Simplifications des Grammaires Algébriques

Substitution de Règles

$$S \rightarrow aB$$

$$A \rightarrow aaA$$

$$A \rightarrow abBc$$

$$B \rightarrow aA$$

$$B \rightarrow b$$

Remplacer

$$B \rightarrow b$$

Grammaire Equivalente

$$S \rightarrow aB \mid ab$$

$$A \rightarrow aaA$$

$$A \rightarrow abBc \mid abbc$$

$$B \rightarrow aA$$

Substitution de Règles

$$S \to aB \mid ab$$

$$A \to aaA$$

$$A \to abBc \mid abbc$$

$$B \to aA$$

Remplacer

$$B \to aA$$

$$S \to \cancel{aB} \mid ab \mid aaA$$

$$A \to aaA$$

$$A \to \cancel{abBc} \mid abbc \mid abaAc$$

Grammaire Equivalente

En général:

$$A \to xBz$$

$$B \to y$$

Remplacer

$$B \to y$$

$$A \to xBz \mid xyz$$

Grammaire équivalente

Variables Nulles

$\varepsilon-\text{production:}$ $\qquad A \rightarrow \varepsilon$

Variable nulle : $\qquad A \Rightarrow^{*} \varepsilon$

Elimination des Variables Nulles

Exemple :

$$S \to aAb$$

$$A \to aAb$$

$$A \to \varepsilon$$

Variable Nulle

$S \to aAb$

$\cancel{A \to aAb}$

$\cancel{A \to \varepsilon}$

Remplacer

$A \to \varepsilon$

Grammaire Finale

$S \to aAb$

$S \to ab$

$A \to aAb$

$A \to ab$

Productions Unitaires

Production Unitaire : $A \rightarrow B$

(une seule variable dans les deux côtés)

Elimination des Productions Unitaires

Observation :

$$A \to A$$

Est supprimée immédiatement

Elimination des Productions Unitaires

Exemple :

$$S \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow a$$

$$A \rightarrow B$$

$$B \rightarrow A$$

$$B \rightarrow bb$$

Elimination des Productions Unitaires

$$S \rightarrow aA$$
$$A \rightarrow a$$
$$\cancel{A \rightarrow B}$$
$$B \rightarrow A$$
$$B \rightarrow bb$$

Remplacer

$$A \rightarrow B$$

$$S \rightarrow aA \mid aB$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow A \mid B$$
$$B \rightarrow bb$$

Elimination des Productions Unitaires

$$S \rightarrow aA \mid aB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow A \mid \cancel{B}$$

$$B \rightarrow bb$$

Supprimer

$$B \rightarrow B$$

$$S \rightarrow aA \mid aB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow A$$

$$B \rightarrow bb$$

Elimination des Productions Unitaires

$$S \to aA \mid aB$$

$$A \to a$$

$$\cancel{B \to A}$$

$$B \to bb$$

Remplacer

$$B \to A$$

$$S \to aA \mid aB \mid aA$$

$$A \to a$$

$$B \to bb$$

Suppression les productions répétées

$$S \to aA \mid aB \mid \cancel{aA}$$

$$A \to a$$

$$B \to bb$$

Grammaire Finale

$$S \to aA \mid aB$$

$$A \to a$$

$$B \to bb$$

Productions inutiles

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow aA$$

Production inutile

Certaines dérivations ne se terminent jamais...

$$S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \ldots \Rightarrow aa\ldots aA \Rightarrow \ldots$$

Productions inutiles

Une autre grammaire :

$$S \to A$$

$$A \to aA$$

$$A \to \varepsilon$$

$$B \to bA$$

Production inutile

Non accessible depuis S

Productions inutiles

En général :

w ne contient que des terminaux

si $S \Rightarrow \ldots \Rightarrow xAy \Rightarrow \ldots \Rightarrow w$

$w \in L(G)$

Alors la variable A est utile

Si non, la variable A est inutile

Productions inutiles

une production $A \to x$ est inutile
si et seulement si ses variables sont inutiles

Variables		Productions
	$S \to aSb$	
	$S \to \varepsilon$	
	$S \to A$	inutile
inutile	$A \to aA$	inutile
inutile	$B \to C$	inutile
inutile	$C \to D$	inutile

Suppression des productions inutiles

Exemple :

$$S \rightarrow aS \mid A \mid C$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow aa$$

$$C \rightarrow aCb$$

Suppression des productions inutiles

Premièrement: Trouver toutes les variables qui peuvent produire des chaînes avec seulement des terminaux

$$S \to aS \mid A \mid C$$

$$A \to a$$

$$B \to aa$$

$$C \to aCb$$

étape 1 : $\{A, B\}$

$$S \to A$$

étape 2: $\{A, B, S\}$

Suppression des Productions inutiles

Ne conserver que les variables
qui produisent des symboles terminaux : $\{A, B, S\}$

(les autres variables sont inutiles)

$$S \rightarrow aS \mid A \mid \cancel{C}$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow aa$$

$$\cancel{C \rightarrow aCb}$$

$$\Rightarrow$$

$$S \rightarrow aS \mid A$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow aa$$

Supprimer les productions inutiles

Suppression des productions inutiles

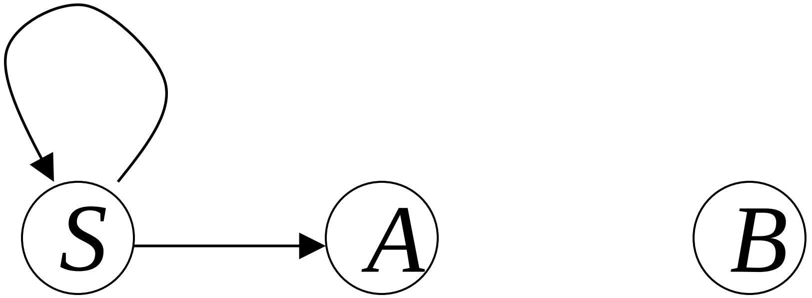
Deuxièmement: Trouver toutes les variables Accessibles depuis S

