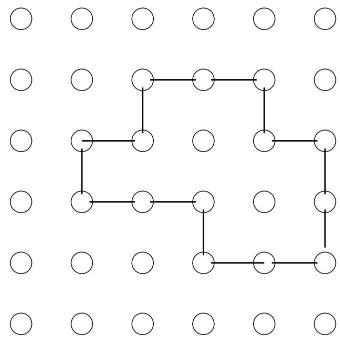
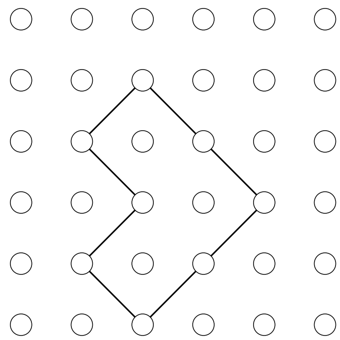


Courbe 4 connexe et Fond 8 connexe



Courbe 8 connexe et Fond 4 connexe

## Transformée en Tout ou Rien et dérivés

En réalité " Tout **et** Rien"

Principe : Elément structurant défini par deux ensembles disjoints

$$B = B_1 \cup B_2$$

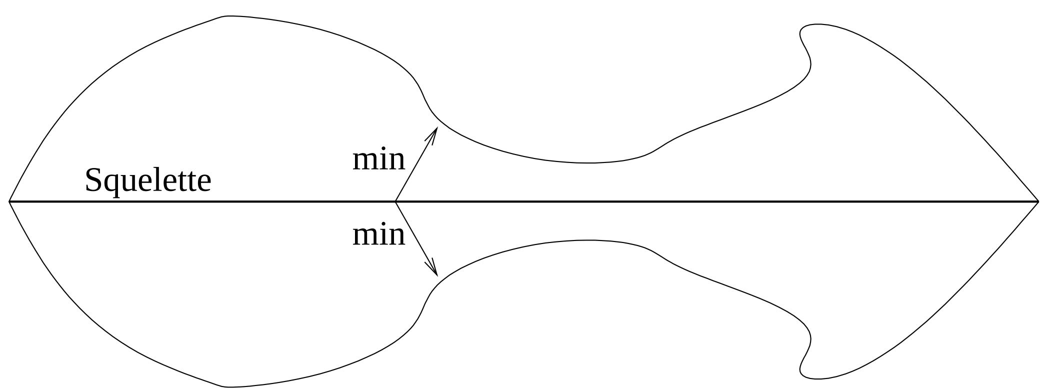
On recherche les pixels tels que $B_1$ touche l'objet et $B_2$ le manque.

Permet d'extraire des configurations particulières :

1) Si on les ajoute à l'objet : **épaississement**
2) Si on les retire de l'objet : **amincissement**

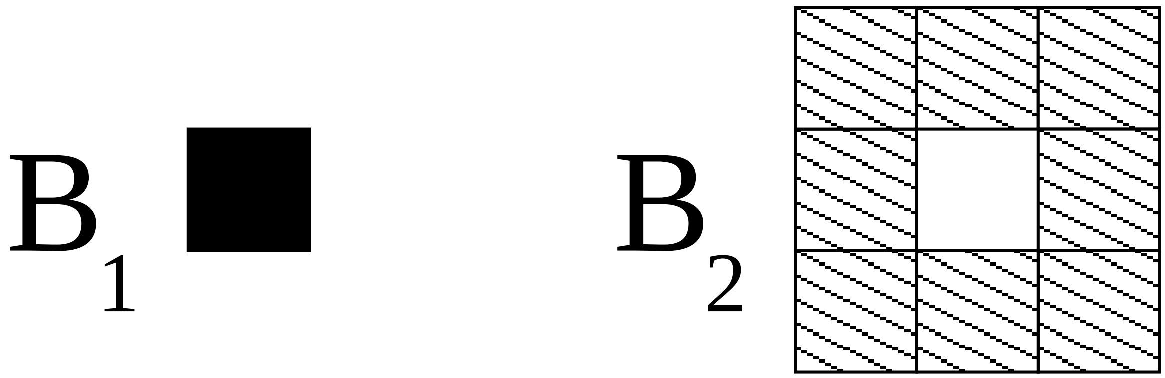
Rq : Par amincissement successifs on peut obtenir l'axe médian des objets (**squelette**).

