

Tarea 1: Profesor Laboret

Sistemas de Control II

Autor: Federico Ignacio Villar
Profesor: Sergio Laboret
Fecha de entrega: 3 de mayo de 2023
Córdoba, Argentina

Resumen

En el siguiente documento se detalla la resolución del informe de la primer tarea propuesta por el profesor Laboret para la materia Sistemas de Control II. A lo largo del desarrollo, se adjuntan códigos de Matlab, plots de respuestas del sistema, etc.

Se pretende ser lo más claro posible, es por eso que se trata de que las explicaciones sean detalladas. Además de incluir cierta información que a priori puede llegar a ser redundante.

Sin más preámbulo, se da inicio al documento.

Índice de Contenidos

1. Consigna	1
1.1. Para lazo abierto	1
1.2. Para el sistema discreto	1
1.3. Para lazo cerrado con realimentación unitaria	1
2. Desarrollo	2
2.1. Sistema a lazo abierto	2
2.2. Sistema discreto	7
2.3. Sistema a lazo cerrado con realimentación unitaria	11
3. Conclusiones	17

Índice de Figuras

1. Polos y ceros de $G(s)$	3
2. Polos y ceros de $G_D(z)$	4
3. Polos y ceros de $G_{D1}(z)$	5
4. Diagrama de bloques Sistema Retentor de Orden Cero (ZOH).	5
5. Comparación de respuestas al escalón.	6
6. Respuesta al escalón unitario de la función $G(s)$	6
7. Respuesta al escalón unitario de la función $G_D(z)$	7
8. Respuesta al escalón unitario de la función $G_D(z)$ con lazo cerrado.	8
9. Respuesta a la rampa unitaria de la función $F(z)$	10
10. Diagrama de bloques del sistema $F(z)$	11
11. Lugar de raíces de la función de transferencia $G(s)$	12
12. Lugar de raíces de la función de transferencia $G_D(z)$	12
13. Ganancia crítica de estabilidad para $G_D(z)$	13
14. Márgenes de ganancia y fase para $G_D(z)$	14
15. Lugar de raíces al aumentar el período de muestreo.	15
16. Márgenes de ganancia y fase al aumentar el período de muestreo.	16

Índice de Tablas

1. Error en estado estable según tipo de sistema.	8
---	---

Índice de Códigos

1. Creación de la función de transferencia continua.	2
2. Discretización de la función de transferencia.	2
3. Diagrama de polos y ceros para $G(s)$	2
4. Diagrama de polos y ceros para $G_D(z)$	3

5.	Aumento del período de muestreo.	4
6.	Diagrama de polos y ceros para $G_{D1}(z)$	4
7.	Polos de $G_D(z)$	7
8.	Determinación de la constante de error.	8
9.	Obtención de la función de transferencia a lazo cerrado.	9
10.	Comprobación del error en estado estable para lazo cerrado.	9
11.	Valor en estado estable para el sistema discreto a lazo cerrado.	9
12.	Respuesta del sistema a lazo cerrado para entrada rampa unitaria.	9
13.	Lugares de raíces.	11
14.	Ganancia crítica de estabilidad para el sistema discreto.	13
15.	Márgenes de ganancia y fase para el sistema discreto.	14
16.	Lugar de raíces al aumentar el período de muestreo.	14

1. Consigna

Se tiene para cada alumno en un archivo adjunto en PDF una función de transferencia con polos p_1 y p_2 , probablemente un cero y una ganancia K , además, especificaciones de sobrepaso, tiempo de respuesta 2% y período de muestreo.

1.1. Para lazo abierto

- Obtener la función de transferencia continua $G(s)$.
- Hallar la función de transferencia discreta de lazo abierto $G_D(s)$ del sistema con ZOH a la entrada y el tiempo de muestreo asignado T_m .
- Dibujar el mapa de polos y ceros del sistema continuo y el discreto.
- ¿Qué ocurre con el mapa si se multiplica por 10 el período de muestreo?
- Obtener la respuesta al escalón del sistema discreto y determinar si es estable.

1.2. Para el sistema discreto

- Determinar el tipo de sistema.
- Determinar la constante de error de posición K_P y el error ante un escalón y verificar mediante respuesta al escalón de lazo cerrado del sistema discreto.
- Verificar error ante una rampa de entrada, ¿converge o diverge? Explique la causa.

1.3. Para lazo cerrado con realimentación unitaria

- Graficar el lugar de raíces del sistema continuo $G(s)$ y del discreto $G_D(z)$ indicando las ganancias críticas de estabilidad (si las hubiera).
- ¿Qué ocurre con la estabilidad relativa si se aumenta 10 veces el período de muestreo original?

2. Desarrollo

2.1. Sistema a lazo abierto

Según el archivo PDF, el alumno Villar tiene asignados los siguientes valores de interés para la función de transferencia:

- Ceros: ninguno
- Polos: -2 y -3
- Ganancia: 10
- Período de muestreo: $0.12s$

De modo que se crea la función de transferencia en Matlab de la siguiente forma:

Código 1: Creación de la función de transferencia continua.

```
1 G = zpk([],[-2 -3],10);
```

La función de transferencia continua a lazo abierto queda definida como:

$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)} \quad (1)$$

Con el período de muestreo dado, y el uso de un retentor de orden cero (ZOH), se obtiene una función de transferencia discretizada:

Código 2: Discretización de la función de transferencia.

```
1 Gd = c2d(G,Tm, 'zoh')
```

Que da como resultado la siguiente:

$$G_D(z) = \frac{0.059115(z+0.8187)}{(z-0.7866)(z-0.6977)} \quad (2)$$

Una vez discretizado el sistema gracias al uso de un retentor de orden cero, se procede a obtener los diagramas de polos y ceros para ambas expresiones.

Código 3: Diagrama de polos y ceros para $G(s)$.

```
1 pzmap(G)
2 title('Polos y ceros de G(s)')
3 grid
```

Este código genera la imagen adjunta a continuación.

