

# Tarea 2: Profesor Laboret

Trabajo Práctico

Autor: Villar, Federico Ignacio  
Profesor: Laboret, Sergio Oscar  
Fecha de entrega: 29 de mayo de 2023  
Córdoba, Argentina

# Resumen

En el siguiente informe se detallará la resolución de la segunda tarea propuesta por el profesor Laboret para la materia de Sistemas de Control II. En el documento se adjuntan imágenes, fragmentos de código y plots de respuestas.

Se pretende ser lo más claro posible, es por ello que se detallan varios procedimientos de cálculo y aplicación. Aunque, la mayoría de los resultados se obtuvieron de simulaciones con Matlab, por lo que no hay tantas expresiones analíticas.

# Índice de Contenidos

<b>1. Consigna</b>	<b>1</b>
<b>2. Desarrollo de los controladores</b>	<b>2</b>
2.1. Funciones de transferencia . . . . .	2
2.2. Cálculo de constantes . . . . .	2
2.3. Lugar de raíces vs polos deseados . . . . .	2
2.4. Controlador PI . . . . .	3
2.5. Controlador PID . . . . .	6
<b>3. Desempeño de los controladores</b>	<b>8</b>
3.1. Controlador PI . . . . .	8
3.1.1. Señal de error . . . . .	8
3.1.2. Acción de control proporcional . . . . .	9
3.1.3. Acción de control integral . . . . .	10
3.1.4. Acción de control . . . . .	11
3.1.5. Salida . . . . .	12
3.2. Controlador PID . . . . .	12
3.2.1. Señal de error . . . . .	13
3.2.2. Acción de control proporcional . . . . .	14
3.2.3. Acción de control integral . . . . .	15
3.2.4. Acción de control derivativa . . . . .	16
3.2.5. Acción de control . . . . .	17
3.2.6. Salida . . . . .	18
3.3. Comparación entre controladores . . . . .	18
3.3.1. Error en estado estable . . . . .	18
3.3.2. Tiempo de establecimiento 2% . . . . .	18
3.3.3. Sobrepaso . . . . .	19
<b>4. Conclusiones</b>	<b>21</b>

# Índice de Figuras

1. Lugar de raíces de $G_d(z)$ con polos deseados. . . . .	3
2. Mapa de polos y ceros del sistema realimentado. . . . .	5
3. Respuesta del sistema controlado por PI ante una entrada escalón unitario. . . . .	5
4. Mapa de polos y ceros del sistema realimentado con PID. . . . .	7
5. Respuesta al escalón unitario del sistema realimentado con PID. . . . .	7
6. Señal de error en sistema controlado por PI. . . . .	8
7. Acción de control proporcional en sistema controlado por PI. . . . .	9
8. Acción de control integral en sistema controlado por PI. . . . .	10
9. Acción de control en sistema controlado por PI. . . . .	11
10. Salida en sistema controlado por PI. . . . .	12
11. Señal de error en sistema controlado por PID. . . . .	13

12.	Acción de control proporcional en sistema controlado por PID. . . . .	14
13.	Acción de control integral en sistema controlado por PID. . . . .	15
14.	Acción de control derivativa en sistema controlado por PID. . . . .	16
15.	Acción de control en sistema controlado por PID. . . . .	17
16.	Señal en sistema controlado por PID. . . . .	18
17.	Salida del sistema con controlador PID modificado. . . . .	19
18.	Acción derivativa del controlador PID modificado. . . . .	20

## Índice de Códigos

1.	Cálculo del cero y ganancia del controlador PID . . . . .	6
----	---	---

# 1. Consigna

Se tiene para cada alumno en un archivo adjunto en PDF una función de transferencia con polos  $p_1$  y  $p_2$ , probablemente un cero y una ganancia  $K$ , además, especificaciones de sobrepaso, tiempo de respuesta 2% y período de muestreo.

De las especificaciones de diseño dadas en el archivo adjunto:

- Obtener los valores de  $\zeta$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_d$ :

$$\zeta = \frac{-\ln(\frac{S}{100})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\frac{S}{100})}}, \quad t_R(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_0}, \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}, \quad t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

- Calcular la cantidad de muestras por ciclo de la frecuencia amortiguada  $\omega_d$ :

$$m = \frac{t_d}{T_m}$$

- Mediante la equivalencia de planos  $s$  y  $z$  determinar la ubicación de los polos deseados en el plano  $z$ :

$$r = |z_{1,2}| = e^{-\zeta \omega_0 T_m} \Omega = \angle z_{1,2} = \pm \omega_d T_m$$

- Seleccionar y diseñar al menos dos controladores digitales en serie (PI, PD, PID o adelanto) que cumplan (para los polos dominantes) las especificaciones dadas mediante SISOTOOL, en caso de que no se cumplan analizar el por qué.
- La condición de error debe cumplirse con exactitud.
- Simular mediante un diagrama Simulink el control que mejores prestaciones haya obtenido según se muestra en los diagramas adjunto, graficando la salida, el error, las acciones de control individuales P, I, D o la de adelanto (las que hubiera) y la acción de control total después del retentor de salida.

## 2. Desarrollo de los controladores

### 2.1. Funciones de transferencia

Del documento con los parámetros para cada alumno, se obtienen las siguientes funciones de transferencia y especificaciones siguientes:

$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)}, \quad G_d(z) = \frac{0.059115(z+0.8187)}{(z-0.7866)(z-0.6977)}$$
$$t_R = 2, \quad S = 10\%, \quad T_m = 0.12$$

### 2.2. Cálculo de constantes

A partir de las expresiones de la consigna, se obtienen las siguientes constantes:

- Factor de amortiguamiento:  $\zeta = 0.5912$
- Frecuencia natural:  $\omega_0 = 3.3832$
- Frecuencia amortiguada:  $\omega_d = 2.7288$
- Cantidad de muestras por ciclo:  $m = 19.1882$

Con los anteriores valores, y, haciendo uso de la equivalencia entre planos  $s$  y  $z$ , se obtienen los siguientes polos deseados:

$$p_{1,2} = 0.7448 \pm j0.2530$$

### 2.3. Lugar de raíces vs polos deseados

Se muestra a continuación el lugar de raíces de la función de transferencia  $G_d$ , y la ubicación de los polos deseados en forma de cruces rojas.