**Définition** : Le squelette d'un objet est l'ensemble des points de cet objet pour lesquels la distance minimale au bord de l'objet est atteinte au moins deux fois.



## Tout ou Rien : définition

**But :** extraire des configurations particulières
**Exemple :** extraire les pixels isolés

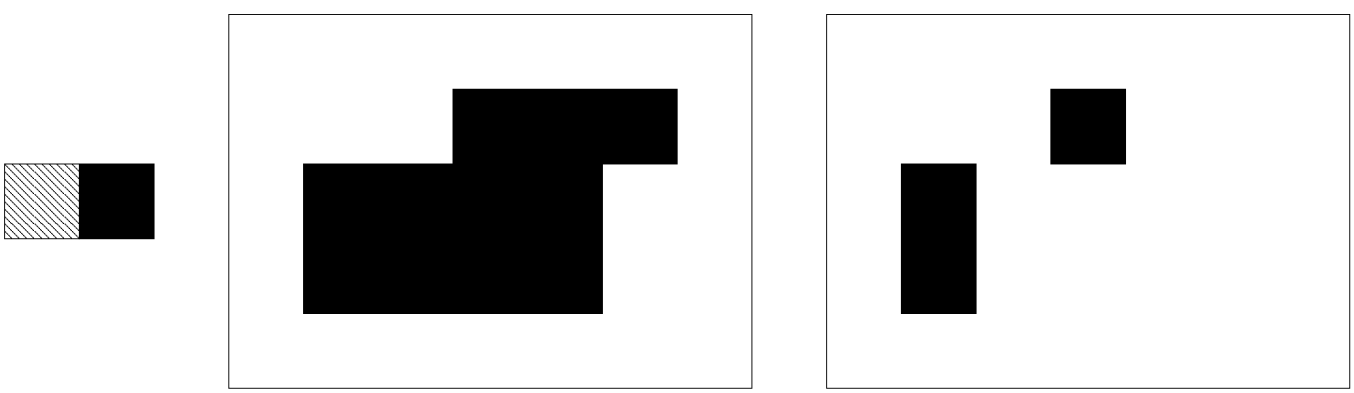



**Algorithme :** On balaie l'image et on se pose la question
Est-ce que la première composante ($B_1$) est incluse dans un objet alors que la seconde composante ($B_2$) est disjointe avec l'ensemble des objets ?

$$HMT_B(X) = \{x \mid (B_1)_x \subseteq X \ , \ (B_2)_x \subseteq X^c\}$$

**Notation :** $X \otimes B$

**Rq :** $B_1$ et $B_2$ doivent avoir la même origine
**Rq :** $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
**Exemple :**



## Tout ou Rien : propriétés

$$X \otimes B = E(X\ ,\ B_1) \cap E(X^c\ ,\ B_2)$$

Transformée non croissante :

$\rightarrow$ pas de définition en niveaux de gris

**Rq :** On peut la définir à partir de la formule avec les érosions, mais il faut alors définir l'ensemble complémentaire.

# Tout ou Rien : ouverture

**But :** conserver tous les pixels de la configuration incluse dans l'objet et non uniquement le centre.

**Définition :**

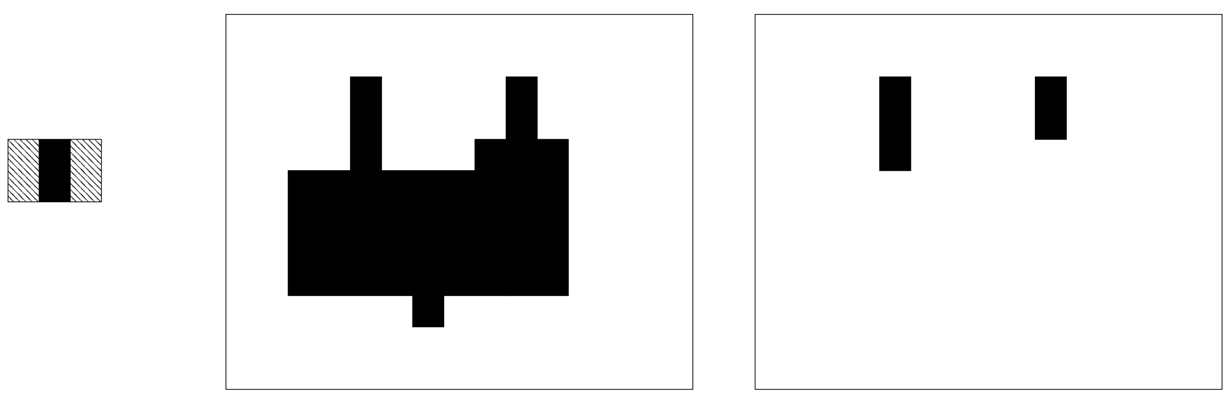
L'ouverture associée à la transformée du "tout ou rien" est définie par la dilatation de la transformée du "tout ou rien" par le transposé de $B_1$ :