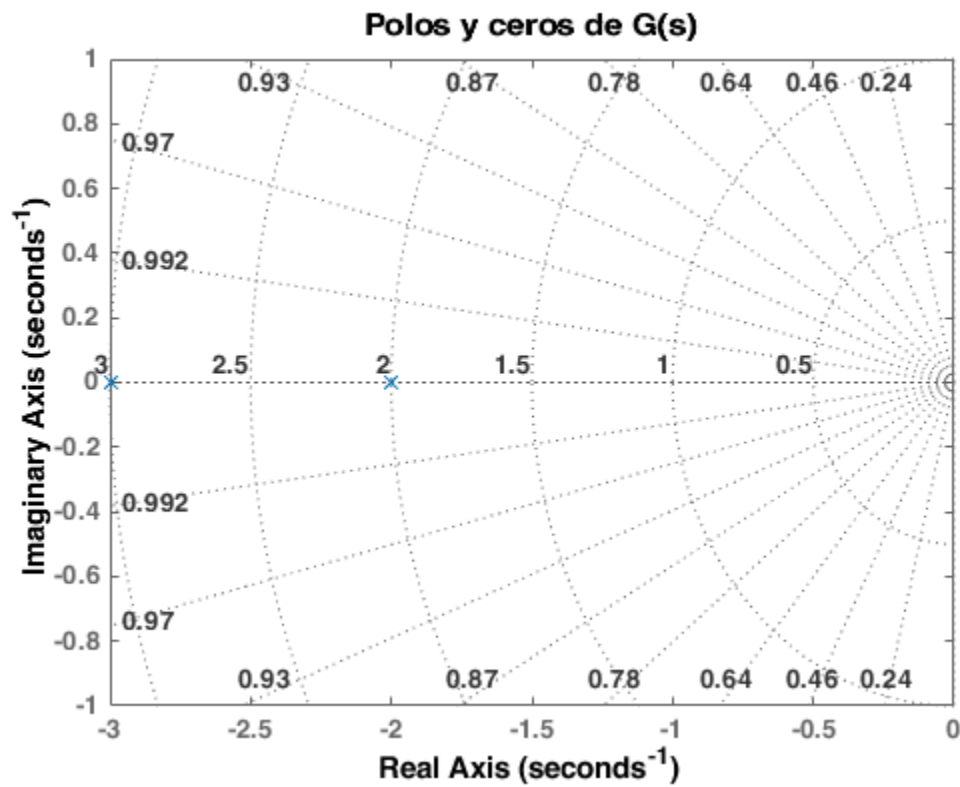


Figura 1: Polos y ceros de $G(s)$.

Se realiza el mismo procedimiento para la función de transferencia discretizada anteriormente.

Código 4: Diagrama de polos y ceros para $G_D(z)$.

```

1 pzmap(Gd)
2 title('Polos y ceros de G_D(z)')
3 grid

```

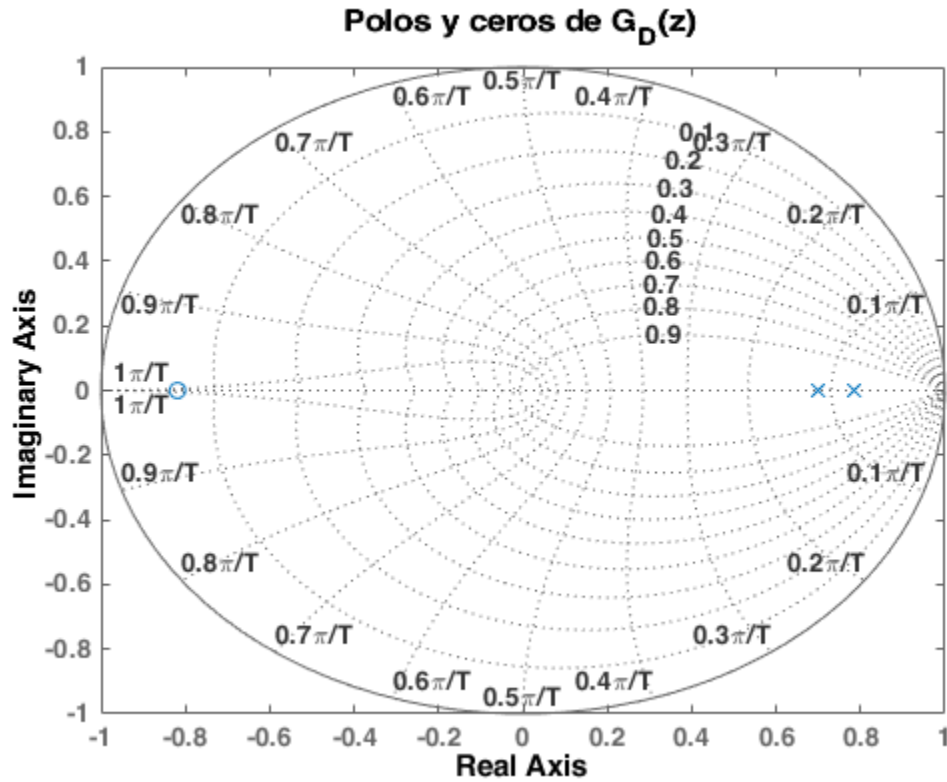


Figura 2: Polos y ceros de $G_D(z)$.

Ahora, con los dos mapas anteriores en mente, se pretende ver el efecto del aumento en el período de muestreo. Para ello, primero se crea una nueva función de transferencia.

Código 5: Aumento del período de muestreo.

```
1 Gd1 = c2d(G,10*Tm,'zoh');
```

Dando como resultado:

$$G_{D1}(z) = \frac{1.3042(z + 0.1303)}{(z - 0.09072)(z - 0.02732)} \quad (3)$$

Cuyo mapa de polos y ceros:

Código 6: Diagrama de polos y ceros para $G_{D1}(z)$.

```
1 pzmap(Gd1)
2 title('Polos y ceros de G_{D1}(z)')
3 grid
```

