Morphologie mathématique : une introduction

Théorie développée pour le traitement d'image au début des années 70.

Références :

G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*, John Wiley and Sons, New York, 1975.

J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, London, 1982.

J. Serra Editor. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2 : Theoretical Advances*, Academic Press, London, 1988.

M. Schmitt and J. Mattioli. *Morphologie Mathématique*, Masson, Paris, 1994.

O .E. Barndorff-Nielsen, W.S. Kendall and M.N.M. van Lieshout Editors. *Stochastic Geometry: Likelihood and Computation*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 1996.

P Soille. *Morphological Image Analysis*, Springer, 1999

Introduction

Principe de la morphologie mathématique :

Comparer une structure inconnue (l'**image**) à un ensemble des formes (appelés **éléments structurants**) dont on maitrise les caractéristiques.

Moyens de comparaisons :

Opérations **booléennes** (intersection, occlusion)

Problèmes traités :

Segmentation et **quantification** (taille, géométrie, luminance,...)

Méthodologie :

Emboiter (composer) des opérateurs de base simples.

Avantages :

Algorithmes **intuitifs** pour de **nombreuses applications** (détection de trous, de bosses, extraction de vallées, de lignes de crêtes, d'objets suivant la taille, la forme,...).

Images binaires: définition ensembliste des opérateurs de base

Image binaire : sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (borné dans notre cas).
Définition fonctionnelle : $f \ : \ \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\}$.

Dilatation :

Soit X une image binaire
Soit B un autre ensemble appelé **élément structurant**

$$D(X,B) = \{u, X \cap B_u \neq \emptyset\}$$

avec $B_u = \{u+b, b \in B\}$ translaté de B par u.

$$X \cap B_u \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in X, \exists b \in B : x = b + u$$
$$X \cap B_u \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in X, \exists b \in B : u = x - b$$

$$D(X,B) = \{x-b, x \in X, b \in B\}$$

Soit $\check{B}$ le symétrique de B ($\check{B} = \{-b, b \in B\}$)

$$\boxed{D(X,B) = X \oplus \check{B}}$$

La **dilatation** de X par B est égale
à l'**addition de Minkowski** de X et $\check{B}$.

Exemple de dilatation :

Elément structurant : disque de rayon 8 centré à l'origine:

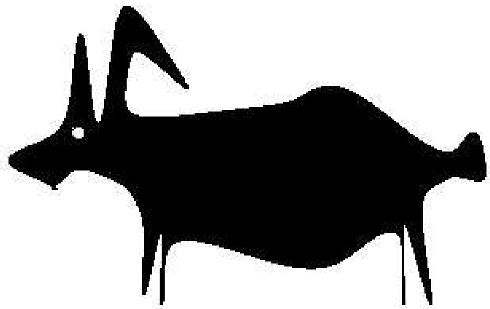
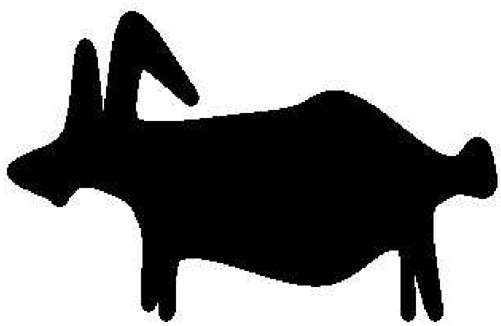
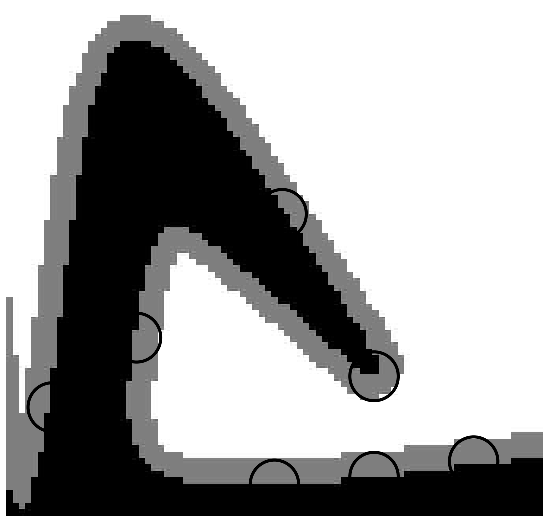


Image initiale



Dilatation



Principe de la dilatation
(élément structurant symétrique centré en 0)

Erosion : opérateur dual de la dilatation :

Soit X une image binaire
Soit B un autre ensemble appelé **élément structurant**

Soustraction de Minkowski : $X \ominus B = \{u, \forall b \in B, u - b \in X\}$

Erosion : $E(X, B) = X \ominus \check{B} = \{u, \forall b \in B, u + b \in X\}$

$E(X, B) = X \ominus \check{B} = \{u, \exists b \in B, u + b \in X^c\}^c$

$E(X, B) = X \ominus \check{B} = \{u, \exists b \in B, \exists x \in X^c, x = u + b\}^c$