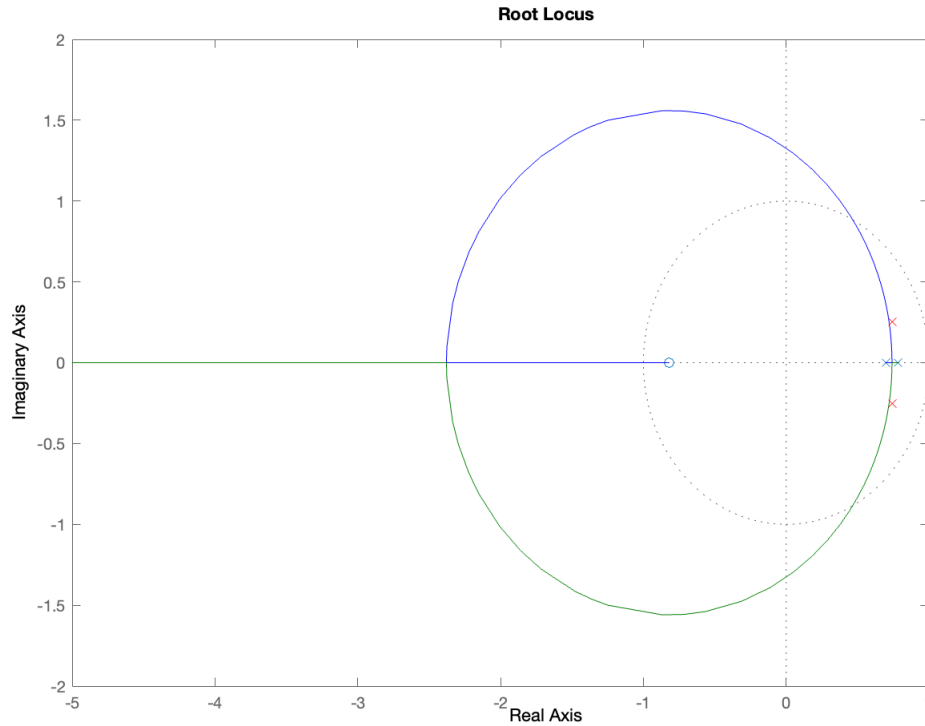


Figura 1: Lugar de raíces de  $G_d(z)$  con polos deseados.

Puede apreciarse que los polos deseados se encuentran cerca del lugar de raíces, pero no exactamente en el mismo, por lo que a priori el sistema realimentado consigo mismo no producirá la respuesta especificada.

Teniendo en cuenta el tipo de sistema con el que se cuenta (tipo 0), se pretende cumplir la condición de error, e intentar cumplir las especificaciones de diseño de sobrepaso y tiempo de establecimiento. Como el sistema es de tipo 0, no se tiene un polo integrador en el inicio que permita trabajar con la especificación de error en estado estable cumplida. Para ello, se plantea la necesidad de introducir un polo en 1 de modo que el error en estado estable tienda a cero. Esto se cumplirá mediante la utilización de dos controladores con acción integral: un **PI** y un **PID**.

## 2.4. Controlador PI

Para el controlador PI en tiempo discreto se fija un polo en 1, y luego se cuenta con un cero móvil, que se puede colocar en alguna posición deseada de acuerdo a la respuesta esperada o especificaciones de diseño.

Siguiendo esto, se plantea la necesidad de cancelar el polo dominante con el cero del controlador, es decir,  $z_C = 0.7866$ .

El controlador se diseña haciendo uso de la herramienta **SISOTOOL**, en donde se especificaron el coeficiente de amortiguación y el tiempo de establecimiento. Con estas dos especificaciones, el polo en 1, el cero en 0.7866, ahora se analizó la condición de módulo. Para ello, se tomó como referencia el polo deseado  $p = 0.7448 + j0.2530$ , y como  $|C(z)G_d(z)|$  debe valer 1, entonces, se despeja  $K_c$  de

la expresión siguiente:

$$|C(z)G_d(z)| = 0.059115K_c \frac{(z + 0.8187)}{(z - 0.6977)(z - 1)}$$

Obteniéndose así  $K_c = 0.9877$ . Con el anterior procedimiento se obtuvo una función de transferencia para el controlador PI de la forma:

$$C(z) = \frac{0.55541(z - 0.7866)}{(z - 1)}$$

Que, expandiendo en fracciones parciales, de modo de obtener cada una de las constantes involucradas (proporcional e integral), se obtiene la siguiente expresión:

$$C(z) = 0.5554 + \frac{0.1185}{(z - 1)}$$

Ahora, al realimentar el sistema con este controlador se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$F = \frac{0.032833(z + 0.8187)}{(z^2 - 1.665z + 0.7246)}$$

Haciendo uso de Matlab se obtienen los polos:

- $p_1 = 0.8324 + j0.1779$
- $p_2 = 0.8324 + j0.1779$

Y el cero se encuentra en el mismo punto del plano de la función de transferencia  $G_d(z)$ .



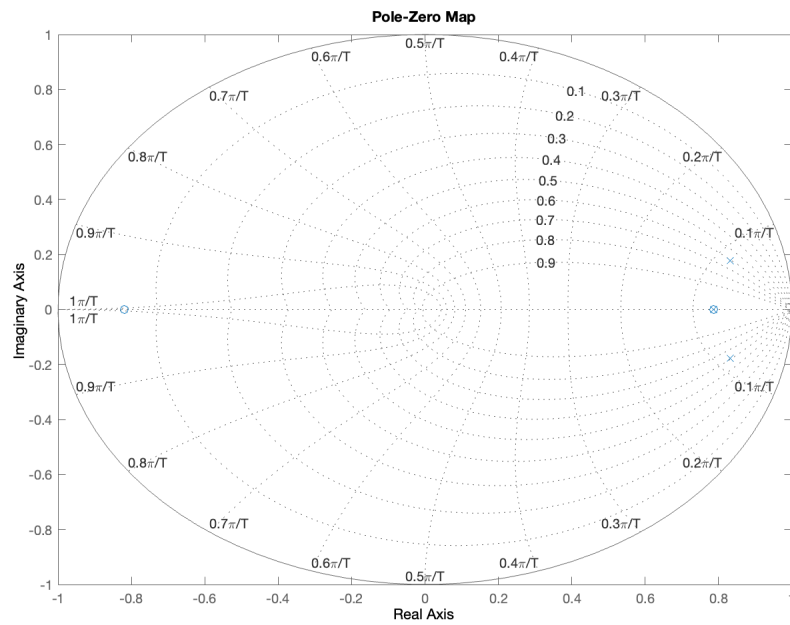


Figura 2: Mapa de polos y ceros del sistema realimentado.

Se muestra a continuación la respuesta del sistema realimentado ante un escalón unitario.

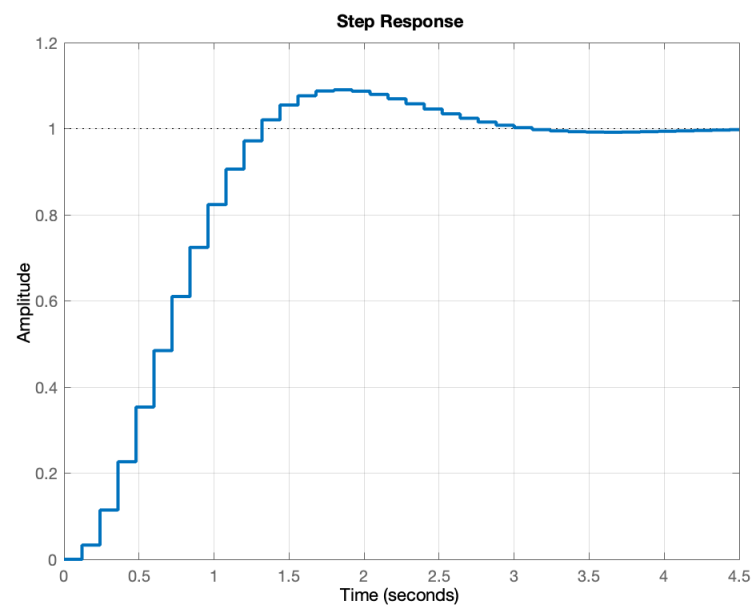


Figura 3: Respuesta del sistema controlado por PI ante una entrada escalón unitario.

