DISCIPLINA:

PRÉ-CÁLCULO

AULA 3

Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues

CONVERSA INICIAL

As funções exponenciais e logarítmicas fazem parte de um amplo contexto dentro dos estudos e formação de um engenheiro.

Suas aplicações envolvem desde análises de populações na estatística, juros no mercado financeiro, no caso das funções exponenciais, até a escala de Decibéis na física, assim como a análise de pH na química.

Enfim, o estudo dessas funções é de grande relevância dentro dos diversos campos e aplicações nas engenharias.

TEMA 1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

As funções exponenciais têm diversas aplicações no campo das Engenharias e outras tantas em diferentes áreas como na matemática financeira com os juros compostos, nas ciências humanas nos estudos demográficos, nas ciências biológicas nos estudos de epidemias, e assim poderíamos ficar citando aplicações.

Portanto, devido ao seu alto grau de influência em diversas ciências torna-se fundamental o conhecimento, mesmo que inicial, de seus conceitos e cálculos.

Agora, estudaremos os dois tipos de funções exponenciais. Nos próximos dois vídeos você verá as principias diferenças do comportamento das funções exponenciais crescentes e decrescentes.

Exemplo 1. Uma determinada substância tem uma concentração inicial de 1200mg. A cada hora a sua concentração é reduzida pela metade. Determine a concentração dessa substância após 6 horas.

Vídeo Aula 3 – Exemplo 1 - 4min16

04-201900316-A03-P01

Exemplo 2. Em um tipo de epidemia, cientistas afirmam que daqui a “t” dias a quantidade de bactérias (em milhões) no ar segue a seguinte função:

$$f(t) = 100 \cdot e^{0,02t}$$

Qual será o número de bactérias em 1 dia e em 10 dias?

Vídeo Aula 3 – Exemplo 2 – 5min43

04-201900316-A03-P02

TEMA 2 GRÁFICOS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Exemplo 3. Demonstre graficamente o comportamento da função exponencial $f(x) = 2^x$

Vídeo Aula 3 – Exemplo 3 – 4min51

04-201900316-A03-P03

Exemplo 4. Demonstre graficamente o comportamento da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Vídeo Aula 3 – Exemplo 4 – 5min22

04-201900316-A03-P04

TEMA 3 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

De forma direta e simplificada, podemos dizer que as funções logarítmicas são as funções inversas das funções exponenciais.

Logicamente, há um detalhamento diferenciado nesse tipo de função, porém muito do seu comportamento, como função numérica e graficamente, seguem os mesmos princípios das funções exponenciais.

Agora, para abordar esse conteúdo, vamos a um exemplo prático.

Escala de magnitude Richter

Um terremoto com ondas sísmicas de tamanho S tem magnitude Richter

$$\text{Magnitude} = \log\left(\frac{S}{S_0}\right)$$

em que S_0 é o tamanho das ondas sísmicas que correspondem ao que tem sido declarado como um terremoto com magnitude Richter 0.

(AXLER, S. Pré-Cálculo: Uma preparação para o cálculo. 2/[ed. São Paulo: LTC, 2016. p. 243)

Exemplo 5. Quantas vezes um terremoto com magnitude Richter 7 é mais intenso que um terremoto com magnitude Richter 5?

Vídeo Aula 3 – Exemplo 5 – 5min01

04-201900316-A03-P05

TEMA 4 GRÁFICOS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Uma das grandes aplicações das funções logarítmicas é a aplicação na Escala de Intensidade Sonora (Decibéis).

Essa escala usa como referência a seguinte fórmula:

$$I_{dB} = 10 \cdot log\frac{I}{I_0}$$

Exemplo 6. No estudo ANÁLISE DOS NÍVEIS DE RUÍDO DENTRO DE UM CANTEIRO DE OBRAS - ESTUDO DE CASO, apresentado no XXXII ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUCAO, em Bento Gonçalves, RS, Brasil, em outubro de 2012.

Os autores trazem a seguinte tabela.

