

=2018

TÍTULO

KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dr. VANDERLEI C.
OLIVEIRA JR.

Co-orientadores: Dra. Nome da
Co-orientadora Sobrenome
Dr. Nome do Co-orientador
Sobrenome

Rio de Janeiro
de 2018

TÍTULO

KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

TESE SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA
DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM
GEOFÍSICA.

Examinada por:

Dra. Nome da Examinadora Sobrenome

Dr. Nome da Examinador Sobrenome

Dra. Nome da Examinadora Sobrenome

Dr. Nome da Examinador Sobrenome

Dra. Nome da Examinadora Sobrenome

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DE 2018

TEIXEIRA HALLAM, KRISTOFFER ALEXANDER
Título/KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA
HALLAM. – Rio de Janeiro: ON, 2018.
??, 41 p.: il.; 29, 7cm.
Orientador(a): VANDERLEI C. OLIVEIRA JR.
Co-orientadores: Nome da Co-orientadora Sobrenome
Nome do Co-orientador Sobrenome
Tese (doutorado) – ON/Programa de Pós-graduação em
Geofísica, 2018.
Referências Bibliográficas: p. 39 – 41.
1. Primeira palavra-chave. 2. Segunda palavra-chave.
3. Terceira palavra-chave. I. Sobrenome, Nome da Co-
orientadora *et al.* II. Observatório Nacional, Programa de
Pós-graduação em Geofísica. III. Título.

Dedicatória (opcional).

Agradecimentos

Agradecimentos (opcional).

Resumo da Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Observatório Nacional como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

TÍTULO

KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

/2018

Este projeto propõe ...

Abstract of the Thesis presented to the National Observatory's Graduate Program
in Geophysics as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor
in Geophysics.

TITLE

KRISTOFFER ALEXANDER TEIXEIRA HALLAM

/2018

In this work, we propose ...

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
2 Sistemas de Referência	2
2.1 Operadores Diferenciais em Coordenadas Geodésicas	5
3 Distúrbio de gravidade e anomalia de gravidade	8
3.1 Distúrbio de gravidade	8
3.2 Anomalia de gravidade	11
3.3 Diferença entre anomalia e distúrbio	12
4 Camada Equivalente	14
4.1 Fundamentos Teóricos	14
4.2 Inversão linear e vetor de parâmetros	16
5 Metodologia	18
5.1 Método Proposto	18
5.2 Avaliação da Metodologia	21
6 Resultados e Discussões	23
6.1 Teste Sintético 1	23
6.2 Teste Sintético 2	27
6.3 Teste com Dados Reais	31
6.3.1 Descrição dos dados reais	31
6.4 Aplicação da Metodologia a Dados Reais	32
7 Conclusões	37
7.1 Trabalhos Futuros	38
Referências Bibliográficas	39

Listas de Figuras

2.1 (a) e (b) mostram <i>Geocentric Cartesian System</i> (GCS) e o <i>Geocentric Geodetic System</i> (GGS). O GGS é definido por um elipsóide oblato com semi-eixo menor b e semi-eixo maior a . Neste sistema de coordenadas, a posição de um ponto é determinado pela altitude geométrica h , latitude geodésica φ e longitude λ . O é o centro de massa da Terra, P é o ponto de observação, e os vetores unitários \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} definem mutuamente as direções ortogonais em P (eq. 2.1). Em (b), Q é a projeção de P sobre o elipsóide de referência na mesma latitude e longitude. (c) O sistema de coordenadas cartesianas topocêntricas (TCS) com origem em um ponto P qualquer. Eixos x e y são paralelos aos vetores unitários \mathbf{v} e \mathbf{w} , respectivamente, e o eixo z é oposto a \mathbf{u} . O plano de cor cinza é o mesmo mostrado em (a) e (b).	3
3.1 Representação esquemática do vetor de gravidade. O vetor azul corresponde a \mathbf{a}_V ; o vetor verde corresponde a \mathbf{a}_C que aumenta à medida que observador se aproxima do plano equatorial; o vetor vermelho representa \mathbf{g} (eq. 3.1).	9
3.2 O vetor gravidade \mathbf{g}_P , vetor gravidade normal γ_P , vetor distúrbio de gravidade $\delta\mathbf{g}_P$ (eq. 3.5), e vetor unitário \mathbf{u}_P (eq. 2.1) no ponto P sobre a superfície da Terra. O vetor gravidade $\mathbf{g}_{Q'}$ no ponto Q' sobre o geóide, vetor gravidade normal γ_Q no ponto Q sobre o elipsóide de referência, altitude geométrica h , altitude ortométrica H e a ondulação geoidal N . A linha pontilhada passando pelos pontos Q , Q' e P é normal à superfície do elipsóide de referência em Q . Esta figura mostra a aproximação habitualmente usada em que o elipsóide e o geóide são representados pelas superfícies paralelas de forma que $h \approx H + N$	10
4.1 E	15
5.1 Representação esquemática da configuração espacial de dados gravimétricos de diferentes origens.	18

5.2	Representação esquemática da avaliação da metodologia.	21
6.1	E	23
6.2	E	24
6.3	E	24
6.4	E	25
6.5	E	25
6.6	E	26
6.7	E	26
6.8	Diferença entre resíduos de 6.7(a) e 6.7(b) com superposição dos levantamentos REG.	27
6.9	E	27
6.10	E	28
6.11	Resíduos Δd_2^o .	28
6.12	E	29
6.13	E	29
6.14	E	30
6.15	E	30
6.16	E	31
6.17	Diferença entre 6.16(a) e 6.16(b)	31
6.18	E	33
6.19	E	33
6.20	Mapa Δd_2 .	34
6.21	E	34
6.22	E	35
6.23	E	35
6.24	E	36
6.25	E	36

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Sistemas de Referência

Um determinado problema pode ser abordado usando diferentes sistemas de coordenadas. No âmbito da modelagem gravimétrica geofísica, são três os sistemas de referência terrestres importantes. Eles acompanham a Terra em seu movimento de rotação e são usados para descrever a posição e movimentos de objetos sobre ou próximo à superfície da Terra (TORGE e MÜLLER, 2012). O sistema de coordenadas esféricas é muito usada também, principalmente em estudos geodésicos globais (e.g., HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005; TORGÉ e MÜLLER, 2012), no entanto ele não será abordado neste trabalho.

O primeiro sistema de referência tem origem no centro de massa médio da Terra em que os eixos

- Z - coincide com o eixo de rotação médio da Terra;
- X - aponta na direção do meridiano de Greenwich;
- Y - é posicionado de maneira a respeitar a regra da mão direita.

Os eixos X , Y e Z são ortogonais entre si (Fig. 2.1). Este sistema de referência é denominado de diferentes formas na literatura: *Mean Terrestrial System* (e.g., SOLER, 1976) ou *Earth-fixed geocentric Cartesian system* (e.g., TORGÉ e MÜLLER, 2012) ou *Earth-centered Earth-fixed system* (e.g., BOUMAN *et al.*, 2013). Para simplificar, este sistema foi nomeado *Geocentric Cartesian System* (GCS) neste trabalho.

Outro sistema de referência importante que também é geocêntrico, está relacionado ao elipsóide de referência usado para o modelo de Terra Normal (BOUMAN *et al.*, 2013; HEISKANEN e MORITZ, 1967; SOLER, 1976; TORGÉ e MÜLLER, 2012). É o sistema geocêntrico de coordenadas geodésicas em que a posição de um ponto é definida pela *altitude geométrica* h , *latitude geodésica* φ e *longitude* λ (Fig. 2.1). Por conveniência, este sistema foi nomeado como *Geocentric Geodetic System*.

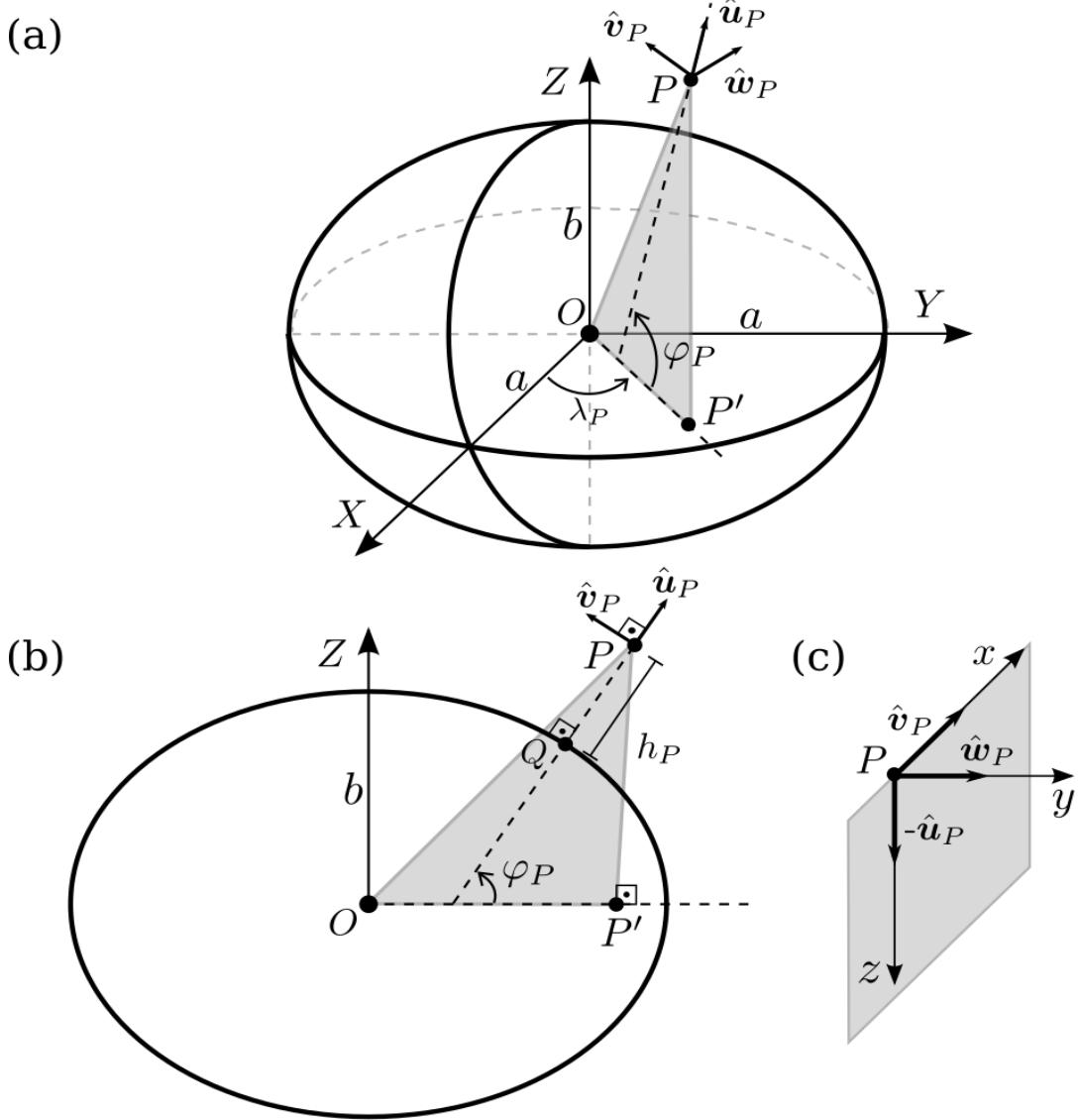


Figura 1.1: (a) e (b) mostram *Geocentric Cartesian System* (GCS) e o *Geocentric Geodetic System* (GGS). O GGS é definido por um elipsóide oblato com semi-eixo menor b e semi-eixo maior a . Neste sistema de coordenadas, a posição de um ponto é determinado pela altitude geométrica h , latitude geodésica φ e longitude λ . O é o centro de massa da Terra, P é o ponto de observação, e os vetores unitários \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} definem mutuamente as direções ortogonais em P (eq. 2.1). Em (b), Q é a projeção de P sobre o elipsóide de referência na mesma latitude e longitude. (c) O sistema de coordenadas cartesianas topocéntricas (TCS) com origem em um ponto P qualquer. Eixos x e y são paralelos aos vetores unitários \mathbf{v} e \mathbf{w} , respectivamente, e o eixo z é oposto a \mathbf{u} . O plano de cor cinza é o mesmo mostrado em (a) e (b).

(GGS). Em um dado ponto, três vetores unitários mutuamente ortogonais entre si podem ser definidos como (SOLER, 1976):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

As coordenadas φ e λ podem variar nos intervalos de $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, respectivamente (SOLER, 1976). A conversão entre as coordenadas (h, φ, λ) descritas no GGS e as coordenadas (X, Y, Z) descritas no GCS (Fig. 2.1) é dada por

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [(1-e^2)N+h] \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

em que

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad ; \quad M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (1.3)$$

em que N e M são os raios de curvatura principal e meridional, respectivamente (SANSÒ e SIDERIS, 2013; SOLER, 1976; TORGE e MÜLLER, 2012). A transformação contrária (do GCS para o GGS) é feita usando soluções iterativas (e.g., BOUMAN *et al.*, 2013; HEISKANEN e MORITZ, 1967; TORGE e MÜLLER, 2012).

O último sistema de coordenadas que será comentado é o *topocentric Cartesian coordinate system* (TCS), muito usado em estudos geofísicos em escala local e regional. Ele tem sua origem num ponto P sobre ou próximo da superfície da Terra, seus eixos x e y são paralelos aos vetores unitários \mathbf{v} e \mathbf{w} (eq. 2.1), respectivamente, enquanto que o eixo z tem sentido oposto ao vetor unitário \mathbf{u} (Fig. 2.1c).

Considere, por exemplo, o TCS (Fig. 2.1c) com origem no ponto P e coordenadas (X_P, Y_P, Z_P) referenciadas no GCS (Fig. 2.1a). Neste caso, a relação entre as coordenadas (X, Y, Z) do ponto em GCS e as coordenadas (x, y, z) do mesmo ponto no TCS é dado por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = S^\top \begin{bmatrix} X - X_P \\ Y - Y_P \\ Z - Z_P \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

em que S é uma matrix ortogonal 3×3 cujas primeira, segunda e terceira colunas são definidas, respectivamente, pelos vetores unitários \mathbf{v} , \mathbf{w} e $-\mathbf{u}$ (eq. 2.1), avaliados no ponto P .

1.1 Operadores Diferenciais em Coordenadas Geodésicas

Na modelagem gravimétrica, muito se fala em funções harmônicas. Elas são funções cujo Laplaciano é igual a zero (e.g., BLAKELY, 1996; HEISKANEN e MORITZ, 1967; TORGE e MÜLLER, 2012). Uma destas funções corresponde ao inverso da distância (r^{-1}) definida por

$$r^{-1}(x, y, z; x', y', z') = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.5)$$

supondo (x, y, z) e (x', y', z') pontos distintos em coordenadas cartesianas. A transformação das coordenadas cartesianas da eq. 2.5 em coordenadas geodésicas, por meio das relações apresentadas em 2.2, faz com que r^{-1} possa ser expressa por

$$r^{-1}(h, \varphi, \lambda; h', \varphi', \lambda') = \left(A^2 + B^2 + C^2 \right)^{-1/2} \quad (1.6)$$

em que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha; \beta) \\ B(\alpha; \beta) \\ C(\alpha; \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

sendo $\alpha = (h, \varphi, \lambda)$ e $\beta = (h', \varphi', \lambda')$ as coordenadas geodésicas relacionadas a (x, y, z) e (x', y', z') , respectivamente.

