



Observatório
Nacional

Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**

CARACTERIZAÇÃO REGIONAL DO
CAMPO DE GRAVIDADE USANDO O
MÉTODO DA CAMADA EQUIVALENTE
AJUSTADA AOS DADOS DE REDES
GRAVIMÉTRICAS

Texto de Qualificação de Doutorado em
Geofísica

Aluno: Kristoffer Alexander Teixeira Hallam

Orientador: Vanderlei Coelho de Oliveira Junior

Rio de Janeiro
2017

Listas de Figuras

2.1	Representação esquemática dos sistemas Cartesiano e geodésico geocêntrico.	10
3.1	Linha pontilhada vermelha mostra a região de avaliação do potencial gravitacional.	12
3.2	Esquema vetorial da gravidade.	13
3.3	Terra verdadeira, superfícies equipotenciais e linhas de prumo.	14
3.4	vetor de gravidade representado pelas setas em vermelho tangenciando a linha de prumo em cada ponto (lado esquerdo). Mudança na direção do vetor de gravidade ao longo da superfície equipotencial (lado direito).	15
3.5	Terra normal e superfícies equipotenciais.	16
3.6	Topo: lado esquerdo - densidade da Terra verdadeira (ρ); lado direito - densidade da Terra normal ($\tilde{\rho}$). Base: $\Delta\rho = \rho - \tilde{\rho}$. O resultado da subtração mostra o constraste de densidade da Terra verdadeira em relação à Terra normal.	17
3.7	Cima: modelo sintético da Terra construído usando o Fatiando a Terra (Uieda et al., 2013); Baixo - Topo: componente- \mathfrak{h} da atração gravitacional; Meio: distúrbio de gravidade; Base: diferença entre os dois.	18
3.8	Cima: modelo sintético da Terra construído usando o Fatiando a Terra (Uieda et al., 2013); Baixo - Topo: componente- \mathfrak{h} da atração gravitacional; Meio: distúrbio de gravidade; Base: diferença entre os dois.	19
4.1	Rede fechada com 2 estações absolutas	21
4.2	Rede fechada com 3 estações absolutas	21
4.3	Rede aberta com 2 estações absolutas	21
4.4	Redes gravimétricas sintéticas com 6 estações totais. As setas vermelhas definem o sentido do caminho tomado. As variáveis Δ_{ij} correspondem aos intervalos de gravidade da estação i para a estação j .	21
5.1	Efeito do distúrbio de gravidade nos pontos de observação (em vermelho) devido à distribuição de densidade anômala em subsuperfície.	26
5.2	Esquema da camada equivalente em coordenadas geodésicas.	26
5.3	À esquerda: modelo sintético da Terra construído usando o Fatiando a Terra (Uieda et al., 2013); à direita: Mapas da atração gravitacional do modelo de densidade contendo três esferas. Topo: componente- \mathfrak{h} ; No meio: componente- ϕ ; Base: componente- λ .	27
5.4	Topo: gravidade; No meio: gravidade normal; Base: distúrbio.	28
5.5	Figura da esquerda - Topo: distúrbio calculado; No meio: distúrbio predito; Base: diferença entre os distúrbios. Figura da direita - Topo: gravidade calculada; No meio: gravidade predita; Base: diferença entre as gravidades.	28
5.6	Quantidades computadas num grid de observação a 20km de altitude. Topo: gravidade; No meio: gravidade normal; Base: distúrbio.	29
7.1	Rede gravimétrica sintética.	32

7.2	Rede gravimétrica sintética. Pontos vermelhos representando estações relativas e pontos verdes, estações absolutas.	33
7.3	Mapa dos desvios padrão das estimativas das estações da rede gravimétrica.	34