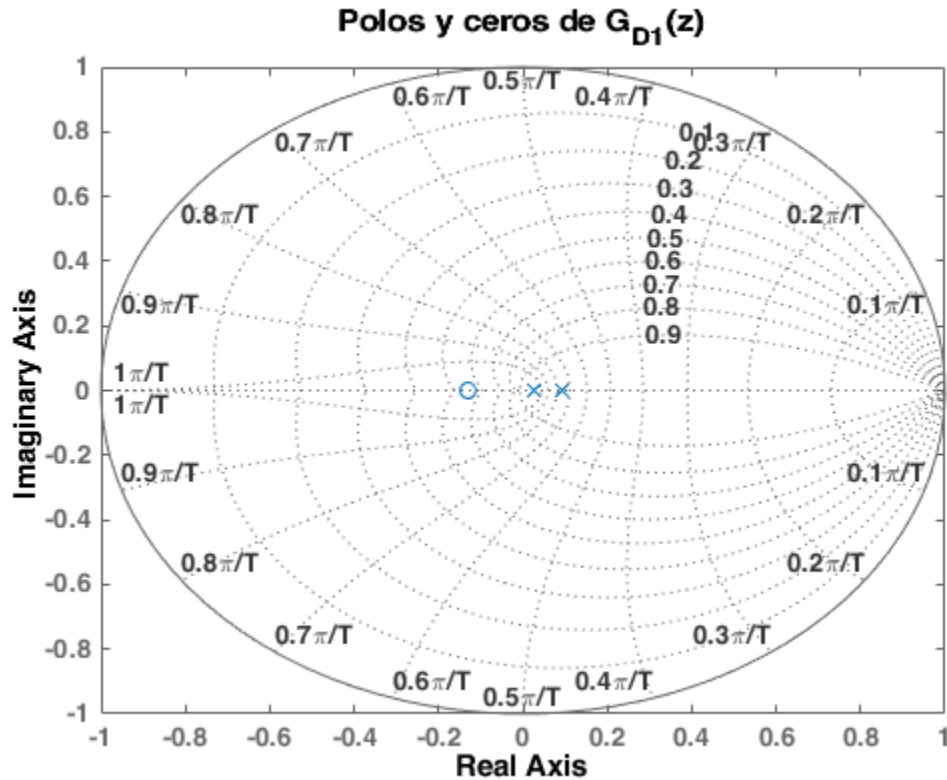



Figura 3: Polos y ceros de $G_{D1}(z)$.

Es posible apreciar un desplazamiento de los polos y ceros del sistema hacia el origen. Los polos y ceros en una función de transferencia discreto dependen directamente del período de muestreo aplicado, e incluso, es posible que al discretizar un sistema aparezcan ceros extras, como pasa en este caso. El desplazamiento de los polos y ceros hacia el origen ocurre porque, un período de muestreo más grande, implica que la señal de entrada se muestrea a una menor velocidad (y frecuencia), lo que resulta en una tasa de cambio más lenta. Este comportamiento se da por la pérdida de la resolución temporal de la señal de entrada, y estos cambios (transitorios por ejemplo), terminan siendo invisibles al retentor de orden cero.

Este aumento del período de muestreo en un sistema retentor ZOH, hace que el sistema se termine aproximando a un integrador discreto. En cambio, una disminución del período de muestreo acerca el sistema al continuo original, alejando polos y ceros del origen.

A continuación se adjunta una imagen que ilustra el diagrama de bloques de un sistema retentor de orden cero.

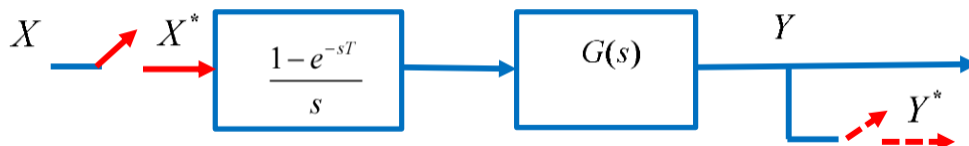


Figura 4: Diagrama de bloques Sistema Retentor de Orden Cero (ZOH).

Finalmente, para completar el análisis, se obtienen las respuestas al escalón unitario de las tres funciones de transferencia.

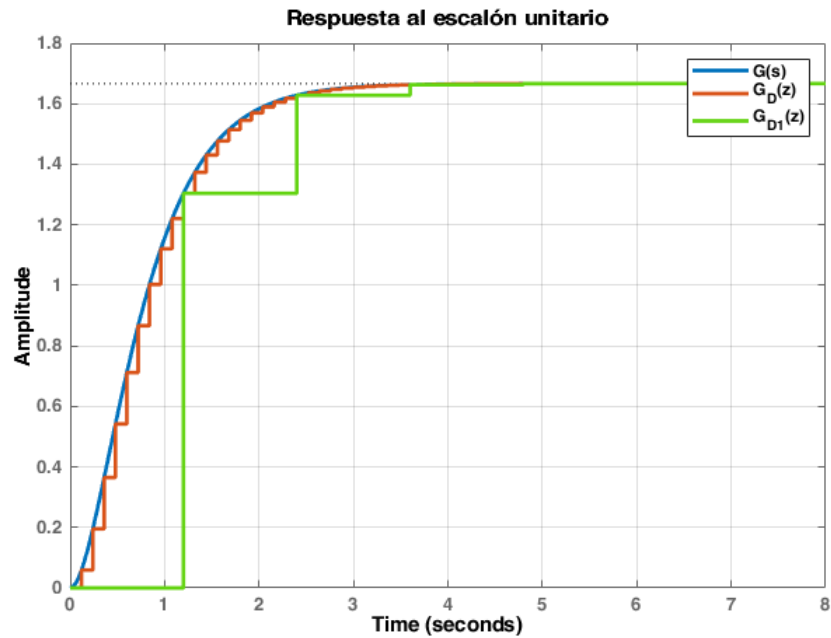


Figura 5: Comparación de respuestas al escalón.

Ahora, se muestran individualmente las respuestas al escalón de $G(s)$ y $G_D(z)$.