Operador	Atividades	Nível de Ruído, dB(A)	Tempo de exposição, min.
	Furadeira ligada	85	260 minutos
	Furadeira furando	94,4	260 minutos
1º Operador	Furadeira desligada	67,9	140 minutos
	Sem atividade	67,9	80 minutos
	Total		480 minutos

(MACIEL, D.U.: CATAI, R. E.; STELLA, J. C.; MATOSKI, A. ANÁLISE DOS NÍVEIS DE RUÍDO DENTRO DE UM CANTEIRO DE OBRAS - ESTUDO DE CASO, 2012. Disponível: http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2012_TN_STP_160_934_20823.pdf)

Sendo que o limite de tolerância é de 85 dB(A) para a exposição máxima de 8 horas durante a jornada de trabalho conforme a NR-15.
Sendo assim, sabendo que a fala normal humana tem aproximadamente 65 decibéis (dB), quantas vezes o ruído de uma furadeira em funcionamento (furando) é mais intenso que uma fala normal humana?

Vídeo Aula 3 – Exemplo 6 – 8min46
04-201900316-A03-P06

TEMA 5 EXEMPLOS PRÁTICOS

Exemplo 7. Um estudo de uma colônia de bactérias com 1.000 células inicialmente. Revelou que há um crescimento exponencial que faz dobrar sua colônia a cada hora. Qual quantidade de células dessa colônia após 10 horas do início do estudo?

Vídeo Aula 3 – Exemplo 7 – 4min44
04-201900316-A03-P07

Exemplo 8. Uma aplicação financeira que remunere à taxa de 1%a.m. em regime capitalização por juros compostos.
Supondo uma aplicação de um capital R$1.000,00, qual será o montante resgatado após 12 meses?

Vídeo Aula 3 – Exemplo 8 – 4min44
04-201900316-A03-P08

TEMA 6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Sendo a função exponencial $f(x) = 2^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:
a) $f(3) =$
b) $f(-4) =$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

02. Sendo a função exponencial $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $f(1) =$

b) $f(-3) =$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

03. Uma aplicação financeira que remunere à taxa de 0,99%a.m. em regime capitalização por juros compostos.

Supondo uma aplicação de um capital R$2.000,00, qual será o montante resgatado após 24 meses?

04. Dada a fórmula de regime de capitalização composta (juros compostos)

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

Onde:

M – Montante (valor futuro)

C – Capital (valor presente)

i – Taxa de juros (índice de %)

n- Prazo (tempo)

Calcule em quanto tempo um capital dobrará seu valor à taxa de 2%a.m.

05. Um dos usos mais significativos das funções exponenciais é a ideia de notação científica. A notação científica permite que os números sejam escritos usando potências de 10. Assim evidenciando a ordem de grandeza dos numerais.

Veja os exemplos a seguir:

A velocidade da luz é de $300.000 km/s$, em notação científica: $3 \cdot 10^5 km/s$.

A massa de um elétron é de, aproximadamente,

$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 911\text{g}$, em notação científica: $9{,}11 \cdot 10^{-28} g$

Escreva em notação científica as seguintes grandezas:

a) Raio da Terra: 6.371km

b) Massa de um átomo de oxigênio: $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 027 g$

06. Um problema ecológico que se tem apresentado em grandes escalas em lagos de parques urbanos é a proliferação de plantas aquáticas que cobrem a superfície dos lagos e, assim, baixando a oxigenação das águas.

Supondo que uma planta aquática tem potencial de dobrar sua cobertura (área) a cada 1 dia, e que sua área de ocupação inicial é de 1m², quanto tempo essa planta levará para cobrir um lago de 3.000 m²?

07. Uma indústria produz 2.000 unidades de uma peça diariamente. Estima-se um crescimento da produção diária para 5.000 unidades em 15 dias. Calcule a taxa de crescimento.

08. (MACKENZIE-SP) O pH do sangue humano é calculado por $pH = log\left(\frac{1}{x}\right)$, sendo x a molaridade dos íons H_3O^+. Se essa molaridade for dada por $4{,}0 \cdot 10^{-8}$ e, adotando-se $log2 = 0{,}30$, o valor desse pH será:

a) 7,20

b) 4,60

c) 6,80

d) 4,80

e) 7,40

09. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0{,}4 \cdot t}$$

Qual o total de bactérias após 10 horas e trinta minutos?

10. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0{,}4 \cdot t}$$

Em quanto tempo o número de bactérias atinge 76.800?