$E(X, B) = \{u, X^c \cap B_u \neq \emptyset\}^c$

Formule de dualité:

$$\boxed{E(X, B) = D^c(X^c, B)}$$

Exemple d'érosion :

Elément structurant : disque de rayon 8 centré à l'origine:

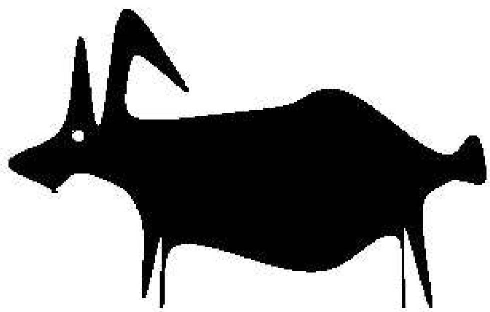
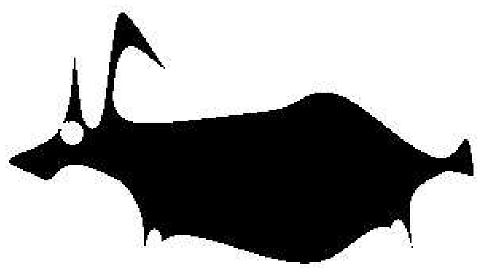
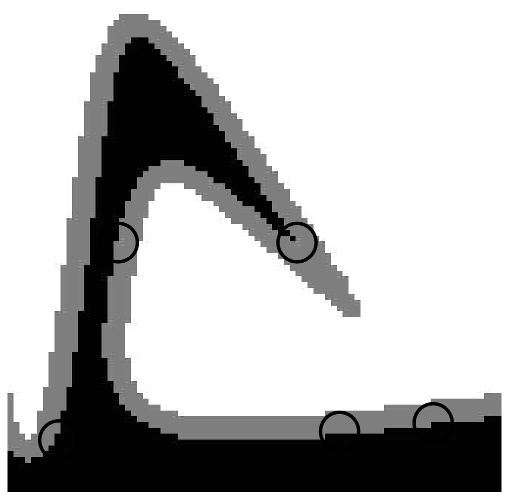


Image initiale



Erosion



Principe de l'érosion
(élément structurant symétrique centré en 0)

A titre d'exercice

Montrer que:

$$D(X, B) = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b$$

$$E(X, B) = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b$$

Propriétés de la dilatation et de l'érosion

La dilatation et l'érosion sont croissantes suivant X:

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow D(X_1, B) \subseteq D(X_2, B), E(X_1, B) \subseteq E(X_2, B)$$

La dilatation (resp. l'érosion) est croissante (resp. décroissante) suivant B:

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow D(X, B_1) \subseteq D(X, B_2), E(X, B_2) \subseteq E(X, B_1)$$

L'érosion et la dilatation sont des opérations duales:

$$D(X, B) = (E(X^c, B))^c, E(X, B) = (D(X^c, B))^c$$

Si l'élément structurant B contient le centre $\vec{o}$ alors la dilatation par B est extensive et l'érosion par B est anti-extensive:

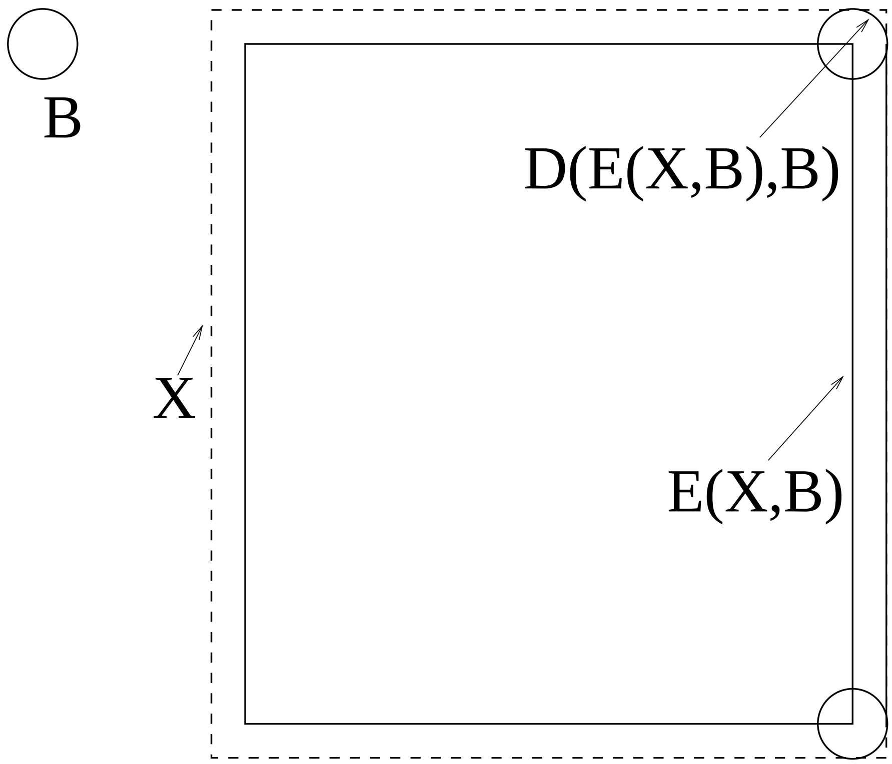
$$\vec{o} \in B \Rightarrow X \subseteq D(X, B), E(X, B) \subseteq X$$

