

# Restauration d'images par méthodes d'optimisation

Laure Blanc-Féraud

DR CNRS  
Laboratoire I3S  
INRIA Sophia Antipolis

*Ariana*



# Construction d'une image

$$g = H(u) \odot n$$

- ◆  $g$  : une observation = des quantités physiques : optique, radar, laser, IR, champ magnétique, rayons X, ultrasons, émissions de photons...
- ◆  $H$  : opérateur qui relie l'observation à la quantité que l'on cherche à imager  $u$ , à travers l'appareil de mesure et éventuellement un processus de reconstruction.
- ◆  $u$  : image que l'on cherche à obtenir
- ◆  $n$  : partie aléatoire du processus de reconstruction (bruit)

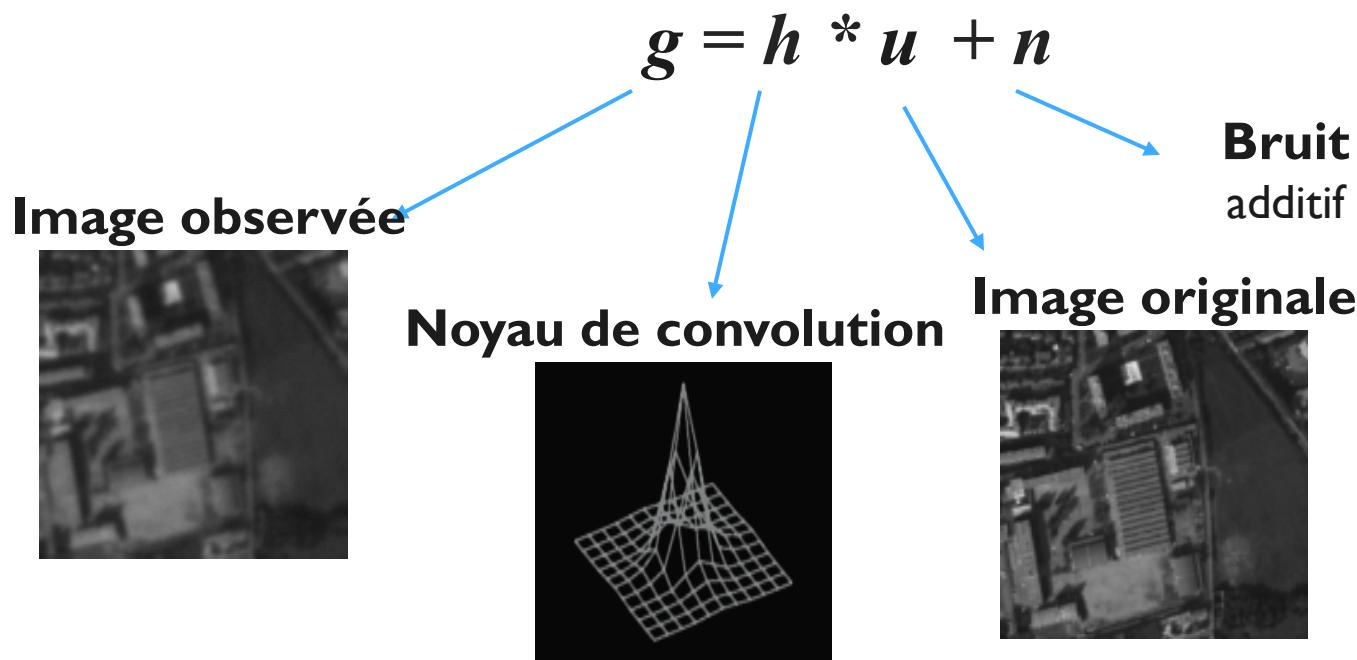
# Exemples

◆ Linéaire :  $H(u) = H.u$

■ Restauration d'une image optique :

$H$  est une convolution :  $H.u = h * u$

$H$  modélise les dégradations de l'appareil optique (diffraction, défocalisation, bougé, intégration sur les capteurs...)

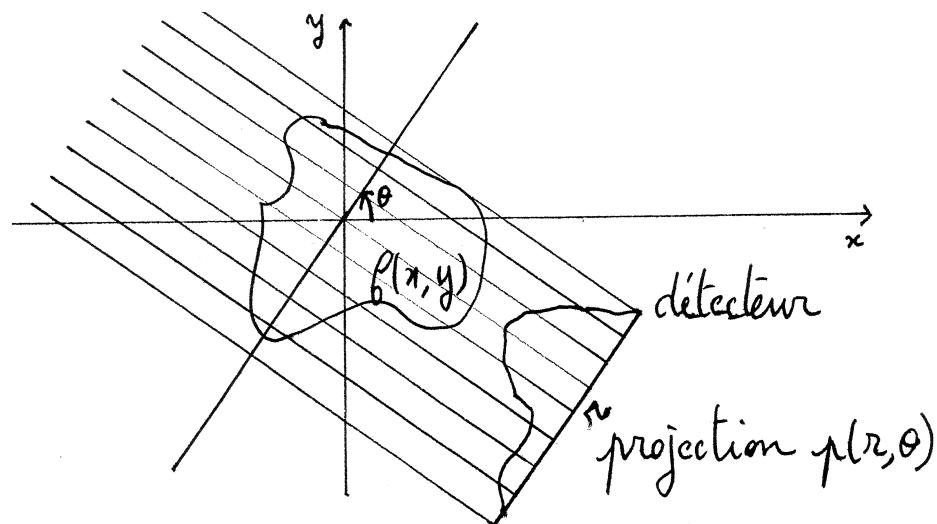


# Exemples

## ◆ Linéaires : $H(u) = H.u$

- **Reconstruction tomographique**, appliquée dans les domaines de la médecine, des géosciences, ...
- Reconstruire le volume d'un objet (le corps humain dans le cas de l'imagerie médicale), à partir d'une série de mesures effectuées à l'extérieur de l'objet.

Exemple de la tomographie à rayons X



$H$ = matrice de Radon = projection 1D selon l'angle  $\theta$

# Exemples

- ◆ Linéaires :  $H(u) = H.u$

- Super résolution, échantillonnage irrégulier

On observe une image  $g$  irrégulièrement échantillonnée.  $u$  est la même image sur une grille régulière.

$$g = \Delta_{\Lambda}(u) + n \quad \text{où} \quad \Delta_{\Lambda}(\cdot) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \delta(\cdot - \lambda_k)$$

$\lambda_k$  sont les positions des échantillons irrégulièrement répartis. Peut se modéliser par transformée de Fourier discrète

$$g = SFu + n$$

$F$  Transformée de Fourier directe régulière

$S$  Transformée de Fourier inverse irrégulière

$$S : \mathbf{C}^N \rightarrow \mathbf{R}^M$$

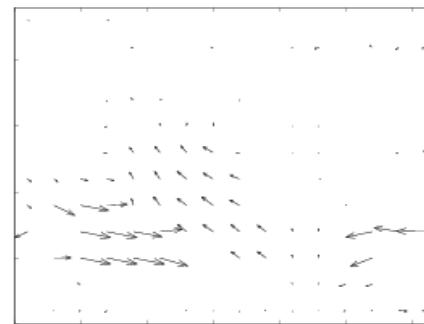
$$a \rightarrow g = (g_k)_{k=1,\dots,M}, \quad g_k = \sum_{l=1}^N a_l \exp\left[\frac{2i\pi}{N} \langle \lambda_k, l \rangle\right]$$

# Exemples

## ◆ Non Linéaires :

### ■ Flot optique

on observe  $u(x,t)$  et  $u(x,t+1)$  et on cherche le mouvement apparent  $v$  tel que  $u(x+v,t) = u(x,t+1)$ , soit  $u(x+v,t) - u(x,t+1) = 0$



Linéarisation par dérivation : équation du flot optique

$$\nabla u(x, t + 1) \cdot v(x, t) + I_t(x, t) = 0$$

### ■ Diffraction inverse microonde, contrôle non destructif : équations de Maxwell ...

- ◆ Problème direct  $g = H(u) \odot n$

C'est l'équation de construction de l'image, la modélisation mathématique des phénomènes physiques de l'acquisition.

Définit  $g$  à partir de  $H$ ,  $u$  et  $n$ .

- ◆ Problème inverse

A partir des données observées  $g$ , et de la modélisation du problème direct, trouver  $u$  en supposant  $H$  connu et les paramètres de loi de  $n$  connus.

→  $H$  n'est souvent que partiellement connu,

→ Il faut souvent estimer les paramètres du bruit au préalable ou en même temps.

# Restauration d'image : déconvolution, débruitage

- ◆ Modèle simple :
  - Convolution,
  - Mais difficile : problème mal posé.
- ◆ Deux exemples d'acquisition
  - Imagerie satellitaire
  - Imagerie biologique par microscopie confocale
- ◆ Et toujours présent : la diffraction

# Observation de la Terre

- ◆ Illustration sur un exemple en imagerie optique satellitaire  
De plus en plus de satellites civils ou militaires
- ◆ Optique ([visible](#) et IR), radar (RSO)
- ◆ [satellitaires](#) ou aériens