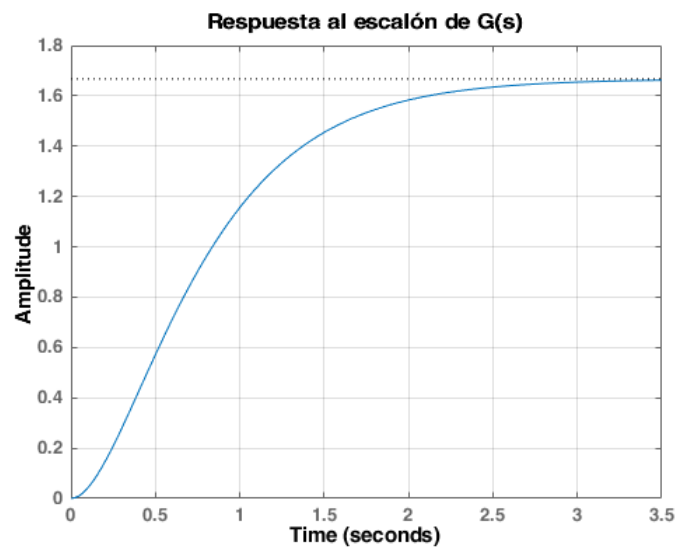


Figura 6: Respuesta al escalón unitario de la función $G(s)$.

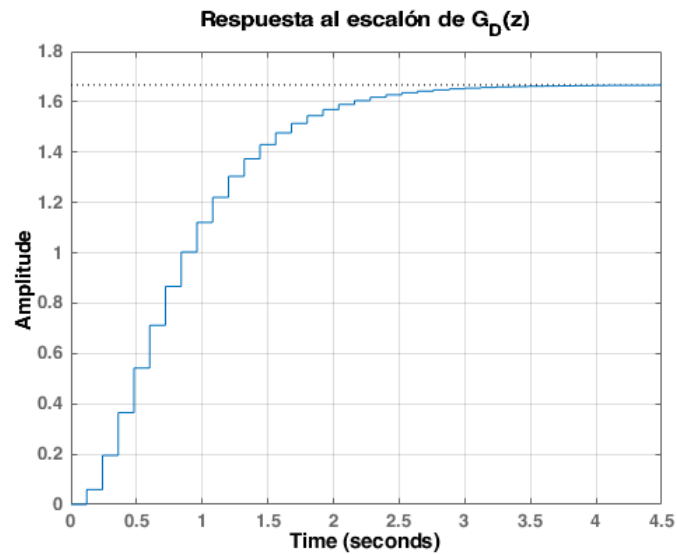


Figura 7: Respuesta al escalón unitario de la función $G_D(z)$.

Y, dadas las imágenes que muestran la respuesta de los sistemas ante una entrada escalón unitario, puede asegurarse que ambos sistemas son estables. Aunque, es posible evidenciar que existe un error en estado estable, ya que los sistemas no se establecen en el mismo punto de referencia del setpoint, sino que poseen una diferencia.

2.2. Sistema discreto

Para definir el tipo del sistema, se debe analizar la cantidad de ceros que tiene éste en el origen. Para el caso, se pretende obtener de forma exacta los polos, por lo que se usa la siguiente instrucción en Matlab.

Código 7: Polos de $G_D(z)$.

```
1 pole(Gd);
```

Obteniéndose así:

$$p_1 = 0.7866, \quad p_2 = 0.6977$$

Ahora, puede verse de forma inmediata que no existen polos en el 1, por lo que el sistema es de **Tipo 0**. El sistema de este tipo tiene error en estado estable constante diferente a 0 para entradas del tipo escalón, y tiene errores que tienden al infinito para entradas de tipo rampa y parábolas. Esto puede verse en la siguiente tabla:

Tabla 1: Error en estado estable según tipo de sistema.

Tipo de Sistema	Escalón Unitario	Rampa Unitaria	Parábola
0	$e_{ss}^* = \frac{1}{1+K_p^*}$	∞	∞
1	0	$e_{ss}^* = \frac{1}{K_v^*}$	∞
2	0	0	$e_{ss}^* = \frac{1}{K_a^*}$

En donde:

- $K_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$
- $K_v^* = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G(z)]$
- $K_a^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G(z)]$

Se determina entonces la constante de error de posición con Matlab:

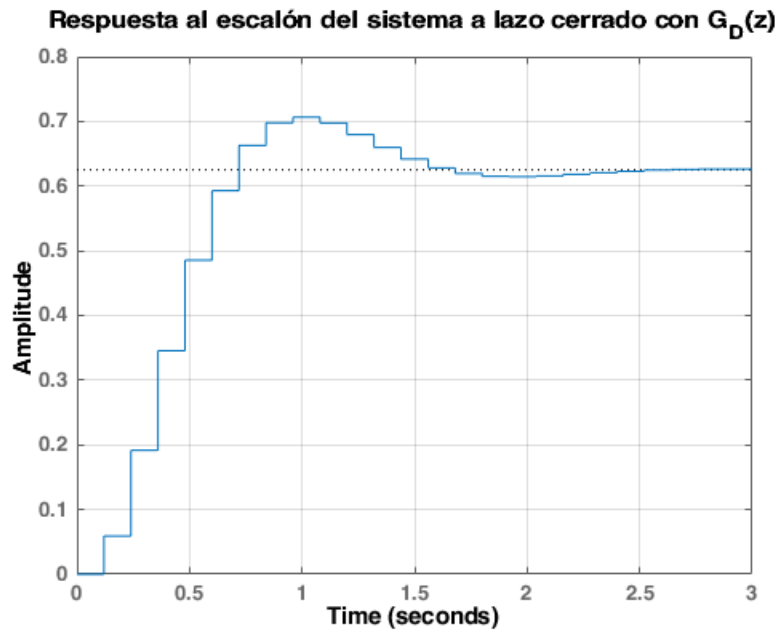
Código 8: Determinación de la constante de error.

```
1 Kp = dcgain(Gd)
```

Cuyo resultado es:

$$K_p^* = 1.6667$$

Se procede entonces a comprobar la existencia de ese error previsto para el sistema a lazo cerrado con realimentación unitaria. Se puede obtener el siguiente gráfico.

Figura 8: Respuesta al escalón unitario de la función $G_D(z)$ con lazo cerrado.