## 2.5. Controlador PID

Para el controlador PID, se añaden 2 polos, uno en 0 y otro en 1. Luego, un cero se utiliza para calcular el polo no dominante del controlador, y el otro se calcula para que aporte un determinado ángulo en el plano complejo con respecto al polo deseado complejo obtenido anteriormente. Se pretende un ángulo de  $20^\circ$ , con esto en mente, y, partiendo de la siguiente expresión simbólica de un controlador PID:

$$C(z) = K_c \frac{(z - c_1)(z - c_2)}{z(z - 1)}$$

Se obtiene que se debe obtener un cero en 0.0497. Esto se calculó haciendo uso del siguiente código:

Código 1: Cálculo del cero y ganancia del controlador PID

```
1 thetaZero = rad2deg(atan(0.2530/(0.7448+0.8187)))
2 d = 0.2530/tan(deg2rad(20))
3 c = 0.7448-d
4 zAux = 0.7448+0.2530*1i;
5 Kc = 1/abs((0.059115*(zAux+0.8187)*(zAux-c))/((zAux-0.7866)*(zAux-1)*zAux))
```

Se obtuvo una ganancia del controlador haciendo uso de la condición de módulo, obteniéndose  $K_c = 1.0466$ . Ahora, haciendo uso de la herramienta SISOTOOL nuevamente, se logra la siguiente función de transferencia para el controlador:

$$C(z) = \frac{0.41772(z - 0.6977)(z - 0.04969)}{z(z - 1)}$$

Cuya expansión en fracciones parciales tiene la siguiente forma:

$$C(z) = 0.41772 - \frac{0.01448}{z} + \frac{0.120001}{z - 1}$$

Cerrando el lazo con realimentación unitaria se obtiene la función de transferencia siguiente:

$$F = \frac{0.024694(z + 0.8187)(z - 0.04969)}{(z - 0.00125)(z^2 - 1.761z + 0.8034)}$$

Cuyos polos son:

- $p_1 = 0.0013$
- $p_2 = 0.8803 + j0.1686$
- $p_3 = 0.8803 - j0.1686$

Y ceros:

- $z_1 = -0.8187$
- $z_2 = 0.04969$

El mapa de polos y ceros queda como a continuación:

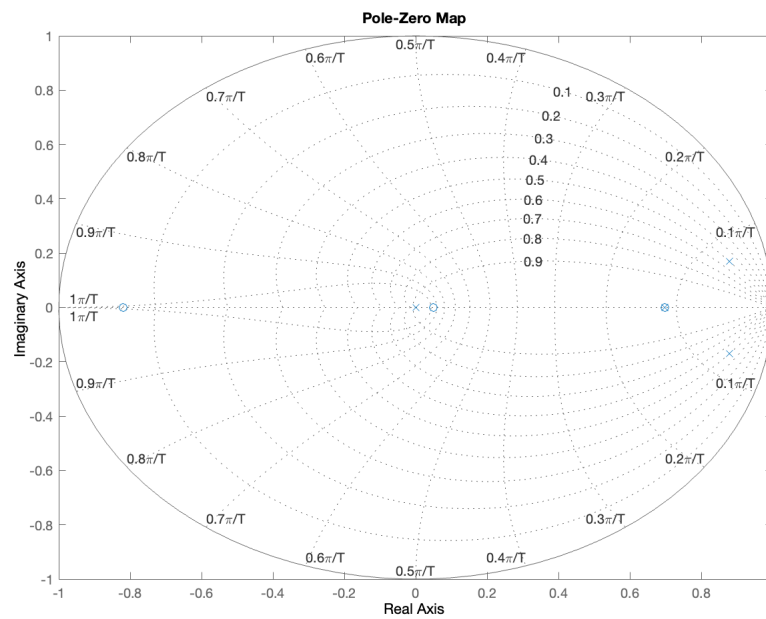


Figura 4: Mapa de polos y ceros del sistema realimentado con PID.

Y la respuesta al escalón unitario tiene la siguiente forma:

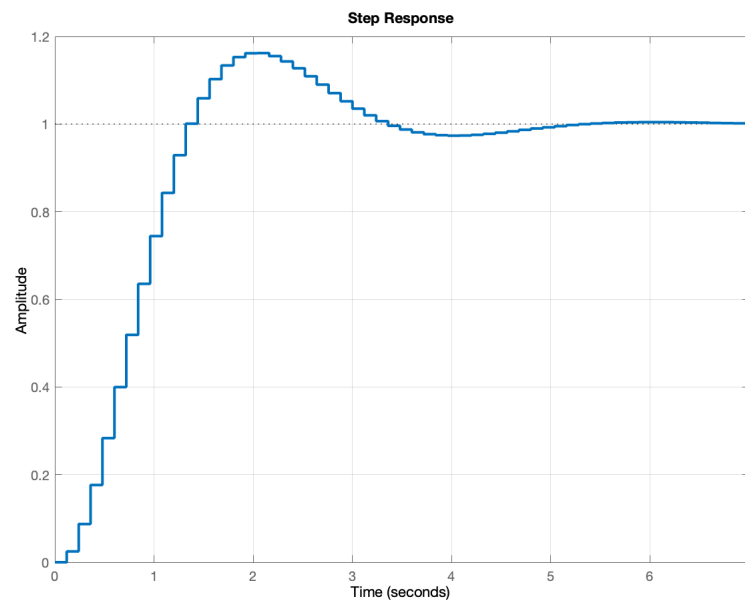


Figura 5: Respuesta al escalón unitario del sistema realimentado con PID.

### 3. Desempeño de los controladores

Los sistemas controladores desarrollados fueron comprobados en su funcionamiento en Simulink. Se mostrarán las simulaciones de cada una de las acciones de control de forma individual, la acción resultante, la señal de error y la salida del sistema para cada uno de los controladores. Luego de adjuntar cada una de las gráficas para ambos sistemas, se comparará el desempeño de ambos sistemas y se verificará si se cumple con los requerimientos planteados.

#### 3.1. Controlador PI

##### 3.1.1. Señal de error

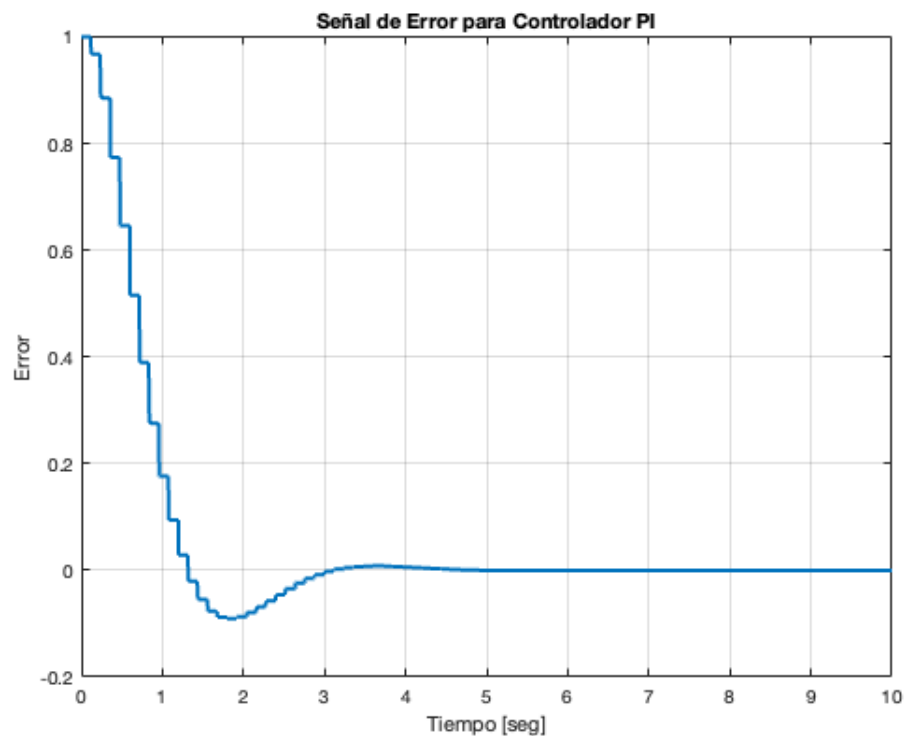


Figura 6: Señal de error en sistema controlado por PI.