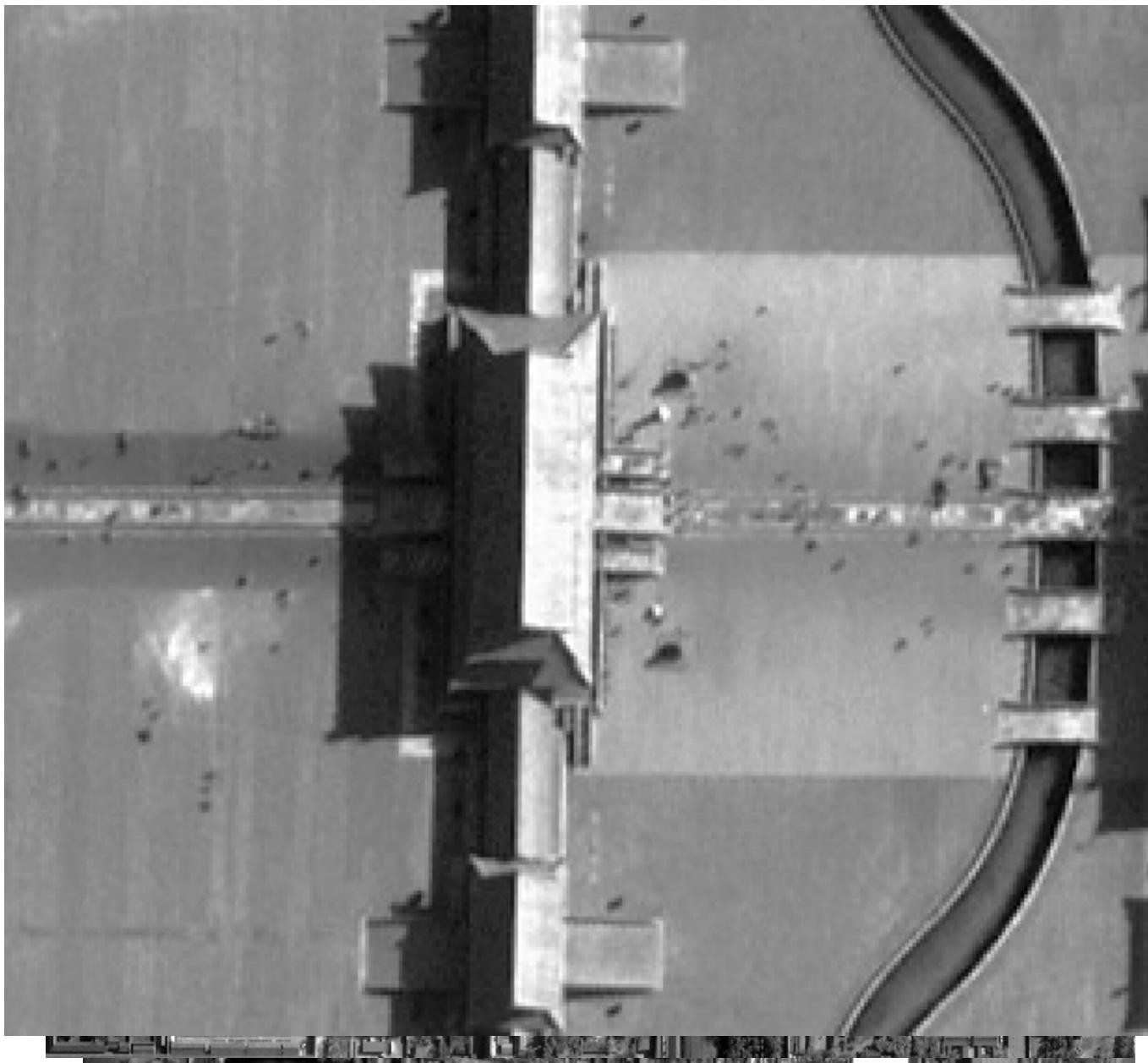
# SPOT5 (Stockholm) France+, 2,5m



# Ikonos (San Juan) USA, 1m



Quickbird(Beijing) USA, 61cm



# Image aérienne (Amiens)



# Observation



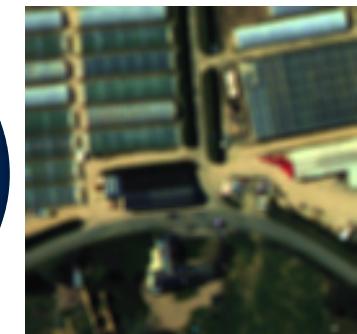
Modèle  
d'observation



scène  
paysage  
vérité terrain



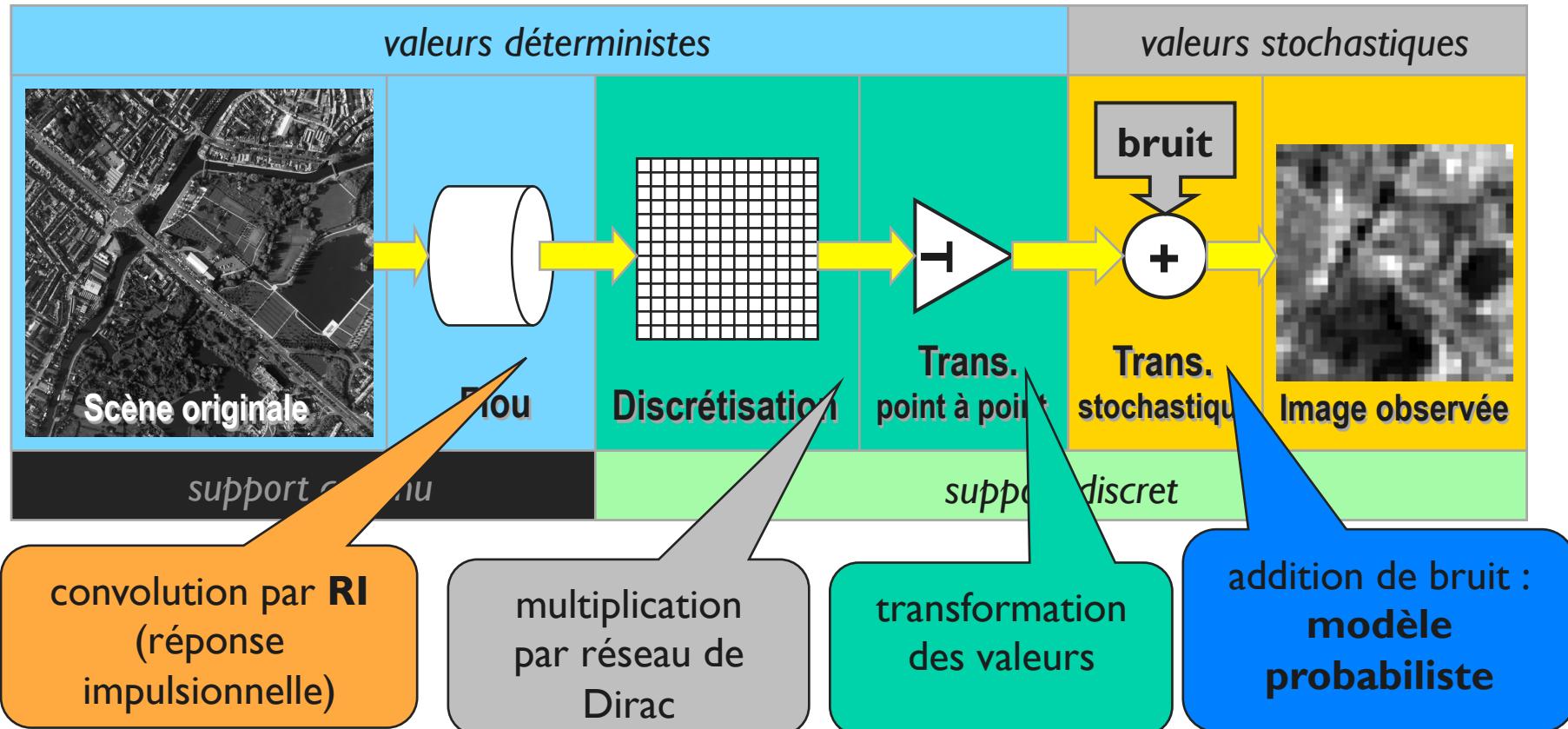
Modèle  
d'image  
observée



Luminance de la scène  
dans la bande spectrale  
considérée et sous l'angle  
d'observation choisi

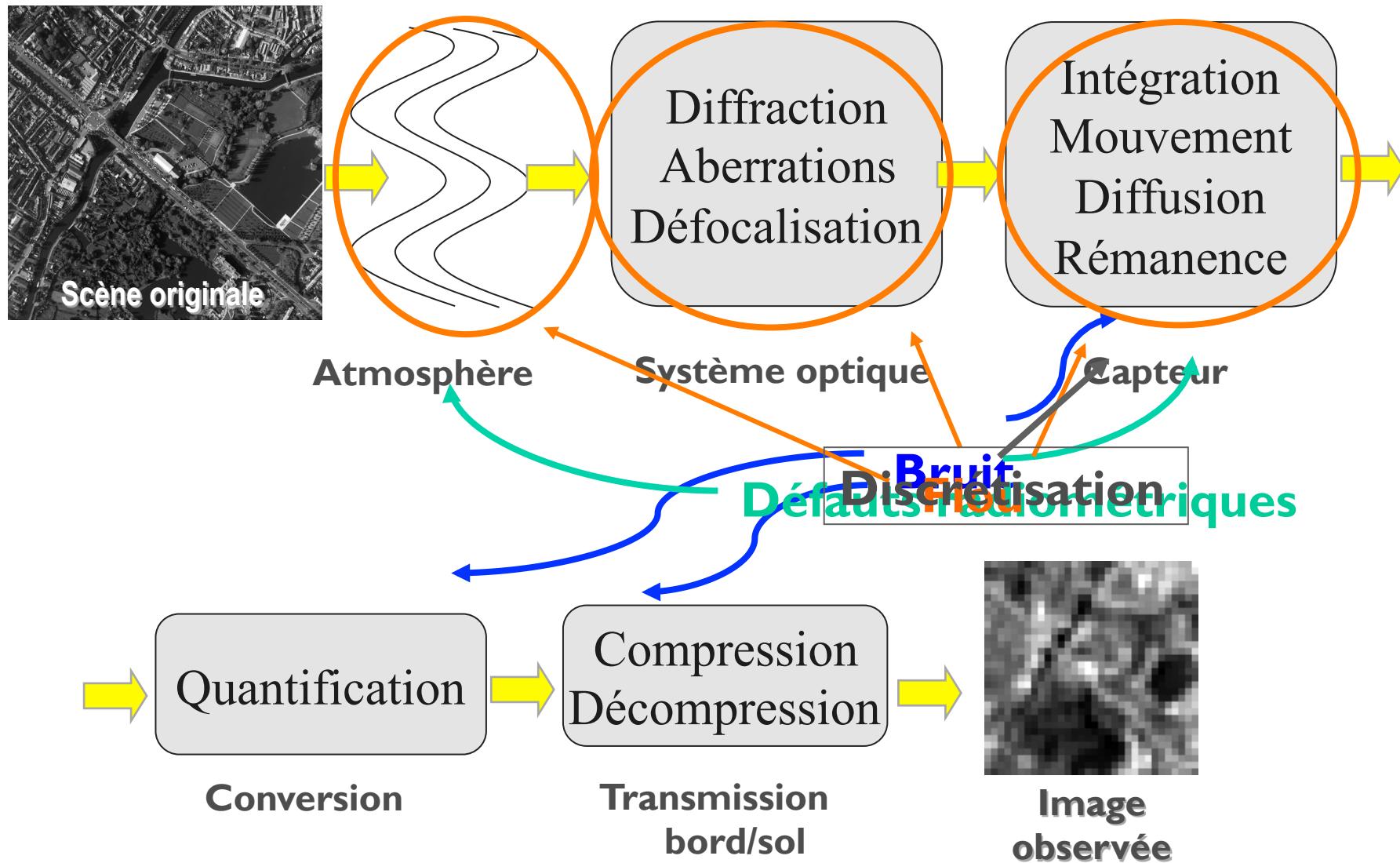
$$g: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

# Modèle d'observation



$$g_{i,j} = T_{i,j} \left( (RI * U)_{d(i,j)} \right) + N_{i,j}$$

# Chaîne des dégradations



# Dispersion spatiale: RI

On appelle **réponse impulsionnelle** (RI) ou fonction d'étalement d'un point en 2D, soit la réponse du système imageur à une distribution d'intensité ponctuelle (distribution de Dirac) au niveau de la scène. La RI s'exprime en continu dans le repère image. Elle est positive et normalisée. Elle est souvent modélisée par la variable  $h$

$$RI \quad h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow h(x) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} h(x) dx = 1$$

On l'appelle aussi Point Spread Function (PSF) : c'est l'image d'un point infini petit en résolution mais très lumineux.

# Rappels sur la Transformée de Fourier

- ◆ Si  $u \in S$  l'espace de Schwartz des fonctions  $u \in C^\infty$  à décroissance rapide i.e.  $x^\alpha \partial^\beta u(x) \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ , alors  $\hat{u} \in S$  aussi.

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \exp(-i\langle \xi, x \rangle) dx \quad (1)$$

La TF :  $u \rightarrow \hat{u}$  est un isomorphisme de  $S$  et peut être étendue par continuité à un isomorphisme de  $L^2$ .

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \exp(i\langle \xi, x \rangle) d\xi \quad (2)$$

- ◆ Parseval :  $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$
- ◆ Quelques propriétés de la transformée de Fourier: soient  $u$  et  $v$  dans  $S$ ,

$$\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v} \quad \text{et} \quad \widehat{u \cdot v} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{u} * \hat{v} \quad (3)$$

NB : avec le changement de variable  $\zeta = 2\pi f$  on a:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(f) \exp(2i\pi \langle f, x \rangle) df \quad \text{et} \quad \widehat{u \cdot v} = \hat{u} * \hat{v}$$

# Rappels sur la Transformée de Fourier

- ◆ Transformée de Fourier d'une fenêtre carrée:

$$F\left(1_{\left[-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}\right]^2}\right)(\alpha, \beta) = \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$$

avec  $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$  pour  $t \neq 0$

et par continuité  $\operatorname{sinc}(0) = 1$

# Transformée de Fourier Discrete

- ◆ Soit  $U$  un signal discret de longueur finie  $U(0) \dots U(N-1)$
- ◆ Sa TF est

$$\hat{U}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp\left(-\frac{2i\pi kn}{N}\right)$$

- ◆ Et la TF inverse est

$$u(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{U}(k) \exp\left(\frac{2i\pi kn}{N}\right)$$

- ◆ Calculée par algo rapide FFT

# Dispersion spatiale: FTM

Hypothèse de stationnarité + indépendance par rapport à la scène :

Flou = produit de convolution

$$g(x, y) = (h * u)_{x,y} = \int_{\Omega} h(x-s, y-t)u(s, t)ds dt$$

Dans l'espace de Fourier

$$F(g)_{u,v} = F(h)_{u,v} \cdot F(u)_{u,v}$$

De la scène à l'image formée au niveau du capteur :

**Atmosphère, système optique, capteur**

# Convolution Discrete

- ◆ Soit  $U$  un signal discret de longueur finie  $U(0) \dots U(N-1)$
- ◆ Soit  $h$  la PSF discrete

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)u(k-n) = \sum_{n=0}^{N-1} h(k-n)u(n)$$

- ◆ Avec PSF centrée  $h(-K) \dots h(K)$

$$g(n) = \sum_{k=-K}^K h(k)u(n-k)$$

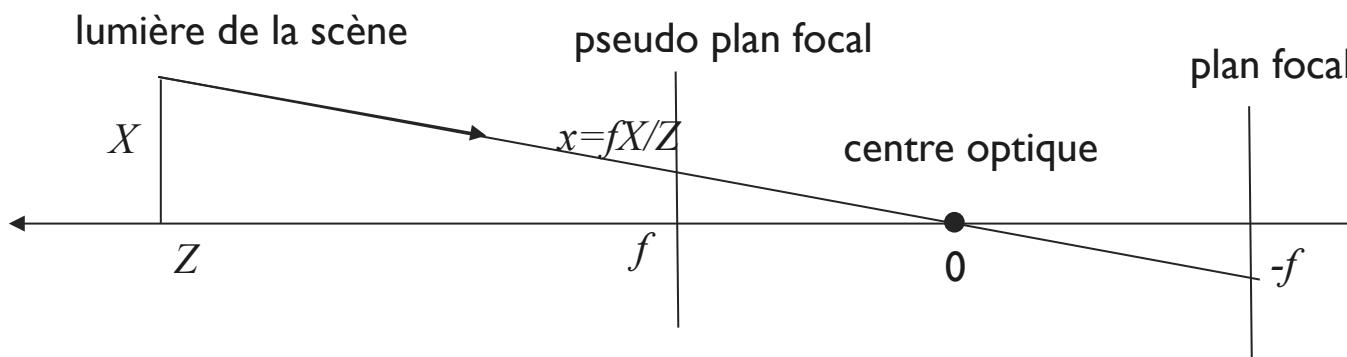
- ◆ On a  $\sum_{k=-K}^K h(k) = 1 \quad h(k) \geq 0 \quad \forall k$

# Flou système optique : diffraction

- ◆ **Diffraction** : due à l'ouverture limitée du système optique.
- ◆ Théorème de diffraction de Fraunhofer: l'image physique formée à travers une ouverture plane symétrique  $O$  est donnée par

$$v = K_{\text{diffrac}} * u \quad K_{\text{diffrac}}(x) = \frac{1}{2f^2} \left| \int_o \exp\left(\frac{2i\pi \langle x, \xi \rangle}{\lambda f}\right) d\xi \right|^2$$

où  $u$  est l'image idéale,  $\lambda$  la longueur d'onde (en lumière visible  $\lambda=0.6\mu m$ ),  $f$  la longueur focale :



# Flou système optique: diffraction (suite)

- ◆ Lorsque  $O$  est un disque de diamètre  $D$  la PSF diffraction est

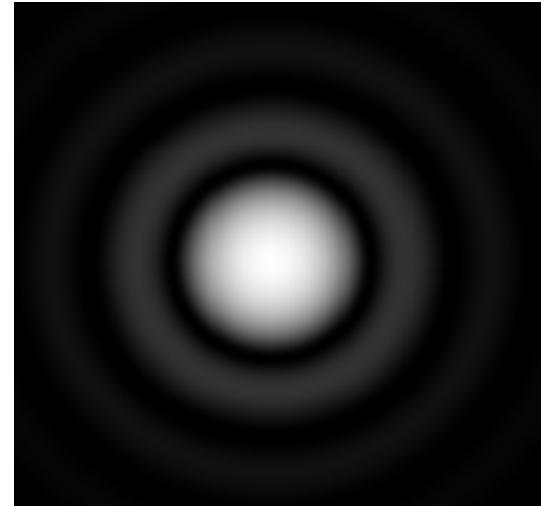
$$K_{\text{diffrac}}(x) = C \left( \frac{2J_1(r)}{r} \right)^2 \quad \text{où} \quad r = \frac{\pi D |x|}{\lambda f} \quad , \quad C = \frac{\pi^2 D^4}{32 f^2} \quad \text{et} \quad J_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - t \sin \theta) d\theta$$

$J_1$  est la fonction de Bessel de première espèce à l'ordre 1.

- ◆ L'image de  $K_{\text{diffrac}}$  est le disque (motif) d'Airy → tâche circulaire brillante et des anneaux autour en atténuation.

