Actividad Práctica N°2: Diseño de controladores en variables de estado en tiempo continuo

Caso de estudio 1. Sistema de tres variables de estado

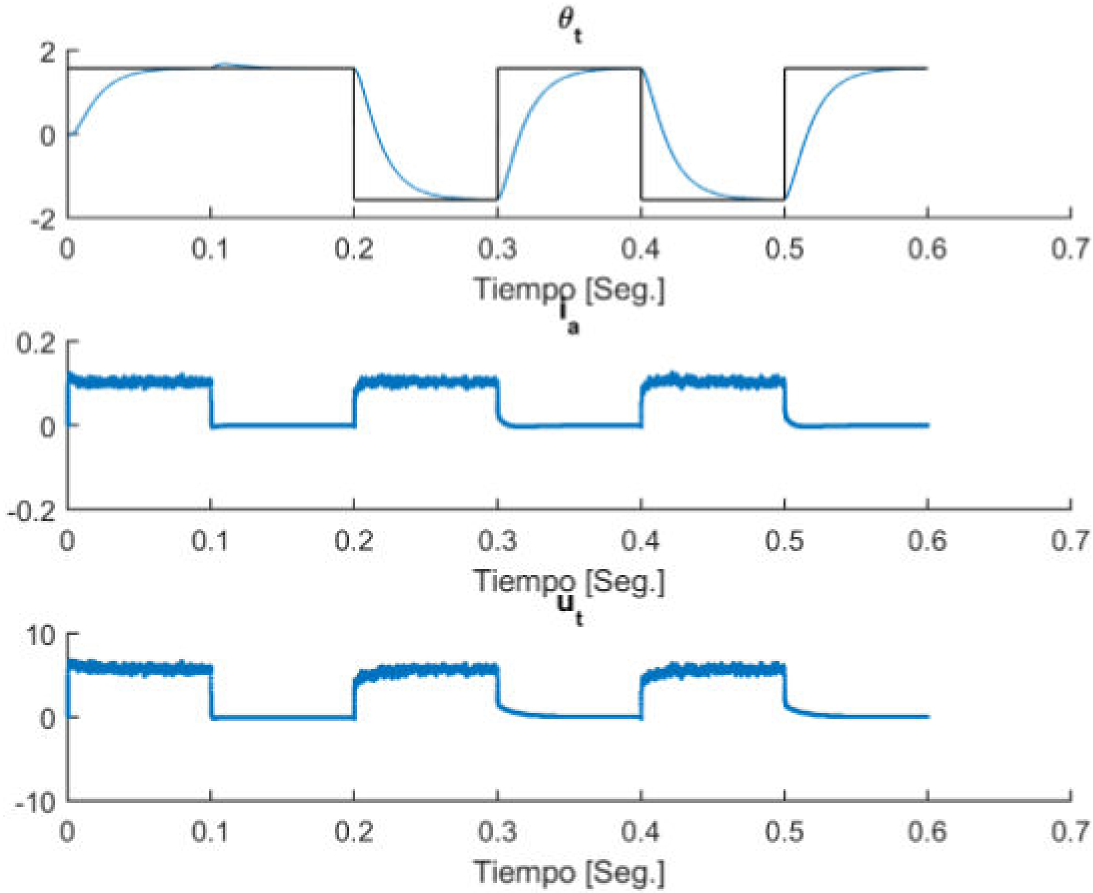


Fig. 1. Evolución del ángulo cuando el controlador en variables de estado tiene perturbaciones en su operación.

Dadas las ecuaciones del motor de corriente continua con torque de carga T_L no nulo, con los parámetros:

- $L_{AA} = 5\ 10^{-3}$
- $J = 0.004$
- $R_A = 0.2$
- $B_m = 0.005$
- $K_i = 6.5\ 10^{-5}$
- $K_m = 0.055$

$$\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{dt}} = -\frac{R_A}{L_{AA}} i_a - \frac{K_m}{L_{AA}} \omega_r + \frac{1}{L_{AA}} v_a$$

$$\frac{d\omega_r}{\mathrm{dt}} = \frac{K_i}{J} i_a - \frac{B_m}{J}\omega_r - \frac{1}{J}T_L$$

$$\frac{d\theta_t}{\mathrm{dt}} = \omega_r$$

1. Implementar un sistema en variables de estado que controle el ángulo del motor, para consignas de $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ cambiando cada 2 segundos y que el T_L de $1.15\,10^{-3}$ aparece sólo para $\frac{\pi}{2}$ y para $-\frac{\pi}{2}$ es nulo. Hallar el valor de integración de Euler adecuado. El objetivo es mejorar la dinámica del controlador que muestra la Fig. 1.
2. Considerar que no puede medirse la corriente y sólo pueda medirse el ángulo, por lo que debe implementarse un observador. Obtener la simulación en las mismas condiciones que en el punto anterior, y superponer las gráficas para comparar.

