DISCIPLINA:

PRÉ-CÁLCULO

AULA 2

Prof. Guilherme Lemermeier Rodrigues

CONVERSA INICIAL

Nesse tópico serão apresentados de forma simples e direta os conceitos inicias de funções lineares, quadráticas e polinomiais.

A ideia central é apresentar os elementos centrais de cada desses tipos de funções. Para isso o conteúdo lhe será apresentado de forma progressiva.

TEMA 1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LINEAR

Uma função linear é representada por uma reta. Com essa simples damos início ao conteúdo trazendo o seguinte exemplo.

Exemplo 1: Suponha um reservatório de água residencial com 2.000 litros. O consumo diário de água nessa residência seja de 120 litros por morador.
Sabendo que essa residência tem 2 moradores, estabeleça a função que representa o consumo de água em decorrência à utilização plena do reservatório sem reabastecimento.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 1 – 4mim20
04-201900316-A02-P01

Exemplo 2: Formalmente escrevemos que uma função f: R→R é uma função afim quando existem dois números reais *a* e *b* tais que satisfaçam a seguinte condição, ∀ x∈R temos:

$$y = f(x) = ax + b$$

Quando que quando a ≠ 0 temos a definição de uma função do primeiro grau.

Desta forma, seguindo a definição acima, Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: f(0) = 3 e f(3) = 6.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 2 - 4min11
04-201900316-A02-P02

Exemplo 3. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: f(0) = 4 e f(2) = 2.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 3 – 4min52
04-201900316-A02-P03

TEMA 2 GRÁFICOS DE FUNÇÕES LINEARES

Como vimos, os elementos estruturais de uma função afim (linear) seguem o modelo f(x) = ax +b, sendo que a é o coeficiente angula e b o coeficiente linear.
No próximo exemplo esses elementos serão definidos.

Exemplo 4: Construa o gráfico da função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: f(0) = 3 e f(3) = 6.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 4 – 7min18
04-201900316-A02-P04

Exemplo 5: Construa o gráfico da função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: f(0) = 4 e f(2) = 2.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 5 - 4min58
04-201900316-A02-P05

Nesses exemplos vimos além a construção de uma função linear, mas também elementos chaves para o estudo das funções lineares.

TEMA 3 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática é representada por uma função quadrática no formato $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Outra forma de representar uma função quadrática é na forma fatorada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes.

Exemplo 6. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 5x + 6$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 6 - 4min50
04-201900316-A02-P06

Exemplo 7. Dada a função quadrática $f(x) = (x - 2)(x - 5)$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 7 – 3min32
04-201900316-A02-P07

Exemplo 8. Uma imobiliária tem 1.600 unidades de imóveis para alugar, das quais 800 já estão alugadas por R$ 300,00 mensais. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada diminuição de R$ 5,00 no valor do aluguel mensal, 20 novos contratos são assinados.

(DEMANA, F. D.; WAITS, B. W.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. Pré-Cálculo. 2ª.ed. São Paulo: Pearson, 2013. p. 102)

Vídeo Aula 2 – Exemplo 8 – 3min29
04-201900316-A02-P08

TEMA 4 GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Uma função quadrática é representada por uma parábola. Com essa simples definição damos início ao conteúdo trazendo o seguinte exemplo

Exemplo 9. Cálculo a área máxima de um terreno retangular cujo perímetro é de 100 metros.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 9 - 7min33

04-201900316-A02-P09

TEMA 5 DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E GRÁFICOS

Antes de partirmos para a definição de funções polinomiais propriamente dita, vamos dar uma olhada a ideia de Produtos notáveis, pois esses três elementos que serão demonstrados no próximo exemplo são muito importantes para as disciplinas futuras.

Exemplo 10. Demonstração de produtos notáveis.

Vídeo Aula 2 – Exemplo 10 - 3min10

04-201900316-A02-P10

Definição de funções polinomiais e gráficos

Um **polinômio** é uma função p tal que

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot\cdot\cdot + a_nx^n,$$

em que n é um inteiro não negativo e a_0, a_1, a_2, ..., a_n são números.

(AXLER, S. Pré-Cálculo: Uma preparação para o cálculo. 2ª ed. São Paulo: LTC, 2016. p. 188)

Exemplo 11. Calcule as raízes e construa o gráfico da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - x$$

Vídeo Aula 2 – Exemplo 11 - 4min53

04-201900316-A02-P11

Exemplo 12. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Vídeo Aula 2 – Exemplo 12 – 5min10

04-201900316-A02-P012

TEMA 6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:
f(1) = 3 e f(2) = 5.

02. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:

f(-1) = 0 e f(2) = 2.

03. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:
f(3) = 5 e f(5) = 3.

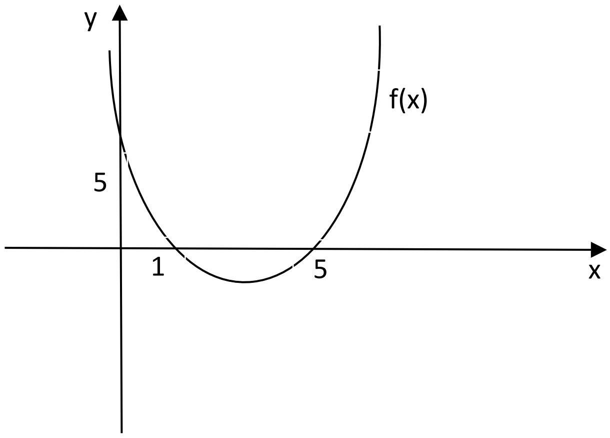
04. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 4$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

05. Dada a função quadrática $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

06. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

07. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 9$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

08. Dado o gráfico parabólico, estabeleça a função quadrática original.



09. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

10. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS PASSO A PASSO:

01. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição:
f(1) = 3 e f(2) = 5.

Sendo y = f(x) = ax +b   função base

Substituindo os valores, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª linha por (-1),

$$\begin{cases} -1a - b = -3 \\ \quad 2a + b = 5 \end{cases}$$ reduzindo

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{cases} -1a - b = -3 \\ \quad 2a \cancel{+ b} = 5 \end{cases} +$$
$$a \qquad = 2$$

Substituindo o valor de a = 2, na 1ª linha do sistema original,

$1 \cdot 2 + b = 3$

$2 + b = 3$

$b = 3 - 2$

$b = 1$

Portanto,

Substituindo os valor de a=2 e b=1 na forma genérica f(x) = ax +b .

Temos a resposta final: f(x) = 2x +1.

02. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: f(-1) = 0 e f(2) = 2.

Sendo y = f(x) = ax +b

Substituindo os valores, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -1a + b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª linha por (-1),

$$\begin{cases} 1a - b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{cases} 1a \cancel{- b} = 0 \\ 2a \cancel{+ b} = 2 \end{cases} +$$

$3\,a \;= 2$, logo $a \;= \frac{2}{3}$

Substituindo o valor de a = 2/3, na 1ª linha do sistema original,

$$-1 \cdot \frac{2}{3} + b = 0$$

$$-\frac{2}{3} + b = 0$$

$$b = \frac{2}{3}$$

Portanto,

Substituindo os valor de a=2/3 e b=2/3 na forma genérica f(x) = ax +b .

Temos a resposta final: f(x)= $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

03. Calcule a função afim (polinomial de primeiro grau) que satisfaça a condição: f(3) = 5 e f(5) = 3.

Sendo y = f(x) = ax +b

Substituindo os valores, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª linha por (-1),

$$\begin{cases} -3a - b = -5 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$$

Somando as duas linhas do sistema,

$$\begin{cases} -3a \cancel{- b} = -5 \\ 5a \cancel{+ b} = 3 \end{cases} +$$

$2\,a \quad = -2$

$$a \quad = -\frac{2}{2}$$
$$a \quad = -1$$

Substituindo o valor de a = -1, na 1ª linha do sistema original,

$3 \cdot (-1) + b = 5$

$-3 + b = 5$

$b = 5 + 3$

$b = 8$

Portanto,

Substituindo os valor de a=-1 e b=8 na forma genérica f(x) = ax +b .

Temos a resposta final: f(x) = (-1)x +8, assim, f(x)= -x+8.

04. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 4$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x^2 - 4x + 4$, temos que a=1, b=-4, c=4.