La función a lazo cerrado se obtuvo como se muestra a continuación:

Código 9: Obtención de la función de transferencia a lazo cerrado.

```
1 F = feedback(Gd,1)
```

Que arroja la siguiente expresión:

$$F(z) = \frac{0.059115(z+0.8187)}{(z^2-1.425z+0.5972)}$$

Para comprobar si la predicción es correcta, se hace lo siguiente:

Código 10: Comprobación del error en estado estable para lazo cerrado.

```
1 ess = 1/(Kp+1);
2 Fss = (1-ess)
```

Que arroja como resultado $F_{ss} = 0.6250$, resultado que coincide con el obtenido al ejecutar la siguiente instrucción:

Código 11: Valor en estado estable para el sistema discreto a lazo cerrado.

```
1 dcgain(F)
```

Ahora, teniendo en cuenta que el sistema es de tipo 0, la salida ante una entrada con forma de rampa debería tender al infinito, por lo que el error en estado estable es creciente y diverge. Para corroborar esta predicción, se ejecutó el código a continuación:

Código 12: Respuesta del sistema a lazo cerrado para entrada rampa unitaria.

```
1 t = 0:Tm:100*Tm;
2 lsim(F,t,t)
3 title('Respuesta a entrada rampa unitaria de G_D(z) a lazo cerrado')
4 grid
```

Que arrojó la siguiente gráfica.

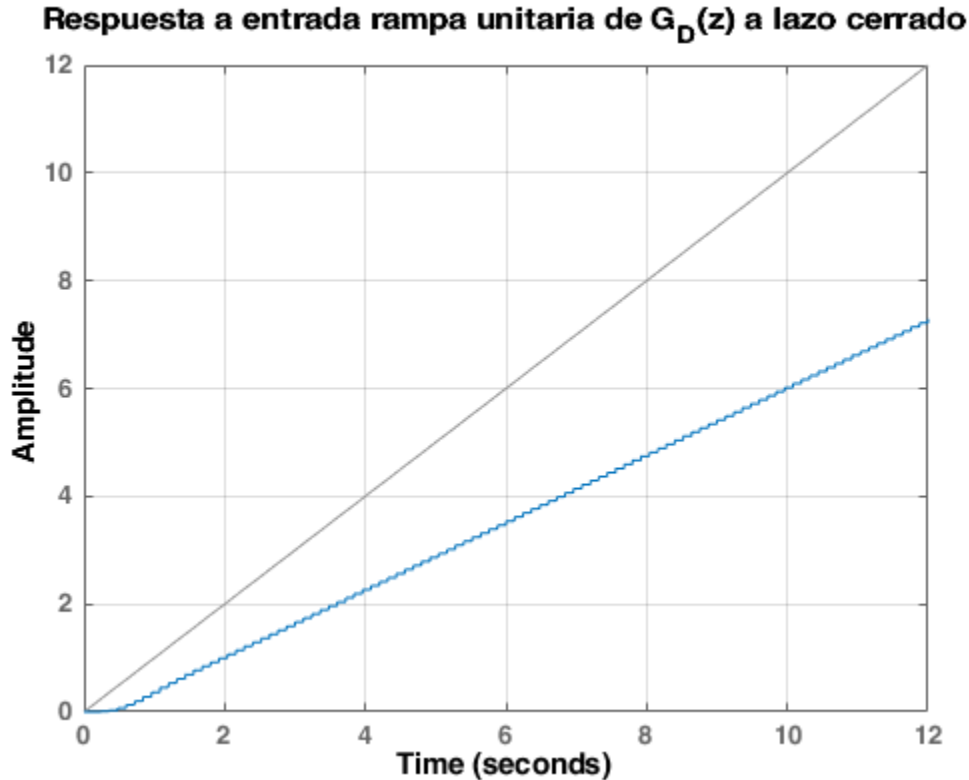
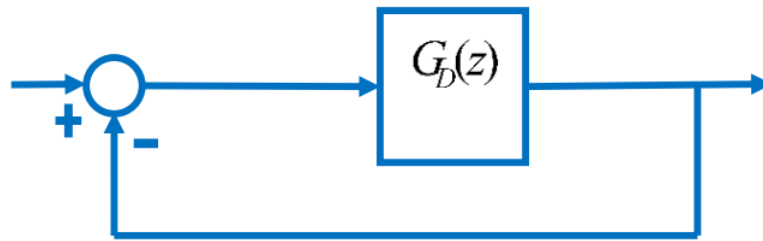


Figura 9: Respuesta a la rampa unitaria de la función $F(z)$.

En donde claramente se aprecia cómo se pierde la referencia con respecto a la entrada setpoint del tipo rampa. La causa de esta divergencia está en la aplicación del teorema del valor final. En donde, el límite que se debe calcular, para la constante de velocidad arroja un resultado 0, que, teniendo en cuenta la forma de la función, es decir, sin polos en el 1, no es posible realizar una cancelación algebraica entre factores (refiriéndose al $(z - 1)$) en el denominador y numerador de la expresión, lo que lleva a un límite asintótico al 0. Si el sistema fuera de tipo 1 por ejemplo, de nuevo para una entrada rampa, al calcular el límite que refiere al teorema del valor final, se cancelarían factores y K_v^* tendría un valor finito no nulo, lo que llevaría a la existencia de un error en estado estable constante, y diferente de 0. Luego, al tener un sistema de tipo 2, se cancelaría el factor $(z - 1)$ del numerador con uno de los mismos factores presentes en el denominador, lo que llevaría a que ese límite tienda al infinito. Y, que la constante de error de la aceleración sea de tipo 2 implica que el sistema tendrá un error en estado estable nulo para una entrada del tipo rampa.

Finalmente, y a modo de ilustración, el siguiente es el diagrama de bloques para el sistema realimentado con una función de transferencia discreta.

Figura 10: Diagrama de bloques del sistema $F(z)$.

2.3. Sistema a lazo cerrado con realimentación unitaria

Una herramienta que permite analizar el comportamiento de un determinado sistema a lazo cerrado es el lugar de raíces. En este diagrama es posible analizar los posibles lugares del plano en donde se pueden ubicar las raíces (polos y ceros) del sistema si se lo trabajara a lazo cerrado. Pero, es importante aclarar, que, el diagrama del lugar de raíces se obtiene a partir de la función de transferencia a lazo abierto. Luego, este lugar de raíces permite obtener los valores de la ganancia K que sean posibles, y puede visualizarse la futura ubicación de raíces para determinados valores de la ganancia estática.