Primero se comienza definiendo las variables a utilizar:

```
Laa = 5e-3;
J = 0.004;
Ra = 0.2;
Bm = 0.005;
Ki = 6.5e-5;
Km = 0.055;
```

Ahora la representación matricial en variables de estado:

```
A = [-Ra/Laa -Km/Laa 0; Ki/J -Bm/J 0; 0 1 0]
```

```
A = 3×3
  -40.0000  -11.0000         0
    0.0162   -1.2500         0
         0    1.0000         0
```

```
B = [1/Laa 0; 0 -1/J; 0 0]
```

```
B = 3×2
   200     0
     0  -250
     0     0
```

La matriz C tiene la siguiente forma, de modo de poder

```
C = [0 0 1]
```

```
C = 1×3
     0     0     1
```

```
D = [0 0]
```

```
D = 1×2
```

```
     0     0
```

Se obtiene la función de transferencia para el torque:

```
sys = ss(A,B,C,D)
```

```
sys =

  A =
            x1
   x1      -40
   x2  0.01625
   x3        0

            x2
   x1      -11
   x2    -1.25
   x3        1

            x3
   x1        0
   x2        0
   x3        0

  B =
         u1    u2
   x1   200     0
   x2     0  -250
   x3     0     0

  C =
       x1  x2  x3
   y1   0   0   1

  D =
       u1  u2
   y1   0   0

Continuous-time state-space model.
```

```
GTheta = tf(sys)
```

```
GTheta =

  From input 1 to output:

           3.25

  ----------------------

  s^3 + 41.25 s^2

               + 50.18 s


  From input 2 to output:

      -250 s - 1e04

  ----------------------

  s^3 + 41.25 s^2
```

```
              + 50.18 s

Continuous-time transfer function.
```

Se puede ver que la función de transferencia está dada en forma de matriz, ya que se está ante un sistema del tipo MIMO, es decir, el resultado obtenido tiene sentido hasta ahora.

Ahora, para controlar al sistema se utiliza un diseño con LQR. Para ello es necesario primero declarar las variables Q, R y las matrices ampliadas.

```
Q = diag([0.1 0.1 0.1 100000])
```

```
Q = 4×4
10^5 ×
    0.0000         0         0         0
         0    0.0000         0         0
         0         0    0.0000         0
         0         0         0    1.0000
```

```
R = 100;
Aamp = [A zeros(3,1); -C 0]
```

```
Aamp = 4×4
  -40.0000  -11.0000         0         0
    0.0162   -1.2500         0         0
         0    1.0000         0         0
         0         0   -1.0000         0
```

```
Bamp = [B(:,1); 0]
```

```
Bamp = 4×1
   200
     0
     0
     0
```

```
K = lqr(Aamp,Bamp,Q,R)
```

```
K = 1×4
    0.0116   23.2442   50.0305  -31.6228
```

Ahora, para calcular el tiempo de integración para Euler es necesario obtener los polos a lazo cerrado, y trabajar con la dinámica del más rápido. Los polos son:

```
poles = eig(Aamp-Bamp(:,1)*K)
```

```
poles = 4×1 complex
 -40.4924 + 0.0000i
  -1.5997 + 0.0000i
  -0.7396 + 1.0196i
  -0.7396 - 1.0196i
```

El polo más rápido es:

```
lambda = max(poles)
```

```
lambda = -40.4924
```

Entonces, se calcula t_r, de modo de simular con un tiempo menor al mismo.

```
tr = log(0.95)/lambda
```

```
tr = 0.0013
```

Se decide entonces, utilizar un período de integración para Euler de $1\ 10^{-4}$.