$$\tilde{O}_B(X) = D\left(E(X\ ,\ B_1) \cap E(X^c\ ,\ B_2)\ ,\ \check{B}_1\right)$$

**Propriétés :**

→ transformation anti-extensive
→ transformation idempotente
→ transformation non croissante ($\neq$ ouverture)
→ $\tilde{O}_B(X) \subseteq O_{B1}(X)$

**Exemple :**



## Complémentation

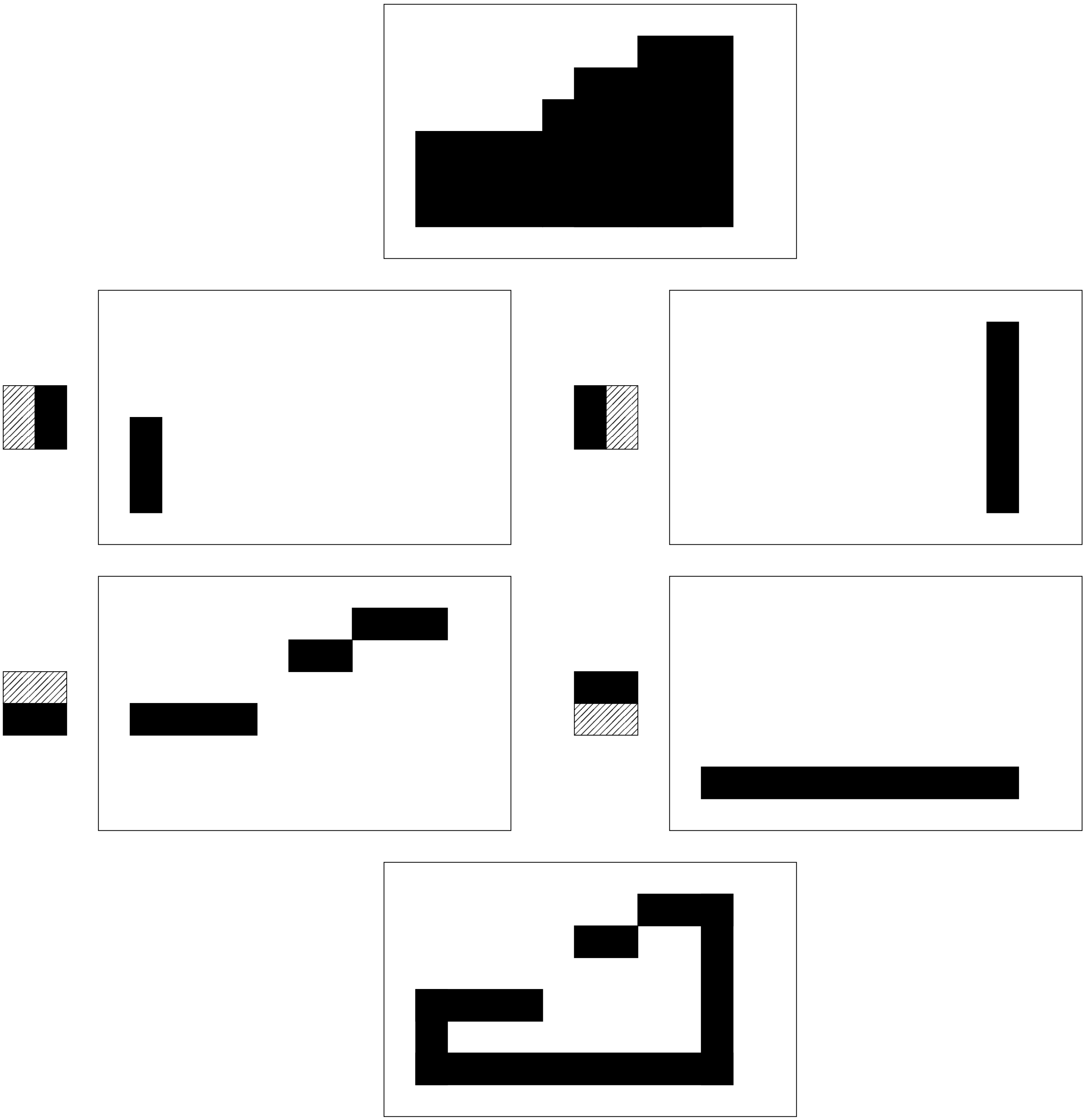
On peut définir l'ouverture du fond associée à la transformée du "tout ou rien" :