Código 13: Lugares de raíces.

```
1  rlocus(G)
2  title('Lugar de raíces para G(s)')
3  grid
4  rlocus(Gd)
5  title('Lugar de raíces para G_D(z)')
6  grid
```

Se hace uso de la herramienta introducida entonces para obtener los siguientes dos diagramas.

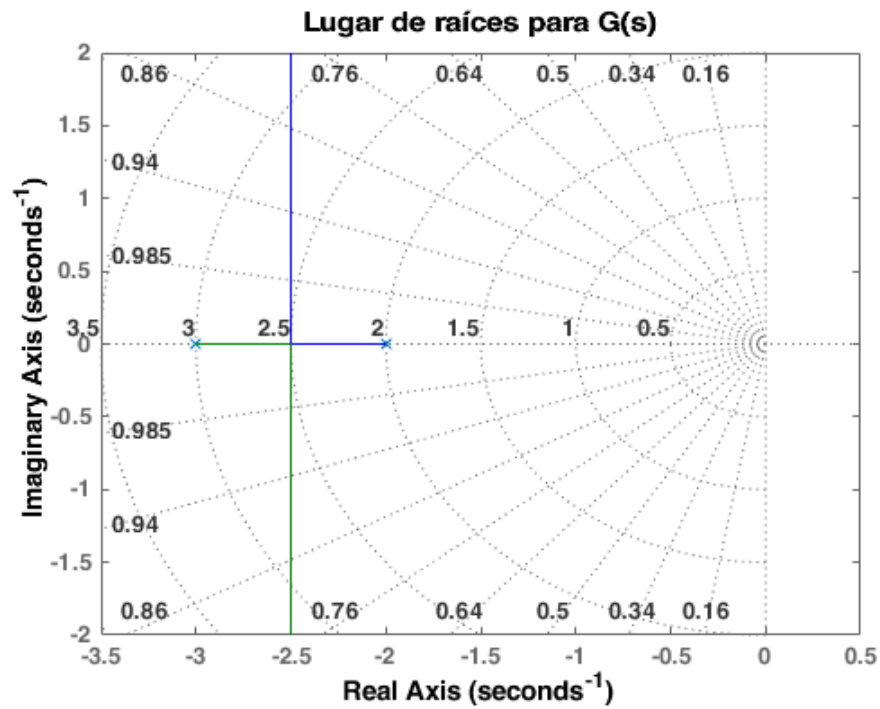


Figura 11: Lugar de raíces de la función de transferencia $G(s)$.

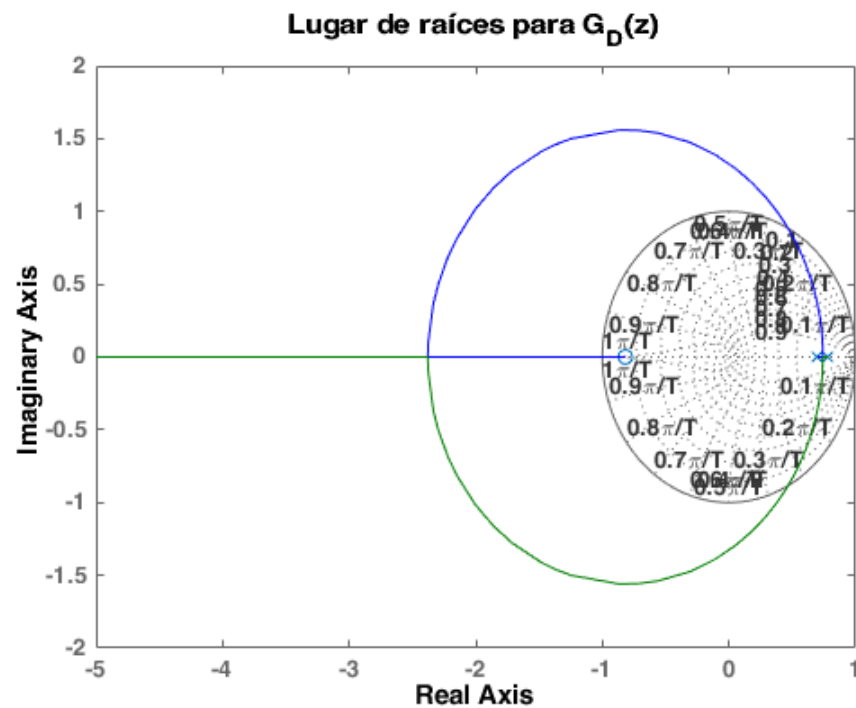


Figura 12: Lugar de raíces de la función de transferencia $G_D(z)$.

Las ganancias críticas de estabilidad pueden obtenerse mediante el comando **margin(sys)** de Matlab, esto se hace para ambas ganancias.

El uso del comando mencionado, permite verificar que para el sistema continuo no existe una ganancia crítica, ya que el lugar de raíces se encuentra completamente en el semiplano izquierdo, por lo que no hay un límite en el valor de la ganancia a partir del cual el sistema se torne inestable. En cambio, para el sistema discreto, si existe una ganancia crítica, y puede verse que este sería la intersección del lugar de raíces con la circunferencia unitaria centrada en el origen. Este valor se calcula haciendo uso de la función de Matlab que se nombró anteriormente.

Código 14: Ganancia crítica de estabilidad para el sistema discreto.

```
1 Gmd = margin(Gd)
```

Cuyo resultado es:

$$G_{md} = 9.3226$$

Este valor, puede apreciarse de forma aproximada en la siguiente gráfica del lugar de raíces, en donde se ve la ganancia para que el sistema se ubique en la intersección entre el lugar de raíces y la circunferencia unitaria centrada en el origen del plano.