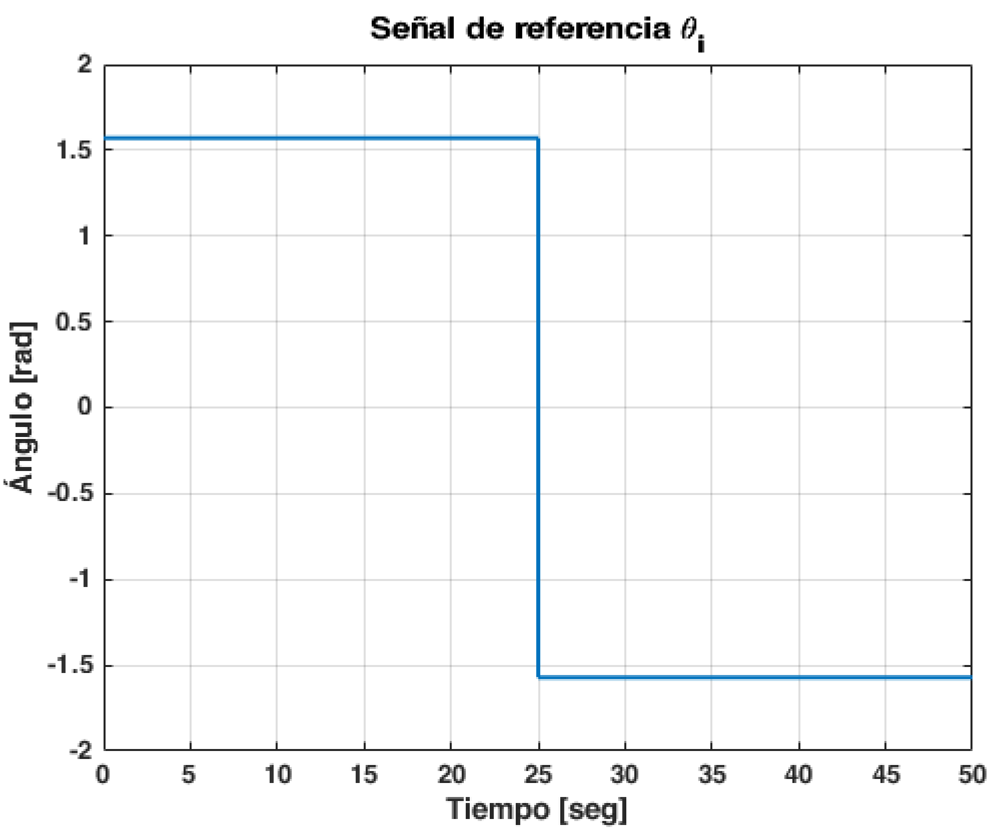
```
h = 1e-4;
simTime = 50;
t = 0:h:(simTime-h);
```

Con estas variables, se define la entrada, llamada reference.

```
reference = (pi/2)*square(2*pi*(1/50)*t);
```

La señal de referencia es la siguiente:

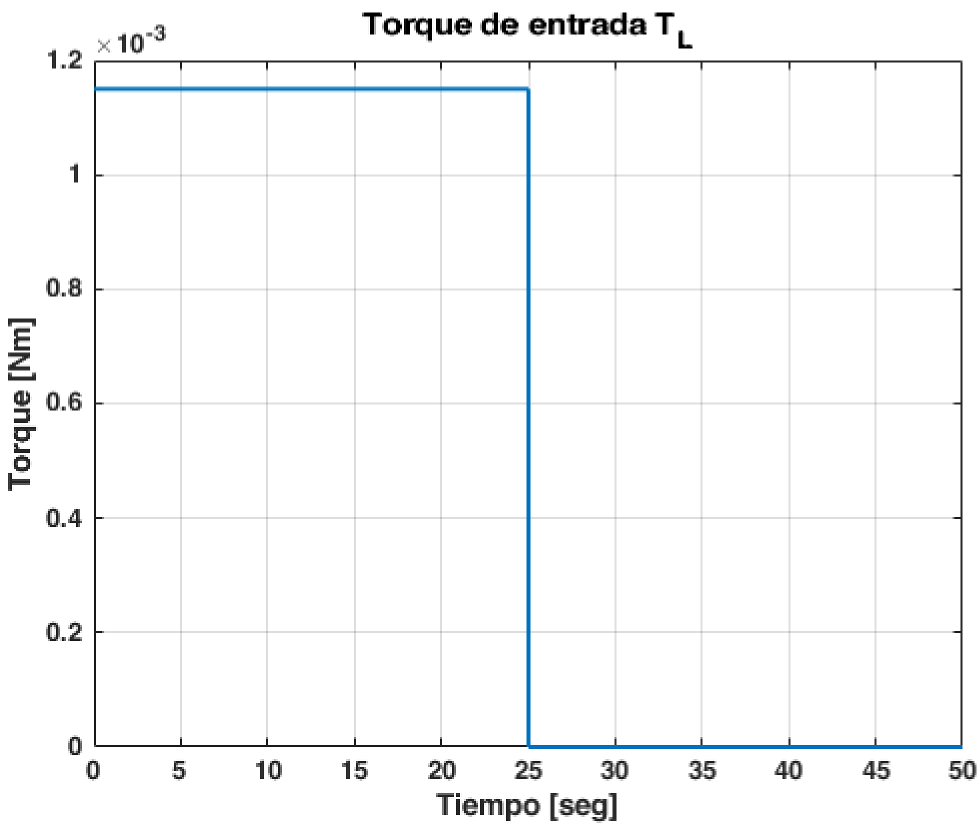
```
plot(t,reference,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Ángulo [rad]')
title('Señal de referencia \theta_i')
grid
```