A modelagem gravimétrica se utiliza de operações como as derivadas parciais de funções harmônicas nas distintas direções do sistema de coordenada escolhido. Não há, contudo, trabalhos que mostrem explicitamente o gradiente de uma função harmônica em coordenadas geodésicas. ARFKEN e WEBER (2005, cap. 2) demonstram, apenas, o desenvolvimento algébrico da distância infinitesimal entre dois pontos vizinhos num sistema de coordenadas curvilíneas, sem entrar no mérito das coordenadas geodésicas. Este desenvolvimento culmina nas equações diferenciais no espaço curvo, dentre elas o gradiente, também mostrado por SANSÒ e SIDERIS (2013, pg. 30).

Neste contexto, são desenvolvidas as derivadas parciais da função harmônica r^{-1} em coordenadas geodésicas e o seu gradiente.

$$\begin{aligned}
\partial_h r^{-1} &= -r^{-3} \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\
\partial_\varphi r^{-1} &= -r^{-3}(M + h) \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\
\partial_\lambda r^{-1} &= -r^{-3}(N + h) \cos \varphi \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (1.8)$$

Em forma matricial, 2.8 pode ser transcrito como

$$\begin{bmatrix} \partial_h \\ \partial_\varphi \\ \partial_\lambda \end{bmatrix} r^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M + h & 0 \\ 0 & 0 & (N + h) \cos \varphi \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{bmatrix}}_{R^\top} -r^{-3} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

em que H é a matriz diagonal 3×3 cujos elementos correspondem aos fatores de escala da transformação de coordenadas, e R é a matrix ortogonal 3×3 cujas primeira, segunda e terceira colunas são definidas, respectivamente, pelos vetores unitários \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} (eq. 2.1).

A derivada parcial ∂_x aplicada à função da eq. 2.5 dá

$$\partial_x r^{-1}(x, y, z; x', y', z') = -r^{-3}(x - x'). \quad (1.10)$$

Portanto, ao estender esta lógica para as outras componentes, encontra-se

$$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} r^{-1}(x, y, z; x', y', z') = \nabla_C r^{-1} = -r^{-3} \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} = -r^{-3} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

em que $\nabla_C r^{-1}$ é o gradiente da função r^{-1} em coordenadas cartesianas. Ao substituir o resultado de 2.11 em 2.9 e passar a matriz H para o lado esquerdo da equação, 2.9 pode ser reescrito como:

$$\underbrace{H^{-1} \begin{bmatrix} \partial_h \\ \partial_\varphi \\ \partial_\lambda \end{bmatrix}}_{\nabla_G r^{-1}} r^{-1} = R^\top \nabla_C r^{-1} \quad (1.12)$$

em que foi definido que $\nabla_G r^{-1}$, o gradiente da função em coordenadas geodésicas, é o produto de H^{-1} pelo vetor das derivadas parciais. Logo, o gradiente da função r^{-1} em coordenadas geodésicas pode ser expresso como

$$\nabla_G r^{-1} = R^T \nabla_C r^{-1}. \quad (1.13)$$

Conclui-se que o gradiente em coordenadas geodésicas da função harmônica r^{-1} é igual ao produto da matriz ortogonal dos vetores unitários pelo gradiente em coordenadas cartesianas da mesma função.

Capítulo 2

Distúrbio de gravidade e anomalia de gravidade

2.1 Distúrbio de gravidade

Considerando a correta remoção dos efeitos não-gravitacionais de origem externa, como por exemplo: aceleração de Coriolis, vibrações de alta frequencia (BAUMANN *et al.*, 2012; GLENNIE *et al.*, 2000; NABIGHIAN *et al.*, 2005), variações temporais como as marés terrestres, deriva instrumental e mudanças na pressão barométrica, o vetor de gravidade \mathbf{g} pode ser expresso como a soma da atração gravitacional \mathbf{a}_V devido à distribuição interna de densidade da Terra e aceleração centrífuga \mathbf{a}_C causada pela rotação da Terra em torno do seu eixo. Matematicamente, a gravidade é dada por

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}_V + \mathbf{a}_C = c_g G \int_v \rho' dv' \nabla r^{-1} + \mathbf{a}_C, \quad (2.1)$$

em que G é a constante Newtoniana de gravitação dada em ($m^3 kg^{-1} s^{-2}$), $c_g = 10^5$ é o fator de conversão de $m s^{-2}$ para mGal, $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, no sistema GGS, é a distância entre a fonte gravitacional na posição (x', y', z') e o ponto de observação (x, y, z) (definido na eq. 2.7), ρ' é a distribuição de densidade e a integral indica que a atração gravitacional é dada pela contribuição de todas as fontes presentes no interior do volume dv' (Fig. 3.1). A intensidade, chamada simplesmente de gravidade, é

$$g = \| \mathbf{g} \| \quad (2.2)$$

(HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005).

Por conveniência, o campo de gravidade da Terra é aproximada pelo campo produzido por um elipsóide de referência, cujo modelo é rígido e geocêntrico. Este elipsóide de referência possui um semi-eixo menor b coincidente com o eixo de rotação médio da Terra, Z , a mesma

massa total (incluindo a atmosfera) e a mesma velocidade angular da Terra (HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005; TORGE e MÜLLER, 2012; VANÍČEK e KRAKIWSKY, 1987).

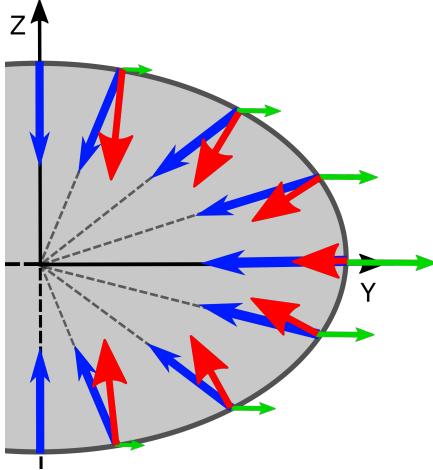


Figura 2.1: Representação esquemática do vetor de gravidade. O vetor azul corresponde a \mathbf{a}_V ; o vetor verde corresponde a \mathbf{a}_C que aumenta à medida que observador se aproxima do plano equatorial; o vetor vermelho representa \mathbf{g} (eq. 3.1).

sobre a distribuição de densidade $\tilde{\rho}$ no interior do volume do elipsóide. \mathbf{a}_C , por outro lado, é exatamente o mesmo que aquele visto em 3.1. De forma análoga a 3.2, a gravidade normal é dada por

$$\gamma = \|\gamma\|. \quad (2.4)$$

Apesar de \mathbf{a}_V e \mathbf{a}_U serem funções harmônicas quando avaliadas em regiões em que $\rho = 0$ e $\rho' = 0$, \mathbf{g} e γ não o são. Isto se deve pelo fato de \mathbf{a}_C não ser harmônico.

A diferença entre \mathbf{g}_P e γ_P no mesmo ponto P dá o vetor *distúrbio de gravidade*, expresso por

$$\delta\mathbf{g}_P = \mathbf{g}_P - \gamma_P = c_g G \int_v \Delta\rho' dv' \nabla r^{-1}. \quad (2.5)$$

Como as componentes centrífugas de \mathbf{g}_P e γ_P se cancelam mutuamente, o vetor distúrbio de gravidade é um campo de origem puramente gravitacional e, por consequência, uma quantidade harmônica, causada pelo contraste entre a verdadeira distribuição de densidade interna da Terra e a distribuição de densidade do elipsóide de referência ($\Delta\rho = \rho - \tilde{\rho}$) (BLAKELY, 1996). Na geofísica aplicada, estas diferenças de densidade são geralmente chamadas de *massa anômalas* (e.g., HAMMER, 1945; LA-

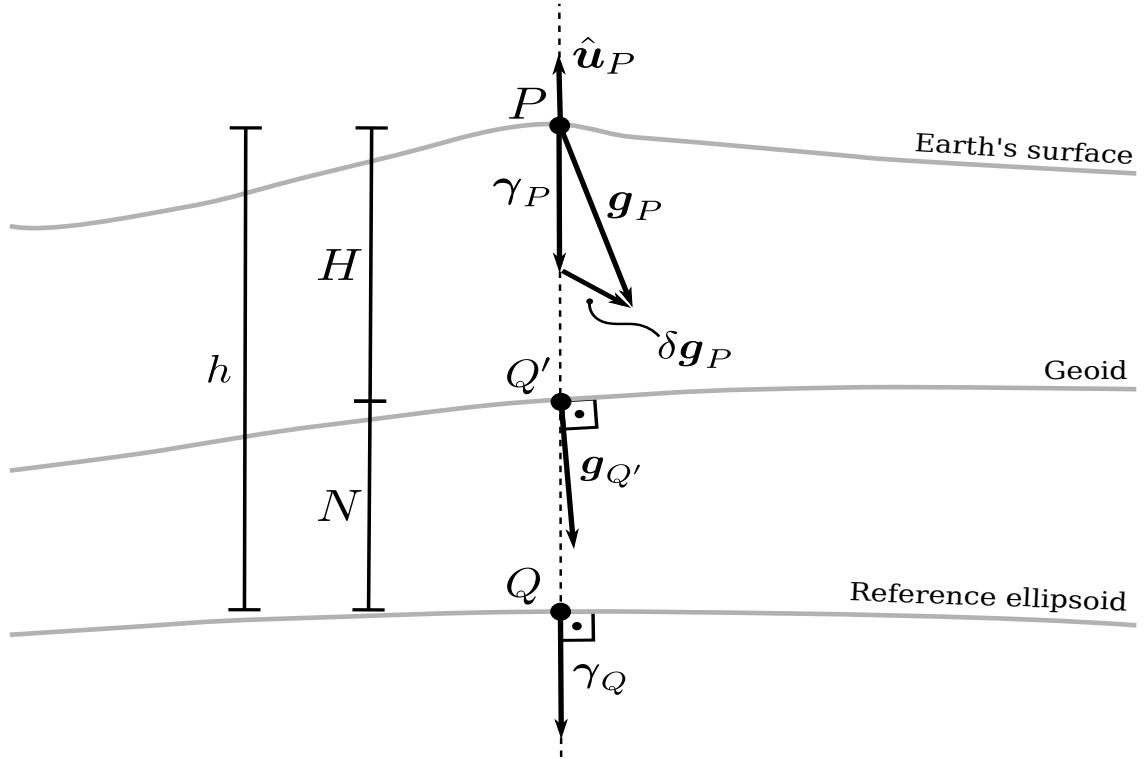


Figura 2.2: O vetor gravidade \mathbf{g}_P , vetor gravidade normal γ_P , vetor distúrbio de gravidade $\delta\mathbf{g}_P$ (eq. 3.5), e vetor unitário \mathbf{u}_P (eq. 2.1) no ponto P sobre a superfície da Terra. O vetor gravidade $\mathbf{g}_{Q'}$ no ponto Q' sobre o geóide, vetor gravidade normal γ_Q no ponto Q sobre o elipsóide de referência, altitude geométrica h , altitude ortométrica H e a ondulação geoidal N . A linha pontilhada passando pelos pontos Q , Q' e P é normal à superfície do elipsóide de referência em Q . Esta figura mostra a aproximação habitualmente usada em que o elipsóide e o geóide são representados pelas superfícies paralelas de forma que $h \approx H + N$.

FEHR, 1965), *densidades anômalas* (e.g., FORSBERG, 1984) ou fontes gravimétricas (e.g., BLAKELY, 1996). A nomenclatura usada para este estudo será a última. A Fig. 3.2 ilustra o vetor de gravidade \mathbf{g}_P , vetor de gravidade normal γ_P e o vetor de distúrbio de gravidade $\delta\mathbf{g}_P$ num mesmo ponto P localizado na superfície da Terra.

A diferença entre as magnitudes do vetor de gravidade $g_P = \|\mathbf{g}_P\|$ e do vetor gravidade normal $\gamma_P = \|\gamma_P\|$ no mesmo ponto P é denominada *distúrbio de gravidade* (HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005) e pode ser expressa matematicamente por:

$$\delta g_P = g_P - \gamma_P. \quad (2.6)$$

Comparando a equação 3.6 com a equação 3.5, é possível perceber que o distúrbio de gravidade δg_P não é igual à magnitude do vetor distúrbio de gravidade $\delta\mathbf{g}_P$ (BARTHELMES, 2013; SANSÒ e SIDERIS, 2013).

Reordenando a eq. 3.5 de forma a conter o vetor de gravidade no lado esquerdo

da equação,

$$\mathbf{g}_i = \gamma_i + \delta\mathbf{g}_i, \quad (2.7)$$

expandindo-a em séries de Taylor e truncando-a no termo de primeira ordem (SANSÒ e SIDERIS, 2013), é obtido a aproximação para a gravidade dada por

$$g_i \approx \gamma_i + \gamma_i^\top \delta\mathbf{g}_i \quad (2.8)$$

em que \mathbf{gamma}_i é o vetor unitário na direção do vetor gravidade normal. Esta aproximação só é válida porque a condição $\gamma_i \gg \|\delta\mathbf{g}_i\|$ é satisfeita para todos os pontos sobre ou acima da superfície da Terra. Em escalas locais ou regionais, o vetor unitário γ_i pode ser considerado constante ao longo da área de estudo e paralelo ao eixo z do sistema TCS (Fig. 2.1c) e terá a direção $-\mathbf{u}_i$ no sistema GGS.

Usando a eq. 3.8 e fixando γ num ponto P na origem do sistema TCS (Fig. 2.1c), o distúrbio de gravidade pode ser reescrita por:

$$\delta g_i \approx \gamma_P^\top \delta\mathbf{g}_i. \quad (2.9)$$

Esta equação mostra que o distúrbio de gravidade δg_i é aproximadamente a componente de $\delta\mathbf{g}_i$ na direção do vetor gravidade normal γ_P (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005; SANSÒ e SIDERIS, 2013). Como \mathbf{u}_i é paralelo a γ_P (Fig. 3.2), o distúrbio de gravidade pode ser definida como sendo a componente- u do vetor distúrbio de gravidade exercida pelas fontes gravimétricas no ponto $(h_i, \varphi_i, \lambda_i)$. Dessa forma, é possível aplicá-lo na modelagem de uma função harmônica:

$$d_i = \iiint_v G \Delta\rho(h', \varphi', \lambda') \mathbf{u}_i \cdot \nabla r^{-1} dv', \quad (2.10)$$

em que $\Delta\rho(h', \varphi', \lambda')$ é o contraste de densidade no ponto (h', φ', λ') contida no volume v , $\mathbf{u}_i \cdot \nabla r^{-1} = \partial_h r^{-1}$, r é dada pela eq. 2.6, e a integração é realizada sobre (h', φ', λ') .