Combinaisons d'éléments structurant:

$$D(X, B_1 \oplus B_2) = D(D(X, B_2), B_1) = D(D(X, B_1), B_2)$$
$$E(X, B_1 \oplus B_2) = E(E(X, B_2), B_1) = E(E(X, B_1), B_2)$$
$$D(X, B_1 \cup B_2) = D(X, B_1) \cup D(X, B_2)$$
$$E(X, B_1 \cup B_2) = E(X, B_1) \cap E(X, B_2)$$
$$D(X, B_1 \cap B_2) \subseteq D(X, B_1) \cap D(X, B_2)$$
$$E(X, B_1 \cap B_2) \supseteq E(X, B_1) \cup E(X, B_2)$$

Dualité

Le dual n'est pas l'inverse : Dilatation et Erosion ne sont pas inverses l'une de l'autre.



La composition de ces opérateurs va donc en fournir de nouveaux

Compositions simples des opérateurs de base

Ouverture de X par B:

$$O_B(X) = XoB = (X)_B = D(E(X,B),B) = (X \ominus \check{B}) \oplus \check{B}$$

Fermeture de X par B:

$$F_B(X) = X \odot B = (X)^B = E(D(X,B),B) = (X \oplus \check{B}) \ominus \check{B}$$

Exemple d'ouverture et de fermeture :
Elément structurant : disque de rayon 8 centré à l'origine:

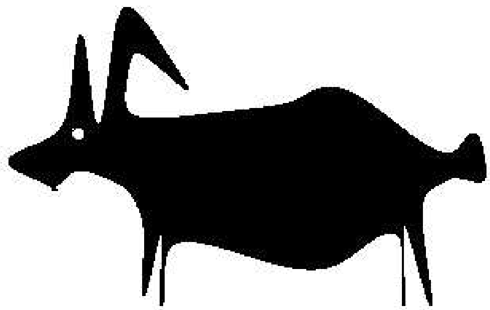
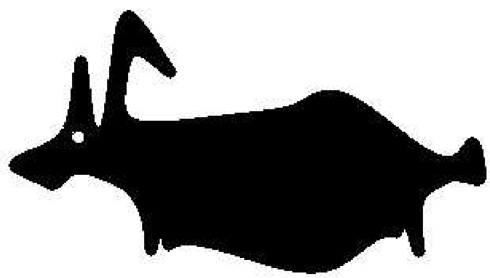
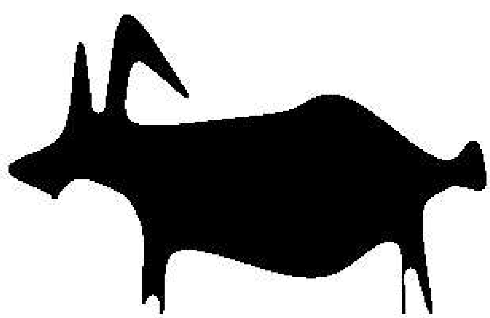


Image initiale



Ouverture



Fermeture

Propriétés de l'ouverture et de la fermeture

L'ouverture et la fermeture sont croissantes suivant X:

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow O_B(X_1) \subseteq O_B(X_2), F_B(X_1) \subseteq F_B(X_2)$$