El torque de entrada del sistema es:

```
torque = ((1.15e-3)/2)*square(2*pi*(1/50)*t)+((1.15e-3)/2);
```

```
plot(t,torque,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Torque [Nm]')
title('Torque de entrada T_L')
grid
```



Las condiciones iniciales del sistema son nulas, para ello se plantean las siguientes variables:

```
ia(1) = 0;
theta(1) = 0;
omega(1) = 0;
```

El vector de estados del sistema está dado por:

```
stateVector = [ia(1) omega(1) theta(1)]';
```

El punto de operación se lo toma alrededor del origen, y, luego, se plantea el vector x, propio de la representación en variables de estado.

```
xop = [0 0 0]';
x = [ia(1) omega(1) theta(1)];
zeta(1) = 0;
integ(1) = zeta(1);
```

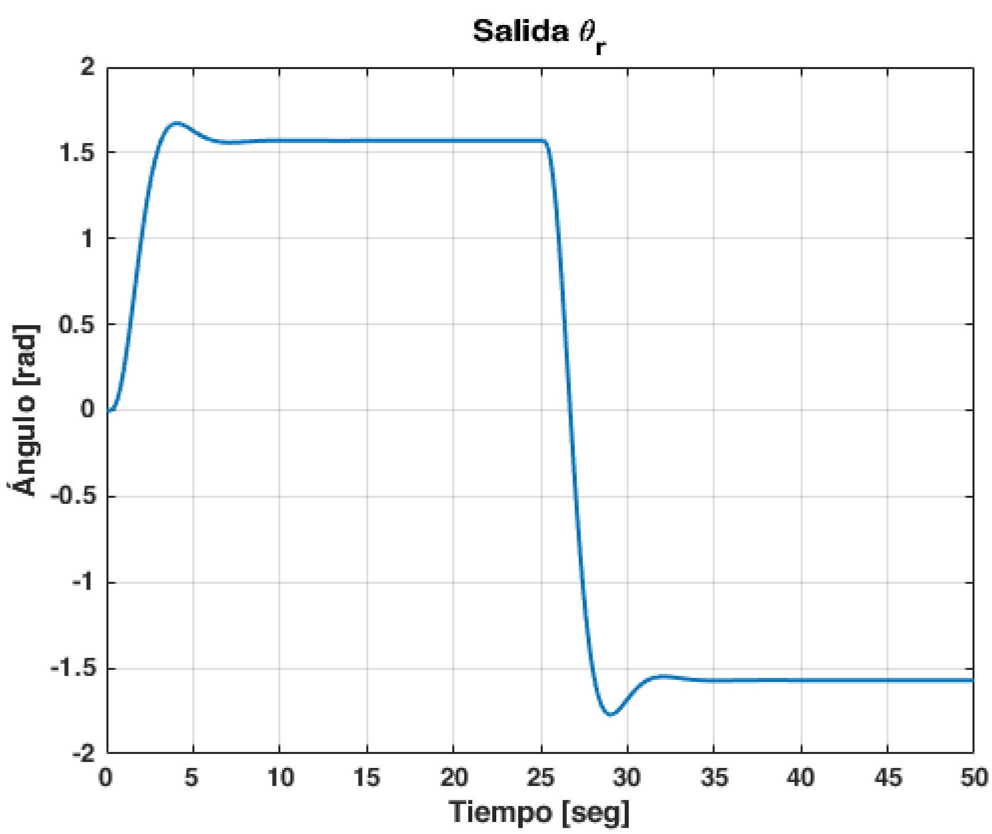
Ahora, la simulación propiamente dicha:

```
for i = 1:(simTime/h)
```

```
    zetaP = reference(i)-C*stateVector;
    zeta(i) = integ+zetaP*h;
    u(i) = -K(1:3)*stateVector-K(4)*zeta(i);
    ia(i) = x(1);
    omega(i) = x(2);
    theta(i) = x(3);
    x1P = -Ra*x(1)/Laa-Km*x(2)/Laa+u(i)/Laa;
    x2P = Ki*x(1)/J-Bm*x(2)/J-torque(i)/J;
    x3P = x(2);
    xP = [x1P x2P x3P]';
    x = x+h*xP;
    stateVector = [ia(i) omega(i) theta(i)]';
    integ = zeta(i);
end
save('iaReal.mat','ia');
```