Le rayon de la tâche d'Airy donne une idée de la dimension du détail le plus petit qui puisse être reproduit par une optique idéale. Le premier zéro de  $J_1$  est en  $t \approx 1.22\pi$ , le rayon de la tâche d'Airy est

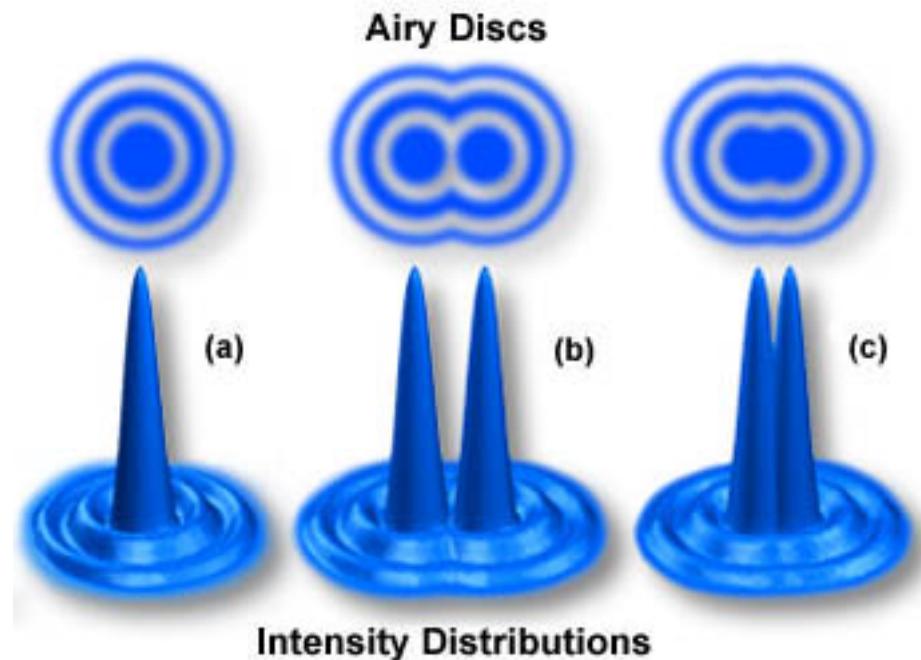
$$r_A = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$$



# Resolution

- ◆ The resolving power of an optical instrument is a measure of its ability to create individual images of objects. If you look at two points, you can tell they are two points if they're separated enough. If the two points are close together they look like one point. This is the Rayleigh criterion: the 2 points must be separated by a distance or an angle such that

$$d \geq 1.22 \frac{\lambda f}{D}$$



- ◆ The closer you are to two objects, the greater the angular separation between them. As you get further from the objects, however, the angular separation decreases until they eventually merge to become one.

# Flou système optique

- ◆ **Diffraction**
- ◆ **Défocalisation** : la focalisation n'est pas sur le plan des objets d'intérêt.
- ◆ **Aberration** : sphériques, géométriques, chromatiques...

# Capteur

## ◆ Intégration

- Chaque capteur est un intégrateur. En l'absence de mouvement, en supposant une matrice de capteurs, chacun est modélisé par une cellule rectangulaire de taille  $p_x \times p_y$  : zone photosensible, et de répartition sur une zone rectangulaire de pas  $p_{ex}$  et  $p_{ey}$ : taille physique des pixels.

$$u_{k,l} = \int_{[-p_x, p_x] \times [-p_y, p_y]} u(kp_{ex} + x, lp_{ey} + y) dx dy$$

- Encore une fois on retrouve un modèle de convolution. La PSF liée à l'intégration sur le capteur est

$$PSF_{int} = 1_{[-p_x, p_x] \times [-p_y, p_y]} \quad \text{et} \quad u_{k,l} = (PSF_{int} * u)(kp_{ex}, lp_{ey})$$

- La FTM associée est

$$(FTM_{int})_{u,v} = \frac{\sin\left(\pi u \frac{p_x}{p_{ex}}\right)}{\pi u \frac{p_x}{p_{ex}}} \frac{\sin\left(\pi u \frac{p_y}{p_{ey}}\right)}{\pi u \frac{p_y}{p_{ey}}}$$

- Remarque : la réponse du capteur n'est en général pas linéaire, en particulier pour les petites et les grandes valeurs. On observe donc  $\phi(u_{k,l})$ .

- ◆ Facteurs électroniques : Diffusion des charges , Rémanence

# Flou capteur

- ◆ **Mouvement du détecteur :** mouvement orbital. Translation rectiligne uniforme, perpendiculaire aux barrettes ou à l'un des axes de la matrice.

- ◆ **Mouvement de filé**

$$(FTM_{file})_{u,v} = \frac{\sin\left(\pi v \nu \Delta t / p_{ey}\right)}{\pi v \nu \Delta t / p_{ey}}$$

où  $\nu$  est la vitesse de déplacement (sur l'axe des  $y$ )  
et  $\Delta t$  est le temps d'intégration.

- ◆ + Mouvements parasites (oscillations, roulis, ...)

# Dispersion spatiale

- ◆ La  $PSF$  est donnée (au minimum) par

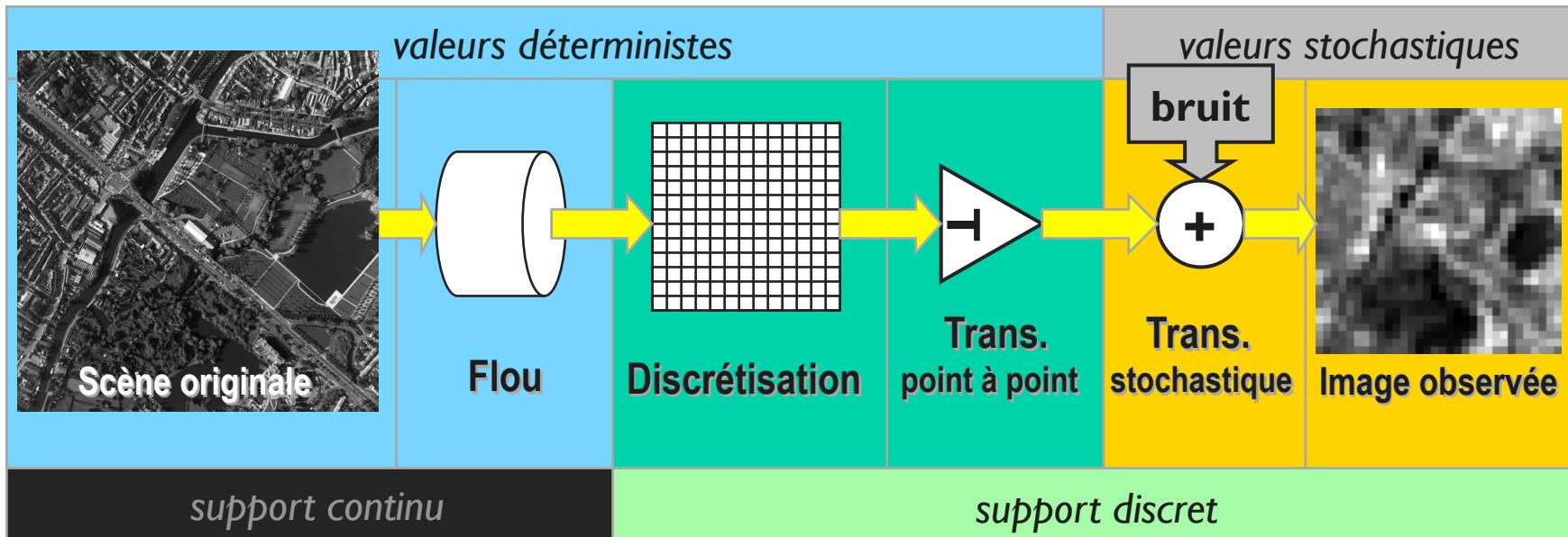
$$PSF = PSF_{optique} * PSF_{capteur}$$

ce qui correspond à la  $FTM$

$$FTM = FTM_{optique} \cdot FTM_{capteur}$$

- ◆ Utilisation de modèles simplifiés, avec peu de paramètres, ou approximation gaussienne

# Modèle d'observation



◆ → discréétisation (voir plus loin)

# Bruits

- ◆ **Bruit quantique** : accumulation électrons, comptage de photons. Bruit de statistique de Poisson.
- ◆ **Bruit thermique et bruit de lecture** : bruit gaussien.
- ◆ Bruit de quantification : uniforme, variance faible relativement aux autres bruit.
- ◆ Bruit de compression : coloré, corrélé, non stationnaire. Assimilé à du bruit gaussien en première approximation.
- ◆ Bruit de transmission : perte de paquets... Difficile à prendre en compte, de même que le bruit de compression. On suppose transmission parfaite.

**Hypothèses** (réalistes) : Indépendance des bruits entre eux et indépendance du bruit d'un pixel à l'autre (bruit blanc) et stationnarité de la loi (même loi en chaque pixel).

Bruit de **Poisson** + bruit **gaussien** → approximation par un **bruit additif gaussien blanc** de moyenne nulle et de variance dépendant de l'intensité  $u_{i,j}$  au pixel  $(i,j)$  considéré

$$P(n/u) = \prod_{i,j} \mathcal{N}_2(0, (A + B u_{i,j}) \text{Id})$$

Bruit de loi stationnaire normale, de variance non stationnaire.

A fort taux de compte (scène réelle en illumination normale), la loi de Poisson tend vers la loi gaussienne et le bruit est gaussien blanc  $N(0, \sigma^2 \text{Id})$

# Rappel

- ◆ Soit  $n$  le bruit. C'est une variable aléatoire multidimensionnelle sur un champ de pixels  $(i,j)$   $i,j=1,\dots,N$ . Sa matrice d'autocorrélation est la matrice symétrique

$$E(nn^t) = \begin{pmatrix} E(n_1 n_1) & E(n_1 n_2) & \dots & \dots & E(n_1 n_N) \\ E(n_1 n_2) & E(n_2 n_2) & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ E(n_N n_1) & & & \ddots & E(n_N n_N) \end{pmatrix}$$

- ◆ Si  $v$  est une variable aléatoire scalaire, de densité de probabilité  $p_v(v)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  $E(v)$  désigne l'espérance mathématique de cette variable aléatoire, et est définie par  $E(v) = \int_{\mathbb{R}} x p_v(x) dx$
- ◆  $n$  est un bruit blanc si les variables aléatoires sont décorrélées d'un pixel à l'autre, c'est-à-dire que la matrice d'autocorrélation est diagonale. Si de plus le bruit est stationnaire, alors la matrice d'autocorrélation s'écrit  $E(nn^t) = \sigma^2 \text{Id}$
- ◆ Si la loi du bruit est normale  $N(m, \Lambda)$ , la densité de probabilité jointe des variables sur tous les pixels est

$$P_n(n) = \frac{1}{[2\pi \det(\Lambda)]^{\frac{N}{2}}} \exp - \frac{(n-m)^t \Lambda^{-1} (n-m)}{2}$$

## Gaussian noise assumption

The noise is additive :  $g = h^*u + n$

In each pixel  $i$ ,  $n_i$  is a random variable with a Gaussian distribution :

$$P(n_i = \alpha_i) = \frac{1}{Z} \exp - \frac{\alpha_i^2}{2\sigma^2}$$

The random variable  $N^3$ -dimensionnel  $n = (n_1, n_2, \dots, n_{N^3})$  has a Gaussian distribution with zero mean parameter and variance  $\sigma^2$  with no correlation between pixels:

$$P(n_1 = \alpha_1, n_2 = \alpha_2, \dots, n_{N^3} = \alpha_{N^3}) = \frac{1}{Z'} \exp - \frac{\sum_{i=1}^{N^3} \alpha_i^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{Z'} \exp - \frac{\|\alpha\|^2}{2\sigma^2}$$

## Maximum de vraisemblance, bruit gaussien

With the model  $g = h^*u + n$  the probability of observing  $g$  if I know that  $u$  is the result of the convolution of  $h$  with the scene  $u$  is

$$P(g / (h^*u)) = P(g - (h^*u) = n / (h^*u)) = P(g - (h^*u) = n)$$

$$P(g / (h^*u)) = \frac{1}{Z'} \exp - \frac{\sum_{i=1}^{N^3} [(h^*u)_i - g_i]^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{Z'} \exp - \frac{\|g - h^*u\|^2}{2\sigma^2}$$

The Maximum Likelihood estimator of  $u$  is  $\max_u P(g / (h^*u))$

Which is equivalent to  $\min_u \|g - h^*u\|^2$

## Poisson density

The random variable  $Y$  has a Poisson distribution with  $\lambda$  parameter which models the photon count noise :

$$Y \propto \mathcal{P}(\lambda) \iff P(Y = y / \lambda) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$$

