EDP en traitement d'image
Introduction

Laure Blanc-Féraud

DR CNRS
Laboratoire I3S
INRIA Sophia Antipolis

CONTENT

IMAGE RESTORATION – FILTERING –ENHANCING AND PDE' S.

- The heat equation
- The Malik and Perona nonlinear model

Notations, hypothèses

$\Omega \subset \mathrm{R}^2$ sous-ensemble ouvert borné

variables continues : $u(x, y)$

$$u : \quad \Omega \to \mathrm{R}$$

$$x \to u(x, y)$$ niveau de gris au point (x,y)

$\Omega \subset \mathrm{N}^2$ sous-ensemble borné de points discrets

variables discrètes : pixel i,j

$$\mathrm{u}_{i,j} = \mathrm{u}(i\Delta x, j\Delta y), i, j = 0 \ldots N$$

u : image originale, scène réelle.

u_0 : image observée, dégradée de u

On considère du bruit uniquement, perturbations aléatoires

Filtre moyenneur

- Filtrage moyenneur (linéaire)

  Si u_0 une image, quel est l'effet d'un filtre moyenneur?

$$u(i,j)=\frac{1}{5}\left(u_0(i-1,j)+u_0(i+1,j)+u_0(i,j-1)+u_0(i,j+1)+u_0(i,j)\right)$$

Coefficients du filtre 1/5

Lisser l'image ! -> Filtre PASSE-BAS

Filtre moyenneur

- Filtrage linéaire

  Si u_0 une image est corrompue par du bruit, un moyen simple pour la lisser est de faire des moyennes :

$$u(i,j)=\frac{1}{5}\left(u_0(i-1,j)+u_0(i+1,j)+u_0(i,j-1)+u_0(i,j+1)+u_0(i,j)\right)$$

  ou plus généralement de faire une convolution discrète :

$$u(i,j)=\sum_{k,l} h(k,l)u_0(i-k,j-l)$$

Introduction des EDP

Conditions aux bords du filtrage ou de la convolution

$$u(i,j) = \sum_{k,l} h(k,l)\, u_0(i-k, j-l)$$

Il faut préalablement étendre l'image initiale sur ces bords :

- Par des zéros
- Par périodicité
- Par symétrie

Introduction des EDP

Et dans la formulation continue

$$u(x,y) = \int_{\mathrm{R}^2} h(x',y')\,u_0(x-x',y-y')\,dx'dy'$$

Convolution par h = filtrage par g après retournement du filtre

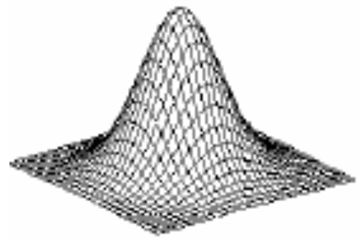
g(s,t) = h(-s,-t)

Noyau Gaussien

Exemple de noyau h : le noyau gaussien

$$u(x,y) = \int_{\mathrm{R}^2} G_t(x',y')\, u_0(x-x', y-y')\, dx'dy'$$

Où
$$G_t(x',y') = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\left(x'^2+y'^2\right)}{4t}}$$



t = taille du filtre = paramètre d' échelle

Introduction des EDP

Une remarque fondamentale (due à Konderink) :

si $$u(x,y,t)=\int_{\mathbb{R}^2} G_t(x',y')u_0(x-x',y-y')dx'dy'$$

calculons au point (x,y,t) $$\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Alors on trouve que ces dérivées vérifient l'EDP

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t)\\ u(x,y,t=0)=u_0(x,y)\end{cases}$$

Introduction des EDP

C' est-à-dire l' équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \end{cases}$$

Δ est le Laplacien

$$\text{soit } f(x,y) \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Et donc filtrer une image par convolution avec une gaussienne est équivalent à résoudre l'équation de la chaleur. Cette remarque a été le point de départ de l' introduction des EDP en traitement d'images.

Introduction des EDP

Si u_0 est bornée i.e.

$$\exists m, M < +\infty, \quad \text{tels que} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad m \leq u_0(x,y) \leq M$$

alors

$$\forall t > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \inf_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} u_0(x,y) \leq u(x,y) \leq \sup_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} u_0(x,y)$$

$$u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2 \times [0,T]\right) \quad \forall T > 0$$

Mais l'équation de la chaleur est-elle une "bonne" EDP pour le traitement d'images ?