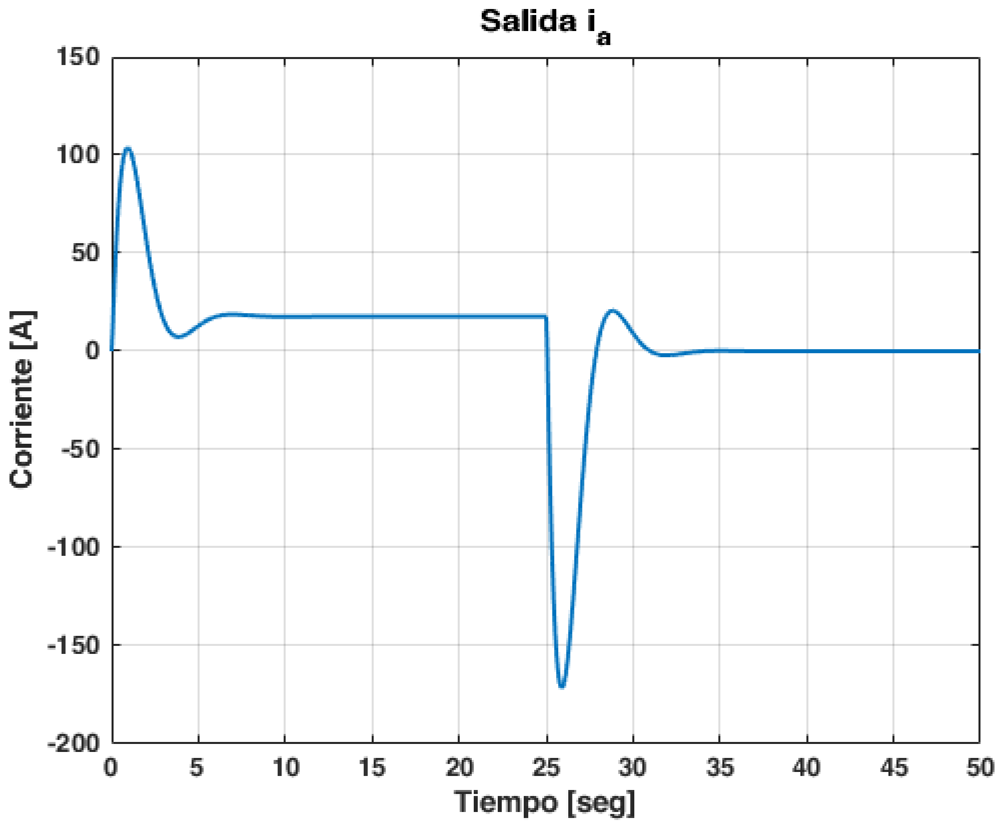
Ahora, se tiene la siguiente salida de ángulo del sistema:

```
plot(t,theta,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Ángulo [rad]')
title('Salida \theta_r')
grid
```