Sumário

1	Introdução	5
2	Sistema de Coordenadas	7
2.1	Coordinadas Curvilíneas Genéricas	8
2.1.1	Coeficientes Métricos	8
2.1.2	Sistemas ortogonais e vetores unitários	8
2.1.3	Coordenadas Geodésicas	9
3	Gravidade	12
3.1	Potencial de Gravidade	12
3.2	Vetor de Gravidade	13
3.3	Superfícies de nível e linhas de prumo	14
3.4	Terra Normal	15
3.5	Potencial Perturbador	16
3.6	Distúrbio de Gravidade	16
4	Ajustamento de uma rede gravimétrica	20
4.1	Rede Gravimétrica	20
4.2	Modelo Matemático Geral	22
4.3	Formulação do Modelo Matemático da Rede Gravimétrica	22
5	Camada Equivalente	24
5.1	Camada Equivalente aplicada à Gravidade	25
5.2	Modelagem do Campo de Gravidade usando a Camada Equivalente	27
6	Metodologia do Problema Híbrido	30
7	Resultados e Discussões	32
7.1	Estimativa da gravidade nos nós da rede gravimétrica	32
7.2	Estimativa da gravidade usando o problema híbrido	33
7.3	Conclusões	34
A	Distúrbio de Gravidade	35

Capítulo 1

Introdução

A combinação do método de ajustamento de rede gravimétrica e a técnica da camada equivalente é uma metodologia inteiramente inovadora e promissora. A relação direta entre dados de intervalo de gravidade e distribuição de densidade nunca antes foi investigada, de forma que esta proposta estabelece uma conexão entre conceitos importantes da geodésia e da geofísica.

Normalmente, a partir de um conjunto de dados potenciais (anomalia magnética, anomalia de gravidade, distúrbio de gravidade, etc), estimam-se os coeficientes da camada e, posteriormente, são realizadas as transformações desejadas. Este é o caso da sua aplicação em processamento e interpretação de dados. Quando trata-se de gravimetria, os dados de entrada são referentes ao distúrbio de gravidade e está estritamente relacionada às massas anômalas em subsuperfície. Uma vez estabelecida a distribuição de densidade da camada equivalente, é possível obter este campo em qualquer outro lugar. Assim, a soma do distúrbio de gravidade com o campo proveniente da superfície de referência do elipsóide de revolução, calculado por uma fórmula determinística, gera o campo de gravidade.

Por outro lado, o ajustamento de uma rede gravimétrica é um procedimento matemático que usa valores pontuais absolutos de gravidade obtida por gravímetros absolutos e intervalos de gravidade entre estações para estimar a gravidade em todos os nós da rede. Este procedimento é restrito aos pontos pertencentes à rede. O cálculo de valores de gravidade fora dos nós só é alcançada por meio da aplicação de interpolações. Além dos valores de gravidade obtidos pontualmente, o ajuste fornece também os desvios padrão das medidas das estações.

O objetivo deste estudo é realizar a caracterização regional do campo de gravidade sobre e acima da superfície da Terra combinando a técnica da camada equivalente no ajuste da rede gravimétrica. Foi constatado a necessidade de manipular o problema sob uma nova perspectiva de sistema de coordenadas, que não fosse o Cartesiano habitual. O sistema de coordenadas escolhido foi o geodésico geocêntrico ($\mathfrak{h}, \phi, \lambda$), já que o posicionamento geográfico dos pontos selecionados na superfície terrestre em um levantamento de GPS (Global Positioning System) é baseado nele, assim como o cálculo da gravidade normal. Além disso, averiguou-se que não há publicações que tenham dissertado sobre o efeito gravitacional de pontos de massa no sistema mencionado, fontes estas usadas nas modelagens do estudo.

Mayhew (1982), Von Frese et al. (1981) e Dymant and Arkani-Hamed (1998) fizeram a modelagem regional do campo magnético usando dipolos em coordenadas esféricas a partir de dados de satélite, este último corrigindo as expressões criadas pelo seu antecessor. Outros trabalhos foram publicados referente ao uso do ponto de massa para computar o campo gravitacional em coordenadas esféricas (Needham, 1970), (Balmino, 1972), (Antunes et al., 2003), (Lehmann, 1993), (Guspí et al., 2004) e (Lin et al., 2014).