RESPOSTA PASSO A PASSO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Sendo a função exponencial $f(x) = 2^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $f(3) =$

b) $f(-4) =$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

Resolução:

a) $f(x) = 2^{x+2}$

Substituindo x por 3, temos:

$f(3) = 2^{3+2}$

$f(3) = 2^5$

$f(3) = 32$

b) $f(x) = 2^{x+2}$

Substituindo x por -4, temos:

$f(-4) = 2^{-4+2}$

$f(-4) = 2^{-2}$

$f(-4) = \frac{1}{2^2}$

$f(-4) = \frac{1}{4}$

$f(-4) = 0,25$

c) $f(x) = 2^{x+2}$

Substituindo x por $\frac{1}{2}$, temos:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}+2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}+\frac{4}{2}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{5}{2}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[2]{2^5}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{32}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5,66$

02. Sendo a função exponencial $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule:

a) $f(1) =$

b) $f(-3) =$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

Resolução:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

Substituindo x por 1, temos:

$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1+2}$

$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$

$f(1) = \frac{1^3}{3^3}$

$f(1) = \frac{1}{27}$

$f(1) = 0,037$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

Substituindo x por -3, temos:

$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3+2}$

$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$f(-3) = \left(\frac{3}{1}\right)^{1}$

$f(-3) = \frac{3^1}{1^1}$

$f(-3) = \frac{3}{1}$

$f(-3) = 3$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

Substituindo x por $\frac{1}{2}$, temos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}+2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{4}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{3}\right)^{5}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1^5}{3^5}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{243}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{0{,}004115}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}06415$$

03. Uma aplicação financeira que remunere à taxa de 0,99%a.m. em regime capitalização por juros compostos.

Supondo uma aplicação de um capital R$2.000,00, qual será o montante resgatado após 24 meses?

Resolução:

C = 2000

n = 24

i = 0,99% = 0,99/100 = 0,0099

$M = C \cdot (1+i)^n$

$M = 2000 \cdot (1+0{,}0099)^{24}$

$M = 2000 \cdot (1{,}0099)^{24}$

$M = 2000 \cdot 1{,}26672089$

$M = 2533{,}44$

04. Dada a fórmula de regime de capitalização composta (juros compostos)

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

Onde:

M – Montante (valor futuro)

C – Capital (valor presente)

i – Taxa de juros (índice de %)

n- Prazo (tempo)

Calcule em quanto tempo um capital dobrará seu valor à taxa de 2%a.m.

Resolução:

Como o montante é o dobro do capital, temos

M = 2C

i = 2% = 2/100 = 0,02

$M = C \cdot (1 + i)^n$

$2C = C \cdot (1 + 0{,}02)^n$

$\frac{2C}{C} = (1{,}02)^n$

$2 = (1{,}02)^n$

Aplicando logaritmo natural nos dois membros, temos:

$\ln 2 = \ln(1{,}02)^n$

$\ln 2 = n . \ln(1{,}02)$

$\frac{\ln 2}{\ln(1{,}02)} = n$

$n = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}02)}$

$n = \frac{0{,}69314718}{0{,}01980263}$

$n = 35$

05. Um dos usos mais significativos das funções exponenciais é a ideia de notação científica. A notação científica permite que os números sejam escritos usando potências de 10. Assim evidenciando a ordem de grandeza dos numerais.

Veja os exemplos a seguir:

A velocidade da luz é de $300.000 km/s$, em notação científica: $3 \cdot 10^5 km/s$.

A massa de um elétron é de, aproximadamente,

$0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 911$g, em notação científica: $9{,}11 \cdot 10^{-28} g$

Escreva em notação científica as seguintes grandezas:

a) Raio da Terra: 6.371km

b) Massa de um átomo de oxigênio: $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 027 g$

Resolução:

a) $6{,}371 \cdot 10^3 km$

b) $2{,}7 \cdot 10^{-23} g$

06. Um problema ecológico que se tem apresentado em grandes escalas em lagos de parques urbanos é a proliferação de plantas aquáticas que cobrem a superfície dos lagos e, assim, baixando a oxigenação das águas.

Supondo que uma planta aquática tem potencial de dobrar sua cobertura (área) a cada 1 dia, e que sua área de ocupação inicial é de 1m², quanto tempo essa planta levará para cobrir um lago de 3.000 m²?