2.2 Anomalia de gravidade

Uma outra quantidade anômala muito usada em geofísica é o *vetor de anomalia de gravidade*. É definida, num ponto P , como a diferença entre o vetor de gravidade num ponto Q' no geóide (uma superfície equipotencial particular do potencial de gravidade (BLAKELY, 1996; HEISKANEN e MORITZ, 1967; HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005)) e o vetor de gravidade normal num ponto Q

sobre a superfície do elipsóide, ambos na mesma latitude e longitude (Fig. 3.2)

$$\Delta \mathbf{g}_P = \mathbf{g}_{Q'} - \gamma_Q. \quad (2.11)$$

Analogamente ao caso do distúrbio de gravidade 3.6, a anomalia de gravidade é dada por

$$\Delta g_P = g_{Q'} - \gamma_Q, \quad (2.12)$$

em que $g_{Q'} = \|\mathbf{g}_{Q'}\|$ é a magnitude do vetor de gravidade sobre o geóide, no ponto Q' , e $\gamma_Q = \|\gamma_Q\|$ é a magnitude do vetor gravidade normal no elipsóide de referência, no ponto Q (Fig. 3.2). A anomalia de gravidade depende da latitude e da longitude e não é uma função da altitude (BARTHELMES, 2013). Como a gravidade e a gravidade normal estão localizados em posições diferentes, a anomalia de gravidade é, na verdade, uma combinação de efeitos gravitacionais e centrífugos, ao invés de ter uma quantidade puramente gravitacional como o distúrbio de gravidade. Como consequencia, não é possível computar a continuação para cima da anomalia de gravidade, pois esta não uma função harmônica. Entretanto, existem muitos trabalhos na literatura de autores que realizaram esta transformação em dados de anomalia de gravidade. Estes autores devem ter implicitamente considerado que a anomalia de gravidade é uma aproximação do distúrbio de gravidade. Este último pode ser empregado num processo de continuação para cima.

BLAKELY (1996) deu um significado geofísico às anomalias de gravidade numa perspectiva de geofísica aplicada. Ele definiu corretamente as fontes gravimétricas como sendo o contraste de densidade entre a distribuição de densidade interna verdadeira da Terra e a distribuição de densidade da Terra normal. Entretanto, ele não mostrou que a remoção da gravidade normal avaliada no elipsóide da gravidade medida sobre a superfície da Terra comporta um campo anômalo produzido não só pelo efeito das fontes gravimétricas, mas como também uma pequena parcela de efeitos gravitacionais e centrífugos. Esta parcela indesejada e não-harmônica permanece após a redução pelo simples fato da gravidade normal ter sido calculada num ponto diferente do da medida.

2.3 Diferença entre anomalia e distúrbio

Dependendo das correções empregadas às anomalias de gravidade, diferentes delas podem ser calculadas. Estas correções são usualmente conhecidas como *reduções gravimétricas*. A anomalia de ar-livre, por exemplo, é definida, segundo BLAKELY (1996); HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ (2005):

$$\Delta g^F = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H_P, \quad (2.13)$$

em que o termo mais à direita é o termo de correção de ar livre, $\partial\gamma/\partial h \approx -0.3086$ mGal/m é a derivada da gravidade normal com respeito à h e H_P é a altitude ortométrica (relativa ao geóide) no ponto P (Fig. 3.2). A correção ar livre pode ser interpretada como a continuação para baixo de g_P ou como a continuação para cima de γ_Q para a altitude H_P .

Diferentemente de 3.6, o distúrbio de gravidade pode ser obtido, também, pela aproximação da gravidade normal γ_P no ponto P na superfície da Terra a partir da gravidade normal no elipsóide γ_Q usando:

$$\delta g_P \approx g_P - \gamma_Q + \frac{\partial\gamma}{\partial h} h_P . \quad (2.14)$$

em que h_P é a altitude geométrica em P . Contudo, LI e GÖTZE (2001) apresenta uma expressão analítica para o cálculo de γ em qualquer ponto sobre ou acima do elipsóide que sugere a não utilização de 3.14. De todo modo, a diferença absoluta entre o distúrbio de gravidade e a anomalia de ar livre é estimada subtraindo 3.13 de 3.14.

$$|\delta g_P - \Delta g^F| \approx \left| \frac{\partial\gamma}{\partial h} N \right| , \quad (2.15)$$

em que $N \approx h - H$ é a ondulação geoidal (Fig. 3.2). Esta aproximação assume que o geóide e a superfície de referência do elipsóide são próximas o suficiente para considerá-las paralelas em P e em sua vizinhança. As eqs. 3.14 e 3.15 são comumente usadas em geodésia para definir a *equação fundamental da geodésia física* (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005).

É sabido, empiricamente, que N é $\approx \pm 1$ m nos oceanos e alcança o valor absoluto máximo de ≈ 120 m (e.g., SANSÒ e SIDERIS, 2013; TORGE e MÜLLER, 2012).

Capítulo 3

Camada Equivalente

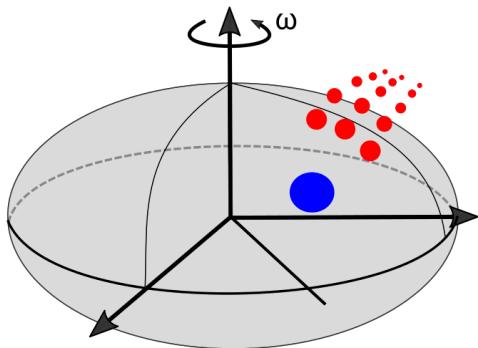
A camada equivalente é uma poderosa ferramenta para fins de processamento e interpretação de dados de campos potenciais. Em processamento, esta técnica é comumente empregada na transformação dos dados potenciais como, por exemplo: regularização do espaçamento do dado (e.g., DAMPNEY, 1969); continuação (DAMPNEY, 1969; EMILIA, 1973), derivadas do campo (EMILIA, 1973); redução ao pólo (EMILIA, 1973) e em baixas latitudes (LI *et al.*, 2014; SILVA, 1986); interpolação de dados (CORDELL, 1992; MENDONÇA e SILVA, 1994), separação regional-residual (PAWLOWSKI, 1994); processamento de dados aéreos (BARNES, 2014; BARNES e LUMLEY, 2011).

O emprego de um grande volume de dados na técnica da camada equivalente torna-a custosa computacionalmente devido à necessidade da montagem e inversão do sistema linear. Com o intuito de superar este problema, podem ser citados algumas abordagens como: o esquema iterativo rápido de atualização da distribuição das fontes equivalentes (XIA *et al.*, 1993); a compressão por *wavelet* (DAVIS e LI, 2011; LI e OLDENBURG, 2010); *clusterização* de fontes equivalentes equidistantes (BARNES e LUMLEY, 2011); aproximação polinomial da distribuição da propriedade física em janelas (OLIVEIRA JR. *et al.*, 2013); atualização iterativa dada por correções de massa relativa às atualizações do resíduo, tornando a matriz de sensibilidade diagonal (SIQUEIRA *et al.*, 2017).

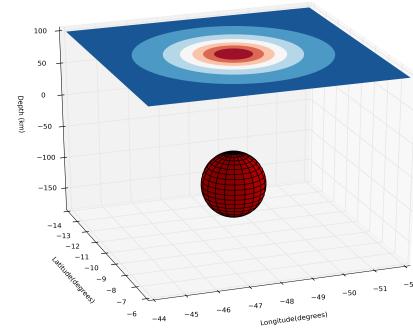
3.1 Fundamentos Teóricos

A técnica da camada equivalente tem como premissa básica que uma distribuição de densidade tridimensional qualquer em subsuperfície cause, aproximadamente, o mesmo efeito potencial de uma distribuição superficial contínua e horizontalmente infinita avaliados nos mesmos pontos de observação (BLAKELY, 1996). A distribuição de densidade superficial forma uma camada fictícia de fontes gravimétricas equivalentes a uma determinada profundidade.

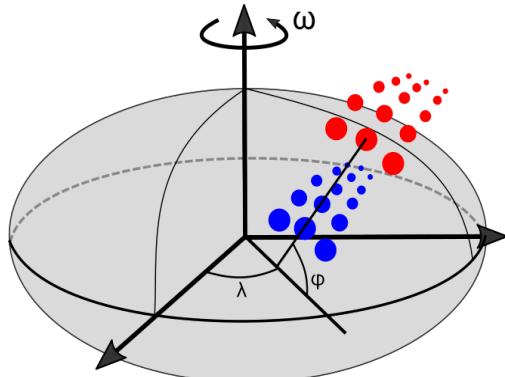
Considere o modelo de Terra da Fig. 4.1(a). A figura mostra um elipsóide de revolução que representa a superfície aproximada da Terra, com origem no centro de massa médio definido pelo sistema GCS, e uma esfera com um determinado valor de densidade e a um profundidade pré-estabelecida. O conjunto de pontos vermelhos acima do elipsóide representa os pontos de observação onde são feitas as medidas do distúrbio de gravidade. Como a massa total deste sistema é a soma da massa do elipsóide mais a massa da esfera, fica claro que a esfera representará o modelo de massas anômalas, segundo o capítulo 3. A Fig. 4.1(b) transforma a configuração



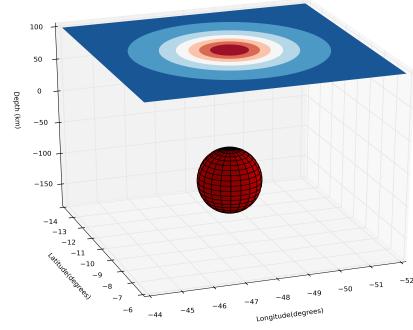
(a) Modelo de massas anômalas.



(b) Distúrbio de gravidade da esfera na superfície de observação.



(c) Representação esquemática tridimensional da camada equivalente em coordenadas geodésicas.



(d) Distúrbio de gravidade da camada equivalente na superfície de observação.

Figura 3.1: Ilustração da técnica da camada equivalente. Os pontos vermelhos representam os pontos de observação. a) A esfera azul representa um modelo de massas anômalas; b) Distúrbio de gravidade produzido pela esfera; c) Os pontos azuis representam as fontes gravimétricas que compõem a camada equivalente. d) Distúrbio de gravidade produzido pela camada equivalente. MUDAR ESTA FIGURA!!!!

da Fig. 4.1(a) numa representação tridimensional em que os eixos horizontais são longitude e latitude, respectivamente, em graus e o eixo vertical indica a altitude. A figura mostra a esfera com seu centro localizado à profundidade de 100 km e o seu distúrbio de gravidade produzido nos pontos de observação a uma altitude de

100 km.

A técnica da camada equivalente elimina a necessidade do conhecimento do modelo de densidade, substituindo-a por um conjunto de pontos de massa (fontes equivalentes). Na Fig. 4.1(c), a esfera é substituída pela camada fictícia representada pelos pontos azuis. Esta camada conserva a massa da esfera, distribuindo-a ao longo das suas fontes, produzindo o mesmo distúrbio de gravidade nos pontos de observação (Fig. 4.1(d)) a 100 km de altitude. A Fig. 4.1(c) mostra ainda a versão clássica da camada equivalente em que posiciona-se cada fonte equivalente sob o seu respectivo ponto de observação. O posicionamento segue o sistema GGS (capítulo 3).

3.2 Inversão linear e vetor de parâmetros

Considere a eq.

$$d_i^o \approx \sum_{j=1}^M p_j g_{ij} , \quad (3.1)$$

em que d_i^o é o distúrbio de gravidade no i -ésimo ponto de observação, p_j é a propriedade física da j -ésima fonte da camada equivalente, g_{ij} é a derivada na direção \mathfrak{h} da função harmônica $1/r_{ij}$ em coordenadas geodésicas que relaciona a j -ésima fonte ao i -ésimo ponto de observação e o somatório reflete a influência gravitacional de todas as M fontes equivalentes no ponto de observação i .

A função $1/r$ no sistema GGS é dada pela eq. 2.6 e a sua derivada normal segue a primeira relação das eqs. definidas em 2.8. Sendo assim, a eq. 4.1 pode ser reescrita como

$$d_i^o(\mathfrak{h}_i, \phi_i, \lambda_i) \approx \sum_{j=1}^M -p_j \underbrace{r_{ij}^{-3} (A_{ij} \cos \phi \cos \lambda + B_{ij} \cos \phi \sin \lambda + C_{ij} \sin \phi)}_{g_{ij}} , \quad (3.2)$$

em que $(\mathfrak{h}_i, \phi_i, \lambda_i)$ são as coordenadas geodésicas do ponto de observação i .

É possível aplicar a técnica da camada equivalente numa configuração em que o número de observações seja diferente do número de fontes equivalentes. Seja um conjunto de N observações do distúrbio de gravidade e M fontes, a eq. 4.2 pode ser expressa em forma matricial

$$\mathbf{d}^o \approx \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (3.3)$$

que forma o sistema linear a ser solucionado. Caso $N > M$, uma solução para \mathbf{p} segue a formulação dos mínimos quadrados sobre determinado. Se, por outro lado, $N < M$, a solução pode ser obtida aplicando a formulação dos mínimos quadrados

subdeterminado

$$p^* = \left(G^T G + \mu \mathcal{I} \right)^{-1} G^T d^o \rightarrow N > M \quad ; \quad (3.4)$$

$$p^* = G^T \left(G G^T + \mu \mathcal{I} \right)^{-1} d^o \rightarrow N < M \quad , \quad (3.5)$$

em que p^* é a estimativa do vetor de parâmetros da propriedade física, μ é o parâmetro de regularização e \mathcal{I} é a matriz identidade.

Capítulo 4

Metodologia

4.1 Método Proposto

O presente trabalho propõe a combinação de dados de distúrbio de gravidade de diferentes origens, usando a técnica da camada equivalente. Para tal, suponha a seguinte configuração: Na Fig. 5.1, o elipsóide delimita a superfície aproximada

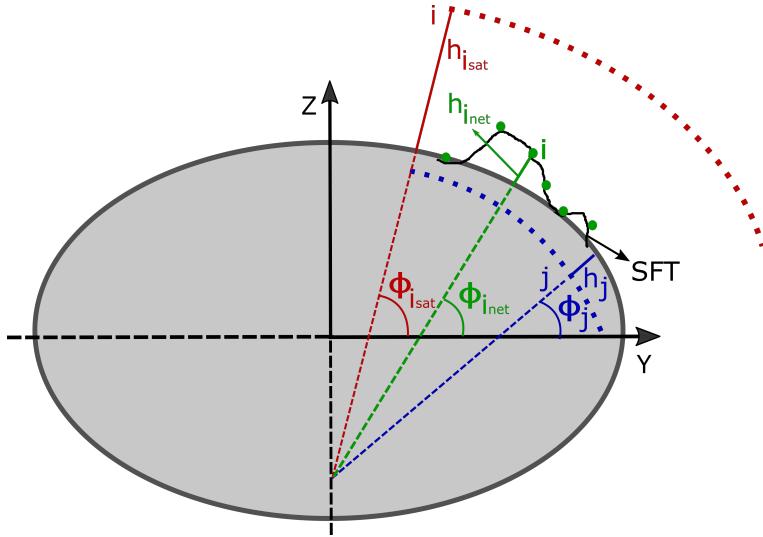


Figura 4.1: Representação esquemática da configuração espacial de dados gravimétricos de diferentes origens.

da Terra e os pontos azuis em subsuperfície compõem a camada equivalente a uma profundidade fixa. Os pontos vermelhos representam o *grid* de observação de um modelo global de satélite (SAT) fixados a uma altitude constante e distante da superfície terrestre. A Superfície Física da Terra (SFT) é indicada pela linha preta de altitude variável, delineado com exagero vertical. Sobre a SFT estão os pontos verdes que representam as estações de uma rede gravimétrica (NET).