Vajda et al. (2004) mostra como as integrais de Newton podem ser transformadas para

o sistema geodésico e as compara com a abordagem esférica para os casos do potencial gravitacional e da atração gravitacional. Novák and Grafarend (2005) discute a representação do potencial gravitacional e suas derivadas devido às massas topográficas dispostas acima do datum GRS80 em função das chamadas coordenadas normais de superfície de Gauss, também conhecidas como coordenadas geodésicas. No entanto, não discorrem sobre fontes pontuais no sistema de coordenadas mencionado.

Para avaliar o campo gravitacional das fontes equivalentes, foi necessário deduzir as fórmulas das operações diferenciais no sistema de coordenadas geodésico. Arfken and Weber (1995) deduzem as equações dos operadores diferenciais para um conjunto de coordenadas curvilíneas genéricas, enquanto que Soler (1976) obtém as relações entre as coordenadas Cartesianas e geodésicas, assim como os elementos de volume ($d\tau$) e área (ds) infinitesimais e os respectivos fatores de escala (h_b, h_ϕ, h_λ).

O capítulo 2 descreve a construção do sistema de coordenadas geodésico geocêntrico e desenvolve os operadores matemáticos adotados para a modelagem do campo de gravidade do presente trabalho. O capítulo 3 inicia-se com a explicação dos conceitos teóricos dos potenciais de gravidade, gravitacional e centrífuga, sua origem e efeito; os gradientes dos potenciais que resultam nos vetores de gravidade, atração gravitacional e aceleração centrífuga, respectivamente; os equipotenciais (geopes e esferopes), linha de prumo que define a direção do vetor de gravidade; a demonstração alternativa de que a gravidade pode ser uma soma vetorial de uma gravidade oriunda do elipsóide de referência e mais um distúrbio causado por massa anômalas; e, por fim, uma análise breve do distúrbio de gravidade. O capítulo 4 faz menção aos conceitos de uma rede gravimétrica, definindo a sua instalação bem como seus elementos. Além disso, é formulada um modelo matemático representativo de uma rede, realizando sobre ela um exemplo de ajustamento por mínimos quadrados. O capítulo 5 elucida o conceito da camada equivalente e suas aplicações em processamento de dados. Ainda demonstra como essa técnica foi aplicada na modelagem de gravidade proposta. Com toda a formulação apresentada, o capítulo 6 combina a técnica da camada equivalente para ajustar uma rede gravimétrica sintética. Finalmente, o capítulo 7 explana os resultados encontrados dessa interação e os discute.

Capítulo 2

Sistema de Coordenadas

Um determinado problema podem ser abordado usando diferentes sistemas de coordenadas. Aquele que melhor descrever os fenômenos envolvidos e que simplificar a solução é o mais propenso a ser escolhido. Quando fala-se em caracterização regional do campo de gravidade, deve-se estar atento à facilidade de se manipular o problema com determinado sistema de coordenada e se o mesmo se aproxima da realidade do planeta.

A caracterização regional do campo de gravidade leva, intuitivamente, em consideração as propriedades de curvatura da Terra. Os trabalhos publicados em geodésia usam, em sua grande maioria, a superfície da Terra sendo aproximada por uma esfera de raio médio. Nesse contexto, o sistema de coordenadas esférico representado por (ρ, ψ, λ) é usado para representar os pontos de observação no espaço tendo como superfície de referência básica a esfera. Os trabalhos de Heiskanen and Moritz (1981), Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006) e Torge and Müller (2012) demonstram de maneira concisa toda a modelagem do potencial usando o método de expansão em harmônicos esféricos em caráter global. Baseado neste sistema, foram desenvolvidas as chamadas *spherical radial basis functions* (SRBF) que são baseados nos harmônicos esféricos, no entanto tem a vantagem de servirem à modelagem local, permitem o refinamento de uma representação do campo global em harmônicos esféricos e são facilmente adaptáveis a distribuição de dados e variações de sinais (Klees et al., 2008). Os trabalho de Klees et al. (2008), Tenzer and Klees (2008) e Bentel et al. (2013) demonstram essa metodologia para situações variadas.