Propriétés de l'équation de la chaleur

- Si u_0 est bornée alors il y a existence et unicité d'une solution vérifiant

$$\inf_{\mathrm{R}^2} u_0(x,y) \leq u(x,y,t) \leq \sup_{\mathrm{R}^2} u_0(x,y)$$

- Si on note T_t l'opérateur $u_0 \longrightarrow u = T_t u_0$ alors :

$$(\mathrm{I}1) : T_t(0) = 0 \quad \text{et} \quad T_t(u_0 + c) = T_t(u_0) + c$$

$$(\mathrm{I}2) : T_t(\tau_h u_0) = \tau_h(T_t(u_0))$$

où $\tau_h(f)(x,y) = f(x+h_1, y+h_2), \quad h = (h_1, h_2)$

$$(\mathrm{I}3) : T_t(R u_0) = R(T_t(u_0))$$

où $(Rf)(x,y) = f(R(x,y)), \quad \forall R$ une transformation orthogonale

Propriétés de l'équation de la chaleur

$$(I4) : T_{t+s}(u_0) = T_t(T_s(u_0))$$

$$(I5) : u_0 \leq v_0 \text{ alors } T_t(u_0) \leq T_t(v_0)$$

MAIS

- $u \in C^{\infty}(\mathrm{R}^2 \times (0,T)),\ \forall T > 0$

$\Rightarrow$ lissage instantanné

$\Rightarrow$ perte des contours

- Si u est une solution, alors $g(u)$ avec g strictement croissante, n'est pas une solution.

$\Rightarrow$ pas d'invariance morphologique

Exemple avec l'équation de la chaleur

$\sigma = 0$ $\sigma = 5$ $\sigma = 11$ $\sigma = 17$

Introduction de l'effet de flou dans le processus

$\Rightarrow$ vers un modèle non linéaire.

Filtrage non linéaire : le modèle de Malik et Perona

- Quelques notations

$$u : X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \mathrm{R}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}(X), \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}(X), \quad u_{xx} = \ldots$$

$$\nabla u(X) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$ vecteur gradient

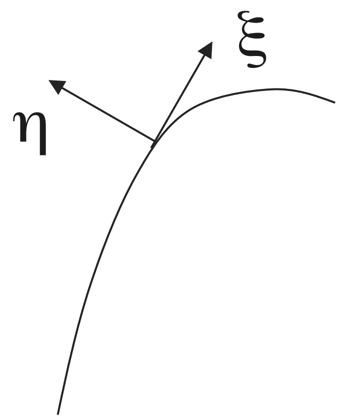
$$\nabla^2 u(X) = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}$$ vecteur gradient

Notations (suite)

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \ ; u(x,y) = c \right\}$$ courbe de niveau de u

$$\xi = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$: vecteur tangent unitaire à C

$$\eta = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$: vecteur normal unitaire à C



$$\xi \perp \eta$$

Notations (suite)

$$\begin{cases} u_{\eta\eta} = \eta^t \ \nabla^2 u \ \eta \ = \ \dfrac{1}{|\nabla u|^2}\left(u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + 2u_x u_y u_{xy}\right) \\ u_{\xi\xi} = \xi^t \ \nabla^2 u \ \xi \ = \ \dfrac{1}{|\nabla u|^2}\left(u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy}\right) \end{cases}$$

Dérivée seconde dans la direction orthogonale η et tangentielle ξ.

<u>Remarque</u> : $u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = \Delta u$

En fait on a pour toutes directions V et W orthogonales et unitaires

$$u_{VV} + u_{WW} = \Delta u$$

Conséquences

L'équation de la chaleur est isotrope : aucune direction n'est privilégiée

$\Rightarrow$ Vers un modèle anisotrope

On a : $$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = div(\nabla u)$$

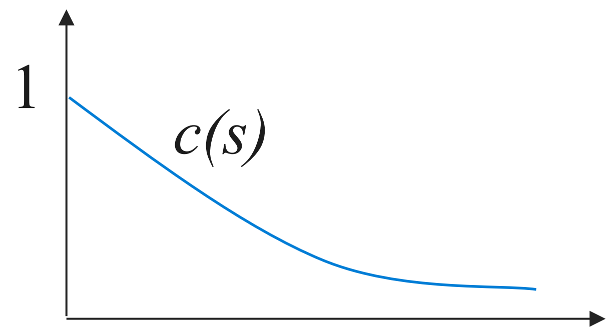
Un modèle plus général : on introduit un coefficient de diffusion $c(s)$

