Магистратура/специалитет

Задача 1.

Универсальный компилятор двухуровневых операций
Общая формулировка

Наименьшей единицей информации в области квантовых вычислений (в квантовых компьютерах) являются кубиты. Кубит допускает всего два собственных состояния, обозначаемых как $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Например, кубитами могут являться фотоны, электроны, единичные атомы или ионы в ловушках. В последне время большую актуальность приобретают вычисления, основанные на многоуровневых системах с размерностью $d > 2$ – на так называемых «кудитах». Управление и программирование квантовых устройств на основе кудитов, открывает возможности для помехоустойчивой квантовой связи, тонких квантовых молекулярных симуляций и эффективных квантовых вычислений, демонстрируя огромный потенциал.

Кудит преставляет собой d-уровневую квантовую систему. Обозначим базисные состояния в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ кудита $\{|0\rangle, |1\rangle, ..., |d-1\rangle\}$. Рассмотрим унитарный оператор U ($U^\dagger U = UU^\dagger = I$), действующий в $\mathcal{H}$. Необходимо построить алгоритм разложения U на произведение двухуровневых унитарных матриц, нетривиально действующих не более чем на двух базисных векторах. Двухувровневые унитарные матрицы имеют вид

$$R_{mn}(\theta, \phi) = \exp\left[-i\theta/2(X_{mn}\cos(\phi) + Y_{mn}\sin(\phi))\right], \tag{1}$$

где

$$X_{mn} = |m\rangle\langle n| + |n\rangle\langle m|, \tag{2}$$
$$Y_{mn} = -i\,|m\rangle\langle n| + i\,|n\rangle\langle m|, \tag{3}$$
$$m, n = 0, ..., d-1, \quad m \neq n \tag{4}$$

Заметим, что в общем случае произвольная унитарная матрица U может быть разложена в произведение не более чем $2^{d-1}(2^d - 1)$ двухуровневых унитарных матриц. Минимизация числа матриц в разложении не является необходимой опцией в решении данной задачи.

Решение данной задачи предполагает разработку алгоритма разложения произвольных унитарных операций на произведение двухуровневых унитарных операций при помощи любого языка программирования (Python, C/C++, ...).

Задача 2.

Квантовый компьютер на явлении ядерного магнитного резонанса

Введение

Известно, что кубитом может являться любая квантовая система с двумя возможными квантовыми состояниями. Один из очевидных примеров – состояния системы с разными проекциями спина-1/2 на некоторую ось. Релизовать этот подход можно, в том числе, используя явление ядерного магнитного резонанса (ЯМР) – расщепления энергетических уровней ядра с ненулевым спином в присутствии внешнего магнитного поля. Эта идея легла в основу одного из первых и наиболее хорошо разработанных на сегодняшний день квантовых компьютеров. По типу используемого рабочего вещества они бывают жидкостными и твердотельными. Сосредоточимся на рассмотрении первого варианта.

Физическими кубитами такого устройства являются ядра атомов в молекуле, а вся молекула выполняет роль квантового регистра. Колба с раствором рабочего вещества помещается во внешнее сильное стационарное магнитное поле $\vec{B}_0$, обеспечивающее расщепление энергетических уровней. Управление состояниями кубитов производится с помощью слабого поперечного магнитного поля $\vec{B}_1(t)$, параметрами которого можно управлять. Вся система находится при комнатной температуре и теоретически описывается в терминах матрицы плотности ρ.

Указания по оформлению и вводу ответов:

Во всех заданиях с ручной проверкой необходимо загрузить файл с описанием хода решения **в формате pdf**. Участникам допускается загружать сканы и/или фотографии рукописных решений, конвертированные в pdf, **если изображение хорошего качества, а решение оформлено аккуратным, разборчивым почерком без помарок и исправлений**.

В заданиях с автоматической проверкой: дробную часть отделять от целой **запятой**; мнимую единицу обозначать буквой i без пробела. **Внимательно читайте правила ввода ответов** в заданиях с автоматической проверкой!

Теоретическое описание системы

В простейшем случае однокубитной системы гамильтониан имеет вид

$$H_1 = -\hbar\gamma\vec{B}_0\hat{\vec{s}} - \hbar\gamma\vec{B}_1(t)\hat{\vec{s}} = -\hbar\omega_0 I_z + 2\hbar\omega_1\cos(\Omega t - \varphi)I_x, \tag{5}$$

где γ – гиромагнитное отношение; ω_i – ларморовская частота, соответствующая полю B_i; $I_i = \sigma_i/2$ с σ_i – матрицами Паули; Ω и φ – частота и фаза управляющего магнитного поля; а оси выбраны вдоль направлений магнитных полей $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$, $\vec{B}_1 = -B_1\vec{e}_x$. Эволюция состояния системы описывается уравнением фон Неймана:

$$i\hbar\frac{d\rho_1}{dt} = [H_1, \rho_1], \tag{6}$$

где ρ_1 – матрица плотности однокубитной системы.

Часто оказывается удобным перейти из лабораторной во вращающуюся систему отсчёта:

$$\rho_1 \to \tilde{\rho}_1 = U_{1,R}\rho_1 U_{1,R}^\dagger, \tag{7}$$

где $U_{1,R} = \exp(-i\omega_0 I_z t)$ – генератор поворота вокруг оси Oz. Можно показать, что уравнение (6) при этом сохраняет свой вид с точностью до замены $\rho_1 \to \tilde{\rho}_1$ и с соответствующим образом изменённым гамильтонианом $H_1 \to \tilde{H}_1$. В предположении $\omega_1 \ll \omega_0$ этот преобразованный гамильтониан можно записать в простом виде

$$\tilde{H}_1 \approx \hbar\omega_1 \left(\cos\varphi I_x + \sin\varphi I_y\right). \tag{8}$$

Везде в дальнейшем примем $\hbar = 1$ для упрощения выкладок.