Assim como os harmônicos esféricos são aplicados a modelagem da gravidade num sistema de coordenadas esférico, a expansão em harmônicos elipsoidais pode ser usada quando as bases de referência são elipsóides. O sistema de coordenadas definido por (u, β, λ) são apresentados em Heiskanen and Moritz (1981) e Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006) assim como a sua utilização nos harmônicos elipsoidais.

A definição do sistema de coordenadas é de suma importância para a modelagem, pois é a partir dele que se fixa espacialmente as fontes causadoras do campo. Mayhew (1982) usou as coordenadas esféricas para modelar o campo magnético de dipolos. Von Frese et al. (1981) apresentou expressões para o campo magnético produzido por dipolos no mesmo sistema de coordenadas. As expressões foram posteriormente corrigidas no trabalho de Dymant and Arkani-Hamed (1998), que as usaram para gerarem mapas de anomalia magnética a partir de dados de satélite. No caso da gravimetria, pontos de massa em coordenadas esféricas foram usadas para a modelagem do campo gravimétrico (Needham, 1970), (Balmino, 1972), (Antunes et al., 2003), (Lehmann, 1993), (Guspí et al., 2004) e (Lin et al., 2014).

O sistema de coordenadas geodésico geocêntrico, muito usado na localização espacial feita num levantamento de Global Positioning System (GPS), é apresentado e empregado por Vajda et al. (2004) e por Novák and Grafarend (2005) nas integrais de Newton para avaliar as correções topográficas. Entretanto, não é de conhecimento do autor nenhum

trabalho relacionado a modelagem da gravidade usando fontes pontuais em coordenadas geodésicas.

2.1 Coordenadas Curvilíneas Genéricas

Superfícies curvas arbitrárias que possuem uma interseção em comum formam um novo sistema de coordenada (Arfken and Weber, 1995). Descrevendo estas superfícies como $q_1 = \text{constante}$, $q_2 = \text{constante}$ and $q_3 = \text{constante}$, pontos podem ser localizados segundo o sistema (q_1, q_2, q_3) (Kellogg, 1929), (Stratton, 2007).

2.1.1 Coeficientes Métricos

Considere um sistema Cartesiano geocêntrico com os eixos z e x coincidentes, respectivamente, o eixo de rotação médio e o meridiano de Greenwich. Relaciona-se direta e inversamente as coordenadas Cartesianas x , y e z e as novas coordenadas por

$$\begin{bmatrix} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e

$$\begin{bmatrix} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Do teorema de Pitágoras, é obtido a magnitude do elemento de distância ao quadrado entre dois pontos vizinhos dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3)$$

em que os infinitesimais dx , dy e dz são obtidas da equação 2.1, de forma que

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial q_3} dq_3, \quad \alpha = x, y, z. \quad (2.4)$$

Substituindo os infinitesimais $d\alpha$ na equação 2.3

$$ds^2 = g_{11}dq_1^2 + g_{22}dq_2^2 + g_{33}dq_3^2 + 2(g_{12}dq_1dq_2 + g_{13}dq_1dq_3 + g_{23}dq_2dq_3), \quad (2.5)$$

em que

$$g_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

e

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}, \quad i \neq j. \quad (2.7)$$

Os coeficientes g_{ii} e g_{ij} são denominados coeficientes métricos.

2.1.2 Sistemas ortogonais e vetores unitários

Sistemas de coordenadas curvilíneas são ortogonais quando os coeficientes métricos g_{ij} são nulos. Nestes casos, o elemento de distância ds^2 é reescrita como

$$ds^2 = (h_1dq_1)^2 + (h_2dq_2)^2 + (h_3dq_3)^2 \quad (2.8)$$

em que $h_i = \sqrt{g_{ii}}$, $i = 1, 2, 3$, são chamados de fatores de escala. De acordo com 2.8, os termos $h_i dq_i$ representam componentes de deslocamento infinitesimais ao longo das coordenadas curvilíneas q_i . Para estabelecer um conjunto de vetores mutuamente ortogonais num dado ponto fixo, define-se um vetor de posição \bar{r} cujos elementos são