Writing  $g = \mathcal{P}_{(u^*h)}$  means that  $i$  has a Poisson distribution with parameter  $u^*h$ . More precisely, in each pixel  $x$ ,  $g(x)$  has a Poisson distribution with parameter  $(u^*h)(x)$

$$P(g(x) / u^*h) = \frac{[h^*u](x)^{g(x)} e^{-[h^*u](x)}}{g(x)!}$$

## Maximum de vraisemblance, bruit de Poisson

The probability of observing  $g$  if I know that  $u$  is the result of the convolution of  $h$  with the specimen  $u$  is

$$P(g(x) / u * h) = \frac{[h * u](x)^{g(x)} e^{-[h * u](x)}}{g(x)!}$$

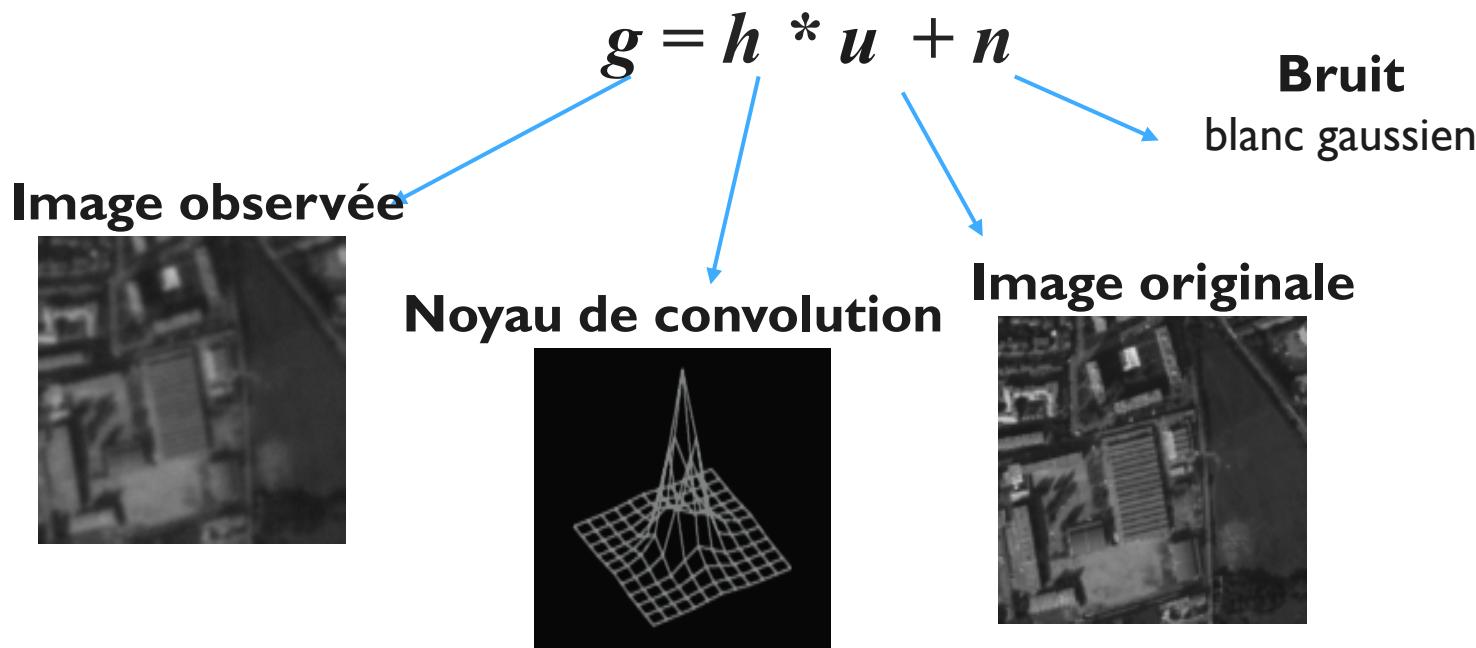
The Maximum Likelihood estimator of  $u$  is  $\max_u P(g / (h * u))$

Which is equivalent to  $\min_u -\ln[P(g / (h * u))]$

$$\min_u \sum_{x \in \Omega} [(h * u)(x) - g(x) \cdot \ln(h * u)(x)]$$

# Dégradation (modèle simple)

Les images observées sont **dégradées** :



# Notations, hypothèses

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sous-ensemble ouvert borné  
variables continues :  $u(x)$

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow u(x)$  niveau de gris au point  $x = (x_1, x_2)$

$\Omega \subset \mathbb{N}^2$  sous-ensemble borné de points discrets  
variables discrètes : pixel i,j

$u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta y), i, j = 0 \dots N$

$g$  : image observée, dégradée de  $u$

# Restauration

- ◆ Retrouver  $u$ , ayant observé  $g = Hu + n$ 
  - Statistiques (moyenne et variance) connues pour le bruit  $n$
- ◆ Hypothèses :
  - $0 \leq g(x) \leq M \quad p.p.x \in \Omega$
  - $g \in L^\infty(\Omega)$
  - $H : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  linéaire
- ◆ Si l'opérateur  $H$  est connu : Restauration = déconvolution.
- ◆ si  $H = id$  : débruitage
- ◆ Si l'opérateur  $H$  est imparfaitement connu : Restauration = déconvolution aveugle ou myope

# Problème bien posé

- ◆ Restauration : débruitage, déconvolution.
- ◆ Inverser  $g = h * u + n$  est un **problème inverse mal-posé**.
- ◆ Problème **bien posé** au sens d 'Hadamard (1923): la solution
  - existe
  - est unique
  - dépend continûment des données.
- ◆ Formulation matrice vecteur :  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{n}$
- ◆  $\mathbf{H}$  peut être inversible, mais on a toujours instabilité de la solution par rapport aux données

# Dans le plan de Fourier

- ◆ La convolution discrète circulaire est transformée en un produit simple dans Fourier (conditions de bords périodiques):

$$g = h * u + n \rightarrow \hat{g} = \hat{h} \cdot \hat{u} + \hat{n}$$

- ◆ écriture matrice/vecteur

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{n} \rightarrow \hat{\mathbf{g}} = \text{diag}\{\lambda_k\} \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{n}}$$

- ◆ Remarque : en pratique on utilise plutôt des conditions aux bords symétriques, donc on utilise plutôt une DCT.
- ◆ Rappel : transformée discrète de  $u_{i,j}, i,j \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\hat{u}_{k,l} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_{i,j} e^{\frac{-2i\pi(ik+jl)}{N}} \quad \text{et} \quad u_{i,j} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{u}_{k,l} e^{\frac{2i\pi(ik+jl)}{N}}$$

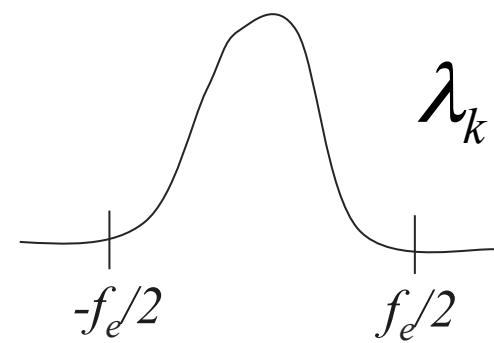
# Analyse dans Fourier

- ◆ Les valeurs propres  $\lambda_k$  sont données par la transformée de Fourier de la PSF (fonction de flou) :
- ◆ Forme gaussienne, atténuation des hautes fréquences.

$$\hat{g} = \text{diag}\{\lambda_k\} \hat{u} + \hat{n}$$

- ◆  $\exists k, \lambda_k = 0$ , le problème en  $u$  a une infinité de solutions
- ◆  $\forall k, \lambda_k \neq 0$ , le problème en  $u$  a une unique solution, mais instable.

$$\hat{u}_k = \frac{\hat{g}_k}{\lambda_k} + \frac{\hat{n}_k}{\lambda_k}$$



# Inversion



Image floue

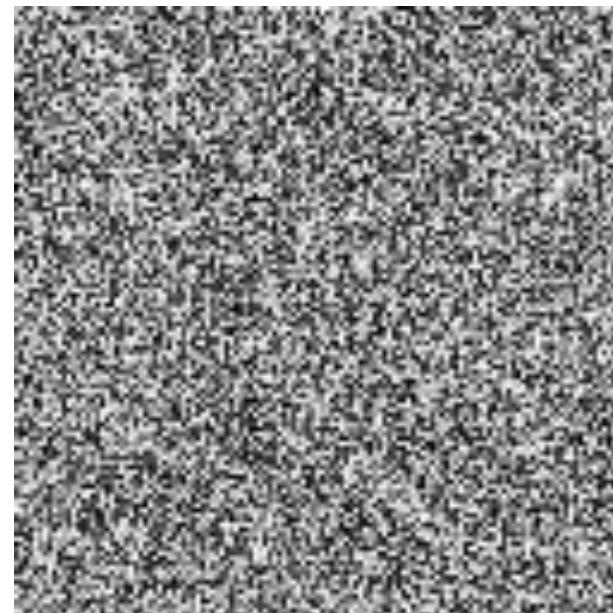
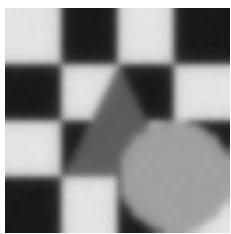


Image déconvoluée  
sans régularisation



# Conditionnement de matrice

- ◆ Si  $H$  est régulière, le conditionnement de  $H$  est :  $\text{cond}(H) = \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$

où la norme matricielle est  $\|H\| = \sup_{x \neq 0} \left( \frac{\|Hx\|}{\|x\|} \right)$

- ◆ Avec la norme euclidienne et pour  $H$  régulière  $\text{cond}(H) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

$$g = Hu \quad \text{donc} \quad \|g\| \leq \|H\| \cdot \|u\| \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\|u\|} \leq \|H\| \cdot \frac{1}{\|g\|}$$

$$\text{petite perturbation } \delta g \rightarrow g + \delta g = H(u + \delta u)$$

$$\delta g = H\delta u \quad \|\delta u\| \leq \|H^{-1}\| \cdot \|\delta g\| \quad \text{finalement} \quad \frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq \|H\| \cdot \|H^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta g\|}{\|g\|}$$

$$\text{soit} \quad \frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq \text{cond}(H) \cdot \frac{\|\delta g\|}{\|g\|}$$

# Problème mal posé

- ◆ Problèmes inverses toujours mal posés

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \rightarrow & H(u) = g \quad \text{tel que} \end{array} \qquad g(t) = \int_{\Omega} h(t, s) u(s) ds, \quad \forall t \in \Omega$$

- $h \in L^2(\Omega \times \Omega)$
  - $\text{Ker}(H) = \{0\}$
- 
- $H^{-1}$  non borné

# Moindres carrés et maximum de vraisemblance

- ◆ La solution des moindres carrés est celle qui résout le problème :

$$\min_u \|g - Hu\|^2$$

- ◆ Dans l'approche stochastique, cette solution est équivalente au **maximum de vraisemblance** dans le cas d'un bruit gaussien.

$G$ ,  $U$  et  $N$  sont considérées comme étant des champs de variables aléatoires. Le bruit  $N$  est blanc gaussien de loi  $N(\theta, \sigma^2 Id)$ , donc

$$P_n(n) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp - \frac{n^t n}{2\sigma^2} \quad \text{où} \quad n^t n = \|n\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^N n_{i,j}^2$$

La vraisemblance est définie par la probabilité conditionnelle des observations sachant  $u$ .

On cherche l'image  $u$  qui maximise la probabilité d'avoir observé  $g$ , soit

$$\max_u P(g/u)$$

avec  $P(g/u) = P(n = g - Hu) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp \left\{ - \frac{\|g - Hu\|^2}{2\sigma^2} \right\}$

# Continuous setting: Least square solution

- ◆ The least square solution is given by the resolution of the optimisation problem

$$\inf_{u \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} |g - Hu|^2 dx$$

If the operator  $H$  is such that  $\text{Ker}(H) = \{0\}$ , then it exists a unique solution, given by the Euler equation

$$\begin{cases} H^*(Hu - g) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} H \text{ is a linear operator,} \\ H^* \text{ is its adjoint} \end{array}$$

The solution can be computed by solving the associated dynamical system, where  $u$  is now depending on time  $t$  (equivalent to gradient descent with fixed iteration step)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = H^*(g - Hu) \\ \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, t=0) = g(x) \end{cases}$$

- ◆ Of course if the inverse solution is unstable, so is the least square solution.

# Continuous setting : Gateaux differentiability

- ◆ **Definition :** Gateaux derivative

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon}$$

If this limit exists for all  $v \in X$  and if it exists an element of  $X'$ , denoted  $F'(u)$ , such that

$$\forall v \in X, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon} = \langle F'(u), v \rangle$$

then  $F$  is derivable in the sense of Gateaux.

# Equation d'Euler-Lagrange

- ◆ Application if  $F$  is Gateaux differentiable and if the problem

$$\inf_{u \in X} F(u)$$

Have a solution  $u$ , then the solution verify necessary

$$F'(u) = 0$$

The reverse is true if  $F$  is convex.

This is the Euler-Lagrange equation.

⇒ Euler Lagrange equation calculus for pour  $J(u)$ .

# Equation d'Euler-Lagrange

$$J(u) = \int_{\Omega} [(g - Hu)(x)]^p dx$$

$J$  is convex, the infimum exists and satisfy  $J'(u) = 0$

Compute  $J'(u)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \langle J'(u), v \rangle$$

# Moindres carrés (variables discrètes)

- ◆ Minimum d'une fonction convexe. Condition premier ordre nécessaire et suffisante pour trouver le minimum

$$\frac{\partial}{\partial u} \|g - Hu\|^2 = 0$$

- ◆ Solution dans le domaine spatial  $u_{est} = (H^* H)^{-1} H^* g$

- Calcul dérivée en 1D

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{l=1}^{N^2} \left[ g(l) - \sum_{k=-K}^K h(k)u(l-k) \right]^2$$

Dérivée non nulle quand  $i=l-k$  soit  $k=l-i$

$$\sum_l 2 \left[ g(l) - \sum_{k=-K}^K h(k)u(l-k) \right] h(l-i)$$

# Moindres carrés

- ◆ Solution dans le domaine spatial

$$\mathbf{u}_{est} = (\mathbf{H}^* \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{g}$$

- ◆ Solution dans le domaine fréquentiel

$$\hat{\mathbf{u}}_{est} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M}^*}{|\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M}|^2} \hat{\mathbf{g}}$$

- ◆ Inverse généralisée : solution de norme minimale (pseudo inverse)

$$\hat{\mathbf{u}}_{est} = (\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M})^- \hat{\mathbf{g}} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M}^- = \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M}} & \text{si } \mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{M} = 0 \end{cases}$$

# Méthodes itératives

- ◆ Descente de gradient

$$J(u) = \|g - Hu\|^2, \quad \nabla J(u) = H^*(Hu - g)$$

$$\Leftrightarrow \text{Schéma dynamique} \rightarrow u(t) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla J(u) \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t}$$

- ◆ (Algorithme de Landweber)

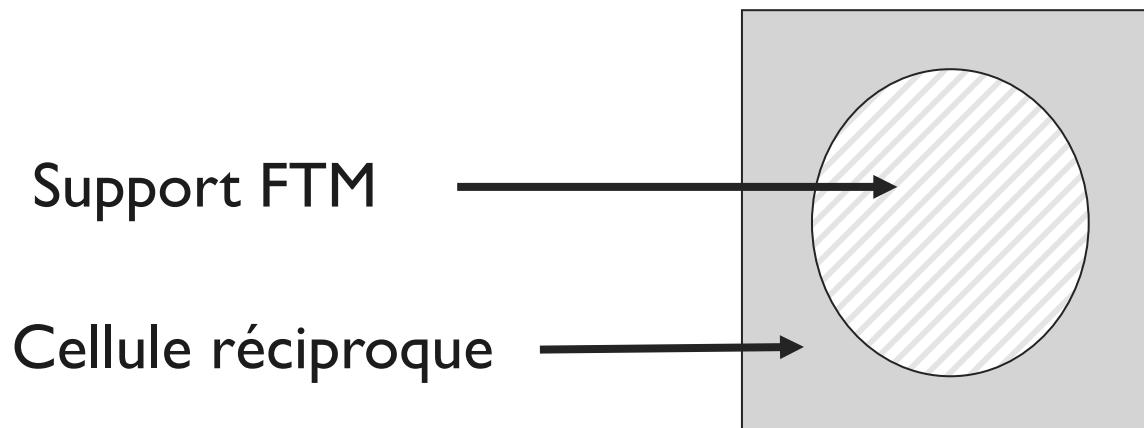
$$u^{n+1} = u^n + \alpha H^*(g - Hu^n) \quad \text{avec } 0 < \alpha < 2$$