$$\tilde{O}_{B^c}(X^c) = D\left(E(X\ ,\ B_1) \cap E(X^c\ ,\ B_2)\ ,\ \check{B}_2\right)$$

on note : $B^c = (B_2\ ,\ B_1)$ si $B = (B_1\ ,\ B_2)$

Par dualité (par complémentation des ensembles) on obtient des fermetures

## Applications : détection de contours



# Amincissement

**But :** Supprimer les pixels de l'objet ayant une configuration donnée
**"Thin fit" :** supprimer un ensemble d'objets
**Rq :** Ici, on peut définir l'opérateur équivalent en niveaux de gris
**Définition :**
L'amincissement de $X$ par $B = (B_1\ ,\ B_2)$ est donné par :

$$X \circ B = X / X \otimes B$$

**Rq :** l'origine doit appartenir à $B_1$, sinon on obtient l'identité.
**Propriétés :**

→ opérateur anti-extensif
→ opérateur non-croissant

**Définition du "thin fit" :**

$$X \tilde{\circ} B = X / \tilde{0}_B(X)$$

La non-croissance implique l'absence de généralisation aux niveaux de gris par le principe de décomposition par seuils.
**Mais :**

$$(f \circ B)(x) = \begin{cases} \mathrm{D(f\ ,\ B_2)}(x), \text{ si } D(f\ ,\ B_2)(x) < f(x) \text{ et } f(x) = E(f\ ,\ B_1)(x), \\ \mathrm{f(x)}, \text{ sinon.} \end{cases}$$

i.e. On donne à un pixel la plus grande valeur de ses pixels voisins (définis par $B_2$) si il est égal à la plus petite valeur des pixels voisins définis par $B1$

# Epaississement

**But :** Ajouter les pixels du fond ayant une configuration donnée
**"Thick miss" :** ajouter un ensemble d'objets
**Définition :**
L'épaississement de $X$ par $B = (B_1\ ,\ B_2)$ est donné par :

$$X \odot B = X \cup (X \otimes B)$$

Rq : l'origine doit appartenir à $B_2$
**Propriétés :**

→ opérateur extensif
→ opérateur non-croissant

**Formule de dualité :**

$$X \odot B = (X^c \circ B^c)^c\ ,\ \text{avec } B = (B_1, B_2) \text{ et } B^c = (B_1^c, B_2^c)$$

**Définition du "thick miss" :**

$$X \tilde{\odot} B = X \cup \tilde{0}_B^c(X^c)$$

**Propriétés :**

$$X \tilde{\circ} B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \odot B \subseteq X \tilde{\odot} B$$

**En niveaux de gris :**

$$(f \odot B)(x) = \begin{cases} \text{E(f , B}_2)(x), \text{ si } D(f\ ,\ B_1)(x) = f(x) \text{ et } f(x) < E(f\ ,\ B_2)(x), \\ \text{f(x), sinon.} \end{cases}$$