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3). \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Os vetores mutuamente ortogonais, denominados vetores unitários (Stratton, 2007), são dados por

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

O vetor unitário \bar{e}_i é definido na direção de aumento da coordenada q_i e tem magnitude igual ao fator de escala h_i , que mostra que não é necessariamente um vetor de módulo igual a 1. Define-se os vetores unitários de módulo 1 fazendo

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Tendo definido todas estas quantidades, os operadores gradiente, divergente, Lapaciando e rotacional são, respectivamente.

$$\bar{\nabla} \psi = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \bar{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\partial_{q_1}(V_1 h_2 h_3) + \partial_{q_2}(V_2 h_3 h_1) + \partial_{q_3}(V_3 h_1 h_2)] \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \bar{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{bmatrix} \hat{e}_1 h_1 & \hat{e}_2 h_2 & \hat{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

em que ψ é um campo escalar invariante a uma rotação do sistema de coordenadas (por exemplo temperatura) e \bar{V} é um campo vetorial com componentes V_1 , V_2 e V_3 ao longo dos vetores unitários \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , respectivamente.

2.1.3 Coordenadas Geodésicas

A localização de pontos no espaço são normalmente obtidos por meio de levantamentos de GPS que fornecem um conjunto de coordenadas concordantes com um datum especificado. Este datum corresponde ao elipsóide de melhor ajuste da Terra (Soler and Hothem, 1988) baseado em quatro parâmetros específicos: o raio equatorial (a), a constante gravitacional geocêntrica (GM), o fator dinâmico de forma (J_2) e a velocidade angular da Terra (ω). O elipsóide adotado para o presente trabalho foi o World Geodetic System 1984(WGS84). As três coordenadas que compõe o sistema geodésico geocêntrico são:

1. \mathfrak{h} : altitude geométrica ao longo da normal do elipsóide de referência entre o ponto de observação P e a superfície do elipsóide.

$$\begin{cases} \mathfrak{h} < 0 \rightarrow \text{dentro do elipsóide;} \\ \mathfrak{h} > 0 \rightarrow \text{fora do elipsóide.} \end{cases}$$

2. ϕ : ($\frac{-\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$) latitude geodésica dada pelo ângulo entre a normal do elipsóide em P e o plano equatorial;

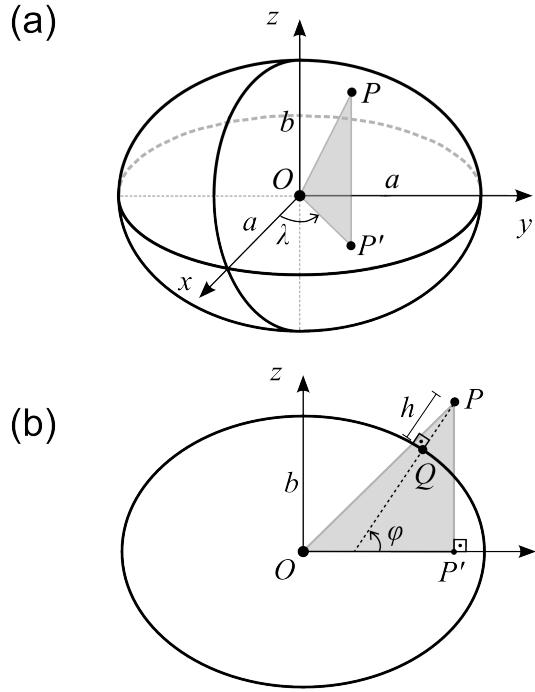


Figura 2.1: Representação esquemática dos sistemas Cartesiano e geodésico geocêntrico.

3. λ : ($0 \leq \lambda \leq 2\pi$) longitude geodésica dada pelo ângulo entre o plano do meridiano médio de Greenwich e o plano do meridiano que contém o ponto P .