Resolução:

Como a população inicial é igual a 1 m^2 e dobra a cada 1 dia, temos

Dia 0 = 1 m² (0 período de tempo)

1° dia = 2 m² (1° período de tempo)

2° dia = 4 m² (2° período de tempo)

3° dia = 8 m² (3° período de tempo)
Desta foram
Área coberta = $(2)^{período\ de\ tempo}$
Formulando: $A = 2^x$, onde: A = área coberta e x = período de tempo
Área final =3000 m²
$3000 = 2^x$
Aplicando logaritmo natural nos dois membros, temos:
$\ln 3000 = \ln(2)^x$
$\ln 3000 = x . \ln(2)$
$\frac{\ln 3000}{\ln(2)} = x$
$x = \frac{\ln 3000}{\ln(2)}$
$x = \frac{8{,}006368}{0{,}693147}$
$x = 11{,}55075$
x = 11,55 dias, isto é, 11 dias e meio.

07. Uma indústria produz 2.000 unidades de uma peça diariamente. Estima-se um crescimento da produção diária para 5.000 unidades em 15 dias. Calcule a taxa de crescimento exponencial.
Resolução:
$5000 = 2000. b^{15}$, onde b é a taxa de crescimento exponencial.
$\frac{5000}{2000} = b^{15}$
$2{,}5 = b^{15}$
$\sqrt[15]{2{,}5} = \sqrt[15]{b^{15}}$
$\sqrt[15]{2{,}5} = b$
$1{,}06299 = b$
$b = 1{,}06299$

08. (MACKENZIE-SP) O pH do sangue humano é calculado por $pH = log\left(\frac{1}{x}\right)$, sendo x a molaridade dos íons H_3O^+. Se essa molaridade for dada por $4{,}0 \cdot 10^{-8}$ e, adotando-se $log 2 = 0{,}30$, o valor desse pH será:
a) 7,20
b) 4,60
c) 6,80
d) 4,80
e) 7,40
Resolução:
$PH = \log\left(\frac{1}{x}\right) = \log(1) - \log(x)$
$PH = \log(1) - \log(4. 10^{-8})$
$PH = 0 -(\log(4) + \log(10^{-8}))$
$PH = 0 -(\log(2^2) + \log(10^{-8}))$
$PH = 0 -(2. \log(2) + \log(10^{-8}))$
$PH = 0 -(2 . 0{,}30 -8)$
$PH = 0 -(0{,}60 -8)$

$PH = 0 - (-7,4)$
$PH = 7,4$

09. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$$

Qual o total de bactérias após 10 horas e trinta minutos?

Resolução:

$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$
$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot 10,5}$
$N(t) = 1.200 \cdot 2^{4,2}$
$N(t) = 1.200 \cdot 18,37917368$
$N(t) = 22055$

10. Suponha um experimento laboratorial com bactérias, sendo número de bactérias, t horas após o início do experimento, representado pela função:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$$

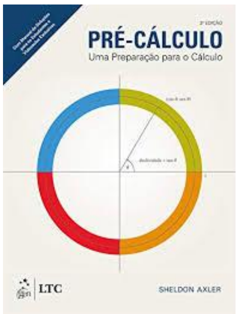
Em quanto tempo o número de bactérias atinge 76.800?

Resolução:

$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$
$76800 = 1.200 \cdot 2^{0,4 \cdot t}$
$\frac{76800}{1200} = 2^{0,4 \cdot t}$
$64 = 2^{0,4 \cdot t}$
$2^6 = 2^{0,4 \cdot t}$
$6 = 0,4. t$
$\frac{6}{0,4} = t$
$15 = t$
$t = 15$

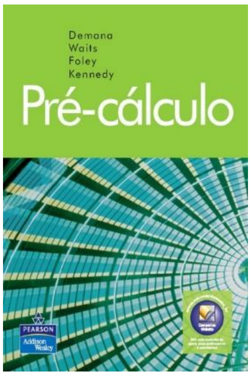
REFERÊNCIAS

AXLER, S. Pré-Cálculo: Uma preparação para o cálculo. 2ª ed. São Paulo: LTC, 2016.



Acesso via: Biblioteca Virtual – Minha Biblioteca

DEMANA, F. D.; WAITS, B. W.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. Pré-Cálculo. São Paulo: Pearson, 2009.



Acesso via: Biblioteca Virtual – Biblioteca Pearson