L'ouverture est anti-extensive et la fermeture est extensive:

$$O_B(X) \subseteq X, X \subseteq F_B(X)$$

L'ouverture et la fermeture sont idempotentes:

$$O_B(O_B(X)) = O_B(X), F_B(F_B(X)) = F_B(X)$$

L'ouverture et la fermeture commutent avec les translations:

$$(O_B(X))_u = O_B(X_u), (F_B(X))_u = F_B(X_u)$$

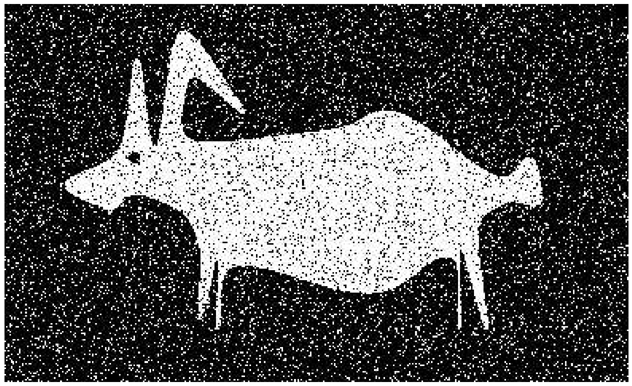
A titre d'exercice

Montrer que:

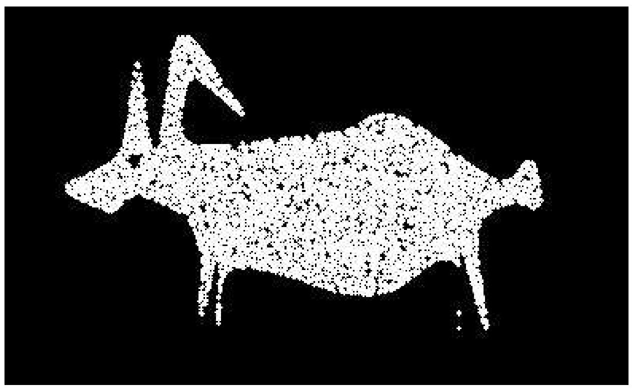
$$O_B(X) = \bigcup_{B_x \subseteq X} B_x$$

$$F_B(X) = \left(\bigcup_{B_x \cap X = \emptyset} B_x \right)^c$$

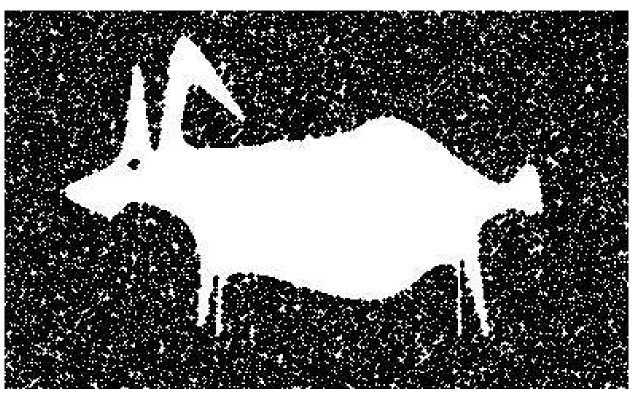
Exemple d'application : débruitage



Bruit de canal: 10 pourcent

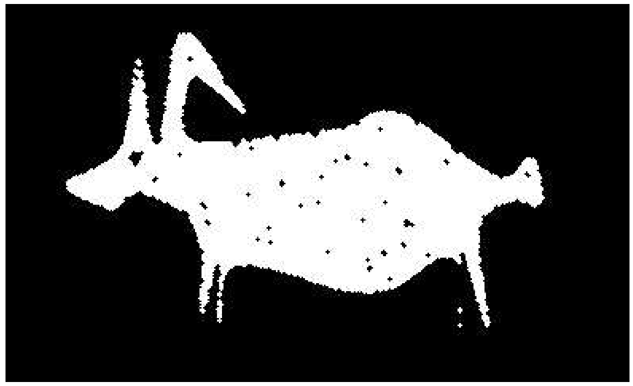


Ouverture par un disque de rayon 2

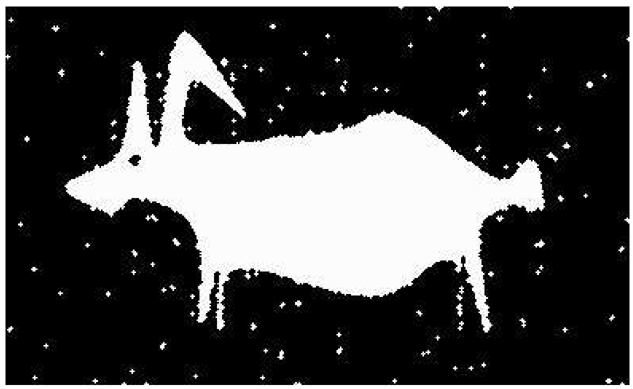


Fermeture par un disque de rayon 2

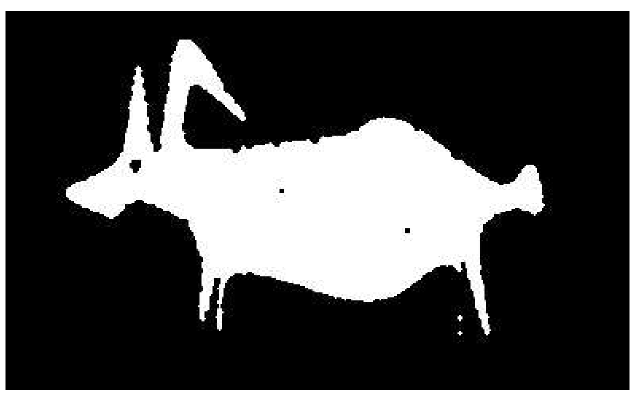
Exemple d'application : débruitage



Ouverture suivi d'une fermeture



Fermeture suivi d'une ouverture



Filtre Alterné Séquentiel

Passage aux niveaux de gris

Définition :