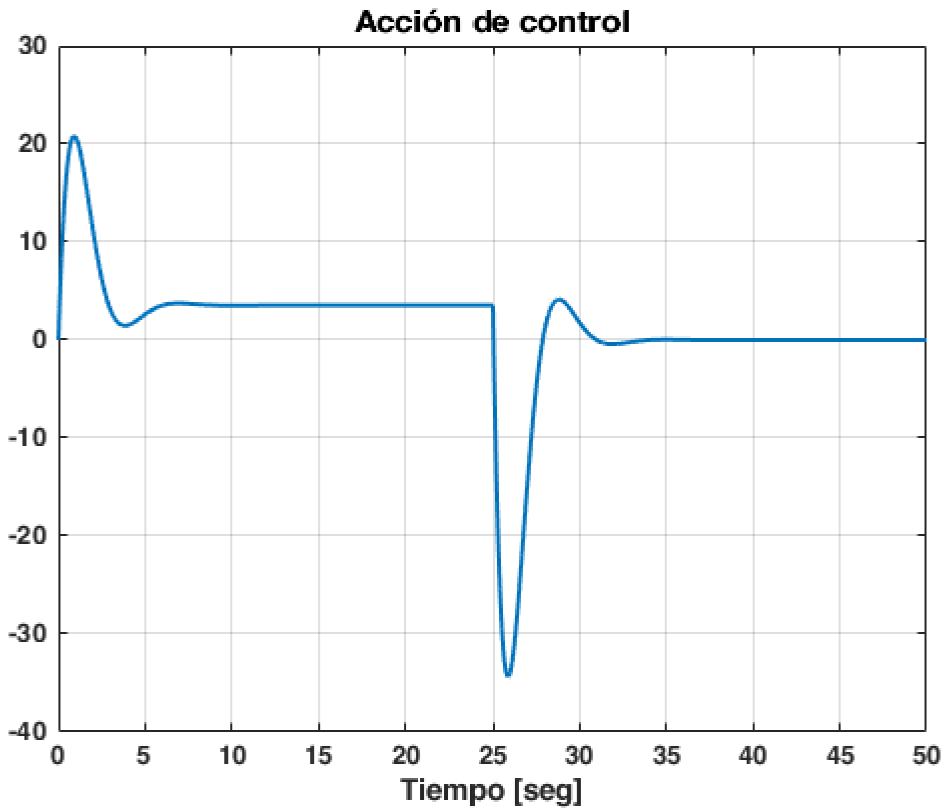


Junto con la salida del ángulo del motor, también se pueden visualizar la corriente de armadura y la acción de control.

```
plot(t,ia,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Corriente [A]')
title('Salida i_a')
grid
```




```
plot(t,u,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
title('Acción de control')
grid
```



El segundo inciso de la consigna pide implementar un observador para la corriente en el sistema, considerando que no puede ser medida y que sólo puede medirse el ángulo del motor. Además, pide obtener gráficas superpuestas. Se procede a realizar exactamente el mismo procedimiento, por lo que no se comentará hasta el momento en que se deba simular, ya que ahí aparecen cambios.

```
Laa = 5e-3;
J = 0.004;
Ra = 0.2;
Bm = 0.005;
Ki = 6.5e-5;
Km = 0.055;
A = [-Ra/Laa -Km/Laa 0; Ki/J -Bm/J 0; 0 1 0];
B = [1/Laa 0 0]';
C = [0 0 1];
D = [0 0];
Q = diag([0.1 0.1 0.1 100000]);
R = 100;
Aamp = [A zeros(3,1); -C 0];
Bamp = [B(:,1); 0];
Camp = [C 0];
K = lqr(Aamp,Bamp,Q,R);
h = 1e-4;
simTime = 50;
t = 0:h:(simTime-h);
reference = (pi/2)*square(2*pi*(1/50)*t);
```

```
torque = ((1.15e-3)/2)*square(2*pi*(1/50)*t)+((1.15e-3)/2);
ia(1) = 0;
theta(1) = 0;
omega(1) = 0;
stateVector = [ia(1) omega(1) theta(1)]';
xop = [0 0 0]';
x = [ia(1) omega(1) theta(1)]';
zeta(1) = 0;
integ(1) = zeta(1);
```

Ahora, para el observador:

```
Ao = A'
```

```
Ao = 3×3
  -40.0000    0.0162         0
  -11.0000   -1.2500    1.0000
         0         0         0
```

```
Bo = C'
```

```
Bo = 3×1
     0
     0
     1
```

```
Co = B'
```

```
Co = 1×3
   200     0     0
```

```
Qo = diag([1 0.01 0.01])
```

```
Qo = 3×3
    1.0000         0         0
         0    0.0100         0
         0         0    0.0100
```

```
Ro = 10;
Ko = lqr(Ao,Bo,Qo,Ro)
```

```
Ko = 1×3
   -0.0001    0.0003    0.0402
```

```
obsStateVector = [ia(1) omega(1) theta(1)]';
xObs = [0 0 0]';
```