A Fig. 2.1 mostra, no mesmo esquema, o sistema geocêntrico Cartesiano e o geodésico.

O presente trabalho propõe a simulação do campo de gravidade em escala regional e a escolha do sistema de coordenadas geodésico geocêntrico traz benefícios porque, na prática, os pontos de observação são frequentemente fixados nestas coordenadas. Além disso, não é mais preciso empregar transformações de coordenada. Muito embora, os trabalhos de Vajda et al. (2004) e Novák and Grafarend (2005) apresentem meios de calcular as integrais de Newton em coordenadas geodésicas, o foco deles reside nas correções topográficas.

Soler (1976) deduziu o elemento de comprimento começando com as relações entre coordenadas Cartesianas e geodésicas dadas por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (N + \mathfrak{h}) \cos \phi \cos \lambda \\ (N + \mathfrak{h}) \cos \phi \sin \lambda \\ (\kappa^2 N + \mathfrak{h}) \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= (N + \mathfrak{h}) \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix} - e^2 N \sin \phi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (N + \mathfrak{h}) \hat{\nu} - e^2 N \sin \phi \hat{e}_z \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad ; \quad M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}. \quad (2.17)$$

são os raios de curvatura principal e meridional, respectivamente, que são funções dependentes de ϕ , a é o semi-eixo maior e e a excentricidade do elipsóide.

O inverso da distância

Normalmente, a função harmônica que está presente na modelagem da gravidade corresponde ao inverso da distância. Em coordenadas Cartesianas, esta função r^{-1} é dada por

$$r^{-1} = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} \quad (2.18)$$

em que (x, y, z) são as coordenadas dos pontos de observação e (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas da fonte graviacional. De acordo com as relações 2.16,

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 &= [(N + \mathfrak{h}) \cos \phi \cos \lambda - (N_0 + \mathfrak{h}_0) \cos \phi_0 \cos \lambda_0] = A \\ (y - y_0)^2 &= [(N + \mathfrak{h}) \cos \phi \sin \lambda - (N_0 + \mathfrak{h}_0) \cos \phi_0 \sin \lambda_0] = B \\ (z - z_0)^2 &= \{[N(1 - e^2) + \mathfrak{h}] \sin \phi - [N_0(1 - e^2) + \mathfrak{h}_0] \sin \phi_0\} = C \end{aligned} \quad (2.19)$$

portanto

$$r^{-1} = [A^2 + B^2 + C^2]^{-1/2} \quad (2.20)$$

O gradiente em coordenadas geodésicas aplicado à r^1 da equação 2.20 é

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} r^{-1} &= \frac{\partial}{\partial \mathfrak{h}} r^{-1} \hat{e}_{\mathfrak{h}} + \frac{\partial}{\partial \phi} r^{-1} \hat{e}_{\phi} + \frac{\partial}{\partial \lambda} r^{-1} \hat{e}_{\lambda} \\ &= [\hat{e}_{\mathfrak{h}} \quad \hat{e}_{\phi} \quad \hat{e}_{\lambda}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M+\mathfrak{h}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(N+\mathfrak{h}) \cos \phi} \end{bmatrix} [\partial_{\mathfrak{h}} r^{-1} \quad \partial_{\phi} r^{-1} \quad \partial_{\lambda} r^{-1}] \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{h}} r^{-1} = -r^{-3} (A \cos \phi \cos \lambda + B \cos \phi \sin \lambda + C \sin \phi) \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{M + \mathfrak{h}} \frac{\partial}{\partial \phi} r^{-1} = -r^{-3} (-A \sin \phi \cos \lambda + B \sin \phi \sin \lambda + C \sin \phi) \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{(N + \mathfrak{h}) \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} r^{-1} = -r^{-3} (-A \sin \lambda + B \cos \lambda) \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

Capítulo 3

Gravidade

3.1 Potencial de Gravidade

O potencial de gravidade W é dada pela equação

$$W = V + \Phi = G \int \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \quad (3.1)$$

V é o potencial gravitacional dependente da distribuição (ρ) de densidade, que por conveniência será intitulado de fontes gravitacionais, interior à Terra, G é a constante gravitacional, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, num sistema Cartesiano, é a distância entre a fonte gravitacional na posição (x_0, y_0, z_0) e o ponto de observação (x, y, z) e a integral indica que o potencial gravitacional é dado pela contribuição de todas as fontes presentes no interior do volume. Φ é o potencial centrífugo devido ao movimento de rotação da Terra e ω é a velocidade angular da Terra.