Sous-graphe d'une fonction f:

$$SG(f) = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, f(x) \geq z \geq 0\}$$

Propriété :

$$SG(\sup_y (f(y) + g(x-y))) = SG(f) \oplus SG(g)$$

Dilatation :

$$D(f,g) = f \oplus \check{g}(x) = \sup_y \{f(y) + g(y-x)\}$$

Cas des éléments structurant plans :

$$g_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \\ -\infty, & x \notin K \end{cases}$$

$$f \oplus \check{g}_K(x) = \sup_{y \in K_X} f(y)$$

$$(f \oplus \check{g}_K)_\lambda = f_\lambda \oplus \check{K}$$

avec : $f_\lambda = \{x, f(x) \geq \lambda\}$, **section supérieure** de f à l'altitude λ.

Dilatation: maxima sur une fenêtre glissante.

Erosion :

$$D(f,g) = f \ominus \check{g}(x) = \inf_{y} \{f(y) - g(y-x)\}$$

Cas des éléments structurant plans :

$$(f \ominus \check{g}_K)_\lambda = f_\lambda \ominus \check{K}$$

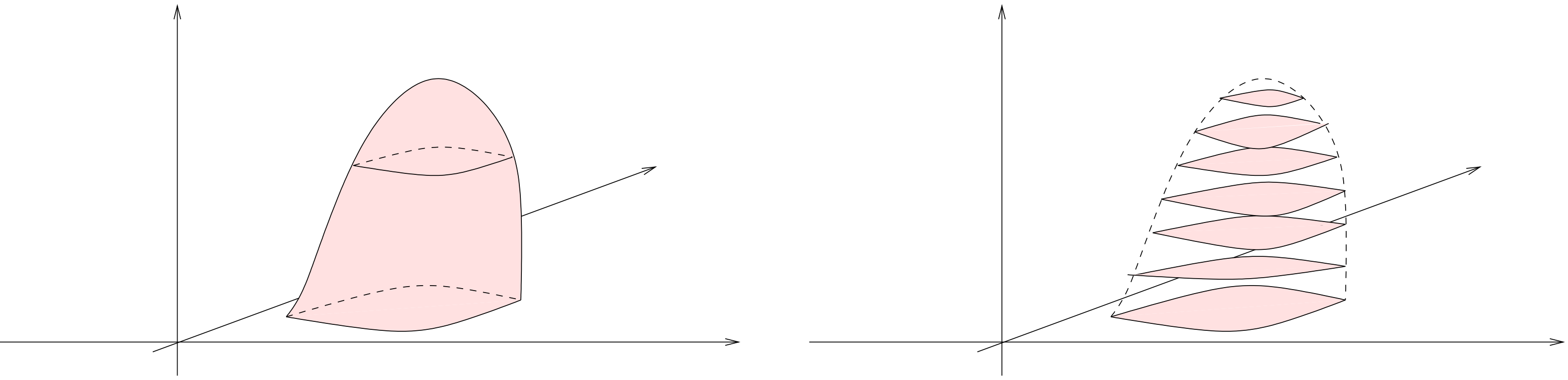
Ouverture :

$$f_g = (f \ominus \check{g}) \oplus g$$

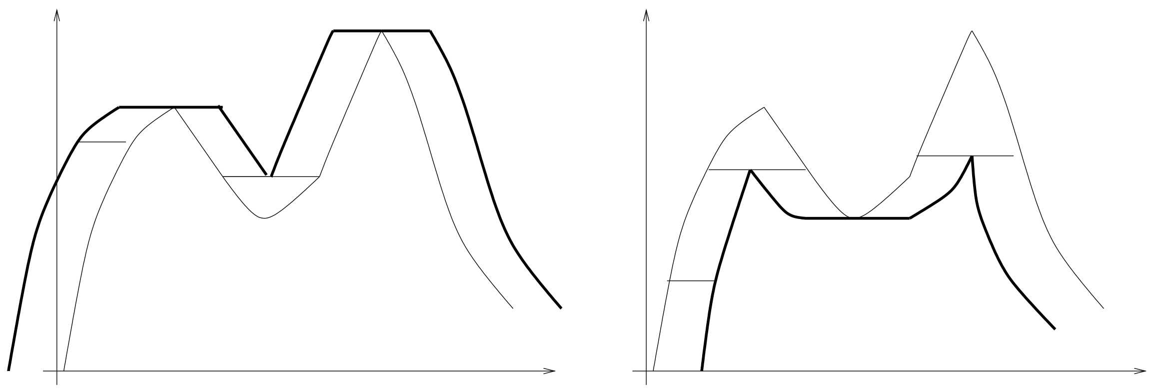
Fermeture :

