overline{m+1, s}$$

де $f_0(\bar{u})$- цільова функція;

V - область, на якій може приймати значення вектор u ;

$g(\bar{u}) \geq 0, j = \overline{1, m}$ - умови типу нерівності;

$h(\bar{u}) = 0,\ i = \overline{m+1, s}$- умови типу рівності.

У якості $\bar{u}^i,\ i = \overline{1, N}$ беруться стаціонарні точки так званої штрафної функції – цільової функції допоміжної задачі безумовної мінімізації. За допомогою штрафної функції вихідна задача умовної мінімізації перетворюється у послідовність задач безумовної мінімізації. Конкретні методи, побудовані на вказаній загальній схемі, визначаються видом штрафної функції, а також правилами, за якими проводиться перерахунок штрафних параметрів по закінченню чергового циклу безумовної мінімізації. Штрафна функція, яка дозволяє обмежитися рішенням лише однієї задачі безумовної мінімізації, називається точною.

Методи штрафних функцій мають просту реалізацію. Важлива їх якість також у тому, що вони дають досліднику багатий матеріал безумовної оптимізації.

Штрафна функція визначається виразом

$$F(\bar{u}) = f(\bar{u}) + P(R, g(\bar{u}), h(\bar{u}))$$

де R - набір штрафних параметрів.

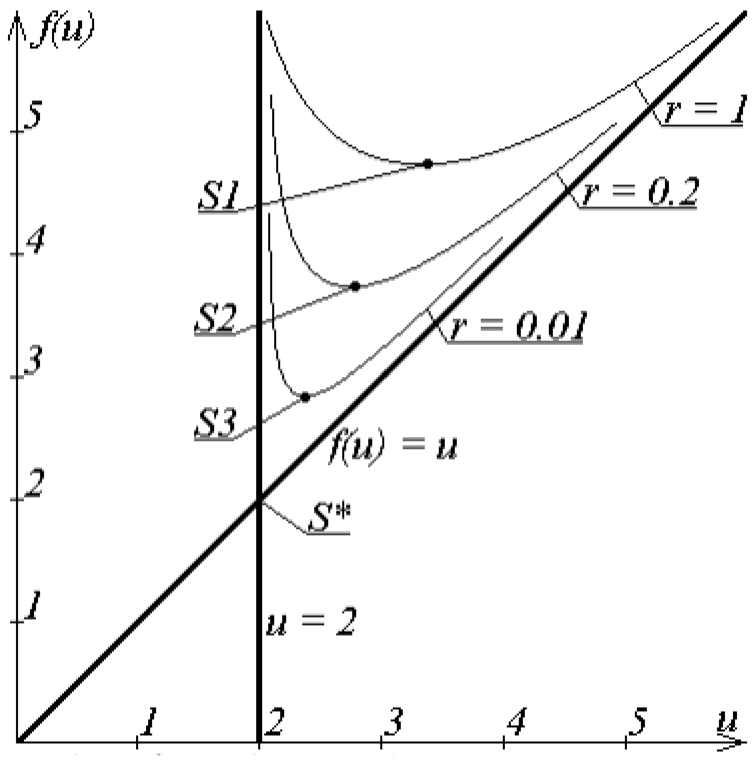
$P(R, g(\bar{u}), h(\bar{u}))$ - штраф.

Розрізняють два методи штрафних функцій – метод внутрішньої точки (бар'єрних точок) та метод зовнішньої точки.

Метод внутрішньої точки

Штраф для методу внутрішньої точки визначається як:

.



Після введення штрафної функції, задача з обмеженнями перетворюється у послідовність підзадач безумовної оптимізації.

При розв'язуванні задачі необхідно обрати початкове значення штрафного параметра R та змінювати його після кожної під задачі безумовної оптимізації так, щоб забезпечити збіжність послідовності стаціонарних точок u(k) до оптимального значення.

Недоліки метода:

1. Необхідність пошуку допустимої точки, щоб використати її у якості початкової.

2. Штрафна функція $F(\bar{u})$ має чітко виражену «яружну» структуру при малих R, що ускладнює рішення задач безумовної оптимізації.

3. Метод призначений для рішення задач нелінійного програмування з обмеженнями типу нерівності.

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Безумовна оптимізація

Маємо кореневу функцію:

$$\sqrt[4]{10(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2}$$

$$x_{01}, x_{02} = -1.2, 0$$

Розрахунки проводились за наступних фіксованих параметрах: крок h: 0.001, схема обчислення похідних: центральна різниця, метод одновимірного пошуку: золотий перетин, точність методу одновимірного пошуку: 0.001, параметр Свенна: 0.01, критерій закінчення першого типу.