### 3.1.2. Acción de control proporcional

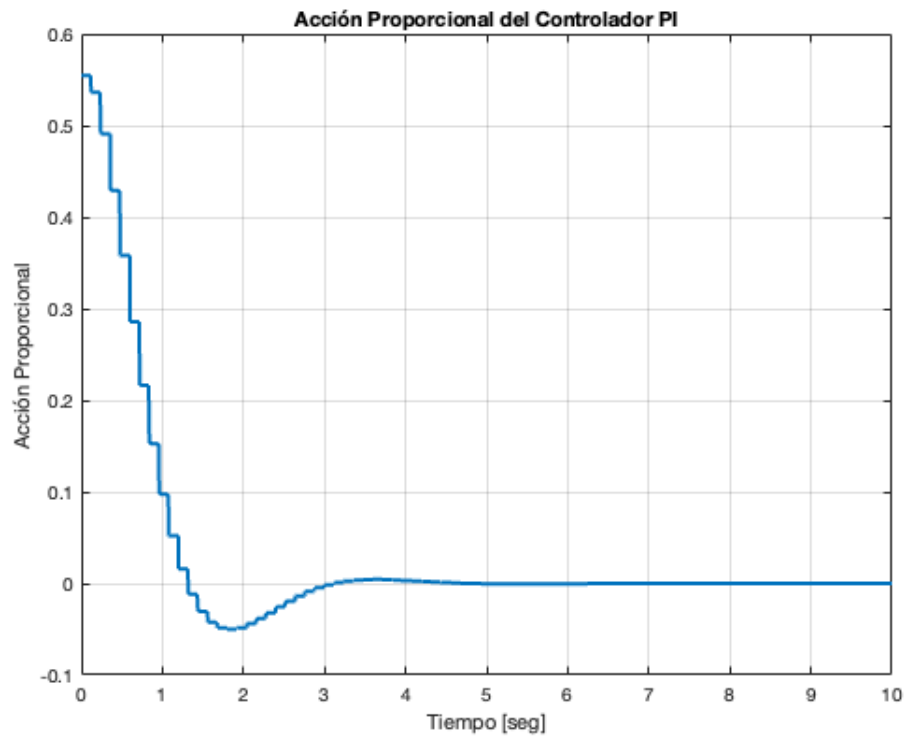


Figura 7: Acción de control proporcional en sistema controlado por PI.

### 3.1.3. Acción de control integral

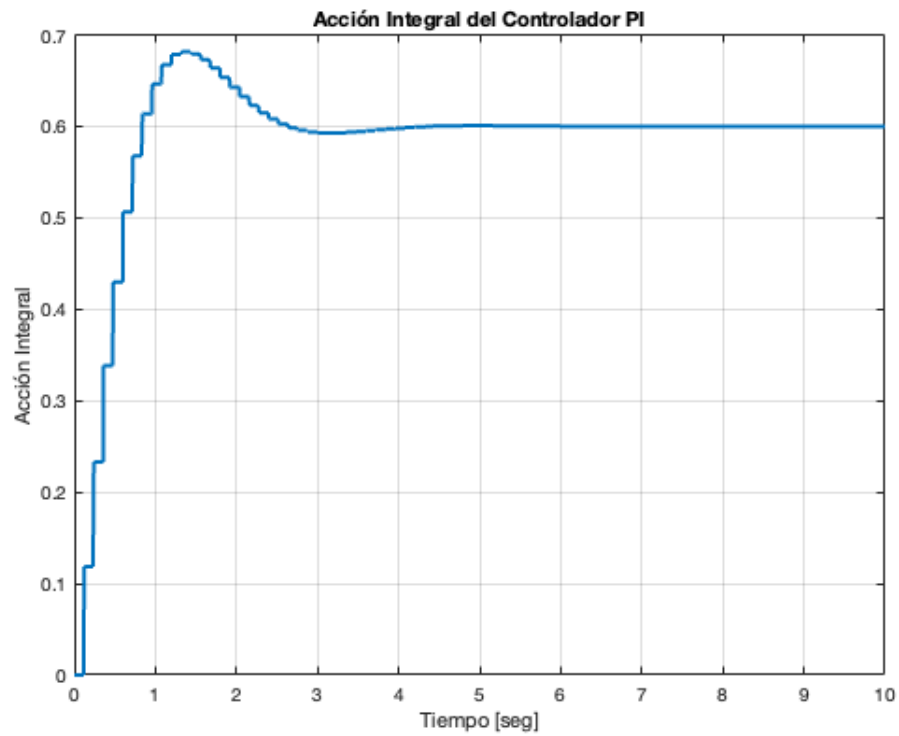


Figura 8: Acción de control integral en sistema controlado por PI.

### 3.1.4. Acción de control

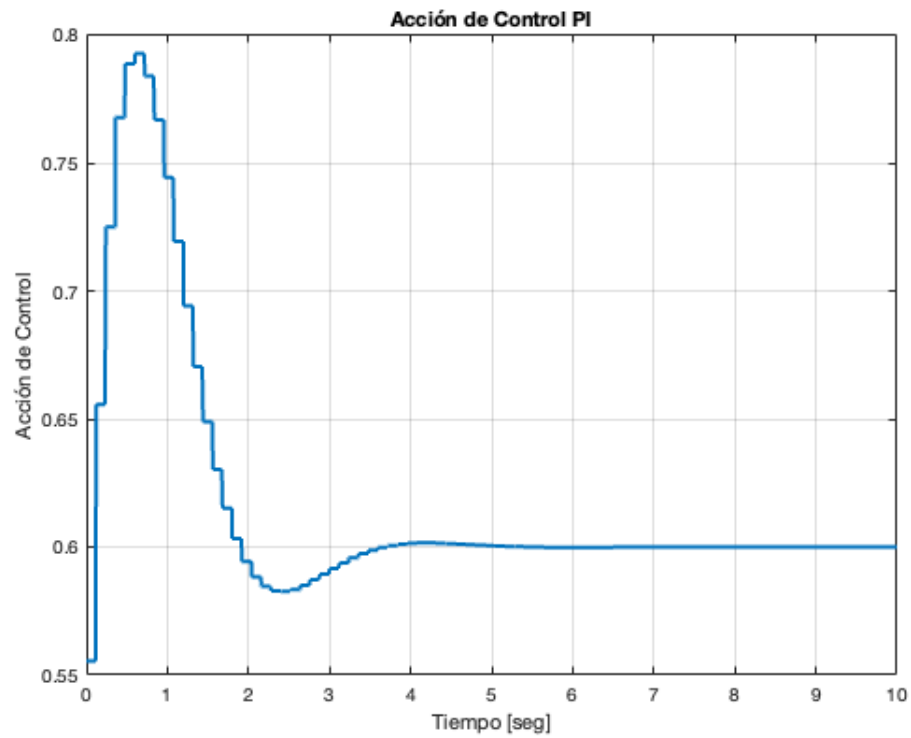


Figura 9: Acción de control en sistema controlado por PI.