Diffusion non linéaire :
le modèle de Malik et Perona

$$(\mathrm{PM}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div\left(c\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right) \\ u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

où $c(s)$ vérifie les hypothèses :

$$c(0) = 1, \quad c(+\infty) = 0, \quad c(s) > 0, \quad c(s) \text{ décroissante}$$



Propriétés formelles de (PM)

- Si $\left|\nabla u(x,y)\right| \cong 0$, i.e. à l'intérieur de zones homogènes :

$$c\left(\left|\nabla u(x,y)\right|^2\right) \cong 1, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

$\Rightarrow$ lissage isotrope

- Si $\left|\nabla u(x,y)\right| \cong \infty$, i.e. au voisinage des contours :

$$c\left(\left|\nabla u(x,y)\right|^2\right) \cong 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow$ on ne fait rien : les contours sont préservés

Quel est le « meilleur » choix pour $c(s)$

- D'un point de vue analyse d'images : un développement formel

$$div\left(c\,(|\nabla u|^2)\,\nabla u\right) = c\,(|\nabla u|^2)\,u_{\xi\xi} + \left(c\,(|\nabla u|^2) + 2|\nabla u|^2 c'(|\nabla u|^2)\right)u_{\eta\eta}$$

donc le modèle correspond à un lissage dans la direction ξ plus un lissage dans la direction η. Un bon choix serait :

- $c(0) = 1$ correspond à un lissage isotrope dans les zones homogènes
- Aucune diffusion dans la direction normale η :

$$c\,(s^2) + 2s^2 c'(s^2) \cong 0 \text{ lorsque } s \longrightarrow +\infty$$

Choix de $c(s)$

C'est-à-dire $\quad c(s) \approx \dfrac{a}{\sqrt{s}} \quad (s \to +\infty)$

et dans ce cas

$$\text{(PM)} \approx \frac{\partial u}{\partial t} = div\left(a \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = a\, div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = a\kappa(x, y)$$

où $\quad \kappa(x, y) = div\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$

est la courbure de la ligne de niveau de u passant par (x,y).

rappel

<u>Courbure :</u>

- Inverse du rayon du cercle oscultateur (cercle approchant le mieux localement la courbe)
- courbe C(t) paramétrée par abscisse curvligne s(t), soit

$$s(t) = \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \left\| \dot{C}(\tau) \right\| d\tau$$

la courbure est la norme du vecteur acceleration

$$\frac{\partial C^2}{\partial s^2}$$

Choix de *c(s)* (résumé)

- Du point de vue de l'analyse d'image, il serait souhaitable que

$c(s) > 0, \quad c(0) = 1, \quad c(s) \approx \dfrac{1}{\sqrt{s}} \quad (s \to +\infty), \quad c$ décroissante

- Et d'un point de vue mathématique ? Le problème principal concerne l'existence et l'unicité d'une solution.

L'équation de (PM) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_{11}(|\nabla u|^2)u_{xx} + 2a_{12}(|\nabla u|^2)u_{xy} + a_{22}(|\nabla u|^2)u_{yy}$$

Choix de *c(s)* (point de vue mathématique)

avec
$$a_{11}(|\nabla u|^2) = 2u_x^2 c'(|\nabla u|^2) + c(|\nabla u|^2)$$
$$a_{12}(|\nabla u|^2) = 2u_x u_y c'(|\nabla u|^2)$$
$$a_{22}(|\nabla u|^2) = 2u_y^2 c'(|\nabla u|^2) + c(|\nabla u|^2)$$

- Une bonne théorie pour aborder ce type d'équation est celle des EDP paraboliques, c'est-à-dire que les coefficients $a_{ij}(s)$ vérifient l'égalité

$$\sum_{i,j=1,2} a_{ij}(s)\nu_i\nu_j \geq 0, \quad \forall \nu \in \mathrm{R}^2, \quad \forall s > 0$$