- ◆ Accélération par gradient conjugué
- ◆ Régularisation par arrêt des itérations

# Méthodes avec contraintes

$$\mathbf{u}^{n+1} = P_C \left[ \mathbf{u}^n + \alpha \mathbf{H}^* (\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{u}^n) \right]$$

- $P_C$ : opérateur de **projection**
- Ex.: contrainte de **positivité**  $C=\{\mathbf{u}/ u_{i,j} > 0\}$
- On peut aussi introduire des contraintes dans le domaine **fréquentiel**. Projecteur dans le domaine fréquentiel par exemple si la cellule réciproque (liée à l'échantillonnage) est mal adaptée à la fonction instrument (FTM):



# Filtre de Wiener

$$\min_u E_{g/u} \left\| \mathbf{u}_{vraie} - \mathbf{u} \right\|^2 \quad \text{Solution linéaire} \quad \mathbf{u} = L g$$

- Solution dans le domaine **spatial**

$$\mathbf{u}_{est} = \left( \mathbf{H}^* \mathbf{H} + \frac{\mathbf{R}_{nn}}{\mathbf{R}_{uu}} \right)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{g}$$

- Solution dans le domaine **fréquentiel**

$$\hat{\mathbf{u}}_{est} = \frac{\mathbf{FTM}^*}{|\mathbf{FTM}|^2 + \frac{\sigma^2}{|\hat{\mathbf{u}}|^2}} \hat{\mathbf{g}}$$

## Méthodes variationnelles pour la déconvolution

**REGULARISATION** : introduire une information *a priori*

- ◆ Régularisation linéaire ( $L^2$ )
- ◆ Régularisation non linéaire ( $L^1$ )

# Régularisation L2 (Tikhonov)

## en variables discrètes

- ◆ Chercher une solution dans un ensemble de solutions admissibles :

$$\left\{ \mathbf{u} / \frac{1}{N^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{u}\|^2 \leq \sigma^2 \right\}$$

- ◆ Choisir une solution régulière pour stabiliser le processus d'inversion :

$$\min_{\mathbf{u}} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 = \min_{\mathbf{u}} \sum_{i,j} |\nabla \mathbf{u}|_{i,j}^2$$

- ◆ Minimisation d'un critère (pénalisation) :

$$J(\mathbf{u}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{u}\|^2 + \lambda \|\nabla \mathbf{u}\|^2$$

Attache aux données

Terme de régularisation

# Tikhonov Regularisation

## en variables continues

- ◆ Search for a solution in the set of **admissible** solutions (continuous setting):

$$\left\{ u / \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (g - Hu)^2 dx \leq \sigma^2 \right\}$$

- ◆ Reduce this set by introducing a constraint in order to obtain a **regular** solution

$$\underset{u}{\operatorname{Min}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

- ◆  $\nabla u$  is the gradient of  $u$ :  $\nabla u(x) = (u_{x_1}(x), u_{x_2}(x))$
- ◆ Solution can be computed by minimizing a penalized criterion

$$J(u) = \int_{\Omega} |g - Hu|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

**Data term**

**Regularisation term**

- ◆  $\lambda$  is the regularisation parameter, which compounds the influence between the two terms.

# Euler-Lagrange Equation

$$J(u) = \int_{\Omega} [(g - Hu)(x)]^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

$J$  is convex, the infimum exists and satisfies  $J'(u) = 0$

Calculus of  $J'(u)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u + \varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \langle J'(u), v \rangle$$

For the second term of  $J$ , we use the Green formula (integration by part):

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$$

# Equation d' Euler-Lagrange

$$J(u) = \int_{\Omega} [(g - Hu)(x)]^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

$J$  est convexe, l'infimum existe et vérifie  $J'(u) = 0$

soit

$$\begin{cases} H^*(Hu - g) - \lambda \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}$$

$$H: X \rightarrow X$$

$$u \rightarrow Hu = h^* u$$

$$H^*: X \rightarrow X$$

$$u \rightarrow H^* u = h^* * u \quad \text{où } h^*(x) = \bar{h}(-x)$$

# Regularisation (Tikhonov)

- ◆ If  $H$  does not annihilate the constants then the minimization problem has a unique solution in  $H^1(\Omega)$ , which is computed by solving the Euler equation

$$\begin{cases} H^*(Hu - g) - \lambda \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

where  $\Delta$  is the laplacian of  $u$ :

$$\text{◆ Dynamical scheme; } u(i,j,t) \quad \xrightarrow{\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = H^*(g - Hu) + \lambda \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

- ◆ Isotropic diffusion (Laplacian, heat equation)
- ◆ Linear regularisation, stationnary process, edges of images are not reconstructed.
- ◆  $\sim$  Wiener filter

$$\hat{u} = (H^*H - R_{uu}^{-1}R_{nn})^{-1} H^* g \quad \longleftrightarrow \quad \hat{u} = (H^*H - \lambda \Delta)^{-1} H^* g$$

# Régularisation (Tikhonov)

- ◆ Equation d'Euler

$$\begin{cases} H^*(Hu - g) - \lambda \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- ◆ Schéma dynamique :  $u(i,j,t)$

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \frac{\partial u}{\partial t} = H^*(g - Hu) + \lambda \Delta u$$



# Résultat



Image originale @CNES



Image floue et bruitée  
(@CNES, simulation SPOT5)



Une image restaurée

# Minimisation de critère

$$\min_{u \in X \cap X_J} \|g - Hu\|_q^q + J(u)$$

Terme d'attache  
aux données

Norme ou semi-norme  
dans un espace  
régularisant

- Quelles sont les normes, les bons espaces régularisant adaptés aux images ?
- Quelle norme choisir pour le terme de données ?
- existence, unicité d'une solution ?
- Algorithme de minimisation ?
- Evaluation des résultats ?

# Régularisation non linéaires

- Régularisation  $l^2$  lisse les contours

$$\|g - Hu\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2$$

## ◆ Régularisation non linéaire

- Régularisation  $l^2/l^1$

$$\|g - Hu\|_2^2 + \lambda \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx$$

- Régularisation par Variation Totale

$$\|g - Hu\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_1$$

- Solutions dans l'espace BV et algorithmes

## ◆ Lien avec la segmentation

- Fonctionnelle de Mumford et Shah

- Algorithmes de minimisation

## ◆ Et la transformée en ondelettes (TO) ?

$$\|g - Hu\|_2^2 + \lambda \sum_{i,j=1}^M |\langle u, \psi_{i,j} \rangle|$$

- Régularisation dans le domaine de la transformée en ondelettes

- Solution dans un espace de Besov et algorithmes

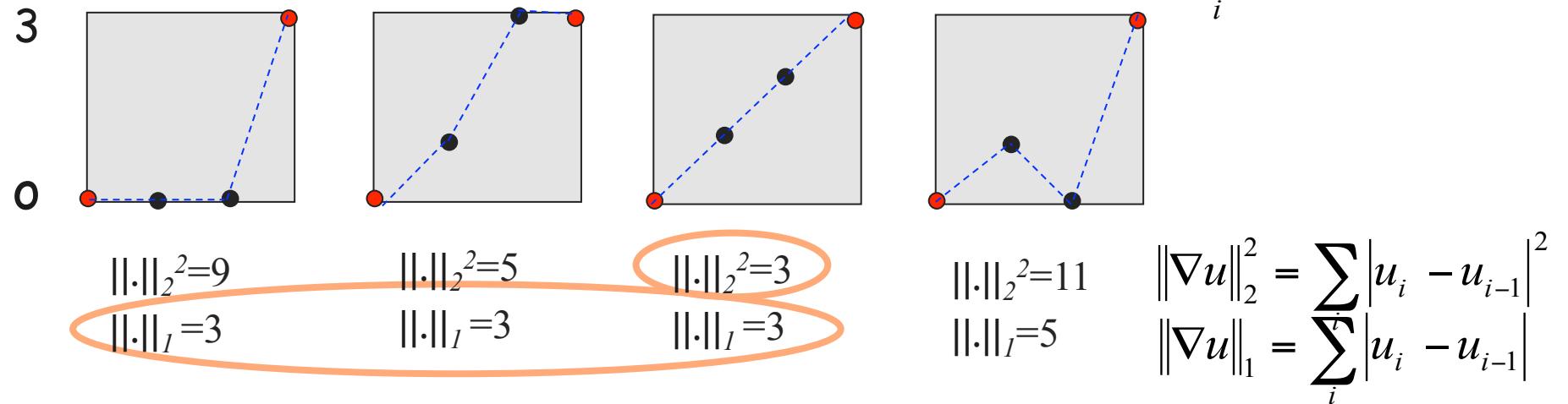
# Norme $l^1$ et $l^2$

- ◆ Diminuer le poids des forts gradients dans le processus de minimisation. En variables discrètes :
  - remplacer la norme  $l^2$  par la norme  $l^1$ .

$$E(u) = \|g - Hu\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_1$$

$$\|\nabla u\|_1 = \sum_{i,j} |\nabla u|_{i,j} \quad \text{avec} \quad |\nabla u|_{i,j} = \sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2}$$

- ◆ Normes  $l^2$  et  $l^1$  : un petit exemple en 1D.  $\|\nabla u\|_1 = \sum_i |u_i - u_{i-1}|$



# Régulariser **et** préserver les contours

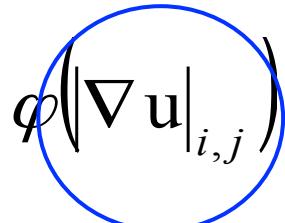
$$\underset{u}{\text{Min}} \sum_{i,j} |(\nabla u)_{i,j}|^\alpha \quad \alpha \approx 1$$

$$(0 < \alpha)$$

- ◆ On cherche  $u$  qui minimise  $J(u)$  :

$\varphi$  fonction de régularisation

$$J(u) = \|g - Hu\|^2 + \lambda \sum_{i,j} \varphi(|\nabla u|_{i,j})$$



- Zones homogènes  $\longrightarrow$  régularisation  $(\varphi \approx t^\alpha \quad 1 < \alpha)$
- Contours  $\longrightarrow$  préservation  $(\varphi \approx t^\alpha \quad 1 \geq \alpha)$

# Classe des fonctions de régularisation $\varphi$

- ◆ Equation d'Euler

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{H}^*(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \left( \frac{\varphi'(|\nabla \mathbf{u}|)}{|\nabla \mathbf{u}|} \nabla \mathbf{u} \right)$$

Coefficient de pondération

- Lissage des zones homogènes :

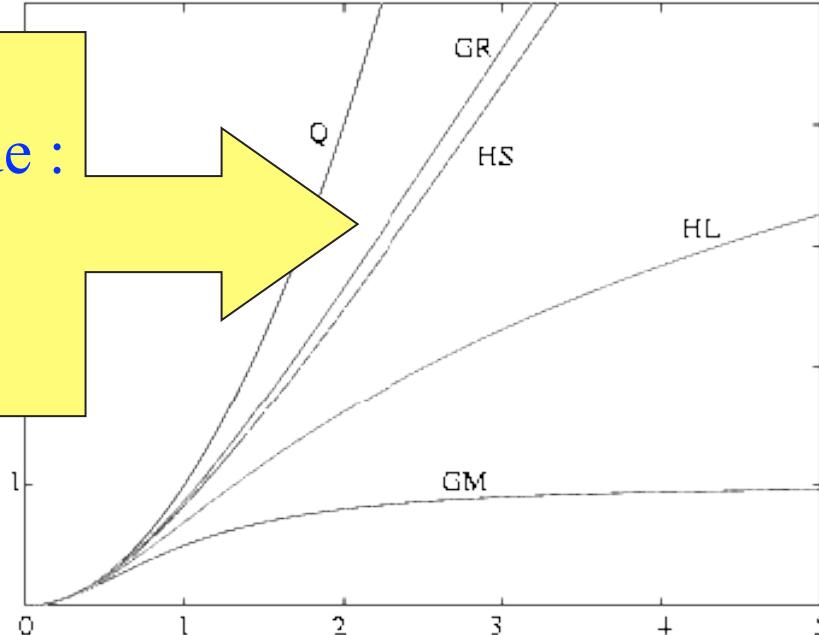
$$\nabla \mathbf{u} \approx 0 \longrightarrow \frac{\varphi'(|\nabla \mathbf{u}|)}{|\nabla \mathbf{u}|} \approx 1$$

- Préservation des contours :

$$|\nabla \mathbf{u}| \approx \infty \longrightarrow \frac{\varphi'(|\nabla \mathbf{u}|)}{|\nabla \mathbf{u}|} \approx 0$$

# Fonctions $\varphi : l^2/l^1$

$\varphi$  non quadratique :  
*préservation  
des contours*



| <b>Q</b>  | Quadratique     | $u^2$                 |
|-----------|-----------------|-----------------------|
| <b>GM</b> | Geman & McClure | $u^2/1 + u^2$         |
| <b>HS</b> | Hyper Surfaces  | $2\sqrt{1 + u^2} - 2$ |
| <b>HL</b> | Hebert & Leahy  | $\log(1 + u^2)$       |
| <b>GR</b> | Green           | $2 \log(\cosh(u))$    |

# Modèle explicite de contours

- ◆ Développements semi-quadratiques, sous certaines conditions en  $\varphi$  (principalement  $\varphi(\sqrt{t})$  concave)

$$\varphi(t) = \inf_b \Psi(t, b)$$

- $\Psi$  quadratique en  $t$
- $\Psi$  convexe en  $b$ ,  
expression analytique du minimum

- ◆ Développement de  $\varphi(|\nabla u|_{i,j})$  en tout  $i,j$
- ◆ variable auxiliaire  $b_{i,j}$  : contours
- ◆ Minimisation de  $J^*(u, b)$

$$J^*(u, b) = \|g - Hu\|^2 + \lambda^2 \sum_{i,j} \Psi(|\nabla u|_{i,j}, b_{i,j})$$

- [ D. Geman & G. Reynolds « Constrained restoration and the recovery of discontinuities » *IEEE Trans. on PAMI*, 14(3), p. 367-383, 1992].
- [D. Geman & C. Yang « Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization » *IEEE Trans. on Image Processing*, 4(7), p.932-946, 1995].