$$f^g = (f \oplus \check{g}) \ominus g$$

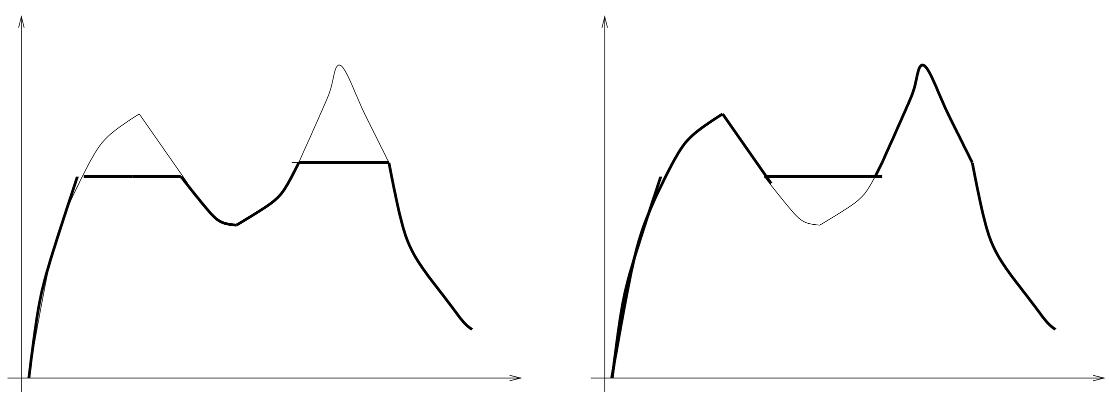
Opérateurs de base en niveau de gris



Représentations des images en niveaux de gris



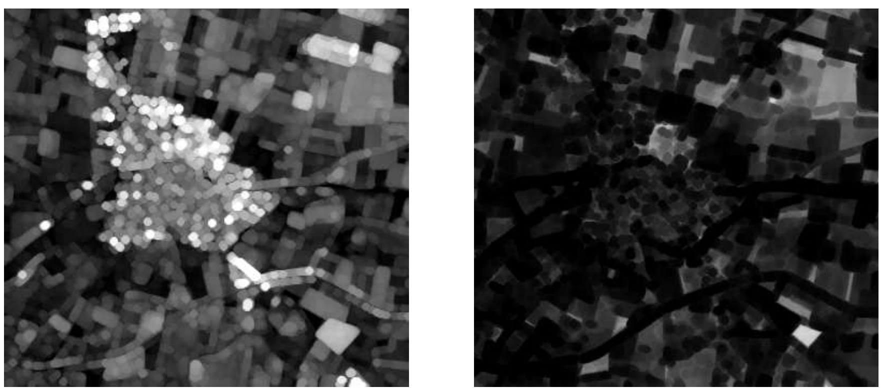
Dilatation et érosion



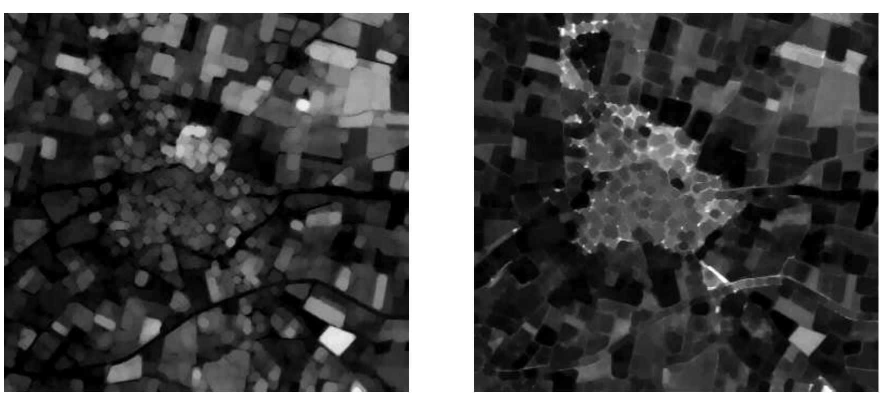
Ouverture et fermeture

Opérateurs de base en niveau de gris

Simulation SPOT : 5m



Dilatation et érosion



Ouverture et fermeture

Application : Opérateurs dérivatifs

Module du gradient :

$$\lim_{r \to 0} \frac{f \oplus B_r - f \ominus B_r}{2r}$$

Gradient discret :