Para a combinação de dados de origens diferentes, o sistema linear da eq. 4.3 é

reescrita por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^o \\ \mathbf{d}_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & | & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & | & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

em que \mathbf{d}_1^o é o vetor $N_1 \times 1$ dos dados SAT, \mathbf{d}_2^o é o vetor $N_2 \times 1$ de dados NET - contudo poderia ser de qualquer outro levantamento - \mathbf{p}_1 é o vetor $N_1 \times 1$ referente às fontes equivalentes da camada posicionadas abaixo das observações SAT, \mathbf{p}_2 é o vetor $N_2 \times 1$ referente às fontes equivalentes da camada posicionadas abaixo das observações NET, \mathbf{H}_{11} é matriz de sensibilidade $N_1 \times N_1$ que relaciona as observações SAT às fontes SAT, \mathbf{H}_{12} é matriz de sensibilidade $N_1 \times N_2$ que relaciona as observações SAT às fontes NET, \mathbf{H}_{21} é matriz de sensibilidade $N_2 \times N_1$ que relaciona as observações NET às fontes SAT e, finalmente, \mathbf{H}_{22} é matriz de sensibilidade $N_2 \times N_2$ que relaciona as observações NET às fontes NET. Assim, para cada observação existe uma fonte associada em subsuperfície.

Por conta das medidas SAT cobrirem uma vasta área e estarem bem afastadas da superfície terrestre, grande parte do seu espectro é composto pelos longos comprimentos de onda. Consequentemente, feições de mais curto comprimento de onda não estariam presentes. Já com os dados NET ocorre o oposto. São estações locais e mais próximas às feições superficiais, portanto conseguem recuperar os curtos comprimentos de onda.

Por questões de precisão das medidas, a interação entre os dois tipos de dados decretaria um peso maior para os NET do que para os SAT. Um forma de resolver o sistema linear da eq. 5.1 seria por meio do método de mínimos quadrados ponderados. Entretanto, isto implica em forçar uma maior precisão na região do entorno dos dados NET e um desajuste em todo o resto. Com isso, a forma de resolver o sistema linear teve uma abordagem diferente.

A eq. 5.1 foi modificada para

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^o \\ \mathbf{d}_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad , \quad (4.2)$$

em que

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (4.3)$$

é o vetor $(N_1 + N_2) \times 1$ de todos os parâmetros do sistema e

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \end{bmatrix} \quad ; \quad (4.4)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad (4.5)$$

são a matriz de sensibilidade $N_1 \times (N_1 + N_2)$ que relaciona as observações SAT a \mathbf{p}

e a matriz de sensibilidade $N_2 \times (N_1 + N_2)$ que relaciona as observações NET a \mathbf{p} , respectivamente.

A solução é dividida em duas etapas: a primeira consiste em resolver

$$\mathbf{d}_1^o \approx \mathbf{H}_1 \mathbf{p} \quad (4.6)$$

pelo método dos mínimos quadrados subdeterminado (eq. 4.5). A estimativa \mathbf{p}^* é usada para encontrar o dado predito nas estações da rede gravimétrica (NET)

$$\mathbf{d}_2^p = \mathbf{H}_2 \mathbf{p}^* \quad , \quad (4.7)$$

em que \mathbf{d}_2^p é o dado predito NET. \mathbf{d}_2^p não apresenta curtos comprimentos de onda, já que foi obtido pela camada que produz os dados SAT. Desta maneira, considera-se que os resíduos NET ($\Delta \mathbf{d}_2$), calculados por meio de

$$\Delta \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_2^o - \mathbf{d}_2^p \quad , \quad (4.8)$$

sejam não-nulos. Estes resíduos são usados para compor um novo vetor de dados com a finalidade de estimar correções locais de densidade ($\Delta \mathbf{p}$) na camada equivalente, correções estas que estão intimamente ligadas às regiões das estações NET. Presume-se que $\Delta \mathbf{p}$ não gere nenhum efeito gravitacional sobre o *grid* SAT, devido ao seu enorme distanciamento deste. O sistema linear é montado, então, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{p} \quad . \quad (4.9)$$

A segunda etapa consiste em resolver

$$\Delta \mathbf{d}_2 \approx \mathbf{H}_2 \Delta \mathbf{p} \quad , \quad (4.10)$$

também por mínimos quadrados subdeterminado. O novo vetor de parâmetros, \mathbf{p} , é obtido pela soma do vetor dos parâmetros estimados \mathbf{p}^* com o vetor de correções dos parâmetros $\Delta \mathbf{p}^*$ (eq. 5.11).

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* + \Delta \mathbf{p}^* \quad . \quad (4.11)$$

\mathbf{p} possui os longos comprimentos de onda determinado pela parte \mathbf{p} da camada equivalente e os curtos comprimentos de onda oriundos dos resíduos NET, não recuperados por SAT. Logo, este novo vetor de parâmetros é capaz de ajustar os dados SAT e os dados NET, simultaneamente.

Uma vez obtido o vetor \mathbf{p} , a estimativa da camada equivalente pode ser avaliada.

O dado predito em SAT e em NET são calculados a partir de

$$\mathbf{d}^p = \mathbf{H}\mathbf{p} \quad (4.12)$$

em que

$$\mathbf{d}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^p \\ \mathbf{d}_2^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

O vetor de resíduos dos dados ϵ é obtido por

$$\epsilon = \mathbf{d}^o - \mathbf{d}^p \quad (4.14)$$

e seu histograma analisado, sendo

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^o - d_1^p \\ d_2^o - d_2^p \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

ϵ_1 os resíduos dos dados d_1 e ϵ_2 , dos dados d_2 .

4.2 Avaliação da Metodologia

A Fig. 5.2 mostra um esquema de como é realizada a avaliação da metodologia. Nela há um *grid* SAT regular a uma altitude h_{isat} cujos dados d_i^o representam os dados verdadeiros de distúrbio de gravidade. Aplica-se o processo de continuação

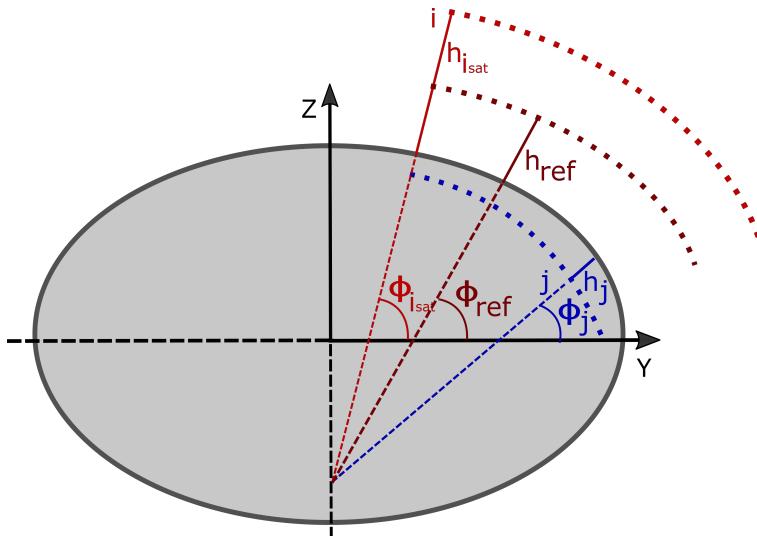


Figura 4.2: Representação esquemática da avaliação da metodologia.

para baixo destes dados de forma a calcular os dados preditos \mathbf{d}_{ref}^p e \mathbf{d}_{isat}^p de acordo

com

$$\mathbf{d}_{\text{ref}}^{\mathbf{p}} = \mathbf{H}\mathbf{p} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{d}_{\text{ref}}^{\mathbf{p}} = \mathbf{H}\mathbf{p} \quad (4.17)$$

no nível de referência de um *grid* a uma altitude de \mathbf{h}_{ref} , usando os vetores de parâmetros \mathbf{p} e \mathbf{p} , respectivamente. Sabendo que $\mathbf{d}_{\text{ref}}^o$ é o dado verdadeiro obtido da modelagem direta no nível de referência, os resíduos oriundos das operações

$$\epsilon^{\mathbf{p}} = \mathbf{d}_{\text{ref}}^o - \mathbf{d}_{\text{ref}}^{\mathbf{p}} ; \quad (4.18)$$

$$\epsilon^{\mathbf{p}} = \mathbf{d}_{\text{ref}}^o - \mathbf{d}_{\text{ref}}^{\mathbf{p}} , \quad (4.19)$$

são calculados e comparados.

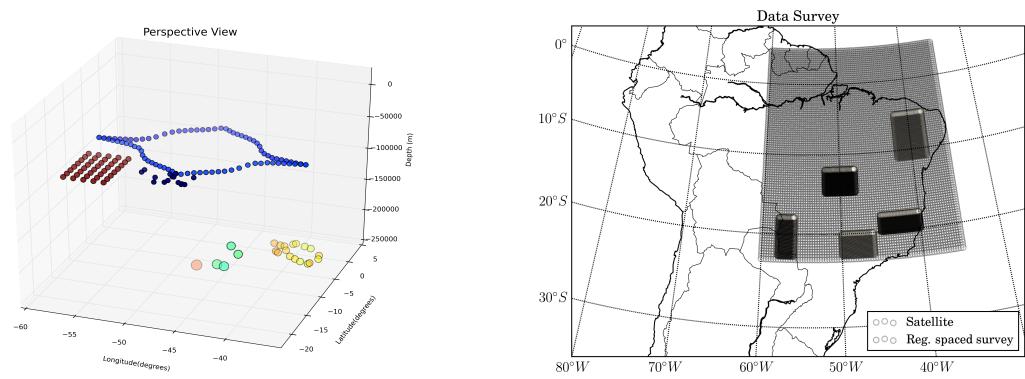
Capítulo 5

Resultados e Discussões

A metodologia foi testada tanto para simulações sintéticas quanto para o caso de dados reais. No primeiro caso, foi necessário criar um modelo de massas anômalas composta por feições rasas e profundas que produzisse um distúrbio de gravidade em escala regional nos pontos de observação selecionados. Para tais testes, foi utilizado o modelo da Fig. 6.1(a). Ele é composto por esferas de diferentes tamanhos, coordenadas geodésicas e densidade. A densidade está relacionada à cor da esfera. Além disso, há esferas com maior transparência que outras. Isto indica tanto uma maior profundidade quanto uma maior proximidade a latitudes positivas.

5.1 Teste Sintético 1

A Fig. 6.1(b) mostra a configuração dos dados do primeiro teste sintético. Os 7896 pontos cinzas, compreendidos nos intervalos entre -23 a 5° de latitude e -60 a -35° de longitude com espaçamento de 0.3° , representam os pontos de observação do modelo global SAT continuado a uma altitude de 40 km. Já os 9750 pontos mais



(a) Modelo de massas anômalas 3D.

(b) Mapa da configuração espacial de dados sintéticos do teste 1.

Figura 5.1: Modelo de densidade e configuração das observações.

escuros representam cinco levantamentos regularmente (REG) espaçados entre si posicionados em diferentes localidades do mapa numa altitude de 3 km. O mapa do

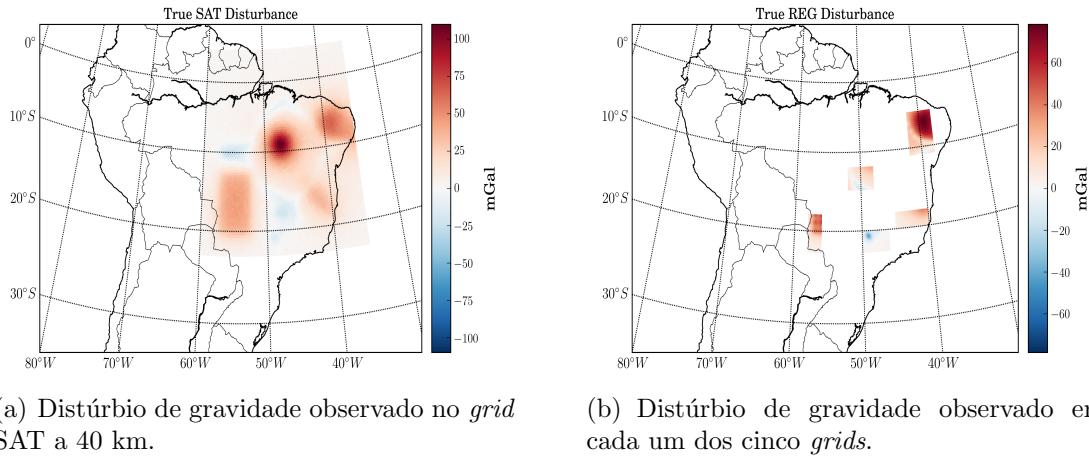


Figura 5.2: Distúrbio de gravidade observado nos diferentes pontos de observação.

distúrbio de gravidade verdadeiro dos dados SAT (d_1^o), contaminado com um ruído gaussiano de média zero e desvio padrão de 1 mGal, variando de ± 110 mGal é visto na Fig. 6.2(a). Já o mapa do distúrbio de gravidade verdadeiro dos dados REG (d_2^o), contaminado com um ruído gaussiano de média zero e desvio padrão de 0.25 mGal, variando de ± 78 mGal é visto na Fig. 6.2(b). Os dados d_1^o e d_2^o compõem os dados de entrada do sistema linear da eq. 5.2.