# Algorithme semi-quadratique

## ◆ Minimisations alternées en $u$ et $b$



- $u$  fixé       $\longrightarrow$  expression de  $b$
- $b$  fixé       $\longrightarrow$  minimum en  $u$  quadratique (gradient conjugué).

- ◆ Initialisation  $u^0=0$  ou  $u^0=g$
- ◆ convergence (en fonction de la convexité de  $\varphi$ )

- [P.Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G.Aubert, M. Barlaud, « Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging » *IEEE Trans. On Image Processing*, 6(2), 1997].
- [ G.Aubert, L.Vese « A variational method in image recovery » *SIAM Journal of Numerical analysis*, 35(4), 1997 ].
- [A. Delaney, Y. Bresler « Globally convergent edge-preserving regularized reconstruction :An application to limited-angle tomography » *IEEE Trans. On Image Processing*, 7(2), 1998].

# Algorithme semi-quadratique

◆ Développement multiplicatif  $\varphi(t) = \inf_{b \in [0,1]} \{bt^2 + \psi(b)\}$  avec  $b_{\inf} = \frac{\varphi'(t)}{t}$

$$\text{soit } \Psi(t,b) = bt^2 + \psi(b)$$

◆ exemples

■ fonction hypersurface

$$\varphi(t) = \sqrt{1+t^2} - 1 \quad \psi(b) = b + \frac{1}{2b} - \frac{5}{2} \quad \frac{\varphi'(t)}{t} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

■ fonction Geman & McClure

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \psi(b) = (\sqrt{b} - 1)^2 \quad \frac{\varphi'(t)}{t} = \frac{2}{(1+t^2)^2}$$

# Algorithme semi-quadratique

- ◆ Avec

$$\varphi(t) = \inf_{b \in [0,1]} \{bt^2 + \psi(b)\} , \quad b_{\inf} = \frac{\varphi'(t)}{t}$$

soit  $\Psi(t, b) = bt^2 + \psi(b)$

on minimise le critère augmenté :

$$J^*(u, b) = \|g - Hu\|^2 + \lambda^2 \sum_{i,j} b_{i,j} |\nabla u|_{i,j}^2 + \psi(b_{i,j})$$

- ◆ Minimisations alternées en  $u$  et  $b$



- $u$  fixé  $\rightarrow b_{i,j} = \frac{\varphi'(|\nabla u|_{i,j})}{|\nabla u|_{i,j}}$

- $b$  fixé  $\rightarrow$  minimum en  $u$  quadratique (gradient conjugué).

- ◆ Schéma semi-implicite de résolution de l'EDP

$$u^{n+1} = u^n + \delta t \left\{ H^*(g - Hu^{n+1}) + \lambda^2 \operatorname{div} \left( \frac{\varphi'(|\nabla u^n|)}{|\nabla u^n|} \nabla u^{n+1} \right) \right\}$$

# Modèle de contours

## ◆ Minimisation

- $b_{i,j} = 1 \rightarrow$  zone homogène : régularisation en
- $b_{i,j} = 0 \rightarrow$  contour : pas de régularisation

$$J^*(u,b) = \|g - Hu\|^2 + \lambda^2 \sum_{i,j} b_{i,j} |\nabla u|_{i,j}^2 + \psi(b_{i,j})$$

$$|\nabla u|_{i,j}^2$$

## ◆ Diffusion

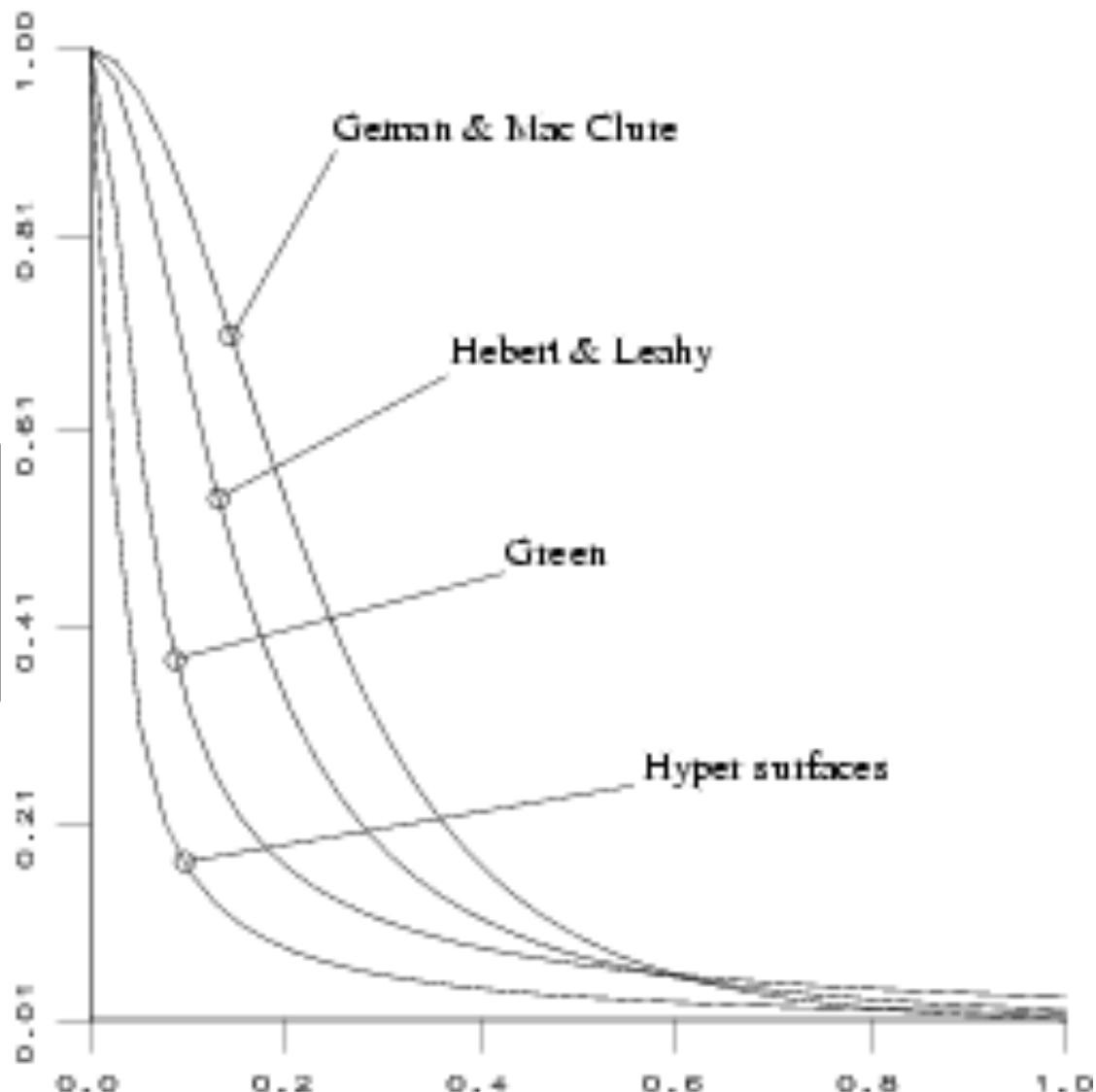
- $b_{i,j} = 1 \rightarrow$  zone homogène : diffusion isotrope en  $\Delta u$
- $b_{i,j} = 0 \rightarrow$  contour : pas de diffusion

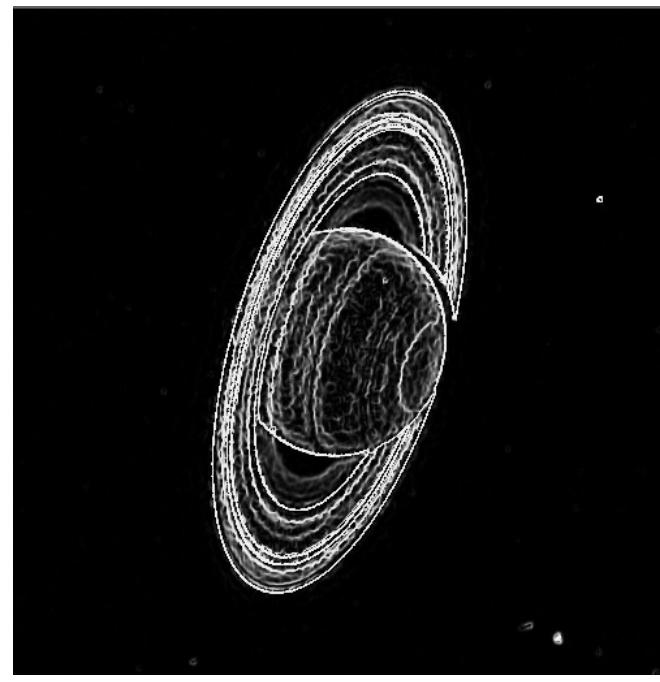
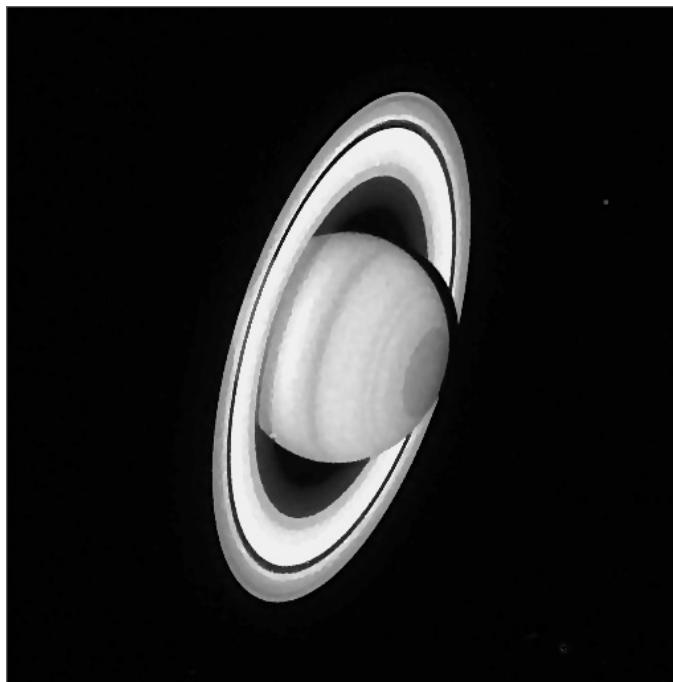
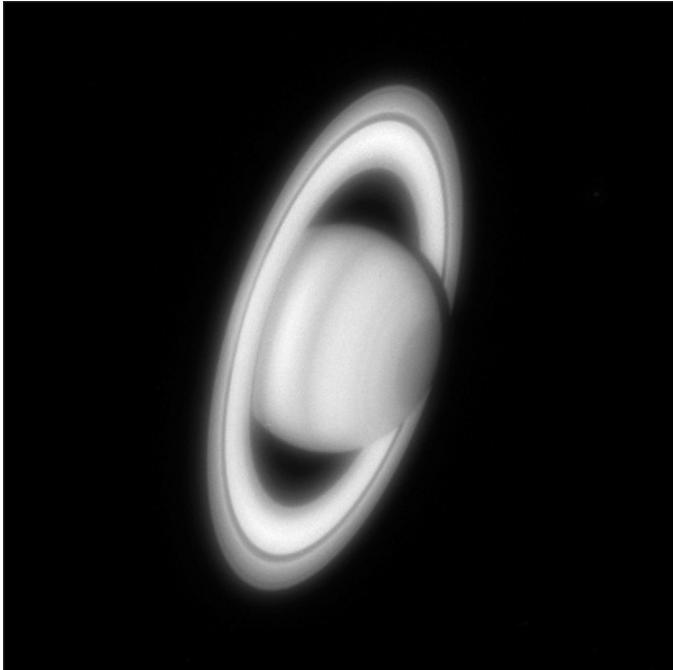
$$\frac{\partial u}{\partial t} = H^*(g - Hu) + \lambda^2 \operatorname{div}(b \nabla u)$$

$$\Delta u$$

# Fonctions de pondérations

| Q  | Quadratique     | $u^2$              |
|----|-----------------|--------------------|
| GM | Geman & McClure | $u^2/(1+u^2)$      |
| HS | Hyper Surfaces  | $2\sqrt{1+u^2}-2$  |
| HL | Hebert & Leahy  | $\log(1+u^2)$      |
| GR | Green           | $2 \log(\cosh(u))$ |





Saturn  
(Hubble  
telescope)

|                    |        |
|--------------------|--------|
| observed           | Wiener |
| edge<br>preserving | $b$    |



Nîmes, image originale 512 × 512 (@CNES)



Nîmes, image dégradée: flou + bruit gaussien  $\sigma \sim 1.4$



Nîmes, image restaurée,  $\lambda=0.5$ ,  $\delta=10$



Image originale



Régularisation  $L^2$



Image observée  $g$



Régularisation semi-quadratique  
 $\lambda=0.5, \delta=10$

# Interprétation stochastique

Cadre discret :  $u(x) \longleftrightarrow u_{i,j}$

$g, u$  = champ de NxN variables aléatoires (pixels)

- Étude des probabilités
- Estimateurs statistiques
- Contraintes : introduites sur la loi  $P(u)$

# Interprétation stochastique : attache aux données

- ◆ Estimateur du **maximum de vraisemblance** :

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{Max}} \ P(\mathbf{g} | \mathbf{u})$$

- ◆ **Loi du bruit**

cas additif blanc gaussien indépendant des observations

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{n} & \longrightarrow & P(\mathbf{g}/\mathbf{u}) = P(\mathbf{g}-\mathbf{H}\mathbf{u}=\mathbf{n}) \\ \mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I) & & P(\mathbf{g}/\mathbf{u}) \propto \exp(-\|\mathbf{g}-\mathbf{H}\mathbf{u}\|^2/2\sigma^2) \end{array}$$

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{Max}} \ P(\mathbf{g} | \mathbf{u})$$

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{Min}} \ \|\mathbf{g}-\mathbf{H}\mathbf{u}\|^2/2\sigma^2$$

H et  $\sigma$  supposés connus

# Interprétation stochastique : terme de régularisation

- ◆ Choix de la probabilité  $P(u)$

**Contraintes locales** → **champ de Markov**

$$P_T(u) = \frac{1}{Z_T} e^{-\frac{\Phi(u)}{T}} \quad \text{où} \quad \Phi(u) = \lambda^2 \sum_c \varphi(D_c u / \delta)$$

Opérateur de différence  
Cliques  $c$  : sur les cliques  $c$

groupes de pixels voisins deux à deux

$$\Phi(u) = \lambda^2 \sum_{i,j} \varphi\left(\frac{|D_x u|_{i,j}}{\delta}\right) + \varphi\left(\frac{|D_y u|_{i,j}}{\delta}\right)$$

**Exemple : voisinage ordre 1** / **cliques associées**



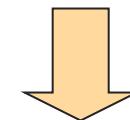
# Interprétation stochastique

**Maximum a posteriori : Max P(u/g)**

$$P(u/g) \propto P(g/u) P(u) \quad (\text{Bayes})$$

Vraisemblance : loi du bruit  $n=g-Hu$   
cas gaussien  $\propto \exp(-\|g-Hu\|^2/2\sigma^2)$

Loi a priori : modèle de Markov 2D  
 $\propto \exp(-\Phi(U))$



$$J(u) = \sum_{i,j} (g - Hu)_{i,j}^2 + \lambda^2 \sum_{i,j} \varphi\left(\frac{|D_x u|_{i,j}}{\delta}\right) + \varphi\left(\frac{|D_y u|_{i,j}}{\delta}\right)$$

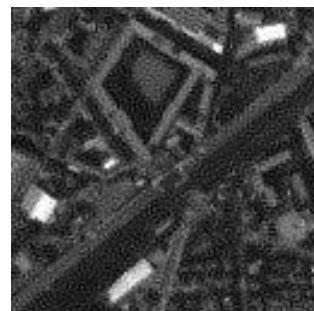
[Hebert & Leahy 94, Green 90, Geman & Reynolds 92...]