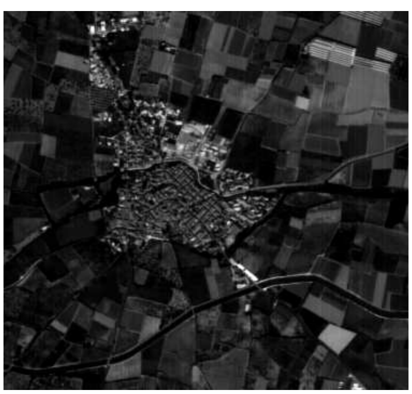
$$|f(x+r) - f(x-r)|$$

Gradient morphologique :

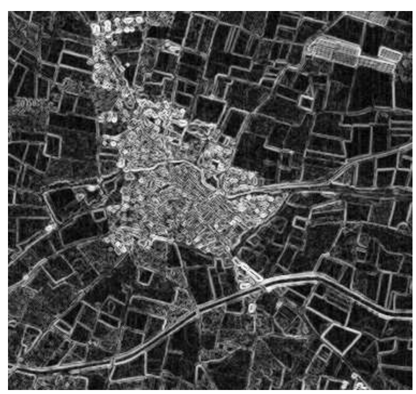
$$f \oplus B_r - f \ominus B_r$$

Laplacien morphologique :

$$f \oplus B_r - 2f + f \ominus B_r$$



Simulation SPOT : 5m



Gradient morphologique

Application : détection des structures linéïques

Chapeau haut-de-forme (Top hat) :

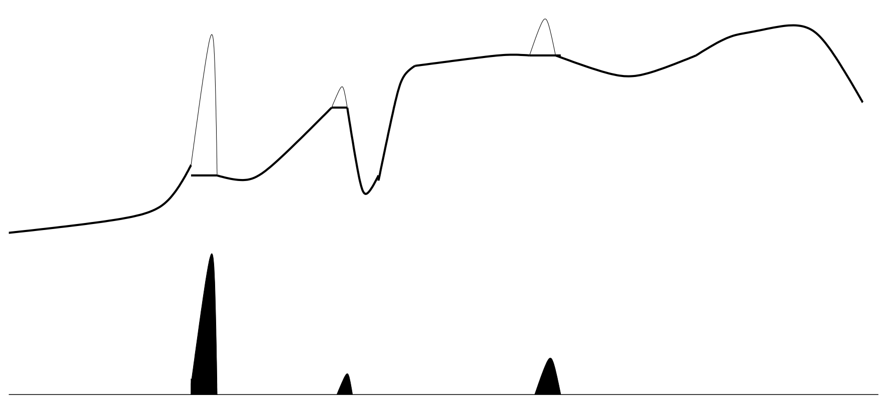
$$TH(f,g) = f - f_g$$

Opération duale :

$$TH^*(f,g) = f^g - f$$

Cas Particulier : Rolling-ball

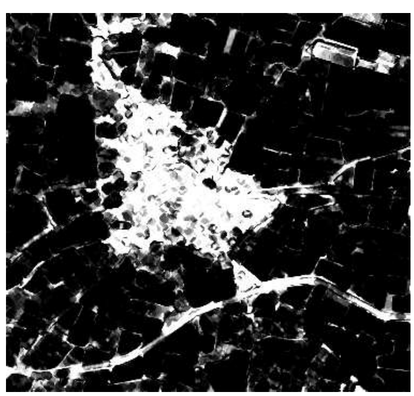
L'élément structurant est une sphère ($\neq$ élément structurant plan).