Після проведення кожного з досліджень оптимальне значення знайденого параметра використовується в подальших дослідженнях.

Проведемо дослідження збіжності в залежності від:

1. В залежності від кроку h при обчисленні похідних

Результат:

Величина кроку h	Кількість ітерацій	Мінімум функції
1	280	0.1423941885663283
0.1	181	0.1933045404778787
0.01	3466	0.024155198170454837
0.001	158	0.08613178102265413
0.0001	158	0.05449834866445481

Найкраще значення кроку h при обчисленні похідних: 0.01.

2. В залежності від схеми обчислення похідних

Результат:

Схема обчислення похідних	Кількість ітерацій	Мінімум функції
ліва різниця	79	0.021276550064894716
права різниця	383	0.20129584284075872
центральна різниця	3466	0.024155198170454837

Найкраща схема обчислення похідних: ліва різниця.

3. В залежності від методу одновимірного пошуку

Результат:

Метод одновимірного пошуку	Кількість ітерацій	Мінімум функції
golden	79	0.021276550064894716
dsk-powell	76	0.19276402296467154

Найкращий метод одновимірного пошуку: золотий перетин.

4. В залежності від точності методу одновимірного пошуку

Результат:

Точність методу одновимірного пошуку	Кількість ітерацій	Мінімум функції
0.01	66	0.04010966424637723
0.001	79	0.021276550064894716
0.0001	86	0.011379068224663457

Найкраща точність методу одновимірного пошуку: 0.0001.

5. В залежності від значення параметру Свенна

Результат:

Значення параметру Свенна	Кількість ітерацій	Мінімум функції
0.1	78	0.011067544830444854
0.01	86	0.011379068224663457
0.001	93	0.012248424765667856
0.0001	104	0.011548889334893933

Найкраще значення параметру Свенна: 0.0001.

6. В залежності від вигляду критерію закінчення

Результат:

Вигляд критерію закінчення	Кількість ітерацій	Мінімум функції
1	104	0.011548889334893933
2	3098	0.011554251721317278

Найкращий вигляд критерію закінчення: 1.

Умовна оптимізація

Маємо точки локального мінімуму та вид області:

1. Всередині допустимої області локальний мінімум (-1, 0)
2. Поза допустимою областю – (3, 1)
3. Обмеження опуклої області: $9-(x_1+3)^2-{x_2}^2$
4. Обмеження неопуклої області:

$$9-(x_1+3)^2-{x_2}^2 \geq 0$$
$$(x_1+3)^2-{x_2}^2-1 \geq 0$$

На основі результатів та функцій збудованих в *частині №1 «Безумовна оптимізація. Модифікований метод Ньютона»*, використовуємо метод внутрішньої точки для умовної оптимізації:

1. В залежності від положення допустимої точки

a. Всередині допустимої точки

Результат:

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	15650	[0.07834038209604754, -0.012743273624423727]	4.799890051338741
0.1	18741	[0.8435654277592053, 0.679513117335585]	0.8020158377296664
0.01	6470	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.09230210238453147
0.001	8952	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.010444336362910757

b. Поза допустимою областю

Результат:

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	29934	[1.8069005081877816, 0.9622419293212666]	0.10239989535515681
0.1	6330	[1.8069005081877816, 0.9622419293212666]	0.8450546303867473

Таким чином, найкраще положення допустимої точки: всередині області.

2. В залежності від виду допустимої області

a. Опукла область

Результат:

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	15650	[0.07834038209604754, -0.012743273624423727]	4.799890051338741
0.1	18741	[0.8435654277592053, 0.679513117335585]	0.8020158377296664
0.01	6470	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.09230210238453147
0.001	8952	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.010444336362910757
0.0001	9960	[0.6145327196042825, 0.5680103326475212]	0.024743734389041885

b. Неопукла область

Результат:

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	4735	[0.999859661994329, 0.99997535803676 76]	-7.998125251420745
0.1	22635	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	-0.7990153427769419
0.01	70186	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	-0.07356021700710798
0.001	70290	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	-0.0015602170071079818
0.0001	70524	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	0.005639782992892018

Таким чином, отримуємо, що найкращий вибір допустимої області: опукла.

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Обидва методи були реалізовані на мові програмування Python.

Для вирішення задачі мінімізації кореневої функції введіть:

1. Для задачі безумовної оптимізації початкову точку, для задачі умовної оптимізації точку локального мінімуму в файл *start_values.py*
2. Функцію в файл *functiom.py*

Після чого запустіть файл *main.py* та оберіть варіанти, представлені ним. Після вибору номера частини курсової роботи, програма її запустить. Після завершення, ви будете мати змогу обрати іншу частину або повторити обрану раніше.