A construção da camada equivalente se sucedeu escolhendo fontes pontuais e as posicionando abaixo de cada ponto de observação. São 7896 fontes abaixo das observações SAT e 9750, distribuídas abaixo de cada um dos cinco conjuntos de observações que compõem os dados REG. Todas as fontes, constituindo a camada

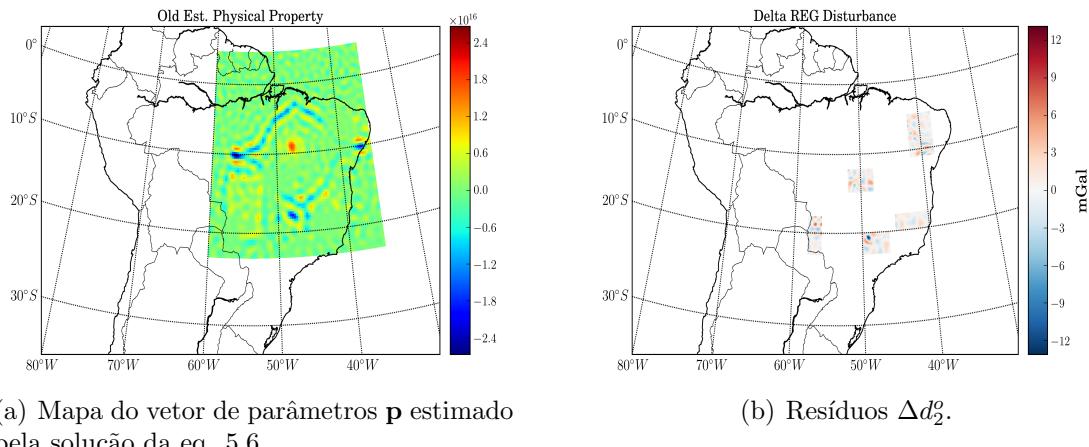
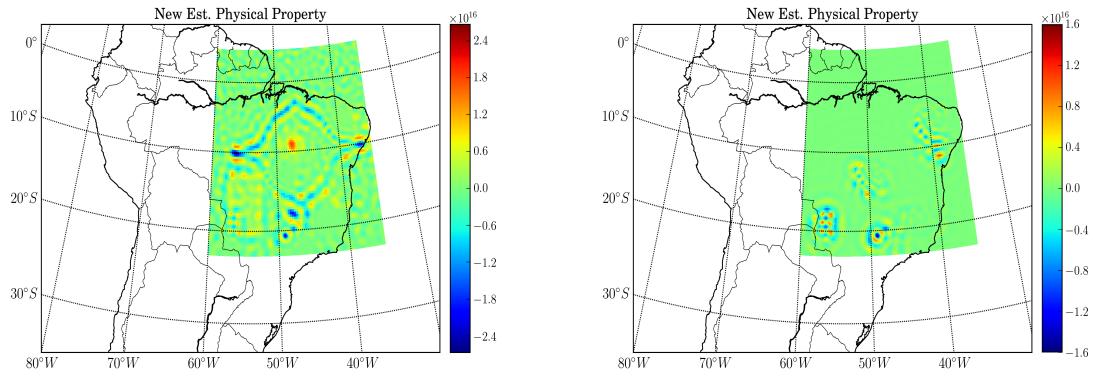


Figura 5.3: Resultados da primeira etapa da metodologia.

como um todo, foram postas à profundidade de 130 km, valor este previamente

estabelecido por um ajuste contendo dados SAT somente. Ele está compreendido dentro do intervalo definido por DAMPNEY (1969).



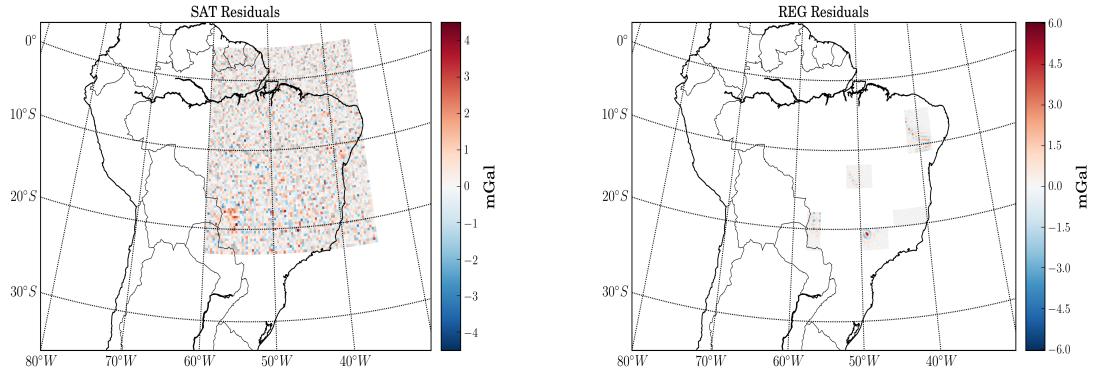
(a) Mapa do vetor de parâmetros \mathbf{p} estimado pela eq. 5.11.

(b) Mapa da diferença $\mathbf{p} - \mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}$.

Figura 5.4: Resultados da segunda etapa da metodologia.

Uma vez estabelecido o sistema linear da eq. 5.2, o vetor de parâmetros \mathbf{p} é estimado pelo método dos mínimos quadrados subdeterminado usando os elementos da eq. 5.6. A Fig. 6.3(a) mostra no mapa os valores estimados de \mathbf{p} da camada, seguindo a configuração da Fig. 6.1(b). \mathbf{p} é, então, usado no cálculo de $\mathbf{d}_2^{\mathbf{p}}$ em REG (eq. 5.7) e, em seguida, $\Delta\mathbf{d}_2^{\mathbf{p}}$ é obtido através da eq. 5.8. A Fig. 6.3(b) mostra o mapa dos valores de $\Delta\mathbf{d}_2^{\mathbf{p}}$ indo de ± 13 mGal.

As correções locais nos parâmetros da camada ($\Delta\mathbf{p}$) são estimadas com a eq. 5.10 ao utilizar $\Delta\mathbf{d}_2^{\mathbf{p}}$ como dado de entrada do novo sistema linear (5.9). Somando $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$, o novo vetor de parâmetros com correções locais \mathbf{p} (eq. 5.11) é calculado. A Fig. 6.4(a) mostra o mapa dos valores de \mathbf{p} . Para garantir que as correções



(a) Mapa dos resíduos SAT.

(b) Mapa dos resíduos REG.

Figura 5.5: Mapa dos resíduos.

tenham origem somente no entorno dos dados REG, foi feito a operação $\mathbf{p} - \mathbf{p}$, que é exemplificado na Fig. 6.4(b). A parte de $\Delta\mathbf{p}$ localizado mais a sudeste não

exibe muita informação no mapa 6.4(b), pois nesta região há uma maior presença de feições de longo comprimento de onda.

Os resíduos foram calculados com o auxílio de 5.14 e estão mostrados no mapa da Fig. 6.5. Em 6.5(a), os resíduos SAT se mostram bem espalhados por todo o mapa e com magnitude indo de ± 4.5 mGal. Por outro lado, 6.5(b) capta algumas feições mais rasas de curto comprimento de onda com magnitudes no intervalo de ± 6 mGal, metade do valor máximo visto em Fig. 6.3(b). Portanto, houve uma melhora local significativa ao somar as correções $\Delta\mathbf{p}$ a \mathbf{p} .

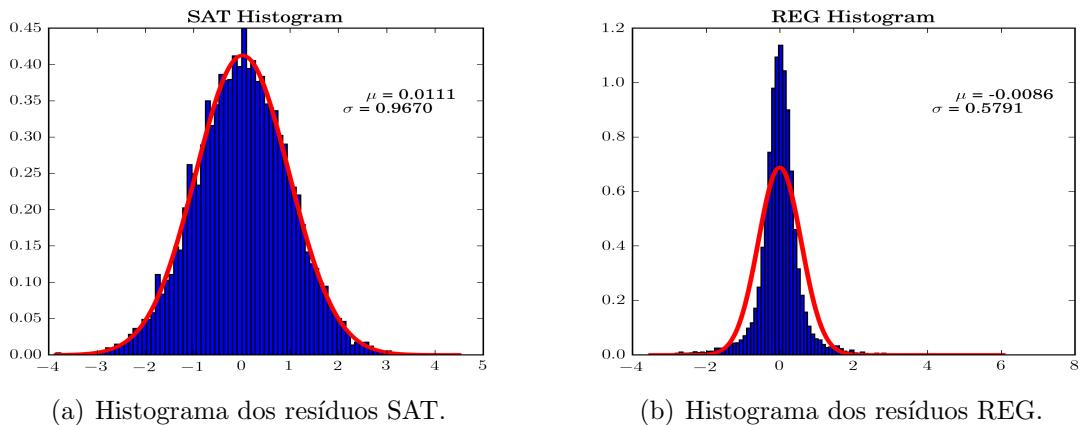


Figura 5.6: Histogramas dos resíduos.

A Fig. 6.6 mostra o histograma dos resíduos ϵ (eq. 5.14) em cada um dos conjuntos de dados. No caso SAT (6.6(a)), o histograma indica uma curva gaussiana com sua média aproximadamente zero e desvio padrão de 0.96 consistente com o valor de desvio padrão empregado no ruído do dado d_1^o . No caso REG (6.6(b)), o histograma aparenta ser gaussiano, sendo sua média aproximadamente zero e desvio padrão igual ao dobro do desvio padrão aplicado no ruído do dado d_2^o .

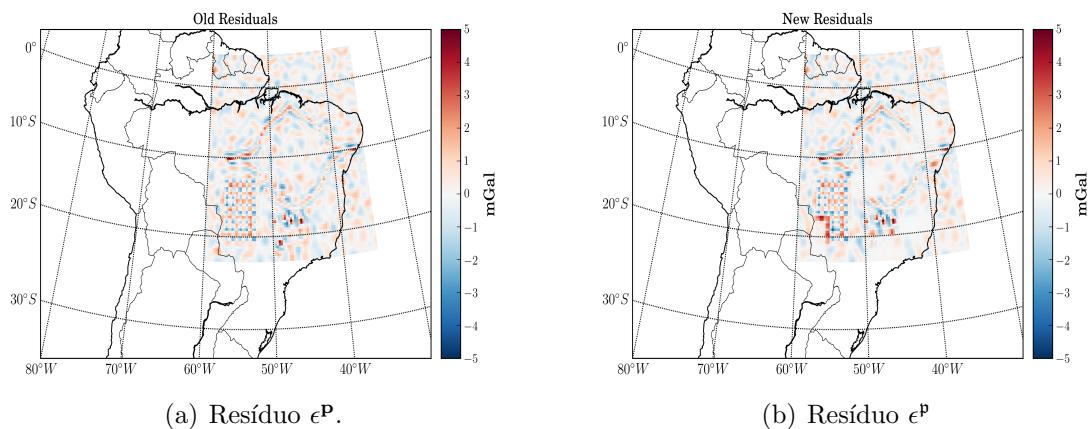


Figura 5.7: Mapas de resíduos.

A avaliação descrita na seção 5.2 foi realizada para esta configuração de dados.

Usando \mathbf{p} e \mathbf{p} , o dado predito à altitude de 20 km foi calculado, seguindo as eqs. 5.16 e 5.17, respectivamente. A Fig. 6.7(a) mostra o mapa dos resíduos obtidos por 5.18, que variam entre ± 6 mGal. As feições rasas do modelo são visíveis no mapa pois refletem, justamente, a diferença entre $\mathbf{d}_{\text{ref}}^{\mathbf{o}}$ a 20 km contendo mais sinais de curto comprimento de onda que $\mathbf{d}_{\text{ref}}^{\mathbf{p}}$ na avaliado mesma altitude, em que o segundo advém da eq. 5.16, sendo os parâmetros \mathbf{p} oriundos da estimativa usando $\mathbf{d}^{\mathbf{o}}$ a 40 km.

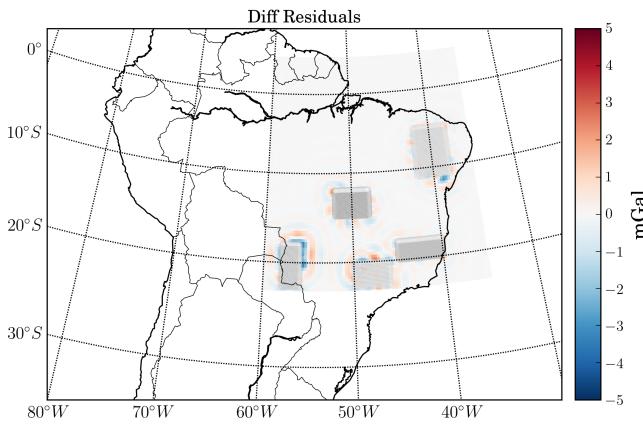
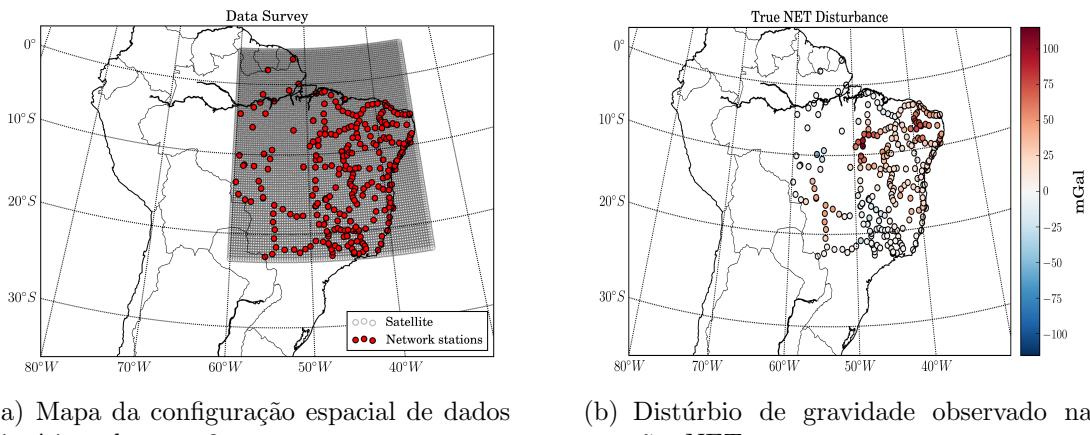


Figura 5.8: Diferença entre resíduos de 6.7(a) e 6.7(b) com superposição dos levantamentos REG.

Ao comparar com a Fig. 6.7(b), na mesma escala de valores, percebe-se com clareza a eliminação de resíduos sobre as regiões que comportavam os dados REG. Uma das feições pontuais localizadas a sul, assim como o canto inferior esquerdo da grade a oeste são removidos. A diferença entre os dois mapas acusa resíduos apenas no entorno dos dados REG (Fig. 6.1), como era de se esperar.

5.2 Teste Sintético 2

A Fig. 6.9(a) mostra a configuração dos dados do segundo teste sintético. Nele



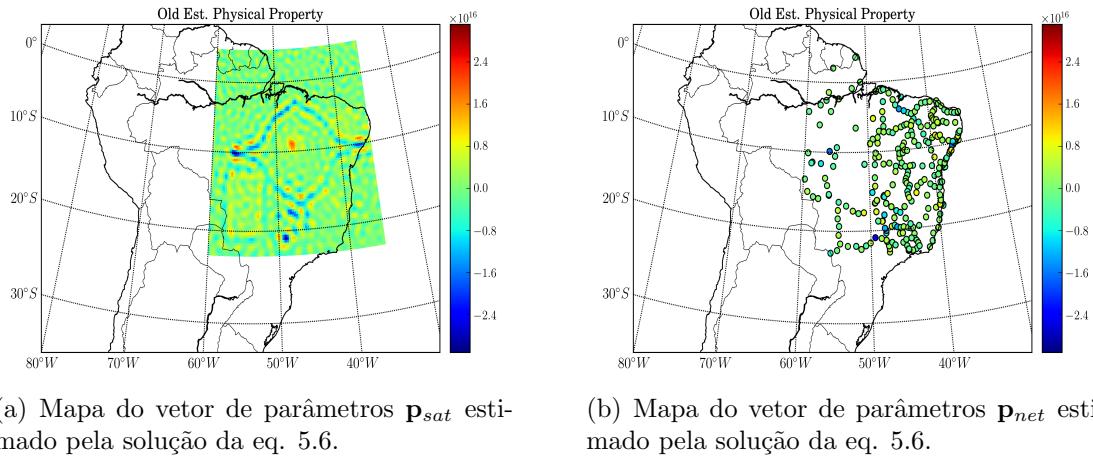
(a) Mapa da configuração espacial de dados sintéticos do teste 2.