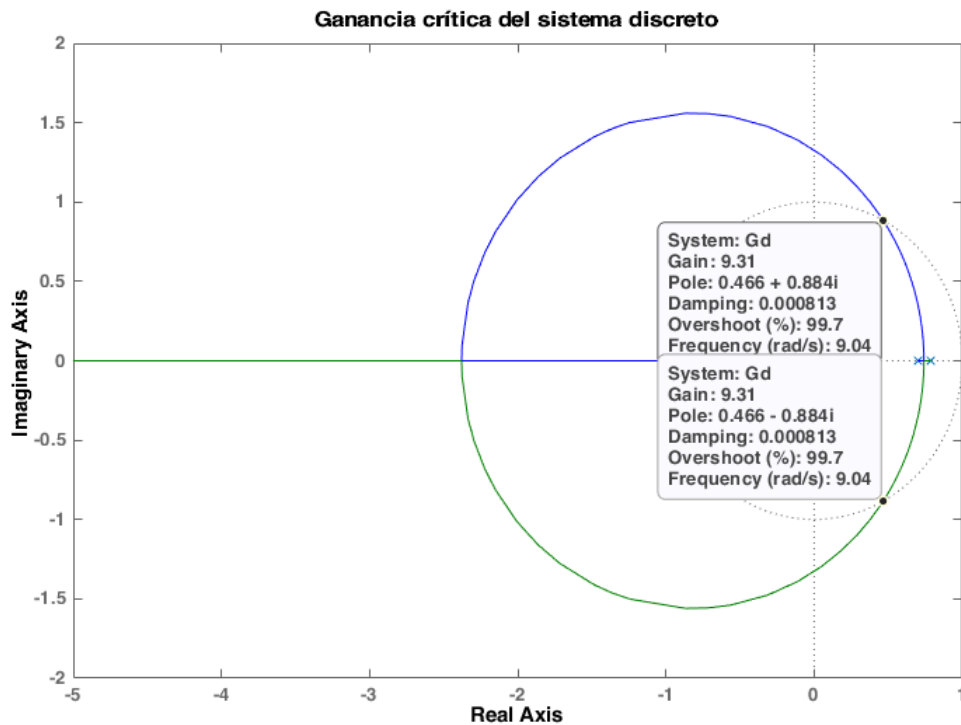
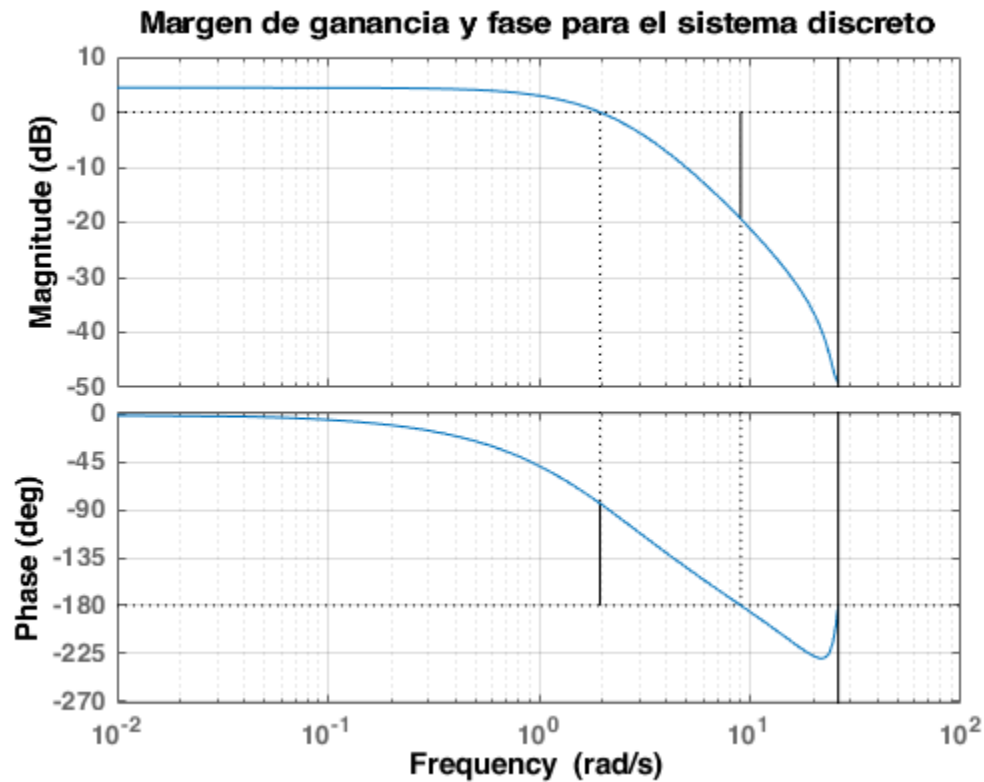


Figura 13: Ganancia crítica de estabilidad para $G_D(z)$.

Ahora, otra forma de visualizar la ganancia crítica del sistema, en este caso el discreto, es mediante un diagrama de Bode, y tomando los conceptos de márgenes de ganancia y de fase. Para el análisis actual, basta con ver únicamente el margen de ganancia.

Código 15: Márgenes de ganancia y fase para el sistema discreto.

```
1 margin(Gd)
```

Figura 14: Márgenes de ganancia y fase para $G_D(z)$.

Finalmente, si al sistema que se está analizando, se le aumenta el período de muestreo (10 veces), la estabilidad relativa del sistema debería cambiar. Esto puede suponerse desde un inicio viendo cómo se desplazaban los polos y ceros del sistema acercándose al origen del plano. Este desplazamiento indica que se desplazará también el lugar de raíces, y, por ende, los márgenes de ganancia y fase del sistema deberían de modificarse. Primero que nada, se grafica el lugar de raíces para el sistema **Gd1** del código.

Código 16: Lugar de raíces al aumentar el período de muestreo.

```
1 rlocus(Gd1)
2 title('Lugar de raíces para G_{D1}(z)')
3 grid
```