### 3.1.5. Salida

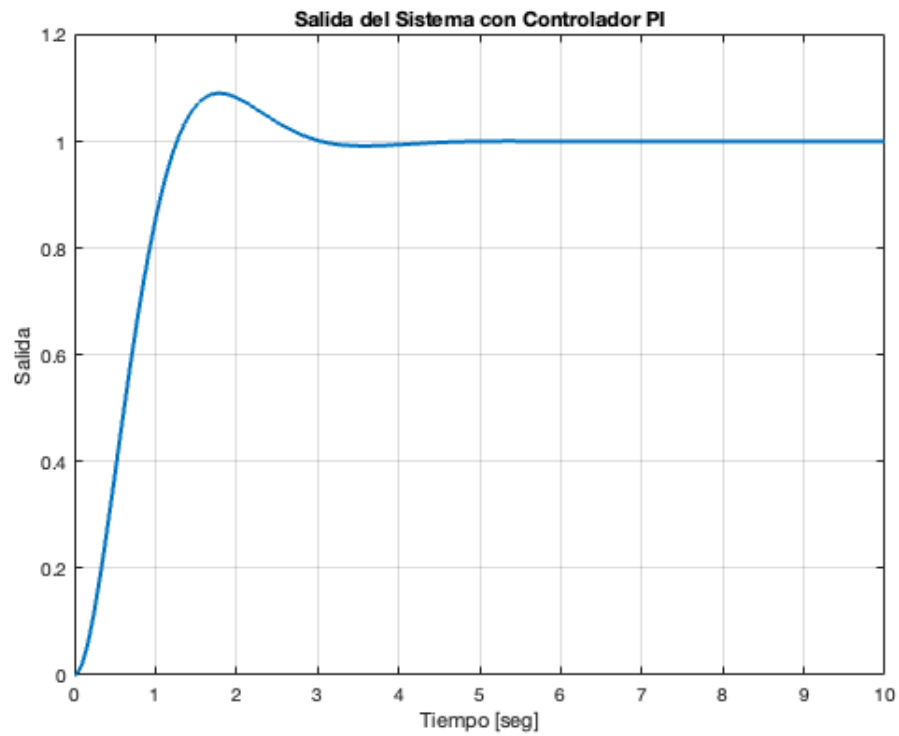


Figura 10: Salida en sistema controlado por PI.

## 3.2. Controlador PID



### 3.2.1. Señal de error

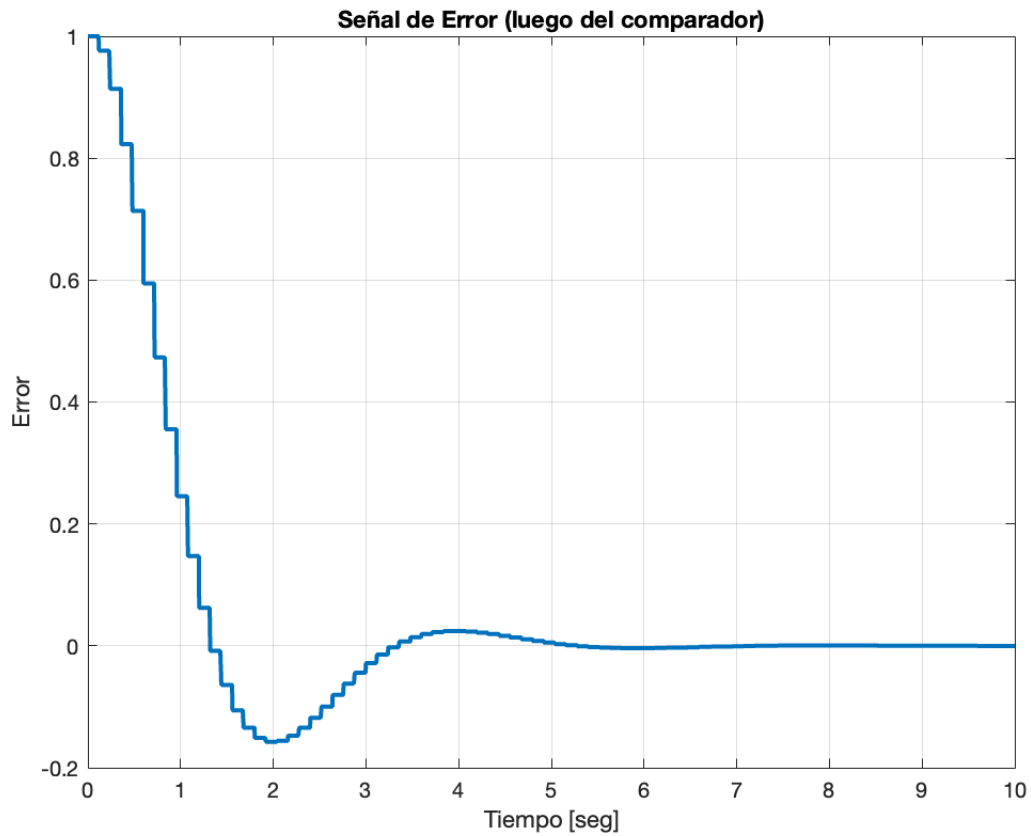


Figura 11: Señal de error en sistema controlado por PID.

### 3.2.2. Acción de control proporcional

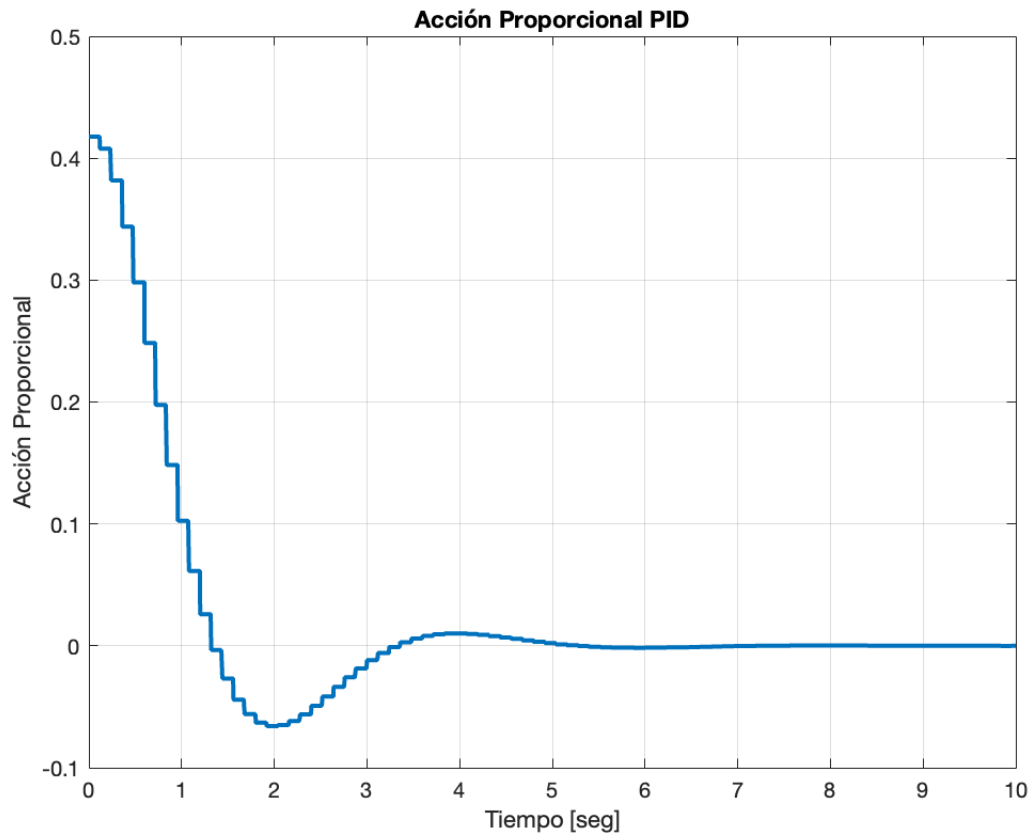


Figura 12: Acción de control proporcional en sistema controlado por PID.