(b) Distúrbio de gravidade observado nas estações NET.

Figura 5.9: Configuração das estações da rede gravimétrica e seu mapa do distúrbio de gravidade.

estão dispostos os mesmos 7896 pontos SAT e mais 333 estações NET, simulando as estações da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB) localizadas dentro da cobertura dos dados SAT. Estas estações foram estabelecidas sobre a SFT e, portanto, possuem altitudes variáveis, como esquematizado pela Fig. 5.1. O distúrbio de gravidade verdadeiro em SAT é o mesmo que aquele visto em 6.2(a). A Fig. 6.9(b) mostra os valores verdadeiros do distúrbio de gravidade em NET, devido ao modelo 6.1(a), contaminados por um ruído gaussiano de média zero e desvio padrão 0.05 mGal, variando entre ± 115 mGal.

De forma análoga à seção 6.1, as 8229 fontes equivalentes (7896 SAT + 333 NET) foram postas abaixo de cada observação na profundidade de 130 km. Pela eq. 5.2, o vetor de parâmetros é estimado usando o método de mínimos quadrados subdeterminado. As Figs. 6.10(a) mostram, em mapa,



(a) Mapa do vetor de parâmetros \mathbf{p}_{sat} estimado pela solução da eq. 5.6.

(b) Mapa do vetor de parâmetros \mathbf{p}_{net} estimado pela solução da eq. 5.6.

Figura 5.10: Resultados da primeira estimativa da metodologia.

a parte SAT do vetor de parâmetros e 6.10(b), a parte NET, respectivamente. Usando os parâmetros \mathbf{p} (Figs. 6.10(a) e 6.10(b)), Δd_2^o em NET é computado por meio das eqs. 5.7 e 5.8. Esses valores residuais computados nas estações estão mostradas na Fig. 6.2, variando entre ± 9 mGal. Δd_2^o é, novamente, estabelecido como dado de entrada para a estimativa das correções locais nos parâmetros $\Delta \mathbf{p}$ (eq. 5.10). \mathbf{p} é computado por meio da eq. 5.11. A parte SAT do vetor mencionado é mostrada na Fig.

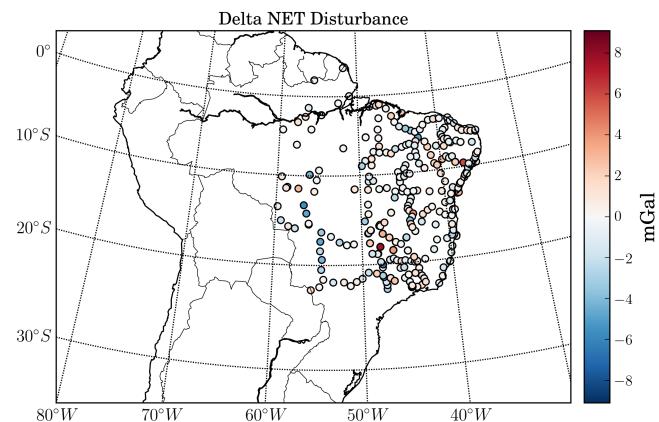
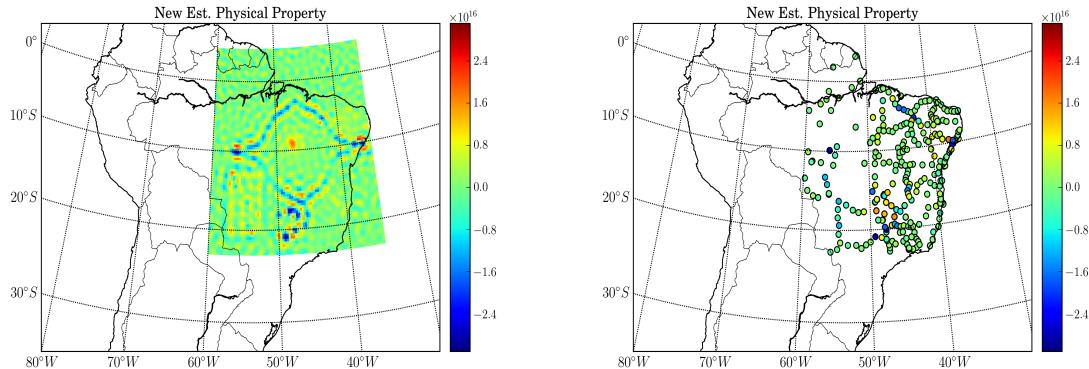


Figura 5.11: Resíduos Δd_2^o .

6.12(a), enquanto que a parte NET é mostrada na Fig. 6.12(b). Como no teste

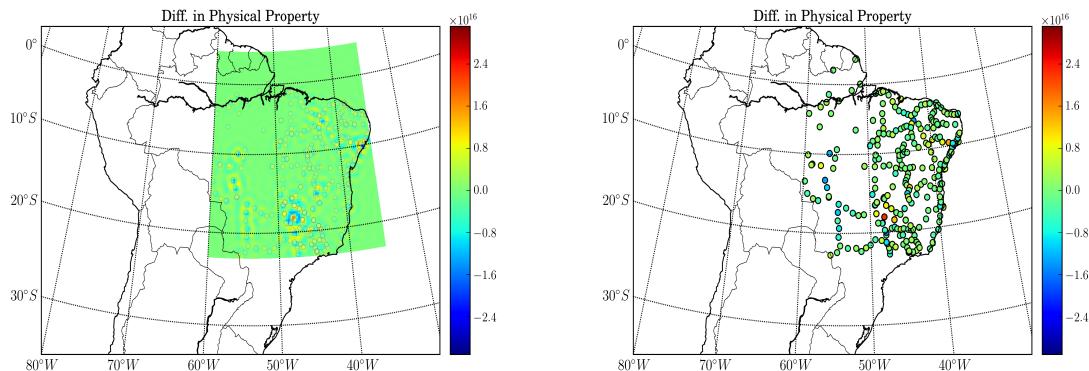


(a) Mapa do vetor de parâmetros \mathbf{p}_{sat} estimado pela solução da eq. 5.11.

(b) Mapa do vetor de parâmetros \mathbf{p}_{net} estimado pela solução da eq. 5.11

Figura 5.12: Resultados da segunda estimativa da metodologia.

sintético 1, foi computada a diferença entre os parâmetros \mathbf{p} e \mathbf{p}' . A Fig. 6.13(a) mostra diferença SAT. Já a Fig. 6.13(b) mostra a diferença NET. Como anterior-



(a) Mapa da diferença $\mathbf{p}_{sat} - \mathbf{p}_{sat} = \Delta \mathbf{p}_{sat}$ com sobreposição das estações NET (pontos cinzas).

(b) Mapa da diferença $\mathbf{p}_{net} - \mathbf{p}_{net} = \Delta \mathbf{p}_{net}$.

Figura 5.13: Diferença $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \Delta \mathbf{p}$.

mente, a diferença reside nos pontos que compõem o segundo levantamento que neste caso são as estações NET, de acordo com os pontos cinzas da Fig. 6.13(a).

O resíduos foram computados de acordo com a eq. 5.14 e são mostrados nos mapas da Fig. 6.14. Em 6.14(a), os resíduos se encontram bem distribuídos em todo o mapa, variando entre ± 3.8 mGal. Já no caso NET (Fig. 6.14(b)), os resíduos ficam mais aparentes, principalmente na região da grade e dos pontos a sul, variando entre ± 5 mGal.

Estes valores foram avaliados em histogramas também (Figs. 6.15). Novamente, o histograma dos resíduos SAT apresentam claramente uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão, compatível com o ruído imposto em d_1^o , de 0.94

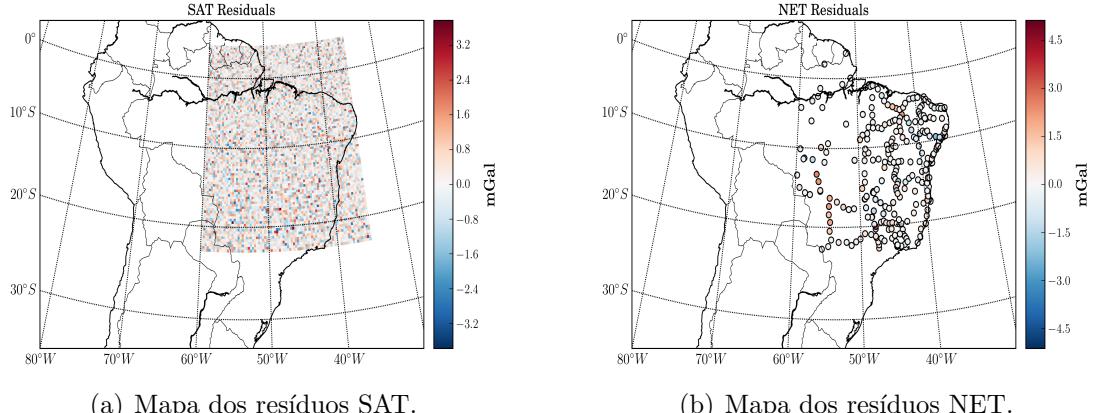


Figura 5.14: Mapa dos resíduos.

(Fig. 6.15(a)). O histograma dos resíduos NET também seguem uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão de 0.71, um pouco distante dos 0.25 inseridos como ruído do dado d_2^o (Fig. 6.15(b)).

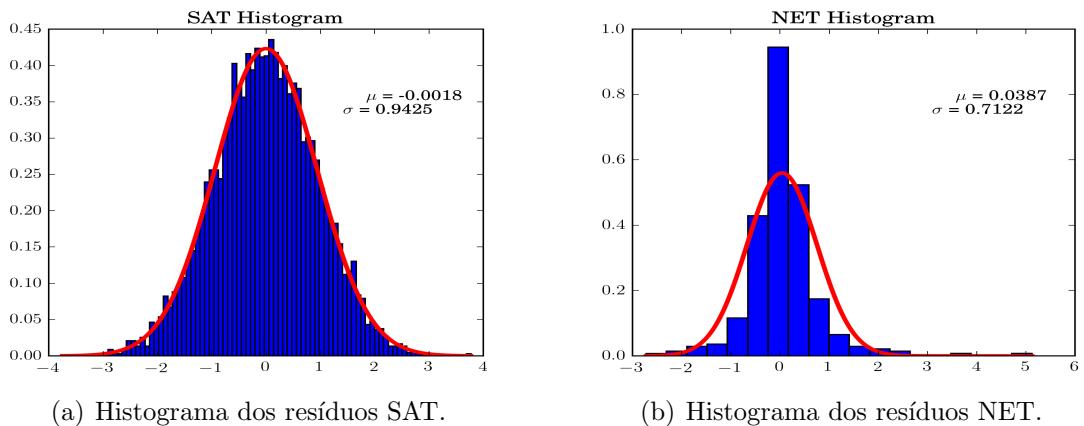


Figura 5.15: Histograma dos resíduos.

O dado predito a 20 km usando \mathbf{p} e $\mathbf{\hat{p}}$ foi computado para comparar com o dado verdadeiro, de forma análoga ao que foi feito anteriormente. Os resíduos criados neste processo podem ser vistos em 6.16. Ambas as Figs. 6.16(a) e 6.16(b) variam entre ± 5 mGal. Comparando uma com a outra, observa-se uma diferença bem sutil que pode ser explicada pelo fato das estações estarem bem localizadas pontualmente. Sendo assim, a diferença entre os mapas 6.16(a) e 6.16(b) se faz extremamente necessário.

A Fig. 6.17 mostra esta diferença no mapa, variando no mesmo intervalo de distúrbio de antes. Sobre a área contendo os valores de diferença, foram posicionadas as estações NET representadas pelos pontos cinzas. Verifica-se, portanto, que os maiores valores das diferenças residem no entorno das estações, de forma análoga aos resultados obtidos no teste sintético 1.

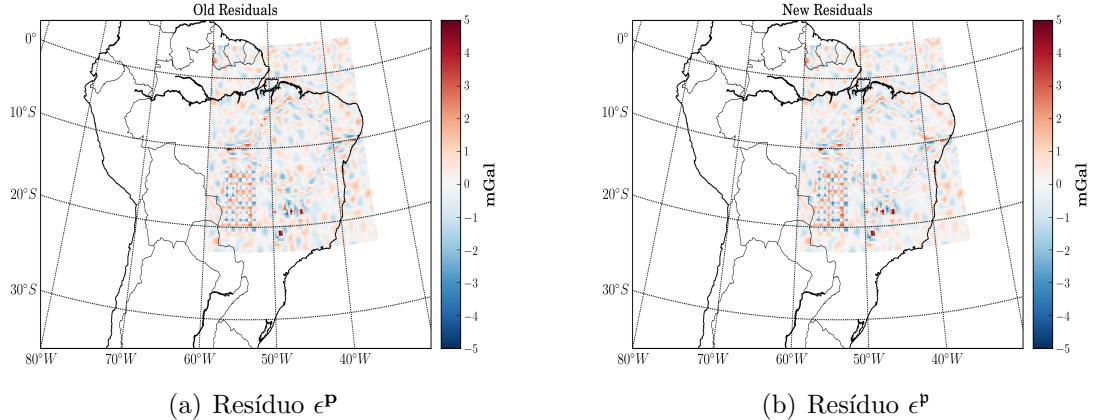


Figura 5.16: Mapa de resíduos a 20 km.

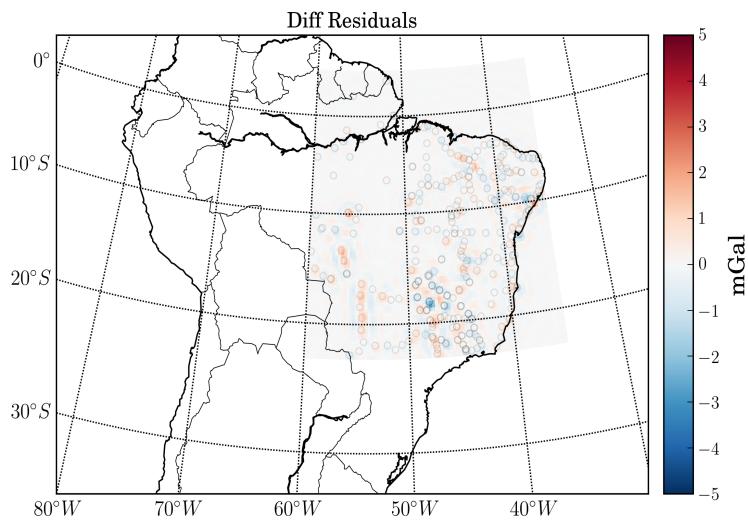


Figura 5.17: Diferença entre 6.16(a) e 6.16(b)

5.3 Teste com Dados Reais

5.3.1 Descrição dos dados reais

Banco de Dados de Satélite (ICGEM)

Foram utilizados os dados de gravidade oriundos do modelo global EIGEN-6C4, disponíveis na plataforma online do ICGEM (International Centre for Global Earth Models - <https://icgem.gfz-potsdam.de>), gerados a partir da combinação das missões GOCE, GRACE e LAGEOS e de levantamentos aéreos e terrestres (?).