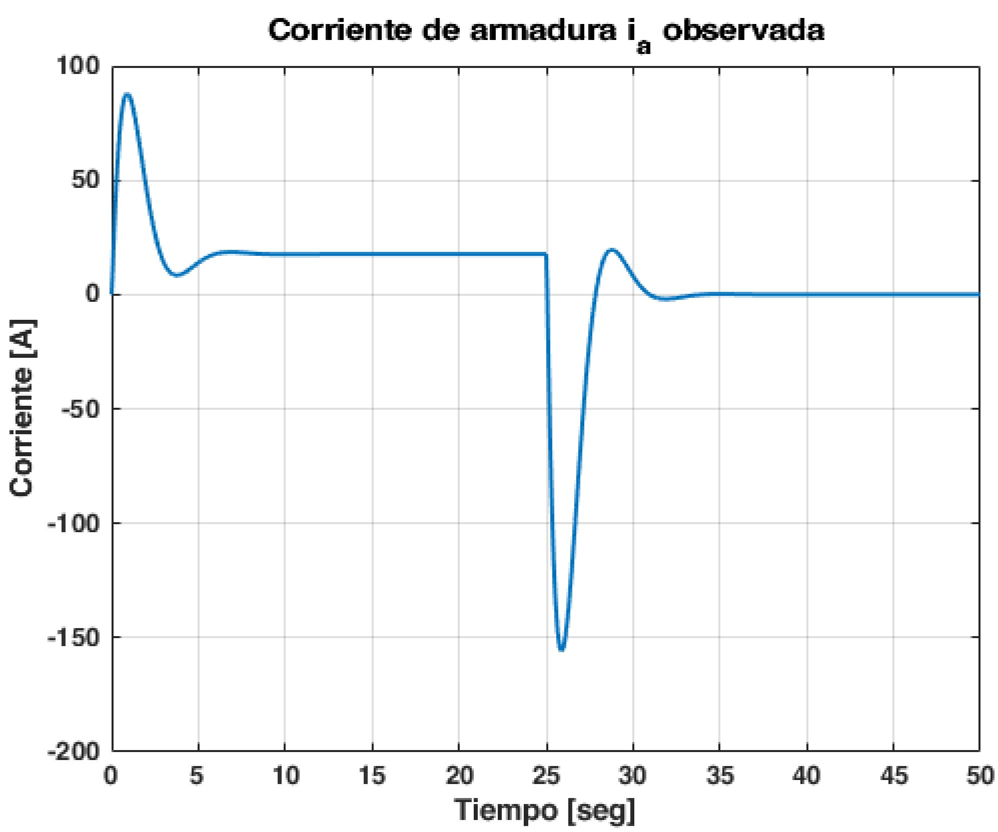
La simulación:

```
for i = 1:(simTime/h)
    zetaP = reference(i)-Camp(1:3)*stateVector-Camp(4)*integ;
    zeta(i) = integ+zetaP*h;
    u(i) = -K(1:3)*obsStateVector-K(4)*zeta(i);
    ia(i) = x(1);
    omega(i) = x(2);
    theta(i) = x(3);
```

```
    x1P = -Ra*x(1)/Laa-Km*x(2)/Laa+u(i)/Laa;
    x2P = Ki*x(1)/J-Bm*x(2)/J-torque(i)/J;
    x3P = x(2);
    xP = [x1P x2P x3P]';
    x = x+xP*h;
    iaO(i)= xObs(1);
    omegaO(i)= xObs(2);
    thetaO(i)= xObs(3);
    yO(i) = C*obsStateVector;
    y(i) = Camp(1:3)*stateVector+Camp(4)*integ;
    xTP = A*xObs+B*u(i)+Ko*(y(:,i)-yO(:,i));
    xObs = xObs+xTP*h;
    stateVector = [ia(i) omega(i) theta(i)]';
    integ = zeta(i);
    obsStateVector =[iaO(i) omegaO(i) thetaO(i)]';
end
```

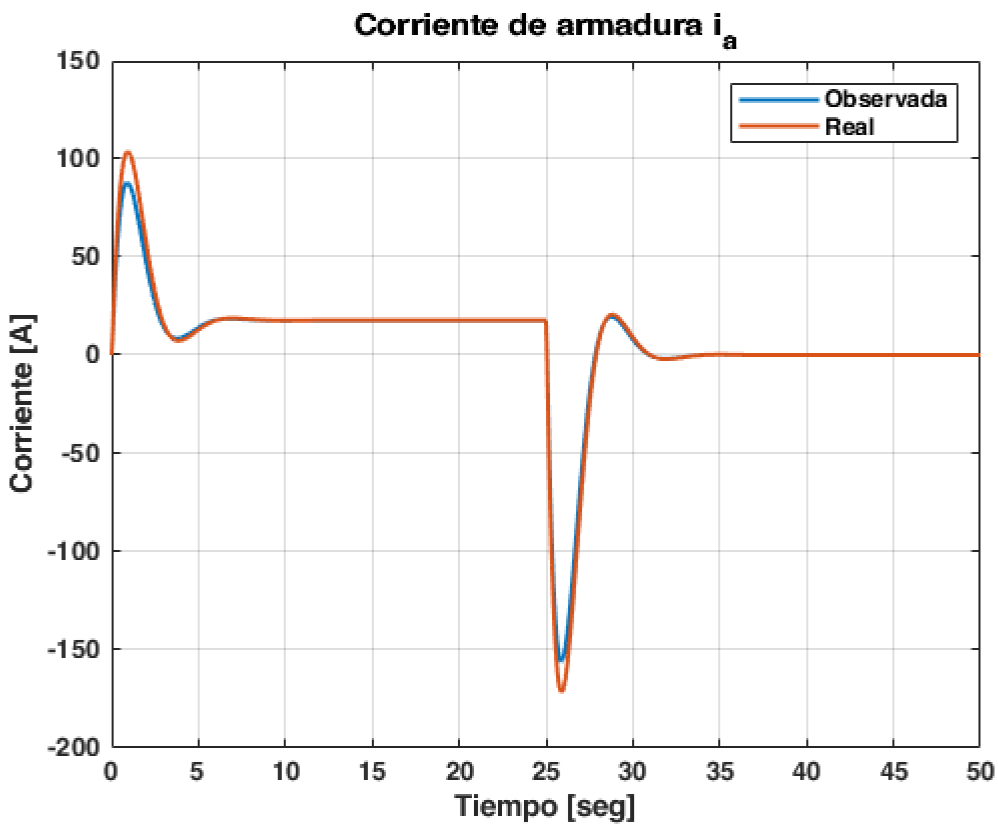
La corriente observada es:

```
plot(t,iaO,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Corriente [A]')
title('Corriente de armadura i_a observada')
grid
```