### 3.2.3. Acción de control integral

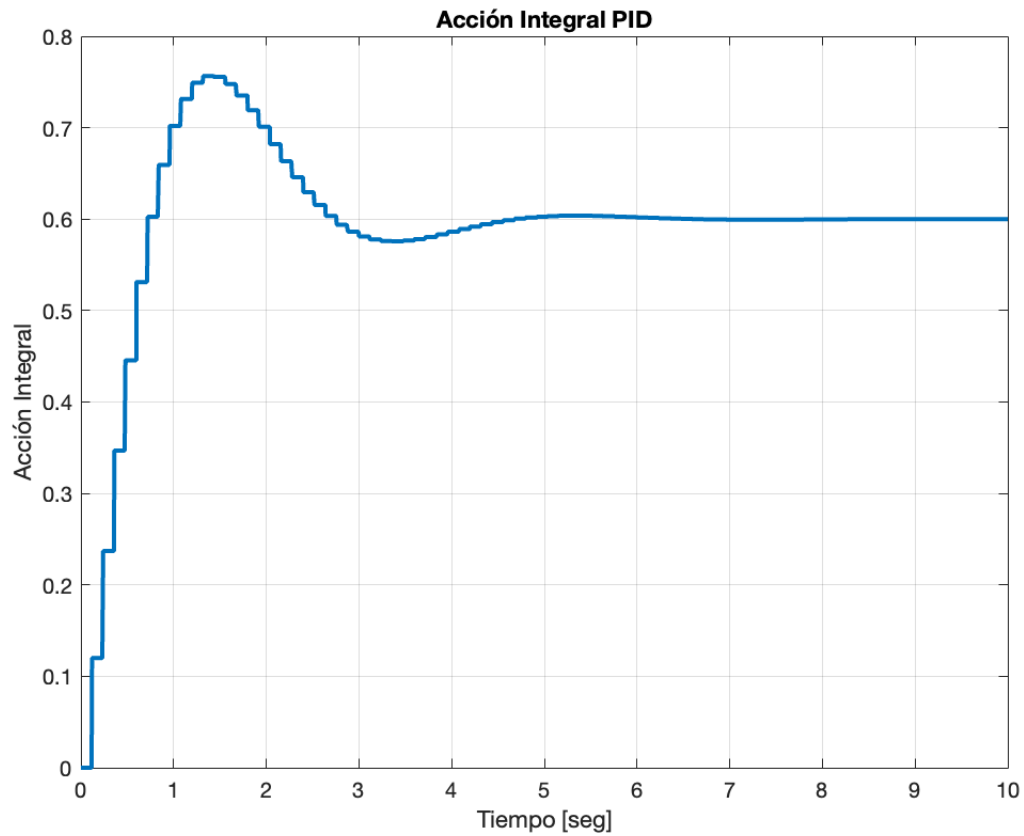


Figura 13: Acción de control integral en sistema controlado por PID.

### 3.2.4. Acción de control derivativa

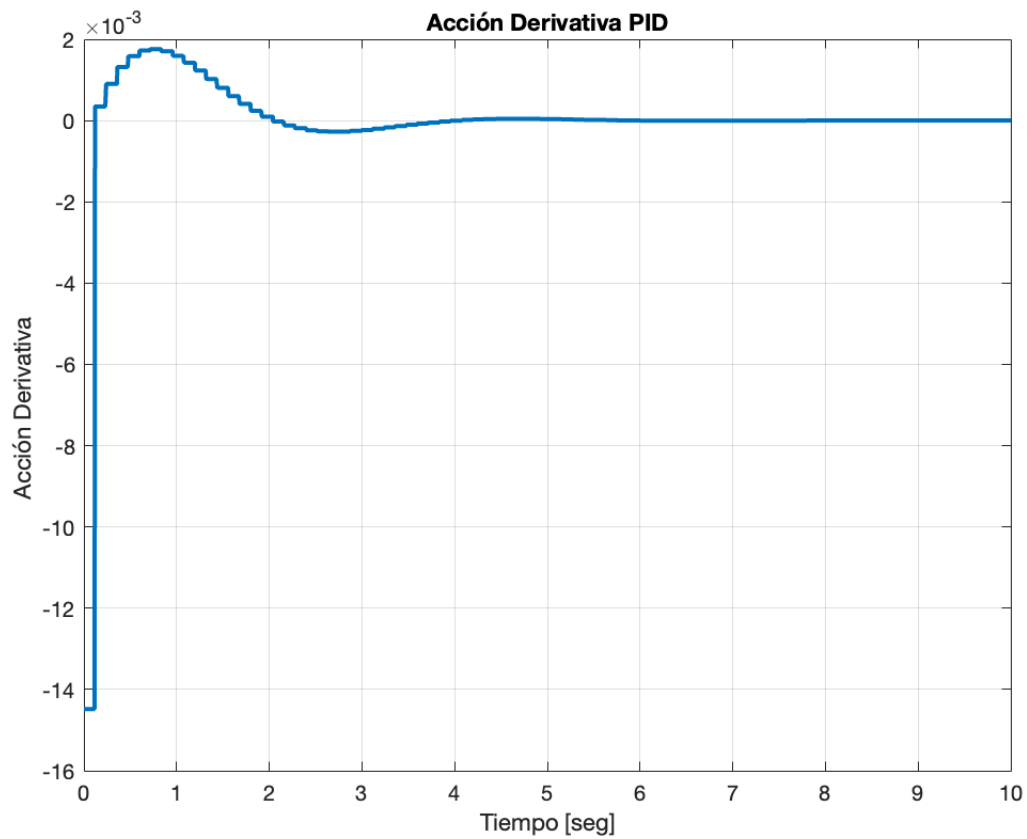


Figura 14: Acción de control derivativa en sistema controlado por PID.

