Кафедра вычислительной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №1

“Решение систем линейных алгебраических уравнений”

Вариант: **Метод Гаусса**

Выполнил

Студент группы P3210

Глушков Дмитрий Сергеевич

Санкт-Петербург
2018 г.

1. Описание метода, расчетные формулы, прямое и обратное действие.

Метод Гаусса – точный метод для решения СЛАУ. Метод основан на последовательном исключении переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные исходной системы. Сложность алгоритма – $O(n^3)$.

Метод Гаусса состоит из двух основных этапов:

1) Прямой ход. Путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна. Среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк и вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, домножив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки, обнуляя тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.
2) На втором этапе осуществляется обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» наверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуация в точности повторяет случай последней строки.

Пусть имеется СЛАУ вида

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n & = b_1 \qquad (1) \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n & = b_2 \qquad (2) \\ \ldots & \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n & = b_m \qquad (m) \end{cases}$$

Прямой ход:

$$
\begin{array}{lcr}
(2) \to (2) - (1) \cdot (\frac{a_{21}}{a_{11}}) & : & a'_{22} \cdot x_2 + a'_{23} \cdot x_3 + \ldots + a'_{2n} \cdot x_n = b'_2 \\
(3) \to (3) - (1) \cdot (\frac{a_{31}}{a_{11}}) & : & a'_{32} \cdot x_2 + a'_{33} \cdot x_3 + \ldots + a'_{3n} \cdot x_n = b'_3 \\
\ldots & & \\
(m) \to (m) - (1) \cdot (\frac{a_{m1}}{a_{11}}) & : & a'_{m2} \cdot x_2 + a'_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a'_{mn} \cdot x_n = b'_n \\
(3) \to (3) - (2) \cdot (\frac{a'_{32}}{a'_{22}}) & : & a''_{33} \cdot x_3 + \ldots + a''_{3n} \cdot x_n = b''_3 \\
\ldots & & \\
(m) \to (m) - (m-1) \cdot (\frac{a^{(m-2)}_{m,n-1}}{a^{(m-2)}_{m-1,n-1}}) & : & a^{(m-1)}_{mm} \cdot x_m + \ldots + a^{(m-1)}_{mn} \cdot x_n = b^{(m-1)}_m
\end{array}
$$

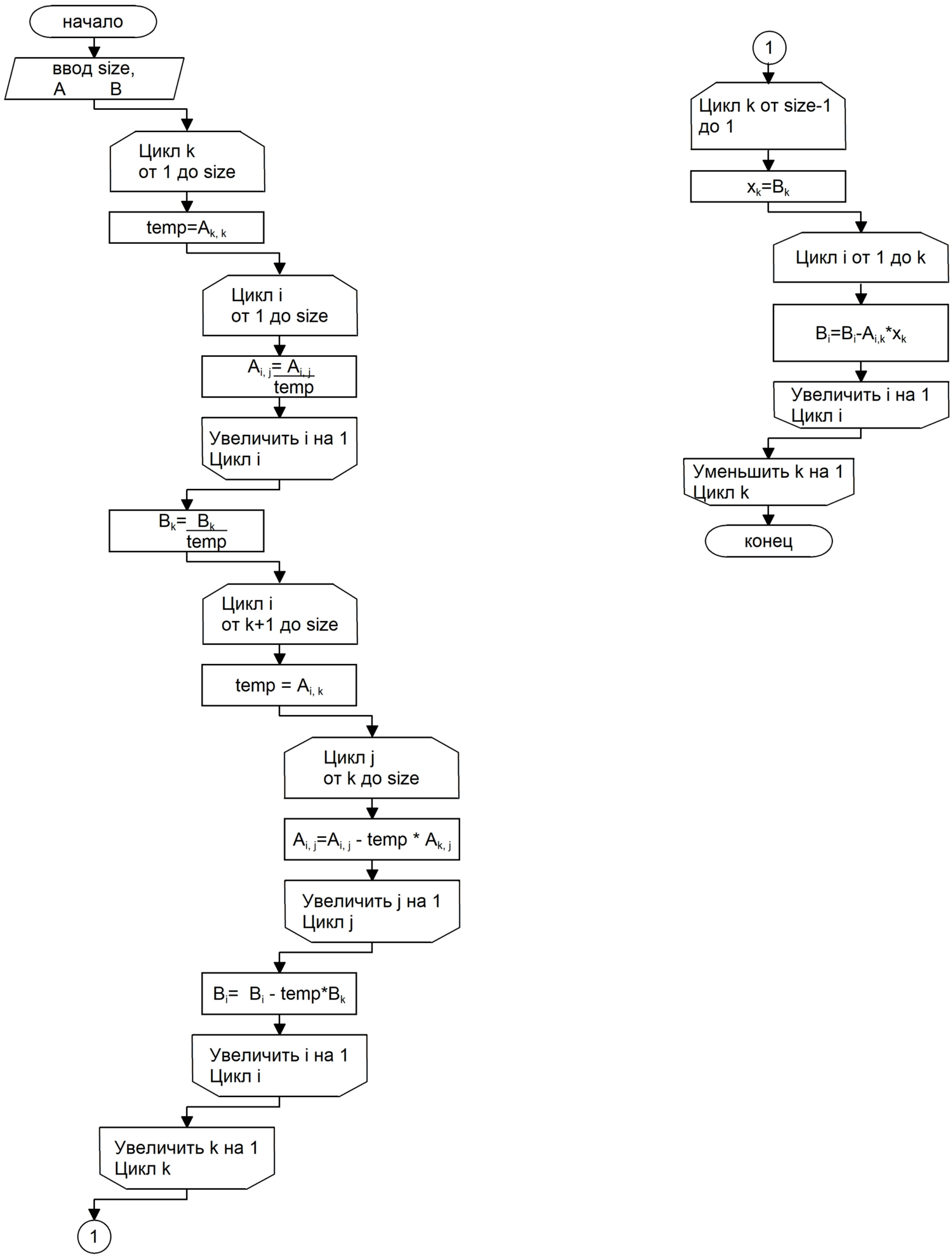
Обратный ход:

Из последнего ненулевого уравнения выражаем базисную переменную через небазисные и подставляем в предыдущие уравнения. Повторяя эту процедуру для всех базисных переменных, получаем фундаментальное решение.

2. Листинг функции.

```
void Calc ()
  {
    double temp;
    int cur,i,j,k;
    for (cur=0; cur<size; cur++)
    {
      temp=matr[cur][cur];
      determ*=temp;
      for(i=0; i<size; i++)
        matr[cur][i]/=temp;
      val[cur]/=temp;
      for(i=cur+1;i<size; i++)
      {
        temp=matr[i][cur];
        for (j=cur; j<size; j++)
          matr[i][j]-=temp*matr[cur][j];
        val[i]-=temp*val[cur];
      }
    }
    for (cur=size-1;cur>=0;cur--)
    {
      res[cur] = val[cur];
      for (int i=0; i<cur; i++)
        val[i]=val[i]-matr[i][cur]*res[cur];
    }
  }
```

3. Блок схема функции.



4. Примеры и результаты работы

1) Исходные данные:

Файл ex1.txt:

3

3 2 -5 -1

2 -1 3 13

1 2 -1 9

Результат работы программы:

```
Решение СЛАУ методом Гаусса
Выберите желаемый способ ввода исходных данных:
1. Считать матрицу из файла.
2. Ввести размер матрицы и значения ячеек.
3. Ввести размер матрицы, значения ячеек задаются случайно.
1
Введите имя файла: e/ex1.txt
Исходная СЛАУ:
-----
|  3*x1 +   2*x2 +  -5*x3= -1
|  2*x1 +  -1*x2 +   3*x3= 13
|  1*x1 +   2*x2 +  -1*x3= 9
-----

Корни СЛАУ:
x1 = 3
x2 = 5
x3 = 4

Треугольная матрица:
 1,000  0,667 -1,667 |3
-0,000  1,000 -2,714 |5
 0,000  0,000  1,000 |4

Определитель:
-30

Столбец невязок:
0. 0
1. -5.32907e-015
2. 0
```

2) Исходные данные:

Размер матрицы: 15 x 15

Значения элементов матрицы задаются случайно в промежутке [-100; 100]

```
Решение СЛАУ методом Гаусса
Выберите желаемый способ ввода исходных данных:
1. Считать матрицу из файла.
2. Ввести размер матрицы и значения ячеек.
3. Ввести размер матрицы, значения ячеек задаются случайно.
3
Введите размер матрицы: 15
Исходная СЛАУ:
-----
| 67*x1 +   0*x2 +  24*x3 + -58*x4 + -64*x5 +  45*x6 +  27*x7 +  91*x8 +  42*x9 +  36*x10 +   4*x11 + -53*x12 + -82*x13 +  16*x14 + -95*x15= 26
| 38*x1 +  12*x2 +  99*x3 +  94*x4 +  11*x5 + -33*x6 +  64*x7 +  11*x8 +  68*x9 +  44*x10 + -57*x11 +  59*x12 +  41*x13 +  78*x14 + -35*x15= -42
| -6*x1 + -42*x2 + -48*x3 +  -5*x4 + -29*x5 + -50*x6 +  -1*x7 +  48*x8 +  23*x9 + -54*x10 + -40*x11 + -76*x12 +   8*x13 + -39*x14 + -23*x15= 38
|-82*x1 +  41*x2 +  15*x3 +  58*x4 + -30*x5 +   6*x6 +  86*x7 +  45*x8 + -72*x9 + -29*x10 +  73*x11 +  12*x12 + -90*x13 +  36*x14 +  67*x15= 74
| 52*x1 + -50*x2 +  24*x3 + -30*x4 +  91*x5 +  37*x6 +  87*x7 +  83*x8 +   9*x9 +  58*x10 +  88*x11 + -46*x12 + -30*x13 +  68*x14 + -91*x15= -55
|-59*x1 + -37*x2 + -83*x3 +  41*x4 + -50*x5 +  36*x6 + -20*x7 + -21*x8 + -99*x9 + -84*x10 +  34*x11 +  99*x12 + -38*x13 + -88*x14 +  67*x15= -93
|-83*x1 +  21*x2 + -17*x3 +  14*x4 +  16*x5 +  51*x6 + -49*x7 +  56*x8 +  -3*x9 +  -8*x10 +  -9*x11 +   2*x12 +  85*x13 +  43*x14 +  87*x15= -3
|  0*x1 + -18*x2 + -96*x3 + -81*x4 +  98*x5 +  57*x6 + -22*x7 + -92*x8 + -79*x9 + -57*x10 + -91*x11 +  88*x12 + -11*x13 + -34*x14 + -55*x15= -46
|-86*x1 +  33*x2 +  42*x3 + -16*x4 +  98*x5 + -51*x6 +  99*x7 +  76*x8 + -89*x9 +  12*x10 + -10*x11 +  69*x12 +  88*x13 +  89*x14 +  23*x15= -85
|-85*x1 + -26*x2 +  57*x3 + -32*x4 +  54*x5 +  89*x6 + -29*x7 + -92*x8 +  55*x9 + -49*x10 +  12*x11 +  60*x12 + -53*x13 +  23*x14 +  96*x15= 29
| 37*x1 + -49*x2 +  95*x3 +  16*x4 +  -5*x5 + -82*x6 +  34*x7 +  -1*x8 + -71*x9 + -63*x10 +  55*x11 +  53*x12 +  -8*x13 + -45*x14 +  56*x15= 58
|-82*x1 +  44*x2 + -22*x3 +  61*x4 +  50*x5 +  66*x6 + -59*x7 + -39*x8 +  24*x9 + -10*x10 +  49*x11 + -13*x12 + -22*x13 + -18*x14 +   5*x15= -91
|-25*x1 +  14*x2 + -24*x3 + -74*x4 + -59*x5 +  70*x6 +  97*x7 + -77*x8 +  70*x9 +  68*x10 + -85*x11 + -80*x12 +  27*x13 + -99*x14 +  25*x15= 24
| 72*x1 +  81*x2 +  32*x3 +  93*x4 +  31*x5 + -42*x6 + -86*x7 +   0*x8 +  60*x9 +  74*x10 + -70*x11 +  33*x12 +  60*x13 + -67*x14 +  50*x15= -94
| 24*x1 +  25*x2 + -94*x3 +  -2*x4 +  66*x5 + -93*x6 +  84*x7 + -64*x8 +  52*x9 + -87*x10 + -26*x11 + -57*x12 + -15*x13 + -27*x14 +  58*x15= -9
-----

Корни СЛАУ:
x1 = 0.511133
x2 = -0.530987
x3 = 0.811997
x4 = 0.223755
x5 = -0.305725
x6 = 0.252658
x7 = -0.306176
x8 = -0.58327
x9 = -1.39873
x10 = -0.159434
x11 = -1.12503
x12 = -1.746
x13 = -0.668737
x14 = 1.00946
x15 = 0.830387

Треугольная матрица:
 1,000  0,000  0,358 -0,866 -0,955  0,672  0,403  1,358  0,627  0,537  0,060 -0,791 -1,224  0,239 -1,418 |0,51
 0,000  1,000  7,116 10,575  3,942 -4,877  4,057 -3,384  3,682  1,965 -4,939  7,422  7,292  5,744  1,573 |-0,53
 0,000  0,000  1,000  1,715  0,517 -0,991  0,679 -0,340  0,717  0,126 -0,977  0,913  1,213  0,805  0,137 |0,81
-0,000 -0,000 -0,000  1,000  6,377 -0,710 -5,418 -9,475 -0,261  1,547 -1,743  5,896  8,496 -0,863  3,590 |0,22
 0,000  0,000  0,000  0,000  1,000  0,099 -0,610 -1,186 -0,186  0,316  0,093  0,762  0,952 -0,021  0,448 |-0,31
 0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  1,000  0,217 -0,039 -0,774  0,216  0,945  1,041 -0,737  0,008  0,112 |0,25
-0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000  1,000 -0,138 -0,888 -0,084  1,190  0,087 -1,511 -0,136 -0,155 |-0,31
 0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  1,000  0,925 -0,262 -1,867 -0,339  0,808  0,653 -0,675 |-0,58
-0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000  1,000  1,095  6,157 -6,346 -3,102  0,079  1,622 |-1,4
-0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000  1,000  4,679 -3,519 -1,784 -0,158  1,277 |-0,16
 0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  1,000 -1,037 -0,605 -0,033  0,362 |-1,1
 0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  1,000 -0,518 -1,145 -1,871 |-1,7
 0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  1,000 -6,460 -4,431 |-0,67
-0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000 -0,000  1,000 -0,076 |1
 0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  0,000  1,000 |0,83

Определитель:
-5.26594e+032

Столбец невязок:
0. 1.42109e-014
1. 2.84217e-014
2. -1.06581e-013
3. 1.42109e-013
4. 1.77636e-013
5. -1.27898e-013
6. 4.26326e-014
7. -7.10543e-015
8. 4.12115e-013
9. 5.11591e-013
10. 1.35003e-013
11. 1.42109e-014
12. -9.9476e-014
13. 4.26326e-013
14. 2.70006e-013
```