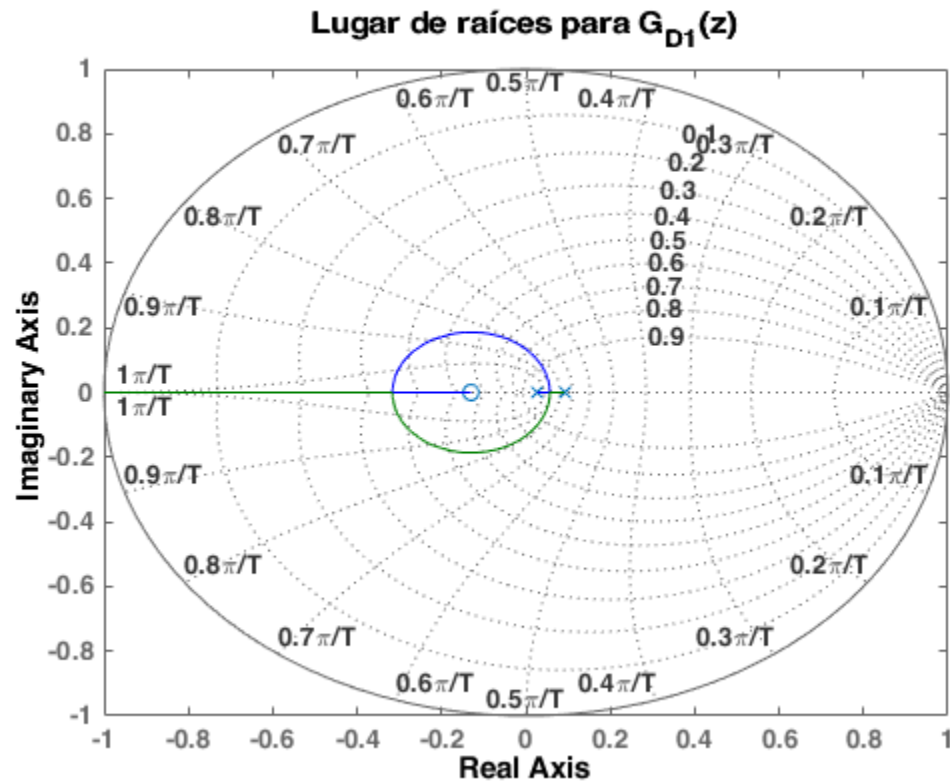


Figura 15: Lugar de raíces al aumentar el período de muestreo.

Gracias al desplazamiento de los polos y ceros del sistema, la estabilidad relativa disminuye, es decir, el valor de la ganancia crítica de estabilidad decrece, en este caso hasta el valor de 0.9879. Incluso, al pedirle a Matlab que calcule este valor, arroja la siguiente advertencia: **Warning: The closed-loop system is unstable**, lo que ya da una pauta del comportamiento del mismo. Para comprobar que la estabilidad relativa disminuye, y, que la ganancia crítica decrece en un factor cercano a 10, se adjunta el diagrama de Bode en donde se aprecian los márgenes de ganancia y fase.

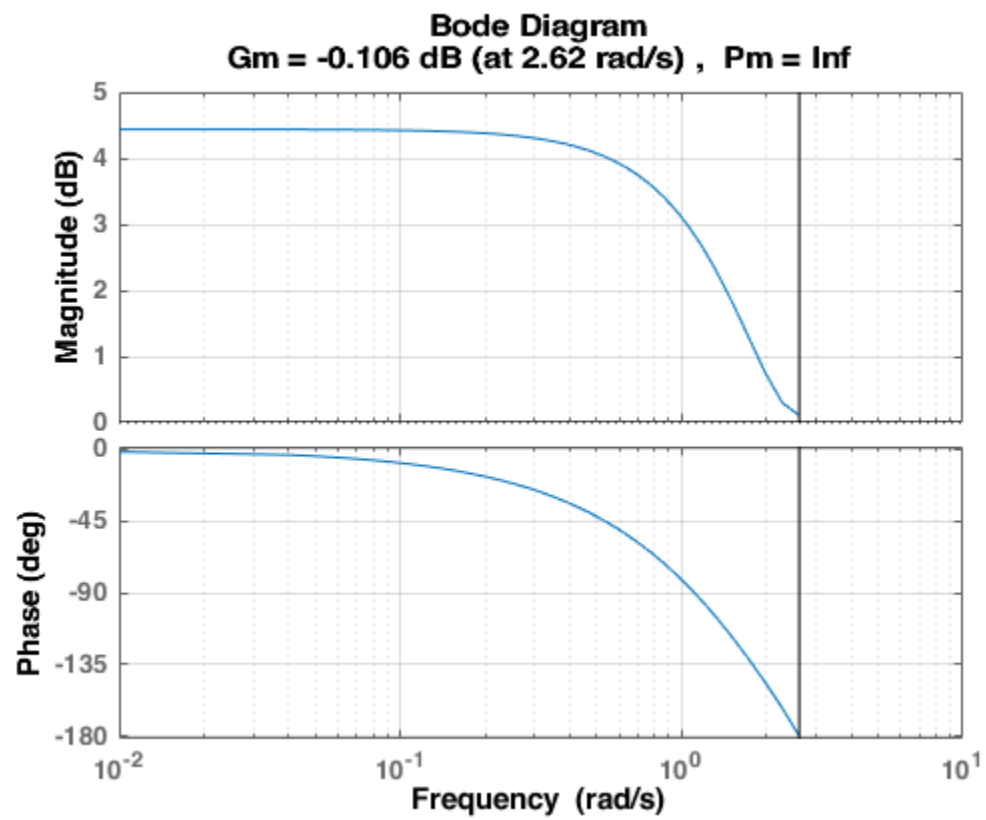


Figura 16: Márgenes de ganancia y fase al aumentar el período de muestreo.

3. Conclusiones

En el desarrollo del trabajo práctico pudo apreciarse el comportamiento de los sistemas discretos que son obtenidos a partir del muestreo de un sistema continuo dado. Fue posible implementar un sistema retentor de orden cero a partir de una función de transferencia con dos polos reales que era estable.

La implementación y análisis aquí desarrollados permitieron comprobar el comportamiento que tienen los sistemas discretos planteados como ZOH, y cómo afecta en ellos el período de muestreo a utilizar en el proceso de discretización. Pudo verse cómo el mapa de polos y ceros del sistema se desplazaba, y por consecuente el diagrama del lugar de raíces. Estos desplazamientos, a su vez, lograron cambiar la dinámica del sistema al pretender utilizar un controlador en un sistema a implementar a lazo cerrado, ya que los cambios afectaron a la ganancia para obtener una estabilidad crítica en el sistema. Y, este límite de estabilidad disminuye sensiblemente al aumentar el período de muestreo, es por eso que, puede darse el caso de que en un sistema real, al intentar simplificarlo con un muestreo a una frecuencia no tan alta, se pueden introducir comportamientos no deseados.