### 3.2.5. Acción de control

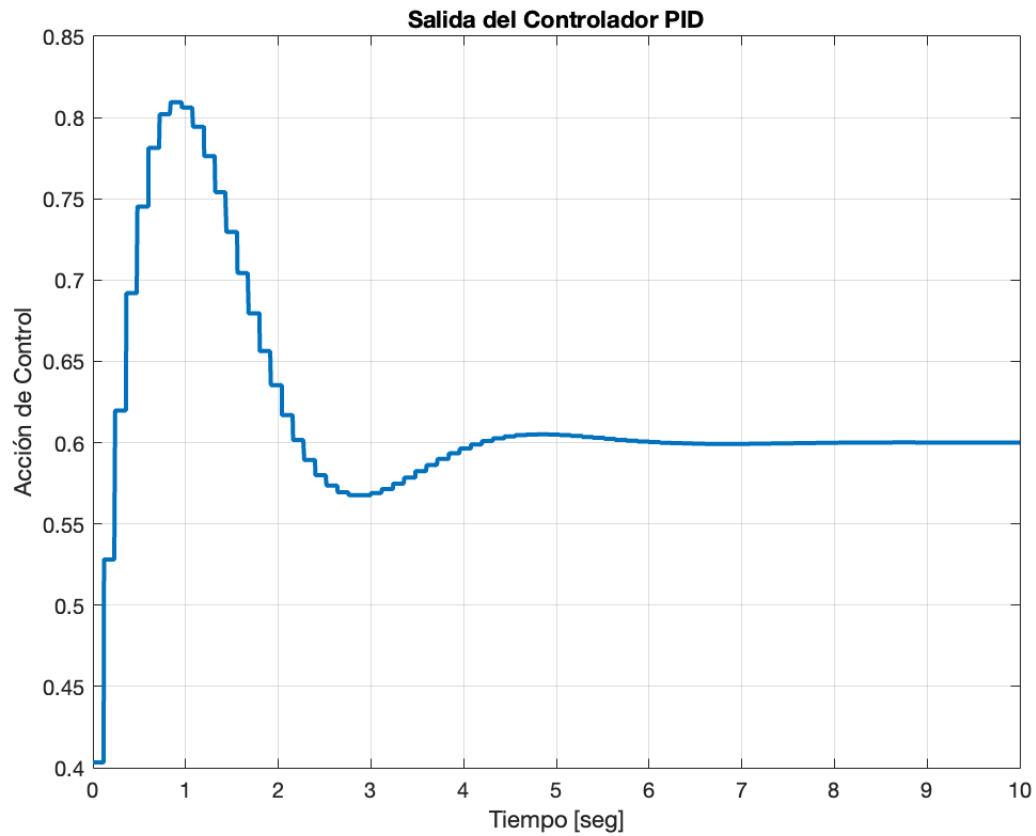


Figura 15: Acción de control en sistema controlado por PID.

### 3.2.6. Salida

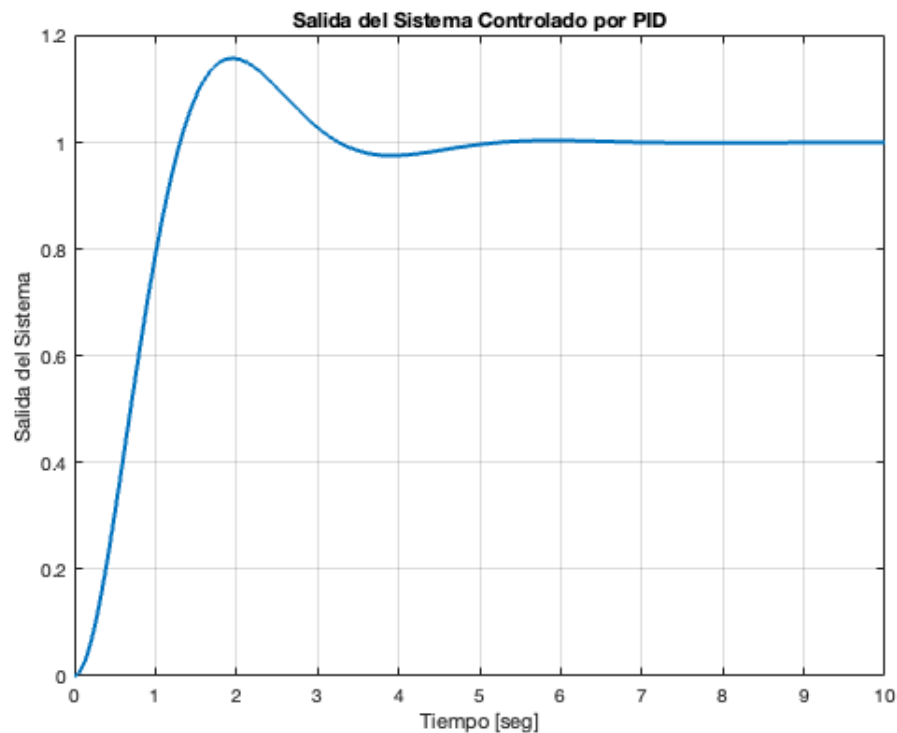


Figura 16: Señal en sistema controlado por PID.

## 3.3. Comparación entre controladores

Puede verse que el comportamiento de ambos sistemas se aproxima a las especificaciones de diseño planteadas en la consigna del trabajo práctico. Sin embargo, existen algunas pequeñas discrepancias.

### 3.3.1. Error en estado estable

La aparición del polo integrador en los controladores permiten que el sistema en el infinito se establezca en la referencia setpoint planteada. Ambos sistemas tienen una performance similar en este aspecto y cumplen con la consigna que pedía que la condición de error debe cumplirse con exactitud.

### 3.3.2. Tiempo de establecimiento 2%

La consigna del trabajo pedía un tiempo de establecimiento de 2 segundos, sin embargo este requerimiento no se cumplió exactamente en los dos controladores. En este caso, el PI logró una respuesta del sistema ligeramente más rápida. Se infiere que el error en el tiempo de establecimiento aparece dado por el hecho de que la herramienta SISOTOOL redondea los valores introducidos en polos y ceros, generando así un pequeño error de cómputo en las funciones de transferencia, no logrando así el objetivo planteado de la forma más óptima.

### 3.3.3. Sobrepasso

Se requería un sobrepasso máximo del 10 %. En el caso del controlador PI se lo cumple perfectamente. Sin embargo, al sintonizar el PID no se logró exactamente el valor planteado, sino que este se excedió hasta el 16 %. Este error viene dado por el polo cercano al origen que se obtuvo del uso de la herramienta SISOTOOL. El error de redondeo del sistema no permite la cancelación de polos, por lo que la función de transferencia del sistema realimentado no cumple con el requerimiento en cuestión. Además, el uso de una acción derivativa normalmente hace que la señal de salida aparezcan picos, y estos picos pueden atenuarse disminuyendo el peso de esta acción. Se muestra a continuación el resultado de disminuir la constante derivativa y aumentar ligeramente la proporcional, de esta forma es posible acercarse al valor deseado de respuesta.