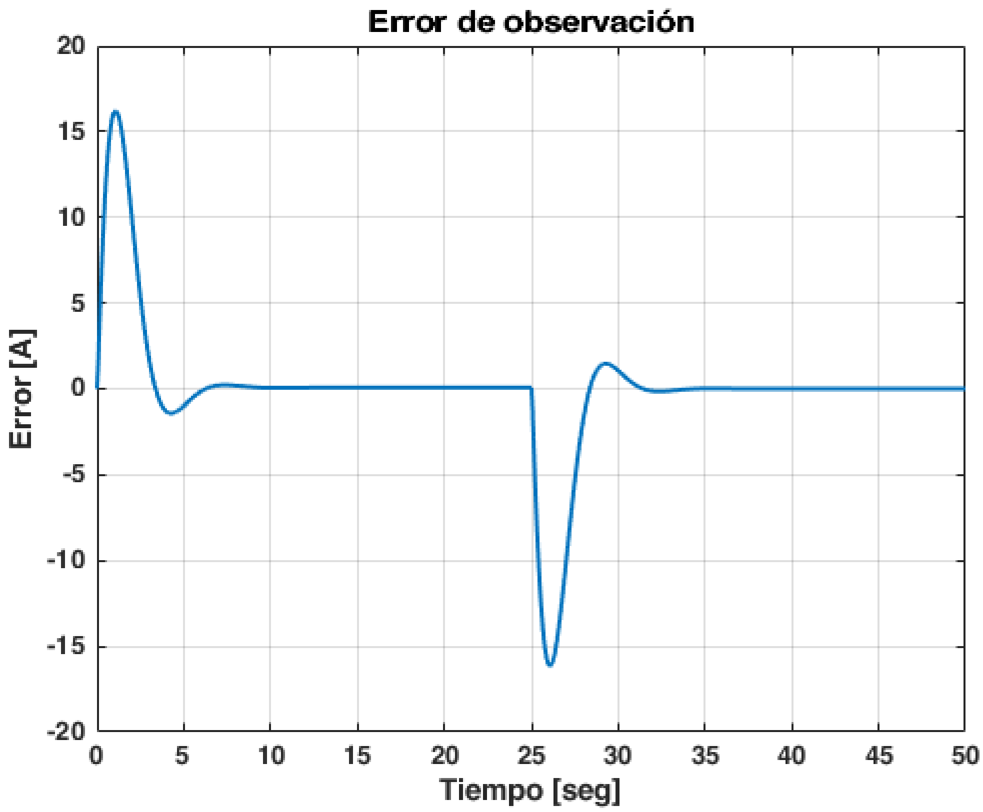
Ahora, para comparar con la real obtenida anteriormente:

```
realIa = load('iaReal.mat');
plot(t,iaO,'LineWidth',1.5)
hold on
plot(t,realIa.ia,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Corriente [A]')
title('Corriente de armadura i_a')
legend('Observada', 'Real')
grid on
hold off
```



Es posible apreciar un error en la aproximación realizada mediante el observador. A continuación se muestra la evolución de ese error.

```
obsError(1) = 0;
for i = 1:(simTime/h)
    obsError(i) = (realIa.ia(i)-iaO(i));
end
plot(t,obsError,'LineWidth',1.5)
xlabel('Tiempo [seg]')
ylabel('Error [A]')
title('Error de observación')
grid
```


Error de observación
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
Error [A]
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
Tiempo [seg]