Choix de *c(s)* (point de vue mathématique)

ce qui est équivalent à

$$b(s) = c(s) + 2c'(s) > 0, \quad \forall s > 0$$

- En résumé on veut : $\begin{cases} c : [0,+\infty[\to]0,+\infty[, \quad c \text{ décroissante} \\ c(0) = 1, \quad c(s) \approx \dfrac{1}{\sqrt{s}} \text{ quand } s \to +\infty \\ b(s) = c(s) + 2sc'(s) > 0 \end{cases}$

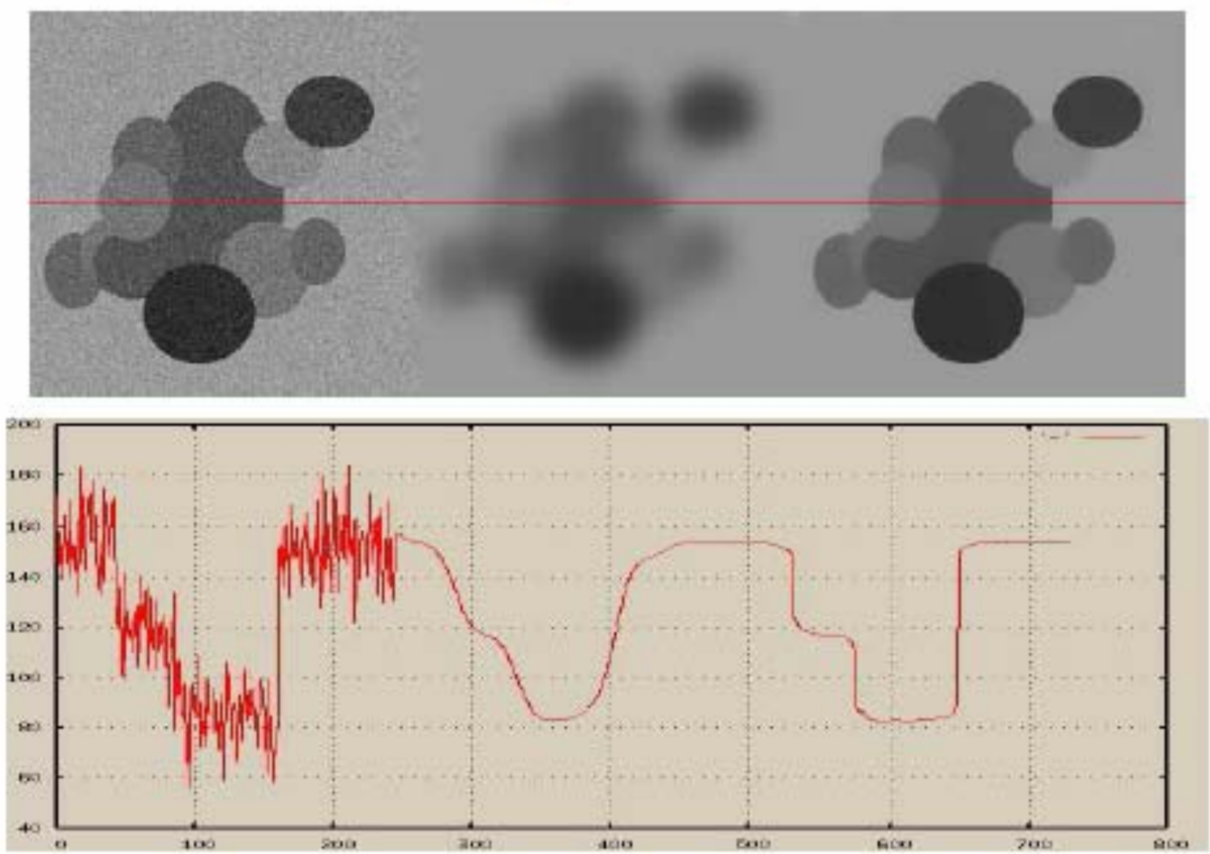
- Un choix qui convient est $c(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1+s}}$

Modèle de Perona Malik (fin)

- On peut montrer en utilisant la théorie des opérateurs monotones l'existence et l'unicité d'une solution

[H Brezis, "Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert" North-Holland Publishing Compagny, 1973]

Quelques résultats expérimentaux



Originale bruitée / chaleur / Perona-Malik

Résultats

Originale Chaleur Perona-Malik