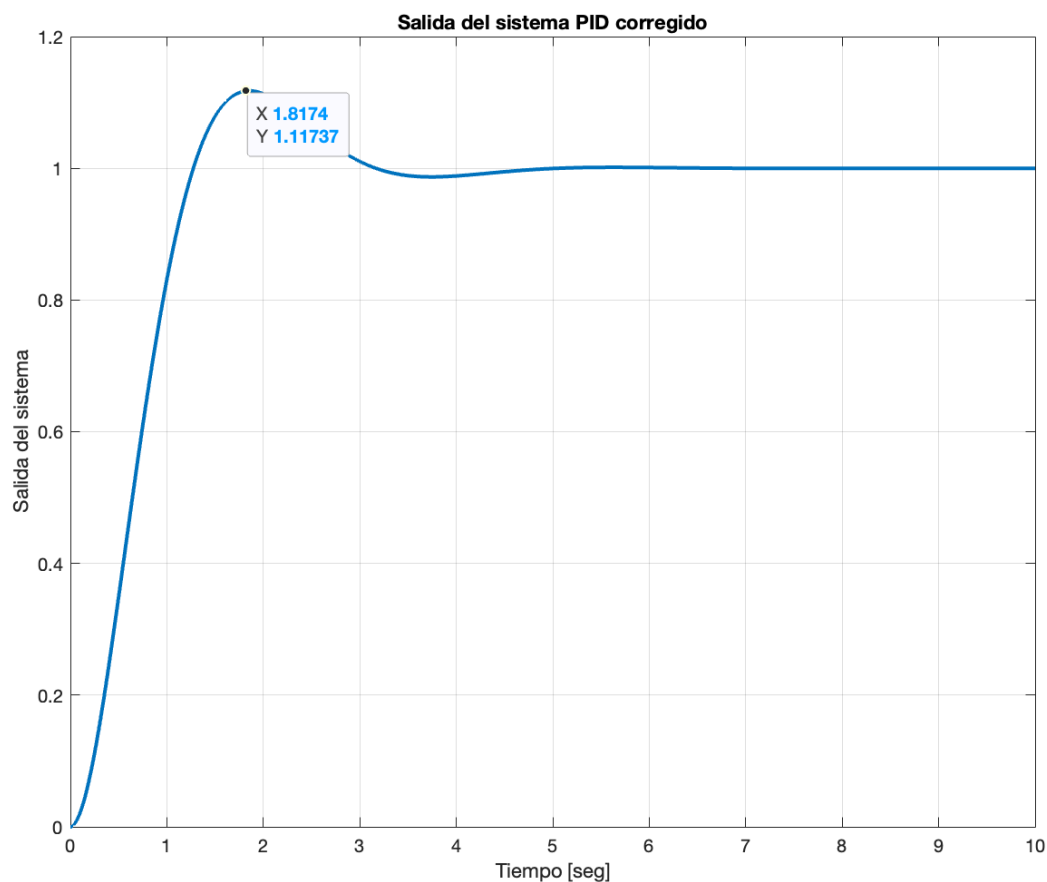


Figura 17: Salida del sistema con controlador PID modificado.

Se muestra a continuación el cambio de magnitud de la acción derivativa resultado de la nueva sintonización.

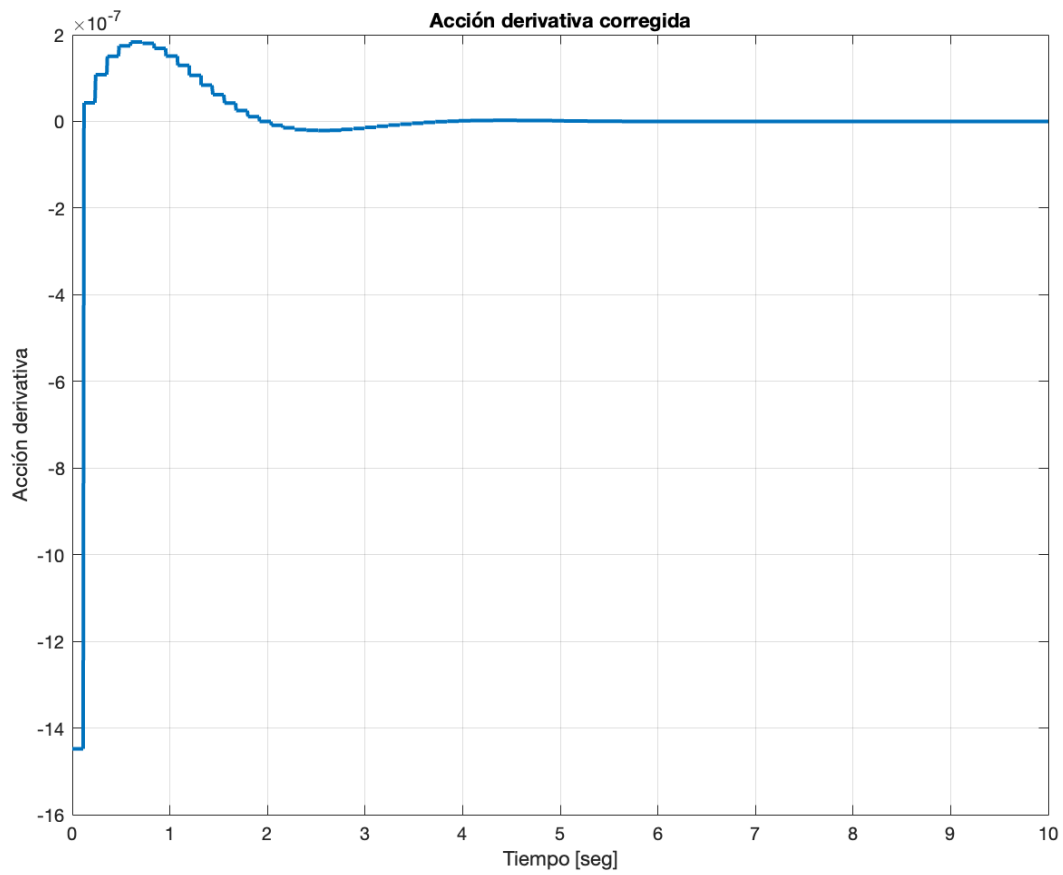


Figura 18: Acción derivativa del controlador PID modificado.



## 4. Conclusiones

En el desarrollo del trabajo práctico pudo apreciarse el comportamiento de controladores del tipo PI y PID para compensar un sistema de tiempo continuo discretizado mediante el uso de un retentor de orden cero.

El cambio de función de transferencia en  $s$  a  $z$  requiere de comprender la transformación bilineal y la equivalencia entre planos presente. Haciendo uso de esa equivalencia fue que se obtuvieron los polos deseados para el comportamiento de la respuesta del sistema ante entradas del tipo escalón unitario.

El diseño de los controladores se hizo a partir del lugar de raíces de la función de transferencia  $G_d(z)$  a compensar. El diseño pudo plantearse mediante la herramienta SISOTOOL de Matlab, la cual permite diseñar controladores para sistemas de una entrada y una salida mediante una interfaz gráfica. Pudo verse durante el desarrollo del trabajo que los resultados logrados no son del todo exactos como se pretendían, esto fue generado en gran parte por errores de redondeo en el cálculo computacional de polos y ceros. Sin embargo, las respuestas obtenidas son similares a las requeridas.

Para el caso en que se quiera implementar uno de estos sistemas en la realidad, lo adecuado sería realizar sucesivas simulaciones hasta obtener la respuesta perfecta adecuada al control que se pretende hacer, contemplando también las limitaciones físicas de la implementación. Pudo apreciarse también que los polos obtenidos no se encontraron perfectamente en los puntos deseados planteados de forma analítica al inicio de los cálculos, lo que generó las pequeñas discrepancias obtenidas en la respuesta temporal del sistema. Fue posible también subsanar el error existente en el sobrepaso del sistema controlado por PID mediante una pequeña sintonización manual del controlador en Simulink. Existen diversos métodos de sintonización para controladores PID, algunos son:

- Método del lugar de raíces
- Método de Ziegler-Nichols
- Método de sintonización por ajuste directo
- Métodos de sintonización basados en el modelo
- Método de sintonización automática

Se pretende para un futuro objetivo personal obtener controladores PID con un mismo objetivo de control a partir de los diferentes métodos de sintonización existentes, de forma de comparar la performance de cada uno y lograr alguna recomendación futura para el estudio o aplicación en el campo profesional.