Utiliser un Graphe de Dépendance

$$S \rightarrow aS \mid A$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow aa$$



non accessible

Suppression des productions inutiles

Ne conserver que les variables
accessible à partir de S

(les autres variables sont inutiles)

$$S \rightarrow aS \mid A$$

$$A \rightarrow a$$

$$\cancel{B \rightarrow aa}$$

Grammaire Finale

$$S \rightarrow aS \mid A$$

$$A \rightarrow a$$

Supprimer les productions inutiles

Supprimer Tous

Pas 1: Suppression des Variables Nulles

Pas 2: Suppression des Productions Unitaires

Pas 3: Suppression des Variables inutiles

Formes Normales des Grammaires Algébriques

Forme Normale de Chomsky

Chaque production a la forme :

$$A \to BC \qquad \text{ou} \qquad A \to a$$

variable variable terminal

Exemples :

$$S \to AS$$
$$S \to a$$
$$A \to SA$$
$$A \to b$$

Forme Normale de Chomsky

$$S \to AS$$
$$S \to AAS$$
$$A \to SA$$
$$A \to aa$$

Pas une Forme Normale de Chomsky

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Exemple:

$$S \to ABa$$

$$A \to aab$$

$$B \to Ac$$

Pas une Forme Normale de Chomsky

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Introduire des variables T_a, T_b, T_c pour les terminaux : a, b, c

$$S \to ABa$$
$$A \to aab$$
$$B \to Ac$$

$$S \to ABT_a$$
$$A \to T_aT_aT_b$$
$$B \to AT_c$$
$$T_a \to a$$
$$T_b \to b$$
$$T_c \to c$$

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Introduire des variables intermédiaires : V_1

$$S \to ABT_a$$
$$A \to T_aT_aT_b$$
$$B \to AT_c$$
$$T_a \to a$$
$$T_b \to b$$
$$T_c \to c$$

$$\Longrightarrow$$

$$S \to AV_1$$
$$V_1 \to BT_a$$
$$A \to T_aT_aT_b$$
$$B \to AT_c$$
$$T_a \to a$$
$$T_b \to b$$
$$T_c \to c$$

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Introduire des variables intermédiaires : V_2

$$S \to AV_1$$
$$V_1 \to BT_a$$
$$A \to T_aT_aT_b$$
$$B \to AT_c$$
$$T_a \to a$$
$$T_b \to b$$
$$T_c \to c$$

$\Longrightarrow$

$$S \to AV_1$$
$$V_1 \to BT_a$$
$$A \to T_aV_2$$
$$V_2 \to T_aT_b$$
$$B \to AT_c$$
$$T_a \to a$$
$$T_b \to b$$
$$T_c \to c$$

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Grammaire Initiale :

$$S \rightarrow ABa$$

$$A \rightarrow aab$$

$$B \rightarrow Ac$$

Grammaire Finale sous Forme Normale de Chomsky :

$$S \rightarrow AV_1$$

$$V_1 \rightarrow BT_a$$

$$A \rightarrow T_aV_2$$

$$V_2 \rightarrow T_aT_b$$

$$B \rightarrow AT_c$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

En général :

À partir de toute grammaire algébrique (qui ne produit pas ε) qui n'est pas sous Forme Normale de Chomsky

Nous pouvons obtenir :

une grammaire équivalente
sous Forme Normale de Chomsky

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Comment ?

Premièrement supprimer :

Variables Nulles

Productions Unitaires

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Alors pour chaque symbole : a

Ajouter une production $T_a \rightarrow a$

Dans les productions : remplacer a avec T_a

Nouvelle variable : T_a

Conversion sous Forme Normale de Chomsky

Remplacer chaque production :

$$A \to C_1 C_2 \cdots C_n$$

avec

$$A \to C_1 V_1$$

$$V_1 \to C_2 V_2$$

$$\cdots$$

$$V_{n-2} \to C_{n-1} C_n$$

Nouvelles variables intermédiaires :

$$V_1, V_2, \ldots, V_{n-2}$$

Forme Normale de Chomsky

- Pour toute grammaire algébrique G (qui ne produit pas ε), il y a une grammaire équivalente sous Forme Normale de Chomsky

- Les formes normales de Chomsky sont convenables pour l'analyse et pour prouver des théorèmes

- Il est très facile de trouver la forme normale de Chomsky de toute grammaire algébrique

Forme Normale de Greinbach

Toutes les productions ont la forme :

$$A \to a\, V_1 V_2 \cdots V_k \qquad\qquad k \geq 0$$

symbole

variables

Forme Normale de Greinbach

Exemples :

$$S \to cAB$$

$$A \to aA \mid bB \mid b$$

$$B \to b$$

Sous Forme Normale de Greinbach

$$S \to abSb$$

$$S \to aa$$

Pas Sous Forme Normal de Greinbach

Conversion sous Forme Normale de Greinbach

$$S \to abSb$$

$$S \to aa$$

$$S \to aT_bST_b$$

$$S \to aT_a$$

$$T_a \to a$$

$$T_b \to b$$

Forme Normale
de Greinbach

Forme Normale de Greinbach

- Pour toute grammaire algébrique G (qui ne produit pas ε), il y a une grammaire équivalente sous Forme Normale de Greinbach

- Les formes normales de Chomsky sont convenables pour l'analyse

- Il est difficile de trouver la forme normale de Greinbach de toute grammaire algébrique