**Squelette**

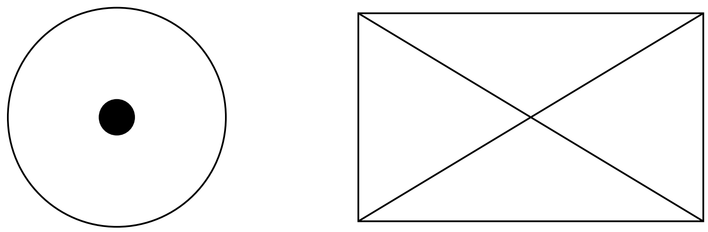
Plusieurs définitions :

En continu, $\sim$ équivalentes, propriétés identiques

En discret, propriétés différentes

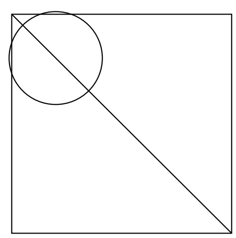
**Définitions :**

1) Lignes de propagation du feu :

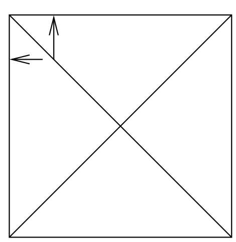


2) Lignes de crête de la fonction distance

3) Centre des disques maximaux contenus dans $X$ :



4) Ensemble des points contenus dans aucun chemin minimal



5) Ouvertures par un disque $B$ :

formule de Lantuéjoul :

$$SK(X) = \cup_{\lambda \geq 0} \cap_{\mu > 0} \{E(x\ ,\ \lambda B)/O(E(X\ ,\ \lambda B)\ ,\ \mu B)\}$$

$=$ centres des disques maximaux.

## Propriétés du squelette (en continu)

Préserve l'homotopie de l'ensemble original si celui-ci est ouvert.

Sensible à de faibles variations des contours ($\rightarrow$ filtrage.)

Le squelette d'un polygone à n cotés contient n branches. Dès lors :

$$(X \rightarrow Y) \not\Rightarrow (SK(X) \rightarrow SK(Y))$$

Opérateur anti-extensif

Opérateur idempotent

Opérateur non croissant

# Squelettes en discret

## Problèmes rencontrés :

Propagation d'une onde ?

Disques ?

Squelette d'un baton d'épaisseur 2 ?

Choix de la connexité ?

## Squelette par ouvertures :

$B$ : carré $3 \times 3$

$\lambda B$ : carré $2\lambda + 1 \times 2\lambda + 1$

$$SK(X) = \cup_{\lambda \geq 0} \{E(X\ ,\ \lambda B)/O(E(X\ ,\ \lambda B)\ ,\ B)\}$$

$\rightarrow$ Squelette non connecté

$\rightarrow$ Epaisseur 1 ou 2

**Squelette par amincissements homotopiques :**

**But :** conserver l'homotopie

**Elément structurant homotopique :** élément structurant qui conserve l'homotopie par amincissement.

**Squelette :** amincissements successifs par un élément structurant homotopique (ainsi que par ses rotations) jusqu'à stabilité.
$\rightarrow$ amincissement séquentiel ($\underline{\circ}$)
Soient $B,\ \theta_1 B,\ ...,\ \theta_n B$ un élément structurant homotopique et ses rotations.

$$X \underline{\circ} B = (...\,((X \circ \theta_1 B) \circ \theta_2 B) \circ ...) \circ \theta_n B$$

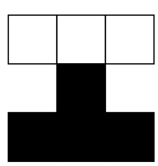
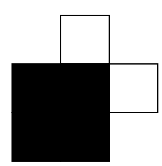
On répète l'amincissement séquentiel jusqu'à convergence.

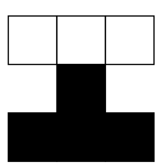
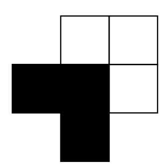
**Problème :**

le squelette dépend de l'élément structurant choisi.

le squelette dépend de l'ordre des rotations dans l'amincissement séquentiel.

**Exemple :**

squelette 4-connexe :  et  + rotations

squelette 8-connexe :  et  + rotations

**Propriété :**
Adapté pour les squelettes en niveaux de gris.

**Squelette par fonction distance :**

1) Calcul de la fonction distance.

2) recherche des lignes de crête.