Premières applications

Simulation SPOT : 5m

Chapeau haut-de-forme et son dual



Ville et linéïque

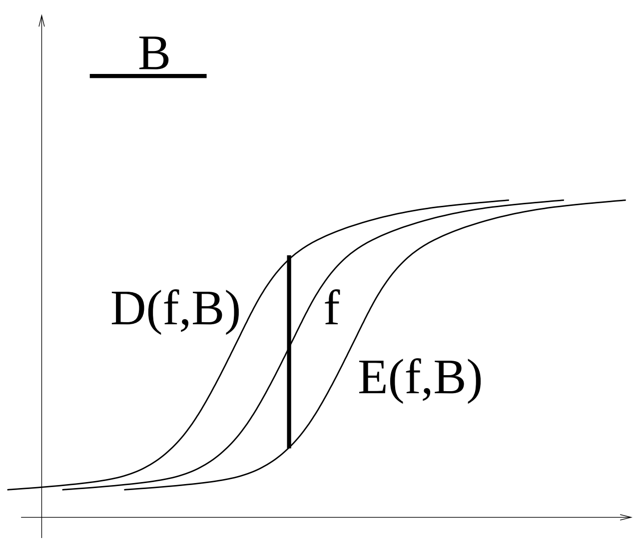
Filtre de contraste

Permet de créer des discontinuités

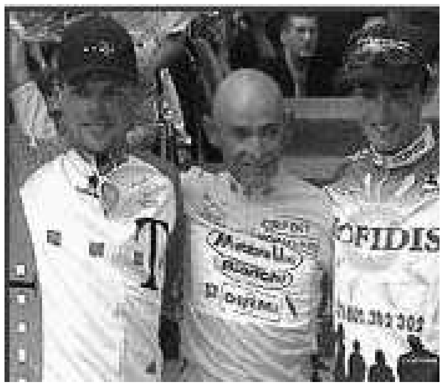
Pas de modèle de dégradation (convolution,...)

Mal adapté au bruit

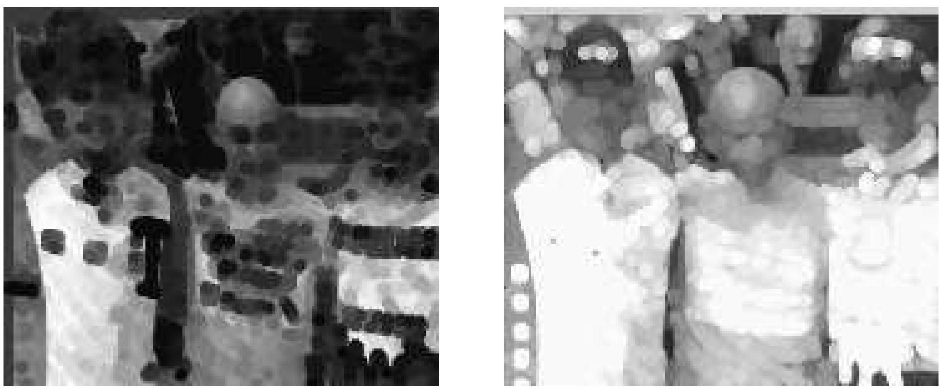
$$\begin{array}{ll} FC(f,B) = E(f,B) & \text{si} \;\; |f - E(f,B)| < |D(f,B) - f| \\ FC(f,B) = D(f,B) & \text{si} \;\; |f - E(f,B)| > |D(f,B) - f| \\ FC(f,B) = f & \text{si} \;\; |f - E(f,B)| = |D(f,B) - f| \end{array}$$



Filtre de contraste



Podium du tour 98



Erodé et dilaté

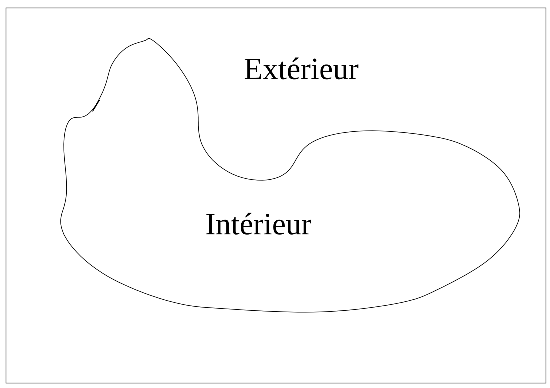
Réhaussement du contraste

Propriété de Jordan

Dans le plan continu, une courbe simple fermée sépare le plan en **deux** composantes connexes :

L'intérieur (composante connexe bornée)

L'extérieur (composante connexe non bornée)

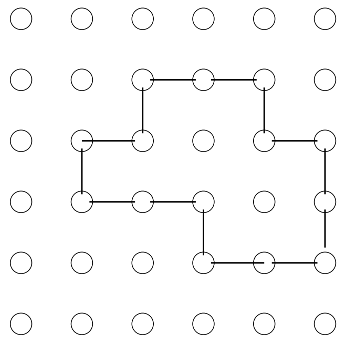


Cette propriété n'est pas forcément vraie en discret

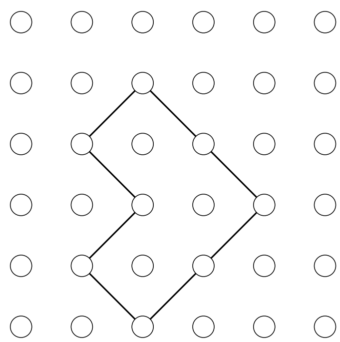
Vraie sur la trame hexagonale

Sur la trame carrée :

$\rightarrow$ dépend des connexités du fond et de la courbe.



Courbe 4 connexe et Fond 8 connexe



Courbe 8 connexe et Fond 4 connexe