Sendo a>0 a concavidade da parábola será para cima.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),

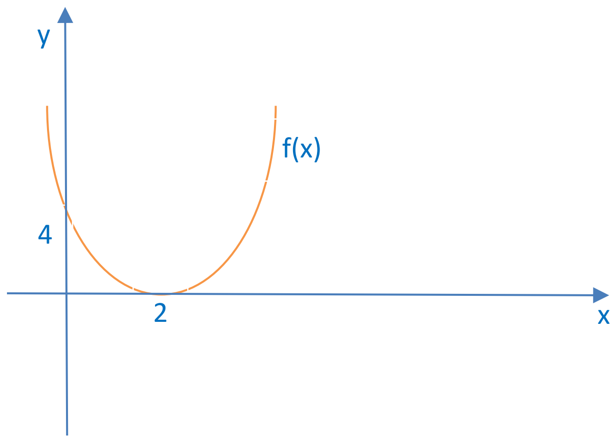
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Desta forma: $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x = \frac{4}{2}$$

$x = 2$, isso significa que as duas raízes têm o mesmo valor.

Graficamente:



05. Dada a função quadrática $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = -x^2 + 7x - 10$, temos que a=-1, b=7, c=-10.

Sendo a<0 a concavidade da parábola será para baixo.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Desta forma: $x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2-4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-1)}$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{-2}$$

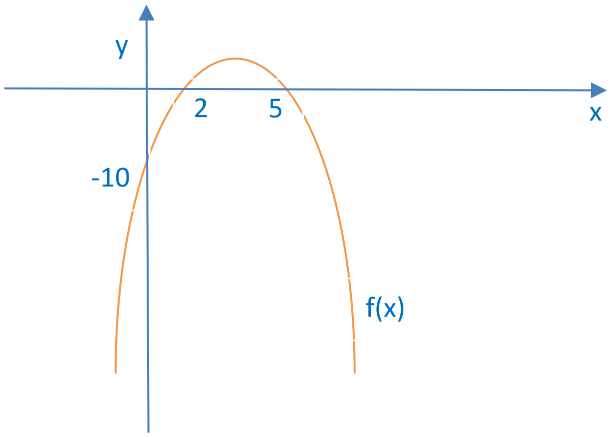
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$x = \frac{-7 \pm 3}{-2}$, separando o numerador

$$x_1 = \frac{-7-3}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-7+3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Graficamente:



06. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x^2 - 8x$, temos que a=1, b=-8, c=0.

Sendo a>0 a concavidade da parábola será para cima.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Desta forma: $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2-4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$

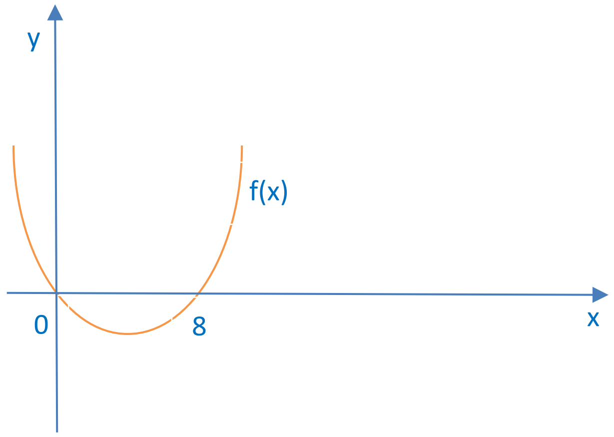
$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$x = \frac{8 \pm 8}{2}$, separando o numerador

$$x_1 = \frac{8-8}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_2 = \frac{8+8}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Graficamente:



07. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 9$, construa o gráfico que representa a função *f(x)*.

Seguindo o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x^2 - 9$, temos que a=1, b=0, c=-9.

Sendo a>0 a concavidade da parábola será para cima.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara),

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Desta forma: $x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1}$

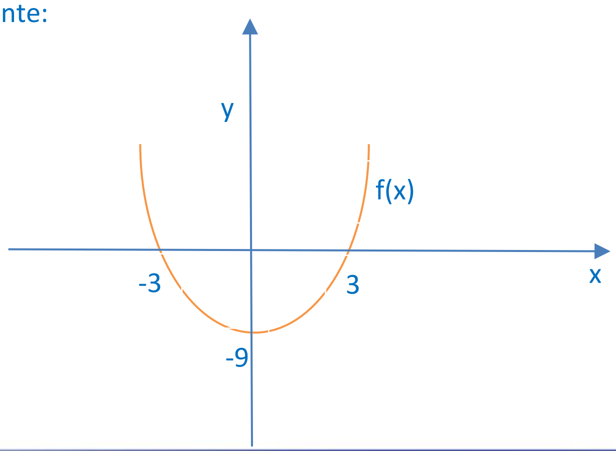
$$x = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$x = \frac{0 \pm 6}{2}$, separando o numerador