A metodologia por trás da combinação destes dados de diferentes fontes pode ser encontrada em ? e ?. Este modelo global é um dos ajustes em harmônicos esféricos que possuem mais elevado grau, o de 2190, que por conta disso é, também, um dos que representa o campo de gravidade global mais fidedignamente.

Os dados do modelo EIGEN-6C4 são organizados de acordo com seus diferentes modelos funcionais. Os funcionais podem ser encontrados na descrição feita em BARTHELMES (2013). Neste trabalho, o funcional escolhido foi de gravidade com altitude relativa ao elipsóide denominado *gravity_ell*.

O usuário especifica a área do levantamento o qual deseja fazer o *download*, inserindo os limites das latitudes superior e inferior e das longitudes a oeste e a leste, bem como o espaçamento entre as observações. O site ICGEM fornece um *grid* regular com os dados organizados em coordenadas geodésicas ($\mathfrak{h}, \phi, \lambda$) e gravidade. O equilíbrio entre resolução e custo computacional levou à escolha de um espaçamento de 0.3° , nos intervalos de -23° a 5° e -60° a -35° de latitude e longitude, respectivamente. Esta malha regularmente espaçada coincide com uma vasta região do Brasil e seu litoral.

Dados da RGFB

Os dados de gravidade das estações pertencentes à Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB) estabelecido pelo Observatório Nacional (ON), disponíveis em formato pdf em extranet.on.br/bdgon/gravimetria/index.php são oriundos de medidas absolutas (A-10, FG-5) e relativas (Lacoste & Romberg, Scintrex CG-5). O ajustamento prévio da rede, pelos seus colaboradores, estabeleceu valores de gravidade absoluta para as estações relativas e incertezas das medidas para toda a rede.

No arquivo de pdf de cada estação, constam as coordenadas geográficas, seu posicionamento relativo ao elipsóide (altitude geométrica) e os valores de gravidade com sua respectiva incerteza associada. São aproximadamente 538 estações das quais apenas 333 foram utilizadas no presente trabalho. Isto se deu pelo fato das outras 205 estações estarem fora da região de cobertura do *grid* de satélite escolhido.

5.4 Aplicação da Metodologia a Dados Reais

Os dados reais tem a mesma configuração da Fig. 6.9(a). Os dados reais SAT e NET, diferente dos sintéticos, são valores de gravidade e, no caso NET, já estão contaminados por ruído. Portanto, o primeiro passo foi calcular a gravidade normal usando a fórmula fechada descrita por LI e GÖTZE (2001) e subtraí-la da gravidade observada. Uma vez estabelecidos os dados de entrada para o sistema linear da eq. 5.2, ou seja, os dados de distúrbio de gravidade para cada observação, a metodologia pôde ser empregada.

Os dados de distúrbio de gravidade estão mostrados nos mapas da Fig. 6.18. A Fig. 6.18(a) mostra um mapa com o distúrbio de gravidade das observações SAT

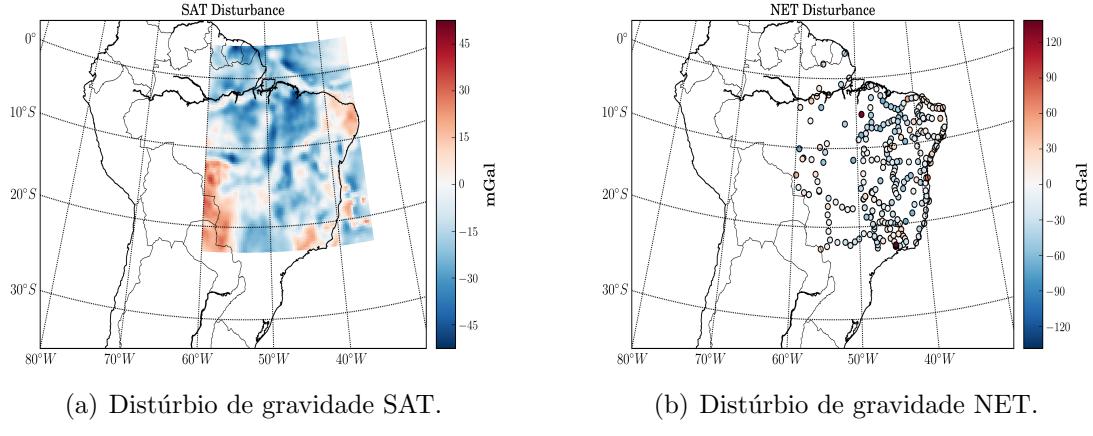


Figura 5.18: Mapa dos distúrbios de gravidade.

a 40 km, em que seus valores variam entre ± 53 mGal. A Fig. 6.18(b) mostra as estações NET com valores de distúrbio seguindo uma escala de cores que variam entre ± 138 mGal.

De forma análoga aos testes sintéticos realizados, a camada equivalente, composta por esferas localizadas abaixo de cada observação, foi colocada à profundidade de 130 km. O vetor de parâmetros é estimado usando o método de mínimos quadrados subdeterminado, pela eq. 5.2. As Figs. 6.19(a) mostram, em mapa, a parte SAT do vetor de parâmetros, enquanto que 6.19(b), a parte NET, respectivamente.

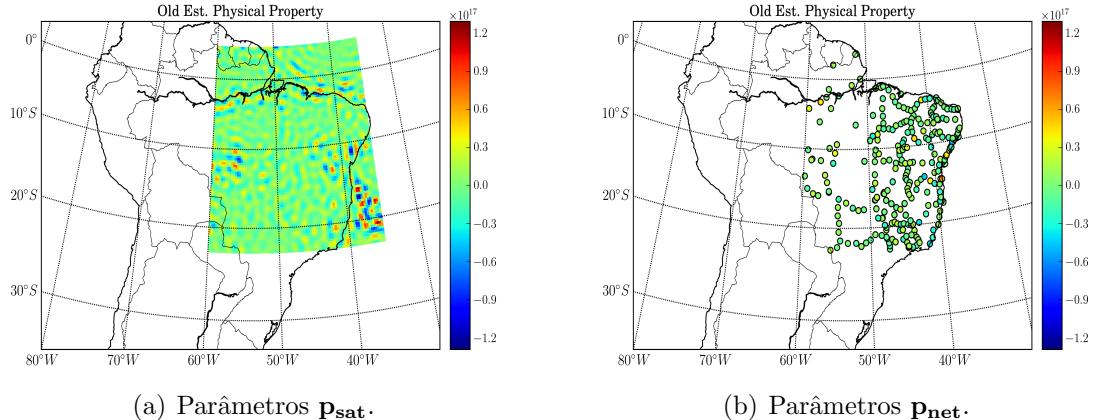


Figura 5.19: Mapa do vetor de parâmetros \mathbf{p} .

Usando os parâmetros \mathbf{p} , calcula-se Δd_2 . Seus valores em NET são mostrados na Fig. 6.20, variando entre ± 161 mGal. Entretanto, há uma grande população de valores de $\Delta \mathbf{d}_2$ que reside dentro do intervalo de ± 40 mGal.

$\Delta \mathbf{d}_2$ é usado como dado de entrada na segunda etapa da metodologia para estimar o vetor de correções $\Delta \mathbf{p}$. Somando-o a \mathbf{p} , calcula-se o vetor de parâmetros com correções locais \mathbf{p} para os dados reais. A Fig. 6.21(a) mostra a parte SAT

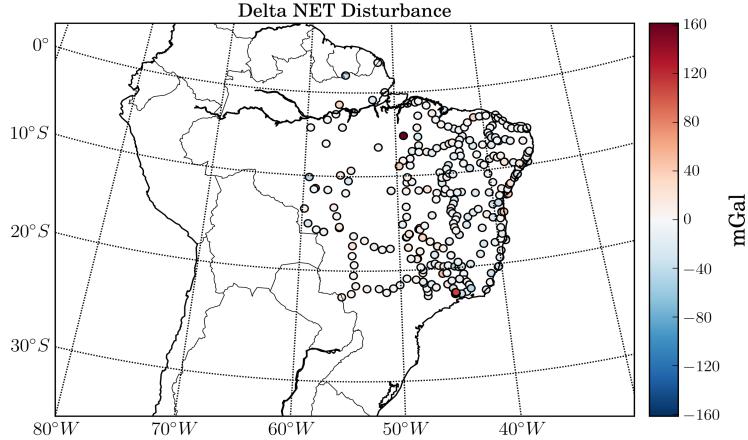


Figura 5.20: Mapa Δd_2 .

do vetor \mathbf{p} no mapa. Comparando-a com a Fig. 6.19(a), é visível o contraste de

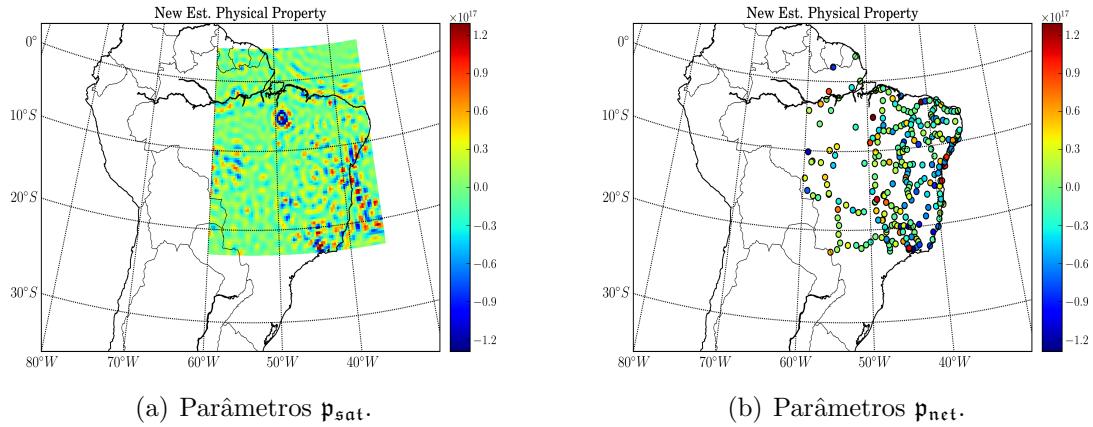


Figura 5.21: Mapa do vetor de parâmetros \mathbf{p} .

principalmente na região central do Maranhão, no litoral da Bahia e no sudeste. Essa mudança também ocorre na parte NET do vetor \mathbf{p} , mostrado na Fig. 6.21(b) em comparação com a Fig. 6.19(b). O caráter homogêneo criado pelo ajuste dos dados SAT apenas desaparece, dando espaço para uma heterogeneidade em toda a rede.

Isto fica mais visível ainda nos mapas de diferenças entre $\mathbf{p} - \mathbf{p}$ mostrada em 6.22. A Fig. 6.22(a), que mostra a diferença entre a parte SAT, exibe os maiores valores exatamente na parte central do estado do Maranhão, litoral da Bahia e no sudeste brasileiro. Além disso, essas diferenças seguem a configuração das estações NET (pontos cinzas sobrepostos no mapa). Analogamente, a Fig. 6.22(b) apresenta as diferenças sobre as estações da rede.

Os mapas das Figs. 6.23 exibem os resíduos calculados após a estimativa das correções do vetor de parâmetros. A Fig. 6.23(a) mostra os resíduos SAT variando

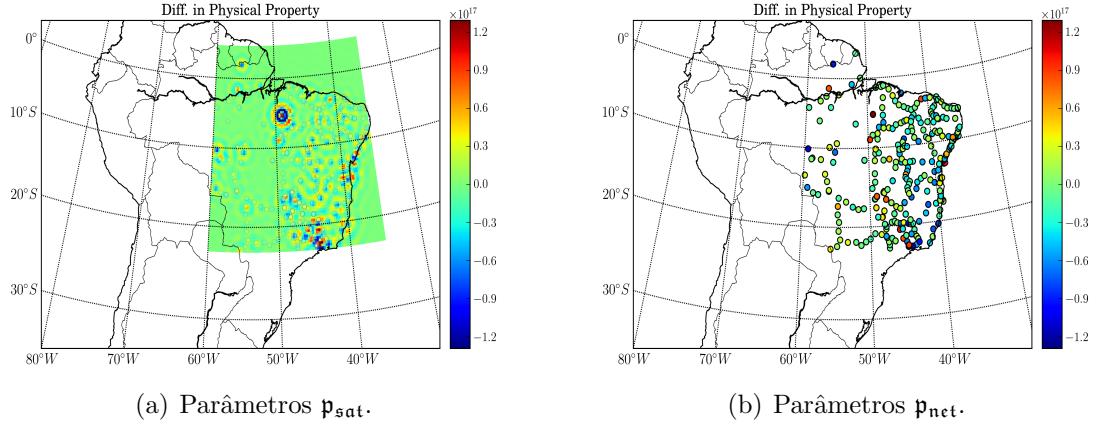


Figura 5.22: Mapa da diferença $\mathbf{p} - \mathbf{p}$.

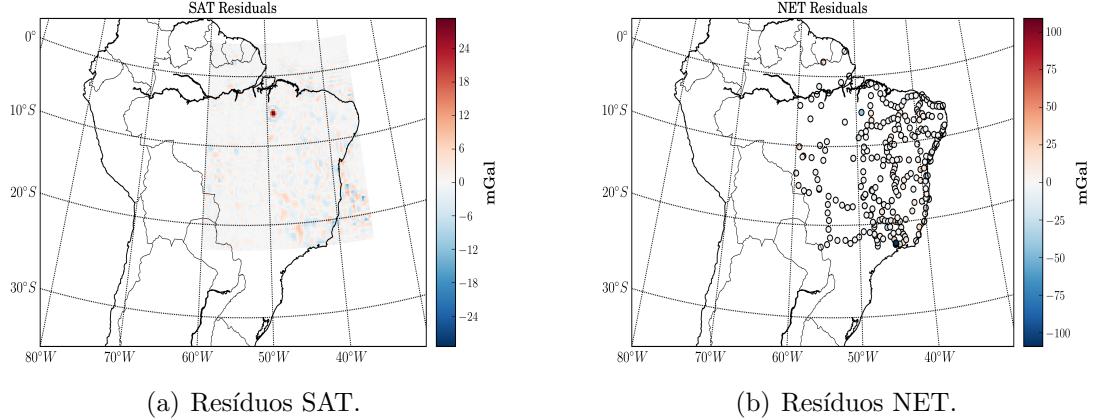


Figura 5.23: Mapa dos resíduos

de ± 30 mGal, sendo os maiores resíduos localizados exatamente nas regiões mencionadas anteriormente. Um pico muito alto no Maranhão e outros valores menos altos ao longo do litoral e sudeste, seguindo a configuração das estações. Já na Fig. 6.23(b), cuja variação da escala de cores ocorre no intervalo entre ± 109 mGal, a rede tem seus valores de resíduos concentrados entre ± 25 mGal, com exceção das mesmas regiões de maiores valores de resíduos SAT. Os resíduos NET estão 50 mGal abaixo, quando comparado a Δd_2 .