ВИСНОВКИ

В даній курсовій роботі був використаний модифікований метод Ньютона та метод внутрішньої точки.

Обидва методи було використано для задачі мінімізації кореневої функції, для чого було розроблено програмне забезпечення.

Безумовна оптимізація

1. В залежності від кроку h при обчисленні похідних

Для дослідження було взято такі варіанти кроку h: 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001.

Найкраще функція була мінімізована з використанням кроку 0.01, не дивлячись не те, що це зайняло велику кількість обчислень. Мінімум функції, що був отриманий: 0.024155198170454837.

2. В залежності від схеми обчислення похідних

Досліджувались такі схеми обчислення як: права різниця, ліва різниця та центральна різниця.

Найкращий результат дала схема обчислення лівих різниць. З найменшою кількістю обчислень ми отримали мінімальне значення функції: 0.021276550064894716.

3. В залежності від методу одновимірного пошуку

Досліджувались такі методи одновимірного пошуку як: золотий перетин та ДСК-Пауелла.

Різниця в кількості обчислень виявилась несуттєвою, але мінімізувати функцію краще вийшло методом золотого перетину. Мінімум функції: 0.021276550064894716.

4. В залежності від точності методу одновимірного пошуку

Для дослідження було взято такі варіанти точності: 0.01, 0.001, 0.0001.

Найкраще функція була мінімізована з точністю 0.0001, хоча кількість обчислень було трохи більшою, ніж при використанні інших варіантів. Мінімум функції, що був отриманий: 0.011379068224663457.

5. В залежності від значення параметру Свенна

Для дослідження було взято такі значення параметру Свена: 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001.

Найкраще функція була мінімізована за параметра 0.0001, хоча кількість обчислень було трохи більшою, ніж при використанні інших варіантів. Мінімум функції, що був отриманий: 0.011548889334893933.

6. В залежності від вигляду критерію закінчення

Досліджувались такі види критерію закінчення:

$$1)\ \begin{cases} \frac{\|x^{k+1}-x^k\|}{\|x^k\|} \le \varepsilon \\ \left|f(x^{k+1}) - f(x^k)\right| \le \varepsilon \end{cases} \quad \text{та} \quad 2)\ ||\nabla f(x^{(k)})|| \le \varepsilon\,.$$

Найкращий результат дав перший вид критерію закінчення. З найменшою кількістю обчислень ми отримали мінімальне значення функції: 0.011548889334893933.

Умовна оптимізація

Після використання методу внутрішньої точки ми отримали такі результати:

1. В залежності від положення допустимої точки

a. Всередині допустимої області

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	15650	[0.07834038209604754, -0.012743273624423727]	4.799890051338741
0.1	18741	[0.8435654277592053, 0.679513117335585]	0.8020158377296664
0.01	6470	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.09230210238453147
0.001	8952	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.010444336362910757

b. Поза допустимою областю

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	29934	[1.8069005081877816, 0.9622419293212666]	0.10239989535515681
0.1	6330	[1.8069005081877816, 0.9622419293212666]	0.8450546303867473

Таким чином, найкраще положення допустимої точки: всередині області.

2. В залежності від виду допустимої області

a. Опукла допустима область

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	15650	[0.07834038209604754, -0.012743273624423727]	4.799890051338741
0.1	18741	[0.8435654277592053, 0.679513117335585]	0.8020158377296664
0.01	6470	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.09230210238453147
0.001	8952	[0.7312676654910075, 0.5883289645494268]	0.010444336362910757
0.0001	9960	[0.6145327196042825, 0.5680103326475212]	0.024743734389041885

b. Неопукла допустима область

R	Кількість ітерацій	Аргументи функції	Мінімум функції
1	4735	[0.999859661994329, 0.9999753580367676]	-7.998125251420745
0.1	22635	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	-0.7990153427769419
0.01	70186	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	-0.07356021700710798
0.001	70290	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	-0.0015602170071079818
0.0001	70524	[0.9999888438797778, 0.999975303882016]	0.005639782992892018

Таким чином, отримуємо, що найкращий вибір допустимої області: опукла.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Т. С. Ладогубець. «Методи оптимізації» - електронний конспект. Київ.
2. Д. Химмельблау. «Прикладное нелинейное программирование». М .; «Мир», 1975.
3. В. Реклейтис «Оптимизация в технике» часть 1, М .; «Мир», 1986
4. НАУ «Методи оптимізації. Лекція 8» - електронний конспект. Київ