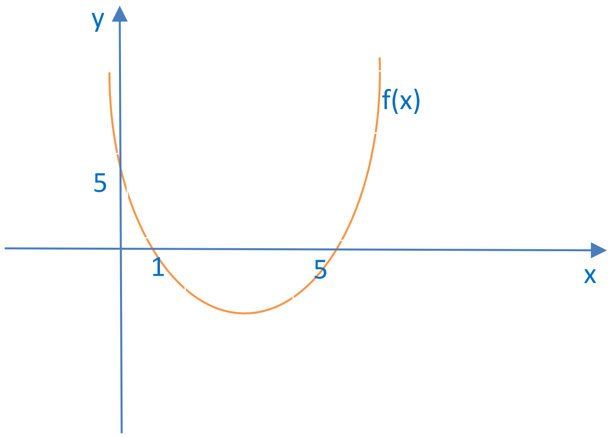
$$x_1 = \frac{0 - 6}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{0 + 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Graficamente:



08. Dado o gráfico parabólico, estabeleça a função quadrática original.



Sendo as raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$, desta forma temos na forma reduzida:
$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, desta forma, $f(x) = (x - 1)(x - 5)$.
Assim, desenvolvendo pela propriedade distributiva:
$f(x) = (x - 1)(x - 5)$
$f(x) = x^2 - 5x - 1x + 5$
$f(x) = x^2 - 6x + 5$

09. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Para calcular as raízes deve-se igualar a zero o polinômio. Assim temos que $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
Usando Briot-Ruffini:
P.R.R. = $\{\pm 1, \pm 2\}$, lembrando que esses números são os divisores do termo independente (2). Esses valores são os valores que arbitramos no dispositivo de Briot-Ruffini em busca do resultado 0 (zero) no último elemento.

	1	-2	-1	2
-1	1	-3	2	0

Desta forma, a primeira raiz é $x_1 = -1$
Para calcular as outras raízes usaremos a equação de segundo grau que resultou: 1x² - 3x + 2 = 0.
Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara), onde a= 1, b = -3, c = 2.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Desta forma: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2)}}{2 \cdot 1}$
$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x = \frac{3 \pm 1}{2}$, separando o numerador

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$x_3 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
Resposta: Raízes = {-1, 1, 2}

10. Calcule as raízes da função polinomial:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Para calcular as raízes deve-se igualar a zero o polinômio. Assim temos que $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Colocando o valor “x” em evidência,

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

Desta forma, Temos um produto de dois termos que resultariam em zero.

$x = 0 \;\; ou \;\; x^2 - 3x + 2 = 0$

Logo, a primeira raiz é $x_1 = 0$

Para calcular as outras raízes usaremos a equação de segundo grau que resultou: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Usando a fórmula quadrática (Fórmula de Bhaskara), onde a= 1, b = -3, c = 2.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Desta forma: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2)}}{2 \cdot 1}$

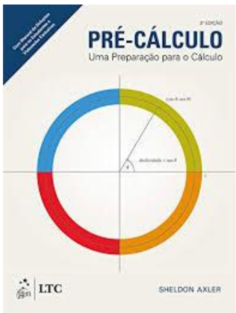
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$x = \frac{3 \pm 1}{2}$, separando o numerador

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$x_3 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
Resposta: Raízes = {0, 1, 2}

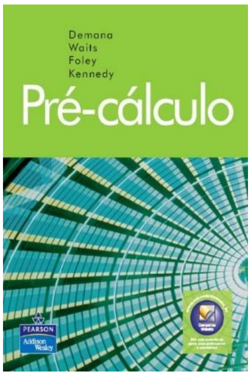
REFERÊNCIAS

AXLER, S. Pré-Cálculo: Uma preparação para o cálculo. 2ª ed. São Paulo: LTC, 2016.



Acesso via: Biblioteca Virtual – Minha Biblioteca

DEMANA, F. D.; WAITS, B. W.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. Pré-Cálculo. São Paulo: Pearson, 2009.



Acesso via: Biblioteca Virtual – Biblioteca Pearson