# Choix des paramètres ?

$\lambda=0.1, \delta=5$



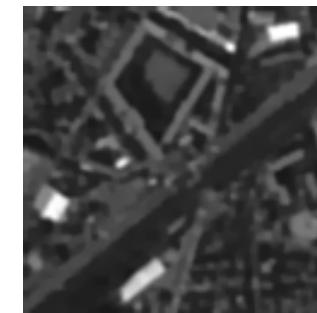
$\lambda=0.3, \delta=50$



$\lambda=0.3, \delta=0.5$



$\lambda=2, \delta=5$



- ◆ Estimation stochastique  
(maximum de vraisemblance par exemple)

# Minimisation $l^1$ Variation Totale

- ◆ Le critère à minimiser est

$$J(u) = \int_{\Omega} |g - Hu|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx$$

- ◆ On considère une norme  $l^1$  au lieu d'une norme  $l^2$  pour Tikhonov
- ◆ On ne considère plus les fonctions  $\varphi$  qui ont une régularisation  $l^2$  dans les zones homogènes, mais on considère une régularisation  $l^1$  partout.
- ◆ Terme de régularisation très utilisé en traitement d'image. On l'appelle la variation totale ou TV pour *Total Variation* en anglais. Nous allons voir pourquoi.

# Espace de minimisation ?

- ◆ Critère en variables continues :  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow u(x)$

$$J(u) = \int_{\Omega} |g - Hu|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| dx$$

- ◆ A priori il faut minimiser dans l'espace  $\{ Hu \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^1(\Omega)^2 \}$
- ◆ Un tel espace, comme l'espace de Sobolev  $W^{1,1}(\Omega) = \{ u \in L^1(\Omega), \nabla u \in L^1(\Omega)^2 \}$  est
  - Non reflexif : difficulté pour montrer existence d'une solution
  - trop régulier, il ne contient pas des fonctions qui ont des sauts.

[Evans & Gariepy “Measure Theory and Fine properties of functions” Studies in advanced mathematics, CRCPress, Berlin 1992].

- ◆ Un espace de minimisation contenant des fonctions qui peuvent avoir des discontinuités à travers des courbes → BV  
 Espace des fonctions à variations bornées.

# Espace BV

- ◆ Le gradient est considéré comme une mesure et on calcule la **variation totale** de cette mesure.

$$J_{TV}(u) = \int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(p) / p \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|p\|_{\infty} \leq 1 \right\}$$

La norme du sup est définie par :  $\|p\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |p(x)|$

$C_c^1$  est l'ensemble des fonctions  $C^1$  à support compact dans  $\Omega$ .

L'opérateur de dérivation est reporté sur une fonction test régulière.

[Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara “Functions of bounded variation and free discontinuity problems“ Oxford ; New York : Clarendon Press, cop. 2000].

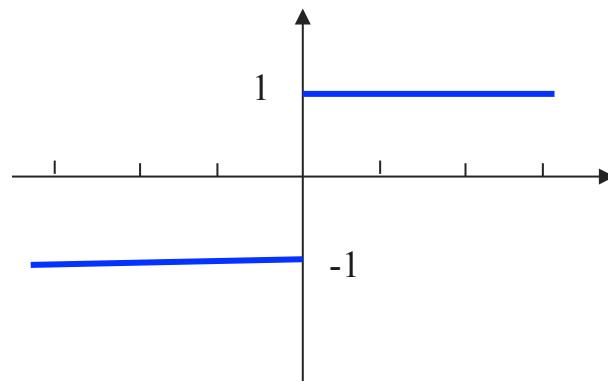
# Exemples

- ◆  $u \in C^1(\Omega)$

alors  $\int_{\Omega} u \operatorname{div}(p) dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot p dx$     ainsi  $\int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |\nabla u| dx$

- ◆  $u$  définie sur  $[-1,1]$  par     $u(x) = \begin{cases} -1 & si -1 \leq x < 0 \\ 1 & si 0 < x \leq 1 \end{cases}$

alors  $Du = 2\delta_0$    et     $\int_{-1}^1 |Du| = 2$

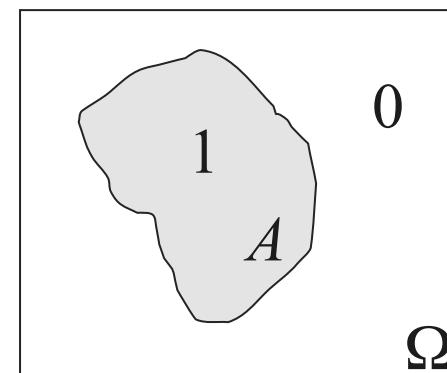


# Espace BV

- ◆ Exemple en 2D :  $\chi_A$  une fonction caractéristique d'ensemble :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} |D\chi_A| = Per_{\Omega}(A)$$



# Espace BV

- ♦ Le critère à minimiser est défini par 
$$J(u) = \int_{\Omega} |g - Hu|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |Du|$$
 qui est alors minimisé dans l'espace  $\{u : \Omega \rightarrow R / Hu \in L^2(\Omega), \int |Du| < \infty\}$
- ♦ si  $H$  est un opérateur linéaire continu n'annulant pas les constantes alors il y a existence et unicité d'une solution au problème de minimisation dans BV.  
[A. Chambolle, P-L. Lions, Numer. Math. 76(2), p.167-188, 1997]

# Espace BV

- ◆ En discret, ou si  $u$  régulière  $J_{TV}(u) = \int_{\Omega} |Du| = \sum_{i,j} |\nabla u|_{i,j} = \|\nabla u\|_1$

- ◆ Alors...intérêt de BV ???

- Bon espace de fonctions pour les images géométriques (cartoon)
- Résultats d'existence et unicité de solution
- Nouveaux algorithmes de minimisation

[A. Chambolle “An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications.”

Journal of Mathematical Imaging and Vision 20 (1-2): 89-97, January - March, 2004.]

# Formule de la co-aire

- ◆ Formule de la co-aire.

si  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est Lipschitz et  $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$  alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) |\nabla u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{u=\rho} g(x) ds \right] d\rho$$

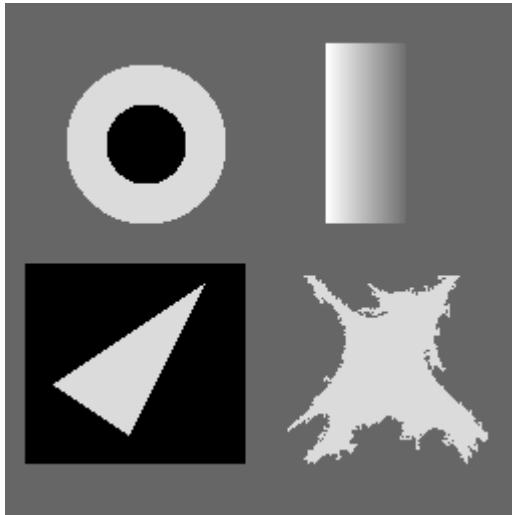
- ◆ Extension pour  $u$  dans  $BV$  et sur un domaine borné  $\Omega$

$$\int_{\Omega} |Du| = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\{x/u(x)=\rho\}} ds \right] d\rho$$

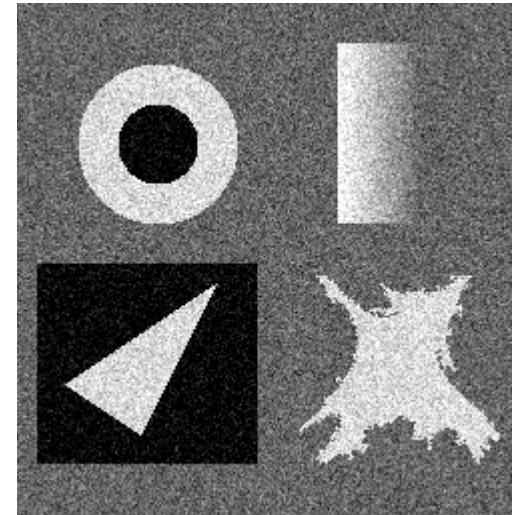
la VT de  $u$  est la somme des longueurs de ses lignes de niveaux.

# Exemple

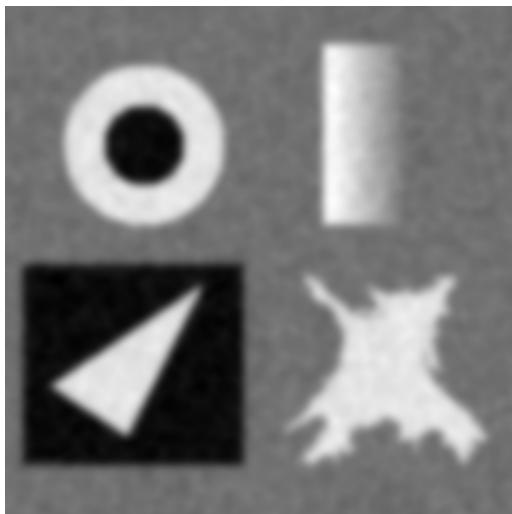
originale



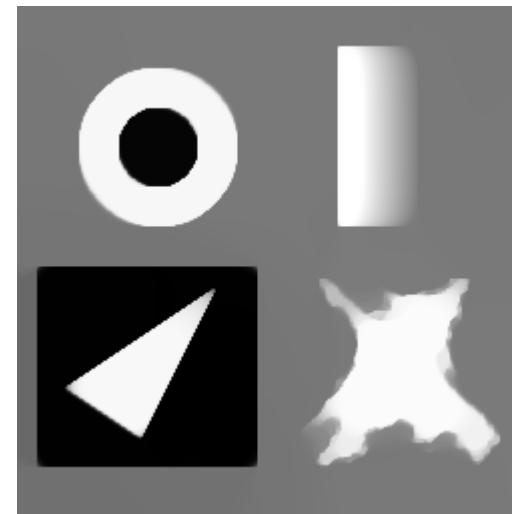
bruitée



régularisation  
 $L^2$

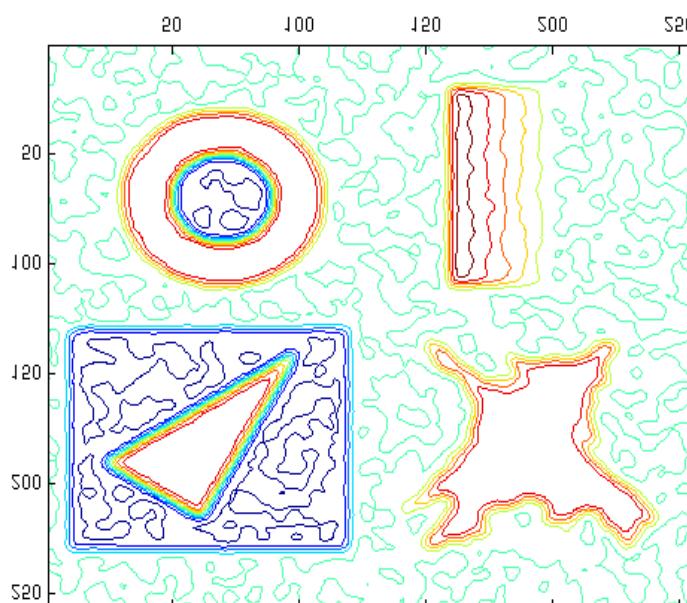
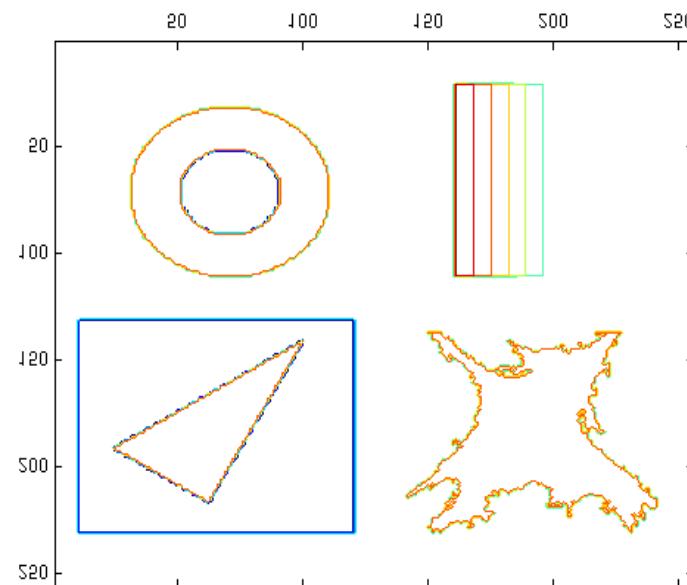