**Rq. :** squelette par disques maximaux = ens. des maxima locaux de la fonction distance.

$$SK(X) = \{x \in X | \forall x' \in N_B(X), D(X\ ,\ B)(x') \leq D(X\ ,\ B)(x)\}$$

**Propriété :** squelette non connecté.

**Rq. :** si la fonction distance est 8-connexe, on obtient le même squelette que par ouvertures avec des carrés.

**Rq. :** on peut connecter le squelette par suivi des lignes de crête.

**Elagage du squelette :**

**But :** retirer les points terminaux jusqu'à stabilité.

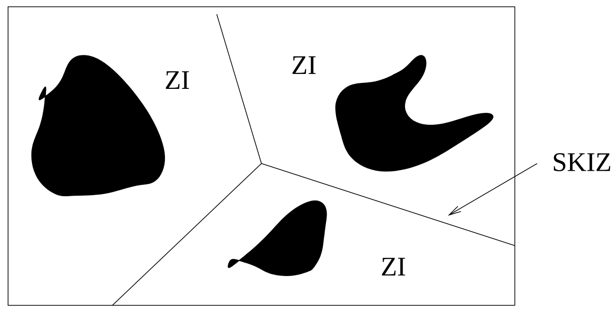
Utilisé principalement pour "nettoyer" un squelette.

$$ELAG(X) = (X \underline{\circ} E)^{(\infty)}$$

Elagage de taille $n$ :

$$ELAG^{(n)}(X) = (X \underline{\circ} E)^{(n)}$$

**Squelette par zones d'influence :**
en anglais : SKIZ
**Définition :**
Soit un ensemble constitué de plusieurs composantes connexes; la zone d'influence d'une composante connexe est l'ensemble des points plus proches de cette composante que des autres.



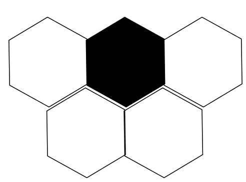

$$X = \cup_{i=1}^{n} K_i,\ i \neq j \Rightarrow K_i \neq K_j = \emptyset$$

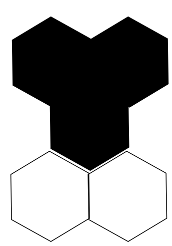
$$IZ(K_i) = \{x | \forall j \in \{1, ..., n\}, i \neq j \Rightarrow d(x\ ,\ K_i) < d(x\ ,\ K_j)\}$$

$$SKIZ = [\cup_i IZ(K_i)]^c$$

SKIZ = bords des zones d'influence.
Si les composantes connexes sont des points, le SKIZ est le diagramme de Voronoï associé.
**Rq. :** Le SKIZ peut être obtenu par épaississements successifs jusqu'à idempotence :

$$SKIZ(X) = \left\{ \left[ (X \underline{\circ} L^c)^{(\infty)} \underline{\circ} E^c \right]^{(\infty)} \right\}^{(\infty)}$$

E


L


## Squelette morphologique

Elément structurant : carré $3 \times 3$.

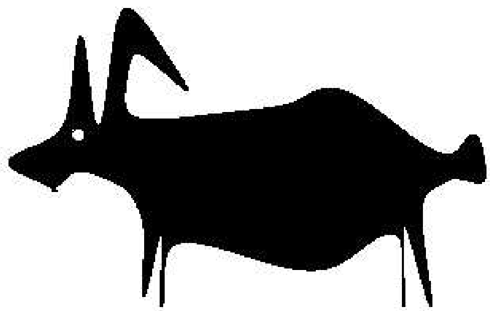
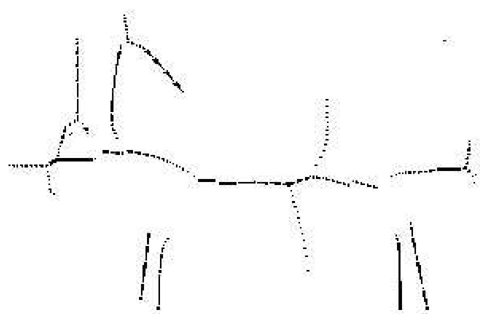


**Image initiale**



**Squelette**

## Etude d'un cas pratique : analyse intra-urbaine

But : classifier les différents tissus urbains suivant

- La densité des objets
- La forme des objets
- L'orientation des objets

Méthodologie : utilisation d'une granulométrie

- Analyse géométrique
- Analyse multi-échelle
- Répartition des tailles des objets