При добавлении второго кубита в систему размерность рассматрвиаемого гильбертова пространства увеличивается, а в гамильтониане дополнительно появляется член, связанный со взаимодействием между двумя кубитами вида

$$H_{12} = J\sum_{k=x,y,z} I_k \otimes I_k, \tag{9}$$

где J – некоторая константа. Переход во вращающуюся систему отсчёта теперь совершается под действием оператора

$$U_{2,R} = e^{-i\omega_{0,1}I_z t} \otimes e^{-i\omega_{0,2}I_z t}. \tag{10}$$

Здесь и далее $\omega_{i,j}$ – это ларморовская частота j-го кубита в поле B_i. В остальном процедура перехода во вращующуся систему отсчёта и упрощения гамильтониана остаётся прежней и приводит к результату:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_2 \approx\ & JI_z \otimes I_z \\ & + \omega_{1,1}\left(\cos\varphi_1 I_x \otimes I + \sin\varphi_1 I_y \otimes I\right) \\ & + \omega_{1,2}\left(\cos\varphi_2 I \otimes I_x + \sin\varphi_2 I \otimes I_y\right),\end{aligned} \tag{11}$$

где φ_i – фаза управляющего поля B_1, действующего на i-й кубит, а I – единичная матрица размера 2×2.

Данный результат легко обобщается на линейный квантовый регистр произвольной длины n:

$$\tilde{H}_n \approx \sum_{i=1}^{n-1} J_{i,i+1} I_{z,i} \otimes I_{z,i+1} + \sum_{i=1}^{n} \omega_{1,i}\left(\cos\varphi_i I_{x,i} + \sin\varphi_i I_{y,i}\right), \tag{12}$$

где $J_{i,i+1}$ – постоянная взаимодействия между i и $i+1$ кубитами; $I_{k,i} = I \otimes \cdots \otimes I_k \otimes \cdots \otimes I$ – последовательность прямых произведений единичных операторов I с I_k на i-м месте.

Однокубитные операции

Физическая реализация операций над кубитами происходит, как было сказано выше, с помощью слабого поперечного магнитного поля B_1. Рассмотрим это на примере оператора поворота вокруг оси Ox на угол $\pi/2$:

$$X = e^{-i\frac{\pi}{2}I_x}. \tag{13}$$

Эволюция кубита описывается оператором

$$U = e^{-i\int_0^\tau \tilde{H}dt}, \tag{14}$$

где τ – время эволюции. Подберём параметры управляющего магнитного поля, приравняв два этих выражения. В результате получим, что данный оператор поворота обеспечивается импульсом с фазой $\varphi = 0$ и ларморовской частотой и длительностью $\omega_1\tau = \pi/2$.

Двухкубитные операции

Заметим, что выполнение однокубитных операций оказывается на порядки быстрее двухкубитных. Так, длительность управляющих импульсов для реализации однокубитной операции составляет в среднем 10 мкс ($\tau \ll 1/J$), а для реализации двухкубитной операции – 10 мс ($\tau \sim 1/J$). В рамках теоретического описания это означает, что эволюцией многокубитной системы под действием межкубитного взаимодействия можно пренебречь на время выполнения однокубитных операций.

Отдельную сложность представляет реализация одно- и двухкубитных операций на квантовом регистре, состоящем из трёх и более кубитов: взаимодействие между кубитами делает прямое применений таких операций невозможным. Однако можно подобрать такую последовательность вспомогательных импульсов управляющего магнитного поля, которая сможет компенсировать этот эффект. Эта процедура называется *decoupling*.

Измерения

Квантовый компьютер рассматриваемого вида интересен тем, что измерения в нём не относятся к проективному типу. Система, как было сказано выше, находится в смешанном состоянии, а измерения носят статистический характер (ансамбль измерений).

Пусть матрица плотности однокубитной системы во вращающейся системе отсчёта после ряда проделанных вычислений имеет вид

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{1}{2}I + c_xI_x + c_yI_y + c_zI_z. \tag{15}$$

Для полного определения состояния системы необходимо найти коэффициенты c_i. Это можно сделать, измеряя проекцию магнитного момента

$$M_x(t) \propto \mathrm{Tr}\,[I_x \rho_1] = \frac{1}{2}\left(c_x \cos(\omega_0 t) + c_y \sin(\omega_0 t)\right). \tag{16}$$

В приведённом выражении учтено, что измерительные приборы зафиксированы в лабораторной системе отсчёта. Видно, что единичного измерения недостаточно для того, чтобы полностью определить состояние системы. Чтобы это восполнить, можно подействовать на кубит дополнительным управляющим импульсом, а затем снова измерить величину $M_x(t)$. Такое восстановление искомого состояния системы путём сопоставления результатов нескольких отдельных измерений называется *квантовой томографией*. В случае однокубитной системы необходимо два измерения для полного восстановления матрицы плотности.

В действительности проекция магнитного момента системы $M_x(t)$ может деградировать (например, из-за неоднородностей внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$). Этот процесс можно приближённо описать введением соответствующего сомножителя:

$$M_x(t) \propto e^{-t/T}\left(c_x \cos\omega_0 t + c_y \sin\omega_0 t\right) = Ae^{-t/T}\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{17}$$

где A и α определяются через коэффициенты c_x, c_y, а T – постоянная размерности времени, характеризующая скорость деградации магнитного момента $M_x(t)$.