3) Исходные данные:
   Размер матрицы: 3 x 3
   Значения элементов матрицы:
   1 1 1 1
   1 1 1 1
   1 1 1 1
   Результат работы программы:

```
Решение СЛАУ методом Гаусса
Выберите желаемый способ ввода исходных данных:
1. Считать матрицу из файла.
2. Ввести размер матрицы и значения ячеек.
3. Ввести размер матрицы, значения ячеек задаются случайно.
2
Введите размер матрицы: 3
Введите значения ячеек расширенной матрицы
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
Исходная СЛАУ:
-----
|  1*x1 +   1*x2 +   1*x3= 1
|  1*x1 +   1*x2 +   1*x3= 1
|  1*x1 +   1*x2 +   1*x3= 1
-----
СЛАУ несовместна или имеет бесконечно много решений.
```

5. Выводы

В результате проделанной работы сделаны следующие выводы:

- Метод Гаусса является точным методом. Погрешность, возникающая при подсчете методом Гаусса, является неустранимой, так как она связана со способом представления чисел с плавающей запятой в памяти компьютера.
- Метод Гаусса позволяет однозначно установить, является ли СЛАУ совместной, найти ранг матрицы.
- Для метода Гаусса нельзя однозначно задать точность
- Для матриц больших размеров время выполнения превышает время выполнения итерационных методов.

Таким образом, метод Гаусса для решения СЛАУ лучше всего использовать в тех случаях, когда важна точность решения и для больших систем не важно время решения.