Os histogramas dos resíduos podem ser vistos em 6.24. No caso de dados reais, não se conhecesse as distribuições que os dados seguem. No entanto, os histogramas aparecem mostrar distribuições gaussianas, principalmente o histograma da Fig. 6.24(b). Este tem média próxima de 1 e desvio padrão igual a aproximadamente 11. A Fig. 6.24(a) que mostra o histograma dos resíduos SAT, por outro lado, tem média próxima de zero e desvio padrão igual a 2.

Os dados preditos a 20 km usando os dois conjuntos de parâmetros (\mathbf{p} e \mathbf{p}), foram calculados de forma a analisar os resíduos resultantes da subtração com o dado observado neste nível de referência. A Fig. 6.25(a) mostra o mapa dos resíduos

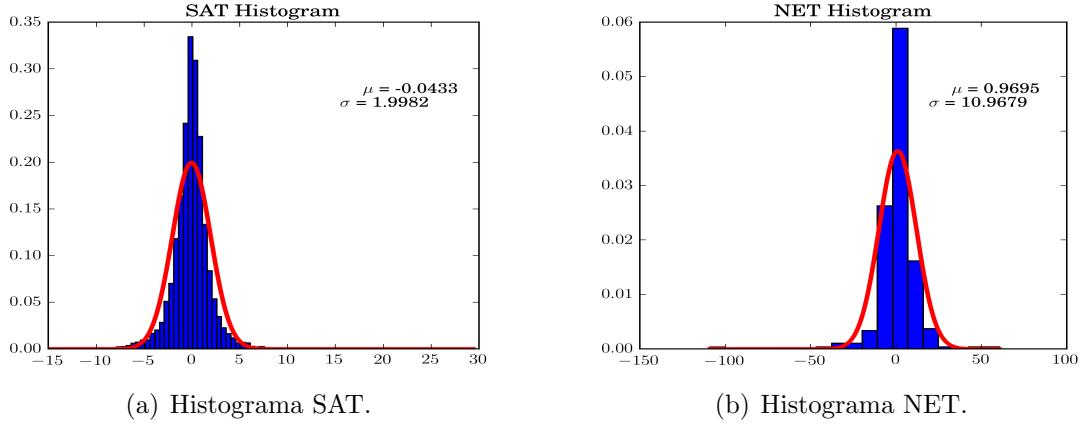


Figura 5.24: Histograma dos resíduos

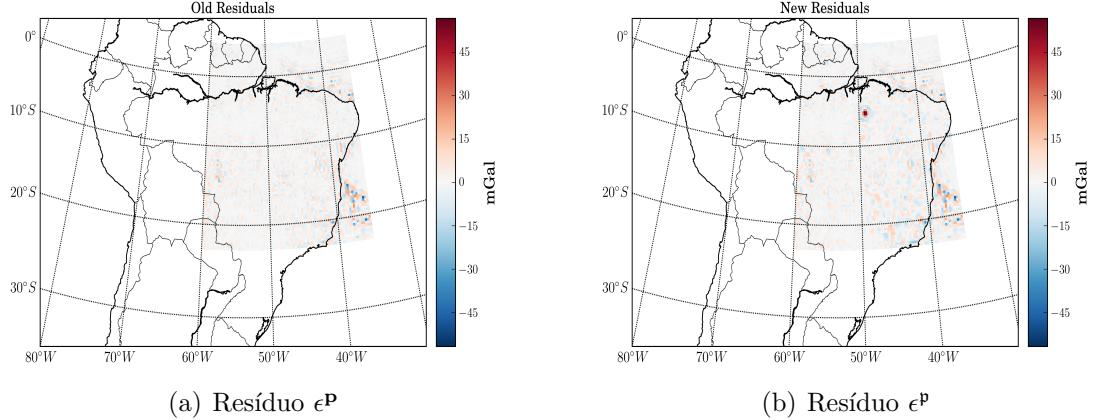


Figura 5.25: Mapa de resíduos a 20 km.

ϵ^P no nível de referência fixado. Em contrapartida, a Fig. 6.25(b) mostra o mapa dos resíduos ϵ^P . Ao contrário do que foi observado nos testes sintéticos, os mapas gerados nesta etapa mostram a inclusão de sinais de curto comprimento de onda.

Capítulo 6

Conclusões

Uma nova metodologia foi proposta para a combinação de dados de distúrbio de gravidade. Os dados foram provenientes de modelos globais SAT, englobando grande parte do Brazil, e das estações da RGFB (NET), dentro da cobertura SAT.

Para os testes sintéticos foi proposto um modelo regional de massas anômalas composto por esferas de diferentes densidades, tamanhos e profundidades, simulando feições rasas e profundas. Feições rasas produzem sinais de curto comprimento de onda, enquanto que as profundas, sinais de longo comprimento de onda. A modelagem direta possibilitou o cálculo do distúrbio de gravidade nos pontos de observação SAT, REG e NET, ao qual adicionou-se um ruído gaussiano. Estes dados foram usados como dados de entrada nos sistemas lineares construídos pela técnica da camada equivalente.

A configuração dos pontos de observação e camada equivalente tomaram proporções regionais, o que fez com que fosse necessário a substituição das usuais coordenadas cartesianas (x, y, z) pelas coordenadas geodésicas ($\mathfrak{h}, \phi, \lambda$). Uma camada equivalente, composta por pontos de massa localizadas abaixo de cada observação a uma profundidade de 130 km, foi ajustada pelo método de mínimos quadrados sub-determinado, inicialmente para os dados SAT, e corrigida localmente sob os dados NET (ou algum outro levantamento).

O ajuste da camada equivalente usando esta metodologia pôde ser avaliada pelos histogramas dos resíduos. Apesar dos resíduos REG e/ou NET mostrarem histogramas com desvio padrão um pouco fora do esperado, a distribuição aparenta seguir uma curva gaussiana. Além disso, os resíduos SAT foram bem ajustados. É possível que para uma profundidade diferente da de 130 km, os resíduos REG e NET tenham valores de desvio padrão mais próximos do ruído.

A profundidade de 130 km foi escolhida depois de um ajuste da camada equivalente usando dados SAT somente. Naquele caso, o histograma mostrou uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão 0.98. Este foi o motivo pelo qual a profundidade mencionada foi usada no presente trabalho.

A evidência de que dados a maiores altitudes têm menos sinais de curto comprimento de onda que dados obtidos a altitudes menores é manifestada quando os resíduos entre o dado observado sem ruído (d_{ref}^o) e o dado predito, seja d_{ref}^p ou d_{ref}^p , a 20 km são comparados. Os resíduos e^p apresentam todos os curtos comprimentos de onda representados pelas feições rasas do modelo em todos os testes realizados. Já os resíduos e^p , apontam a eliminação dos curtos comprimentos de onda localizados sob os dados secundários (REG ou NET). Esta afirmação sustenta o uso da metodologia apresentada para combinar dados de distúrbio de gravidade de diferentes origens.

Por outro lado, quando os dados reais são usados na metodologia, os resíduos provenientes da análise d_{ref}^p e d_{ref}^o não são eliminados as feições de curto comprimento de onda e, sim, inseridos mais destes sinais. Uma explicação para este fato pode ser a discrepância entre os valores dos dados SAT e NET no caso real, enquanto que no caso sintético os dados tinham valores próximos.

6.1 Trabalhos Futuros

Como falado, a primeira alteração a ser feita é utilizar uma profundidade no entorno daquela usada e testá-la para melhorar o ajuste da camada. A escolha da profundidade ainda é feita por tentativa e erro. Seria interessante encontrar uma maneira de estabelecer este parâmetro automaticamente.

Um teste sintético para dados locais com uma densidade superior a 40000 medidas foi realizado, na tentativa de simular um levantamento aéreo, além dos usuais dados SAT. Pelo fato da camada equivalente convencional exigir a montagem sistema linear e o seu armazenamento em computador, a metodologia apresentada não pôde ser usada, já que para esta configuração apenas a matriz de sensibilidade seria 47000×47000 , aproximadamente. Para se ter uma idéia do armazenamento de tais matrizes, uma matriz de sensibilidade 100×100 requer um espaço de 762 Mb em memória. Uma abordagem alternativa da metodologia está sendo avaliada no caso de dados muito densos. Espera-se que ela, ao ser utilizada, possa combinar de dados de maneira eficiente e rápida.

Referências Bibliográficas

- ARFKEN, G. B., WEBER, H. J., 2005, *Mathematical Methods for Physicists*. California, Elsevier Academic Press.
- BARNES, G., 2014, “Reconstructing the gravity gradient anomaly field from surveys with wide line spacing using equivalent source processing: an error analysis”, *Geophysical Prospecting*, v. 62, n. 3, pp. 646–657. doi: 10.1111/1365-2478.12098.
- BARNES, G., LUMLEY, J., 2011, “Processing gravity gradient data”, *Geophysics*, v. 76, n. 2, pp. I33–I47. doi: 10.1190/1.3548548.
- BARTHELMES, F., 2013. “Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models”.
- BAUMANN, H., KLINGELÉ, E., MARSON, I., 2012, “Absolute airborne gravimetry: a feasibility study”, *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 2, pp. 361–372. doi: 10.1111/j.1365-2478.2011.00987.x.
- BLAKELY, R. J., 1996, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge, Cambridge University Press. ISBN: 0521575478.
- BOUMAN, J., EBBING, J., FUCHS, M., 2013, “Reference frame transformation of satellite gravity gradients and topographic mass reduction”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 118, n. 2, pp. 759–774. ISSN: 2169-9356. doi: 10.1029/2012JB009747.
- CORDELL, L., 1992, “A scattered equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimensions”, *Geophysics*, v. 57, n. 4, pp. 629–636. doi: 10.1190/1.1443275.
- DAMPNEY, C. N. G., 1969, “The equivalent source technique”, *Geophysics*, v. 34, n. 1, pp. 39–53. doi: 10.1190/1.1439996.
- DAVIS, K., LI, Y., 2011, “Fast solution of geophysical inversion using adaptive mesh, space-filling curves and wavelet compression”, *Geophysical Journal International*

- International*, v. 185, n. 1, pp. 157–166. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.04929.x.
- EMILIA, D. A., 1973, “Equivalent sources used as an analytical base for processing total magnetic field profiles”, *Geophysics*, v. 38, n. 2, pp. 339–348. doi: 10.1190/1.1440344.
- FORSBERG, R., 1984, *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling*. Relatório técnico, DTIC Document.
- GLENNIE, C. L., SCHWARZ, K. P., BRUTON, A. M., et al., 2000, “A comparison of stable platform and strapdown airborne gravity”, *Journal of Geodesy*, v. 74, n. 5, pp. 383–389. doi: 10.1007/s001900000082.
- HAMMER, S., 1945, “Estimating ore masses in gravity prospecting”, *Geophysics*, v. 10, n. 1, pp. 50–62. doi: 10.1190/1.1437147.
- HEISKANEN, W. A., MORITZ, H., 1967, *Physical Geodesy*. San Francisco, W. H. Freeman and Company. ISBN: 978-0-7167-0233-7.
- HOFMANN-WELLENHOF, B., MORITZ, H., 2005, *Physical Geodesy*. Austria, Springer. ISBN: 3211235841.
- LAFEHR, T. R., 1965, “The estimation of the total amount of anomalous mass by Gauss’s theorem”, *Journal of Geophysical Research*, v. 70, n. 8, pp. 1911–1919. doi: 10.1029/JZ070i008p01911.
- LI, X., GÖTZE, H.-J., 2001, “Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics”, *Geophysics*, v. 66, n. 6, pp. 1660–1668. doi: 10.1190/1.1487109.
- LI, Y., OLDENBURG, D. W., 2010, “Rapid construction of equivalent sources using wavelets”, *Geophysics*, v. 75, n. 3, pp. L51–L59. doi: 10.1190/1.3378764.
- LI, Y., NABIGHIAN, M., OLDENBURG, D. W., 2014, “Using equivalent source with positivity for low-latitude reduction to the pole without striation”, *Geophysics*, v. 79, n. 6, pp. J81–J90. doi: 10.1190/geo2014-0134.1.
- MENDONÇA, C. A., SILVA, J. B. C., 1994, “The equivalent data concept applied to the interpolation of potential field data”, *Geophysics*, v. 59, n. 5, pp. 722–732. doi: 10.1190/1.1443630.

- NABIGHIAN, M. N., GRAUCH, V. J. S., HANSEN, R. O., et al., 2005, "Historical development of the gravity method in exploration", *Geophysics*, v. 70, n. 6, pp. 63ND–89ND. doi: 10.1190/1.2133785.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C., UIEDA, L., 2013, "Polynomial equivalent layer", *Geophysics*, v. 78, n. 1, pp. G1–G13. doi: 10.1190/geo2012-0196.1.
- PAWLOWSKI, R. S., 1994, "Green's equivalent layer concept in gravity band-pass filter design", *Geophysics*, v. 59, n. 1, pp. 69–76. doi: 10.1190/1.1443535. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/1.1443535>>.
- Sansò, F., Sideris, M. G. (Eds.), 2013, *Geoid Determination*, v. 110, *Lecture Notes in Earth System Sciences*. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-74699-7 978-3-540-74700-0. doi: 10.1007/978-3-540-74700-0.
- SILVA, J. B. C., 1986, "Reduction to the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies", *Geophysics*, v. 51, n. 2, pp. 369–382. doi: 10.1190/1.1442096.
- SIQUEIRA, F. C. L., JR., V. C. O., BARBOSA, V. C. F., 2017, "Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint", *Geophysics*, v. 82, n. 4, pp. G57–G69. doi: 10.1190/geo2016-0332.1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1190/geo2016-0332.1>>.
- SOLER, T., 1976, *On differential transformations between Cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates*. Relatório técnico, Ohio State University.
- TORGE, W., MÜLLER, J., 2012, *Geodesy*. 4 ed. Berlin/Boston, Walter de Gruyter. ISBN: 978-3-11-020718-7.
- VANÍČEK, P., KRAKIWSKY, E. J., 1987, *Geodesy: The Concepts, Second Edition*. Canada, Elsevier Science. ISBN: 0444877770.
- XIA, J., SPROWL, D. R., ADKINS-HELJESON, D., 1993, "Correction of topographic distortions in potential-field data: a fast and accurate approach", *Geophysics*, v. 58, n. 4, pp. 515–523. doi: 10.1190/1.1443434.