régularisation  
 $L^1$

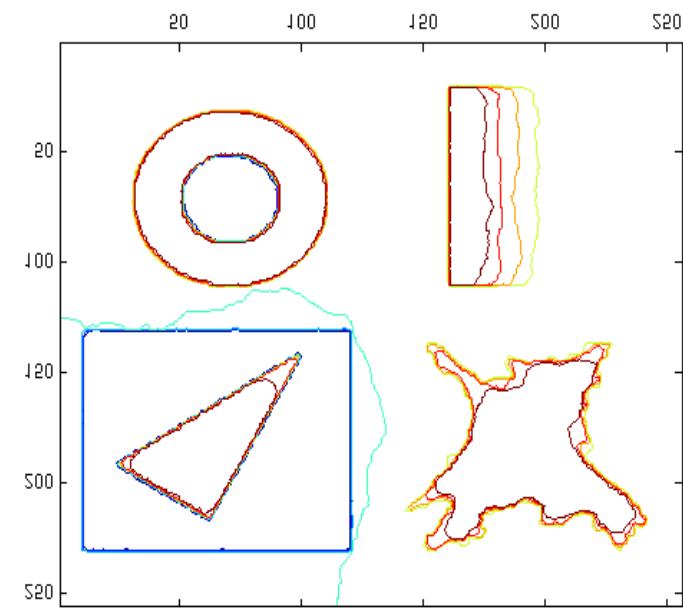


# Lignes de niveaux

originale



régularisation  $L^2$



régularisation  $L^1$

# Régularisation dans BV

- ◆ BV est le “bon” espace de fonctions pour les images, car c'est un espace de fonctions qui peuvent être discontinues sur des courbes, donc qui peuvent représenter des images avec des contours.
- ◆ Difficultés :
  - Pas d'équation d'Euler simple dans BV (on travaille avec des mesures)
  - Comment numériquement appréhender les solutions dans BV ?
- ◆ Solutions :
  - Algorithme de projection proposé par A.Chambolle [Workshop MIA 02]
  - Plus généralement algorithme en dualité
  - Variable auxiliaire et  $\Gamma$ -convergence,
  - Modèle explicite des contours par des courbes représentées par des ensembles de niveaux.
  - ...

# Régularisation $L^1$

- ◆ Un algorithme très connu : ROF [Rudin Osher Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Physica D, Elsevier, Vol. 60, 1992]
- ◆ Minimisation du critère en variables discrètes:

On cherche  $u$  qui minimise  $J(u)$  :

$$J(u) = \|g - Hu\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_1 = \sum_{i,j} (g_{i,j} - (Hu)_{i,j})^2 + \lambda \sum_{i,j} |(\nabla u)_{i,j}|$$

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2)$$
$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < N \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases}$$
$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < N \\ 0 & \text{si } j = N \end{cases}$$

# Variables discrètes

- ◆ La norme discrète  $L^1$  recommandée est

$$|\nabla u|_{i,j} = \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}$$

- ◆ Il est préférable de discréteriser en bout de chaîne. Si on considère le gradient dans  $L^1$ , l'équation d'Euler est

$$H^*(Hu - g) - \lambda^2 \operatorname{div}\left(\frac{1}{|\nabla u|} \nabla u\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

# Variables discrètes

- ◆ On introduit la divergence discrète, par analogie à la divergence continue, par

$$\text{div} = -\nabla^*.$$

$$\forall p \in \mathbb{R}^{N^2} \times \mathbb{R}^{N^2} \text{ et } \forall u \in \mathbb{R}^{N^2} \quad \langle -\text{div}(p), u \rangle_{\mathbb{R}^{N^2}} = \langle p, \nabla u \rangle_{\mathbb{R}^{N^2} \times \mathbb{R}^{N^2}}$$

- ◆ On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \text{div}(p)_{i,j} &= \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{si } 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & \text{si } i = 1 \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{si } i = N \end{cases} \\ &+ \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{si } 1 < j < N \\ p_{i,j}^2 & \text{si } j = 1 \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{si } j = N \end{cases} \end{aligned}$$

# Minimisation dans $L^1$

- ◆ Problème de linéarisation du terme de régularisation.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H^*(g - Hu) + \lambda^2 \operatorname{div} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \nabla u \right)$$

- ◆ Algorithme itératif

$$u^{n+1} = u^n + \delta t \left\{ H^*(g - Hu) + \lambda^2 \operatorname{div} \left( \frac{1}{|\nabla u|} \nabla u \right) \right\}$$

- ◆ Rudin Osher Fatemi (ROF 92) ont proposé un algorithme résolvant l' équation d' Euler associée, numériquement stable. Estimation du paramètre  $\lambda$  en utilisant la contrainte

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (g - Hu)^2 dx = \sigma^2$$

# Algorithme ROF

si  $u_{ij}^n = u(ih, jh, n\Delta t)$  une itération est

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \frac{\Delta t}{h} \left\{ \Delta_-^x u_{ij}^n \left( \frac{\Delta_+^x u_{ij}^n}{\left( (\Delta_+^x u_{ij}^n)^2 + (m(\Delta_+^y u_{ij}^n, \Delta_-^y u_{ij}^n))^2 \right)^{1/2}} \right) + \Delta_-^y u_{ij}^n \left( \frac{\Delta_+^y u_{ij}^n}{\left( (\Delta_+^y u_{ij}^n)^2 + (m(\Delta_+^x u_{ij}^n, \Delta_-^x u_{ij}^n))^2 \right)^{1/2}} \right) \right\} - \Delta t \lambda^n (u_{ij}^n - g_{ij})$$

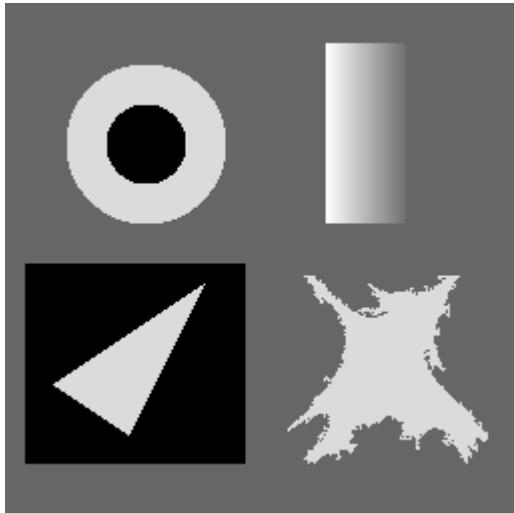
avec  $\Delta_\pm^x u_{ij} = \pm(u_{i\pm 1j} - u_{ij})$  et  $m(a, b) = \min \text{mod}(a, b) = \left( \frac{\text{sgn } a + \text{sgn } b}{2} \right) \min(|a|, |b|)$

et  $\frac{\Delta t}{h^2} \leq c$  pour la stabilité

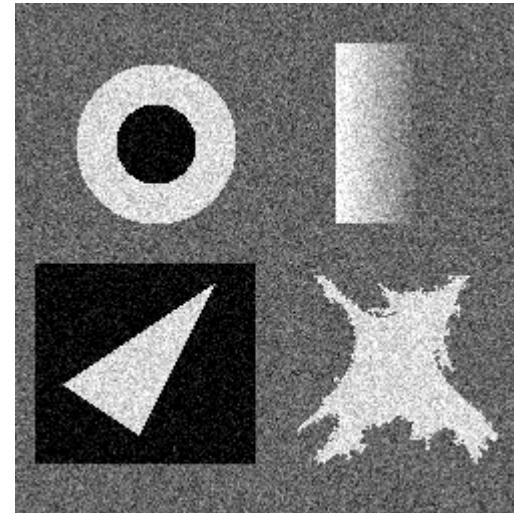
La fonction minmod est un limiteur qui permet d'obtenir un schéma numérique non oscillant. Par exemple  $\min \text{mod}(\Delta_+, \Delta_-) = 0$  si  $\text{sgn}(\Delta_+) \neq \text{sgn}(\Delta_-)$

# Exemple

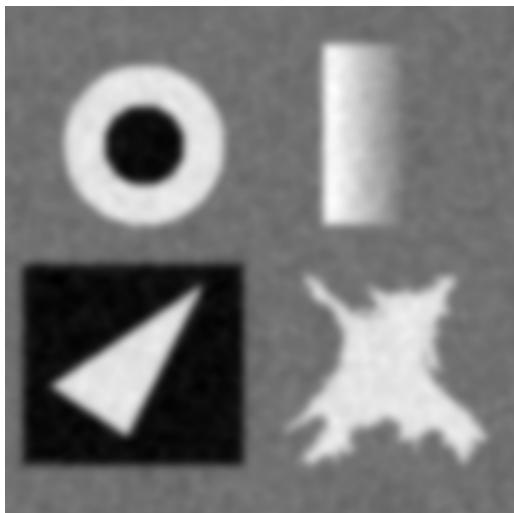
originale



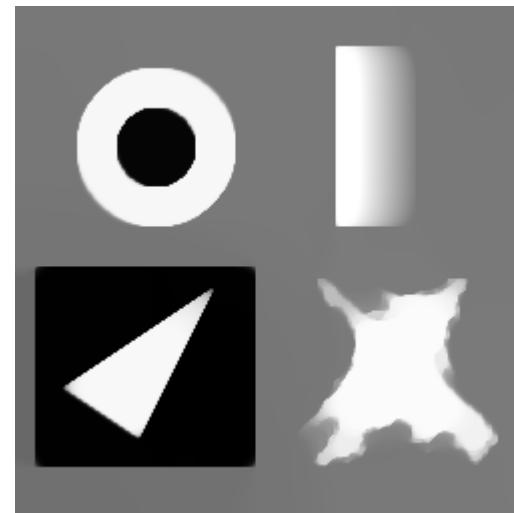
bruitée



régularisation  
 $L^2$

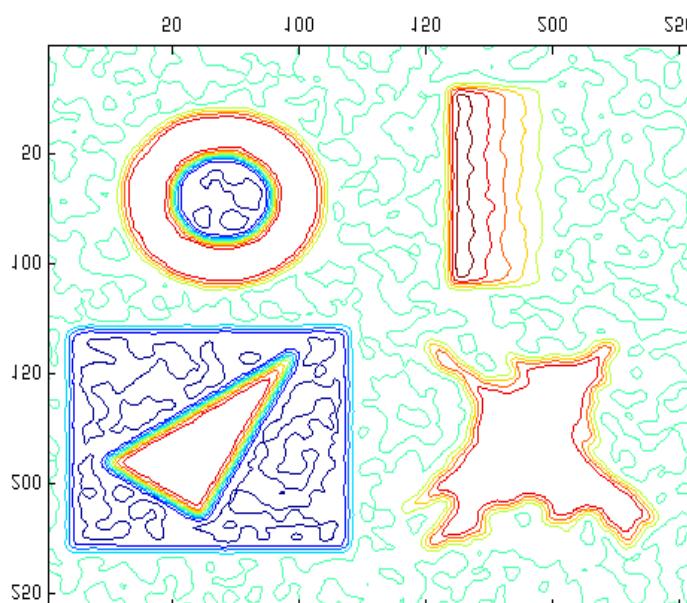
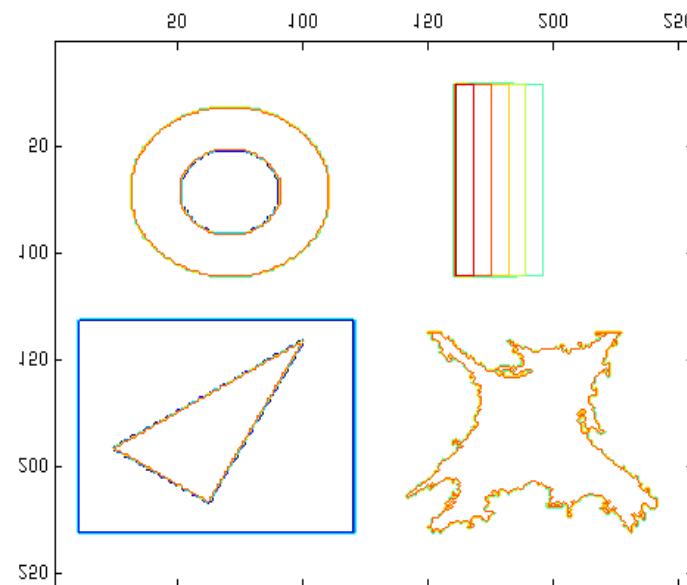


régularisation  
 $L^1$

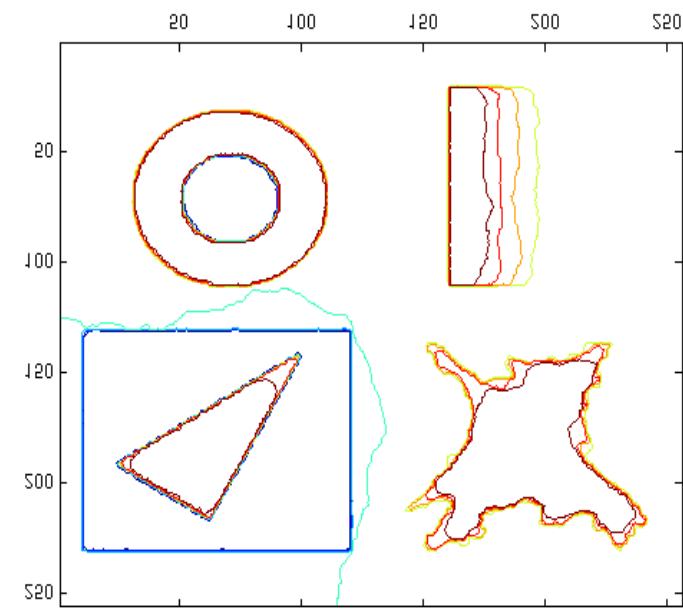


# Lignes de niveaux

originale



régularisation  $L^2$



régularisation  $L^1$

# Autres Algorithmes

- ◆ Des dizaines d'articles sur le sujet, algorithme issus de la formulation en variable continue
  - Méthodes de projections
  - Dualité
  - Point intérieurs
  - Sous-gradients
  - Nouvelles méthodes rapides par algorithme de Nesterov