O potencial centrífugo é simétrico com relação à longitude e depende da latitude do observador. Ele não é harmônico pois o seu Laplaciano é diferente de zero (equação 3.2).

$$\nabla^2\Phi = 2\omega^2 \neq 0 \quad (3.2)$$

A mesma análise pode ser estendida ao potencial gravitacional. Entretanto, deve ser exercida com mais cautela, pois há diferença entre o potencial avaliado dentro e o potencial fora da Terra. Para regiões dentro da Terra (lado esquerdo da Fig. 3.1), o potencial

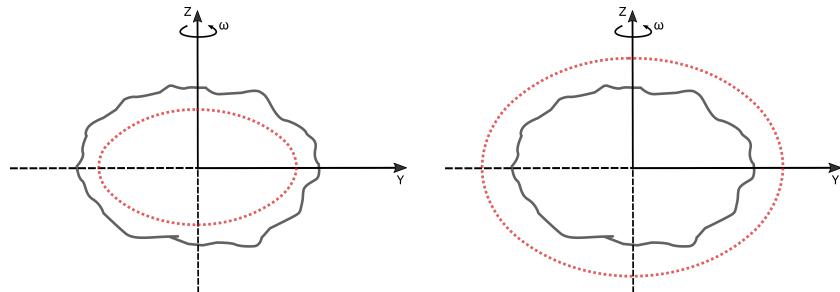


Figura 3.1: Linha pontilhada vermelha mostra a região de avaliação do potencial gravitacional.

gravitacional não é harmônico porque a distribuição de densidade é diferente de zero (equação 3.3). Já para regiões fora da Terra (lado direito da Fig. 3.1), o potencial gravitacional é harmônico (equação 3.4).

$$\nabla^2V = 4\pi G\rho \rightarrow r < R_{terra} \quad (3.3)$$

$$\nabla^2V = 0 \rightarrow r > R_{terra} \quad (3.4)$$

A relação 3.3 satisfaz a equação de Poisson e a relação 3.4, a equação de Laplace. Deduz-se, portanto, que o potencial de gravidade não é harmônico independente da região da Terra que está sendo avaliada

$$\nabla^2 W \neq 0. \quad (3.5)$$

3.2 Vetor de Gravidade

O vetor gravidade \bar{g} é a soma de duas acelerações atuando em um corpo em repouso sobre ou próximo à superfície da Terra. São elas:

1. Atração gravitacional;
2. Aceleração centrífuga.

Enquanto que a atração gravitacional é causada pela distribuição de massa dentro da Terra convencionada por fontes gravitacionais, a aceleração centrífuga está relacionada ao movimento de rotação que a Terra exerce sobre o seu eixo que contribui negativamente à medida que o observador se aproxima do equador.

Aplicando o operador gradiente na equação 3.1, e desprezando os efeitos atmosféricos e temporais devido às marés terrestres, são obtidos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}W &= \bar{\nabla}V + \bar{\nabla}\Psi \\ \bar{g} &= \bar{a}_V + \bar{a}_C. \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que \bar{g} é o vetor gravidade, \bar{a}_V é a atração gravitacional e \bar{a}_C é a aceleração centrífuga. A magnitude g é chamada apenas de gravidade, é a quantidade física medida em mGal em um levantamento de gravimetria terrestre. O lado esquerdo da Fig. 3.2 demonstra como é obtido vetorialmente o vetor gravidade e o lado direito da Fig. 3.2 mostra um esquema do como ocorre a variação da gravidade com a medição em pontos de latitude distintos.

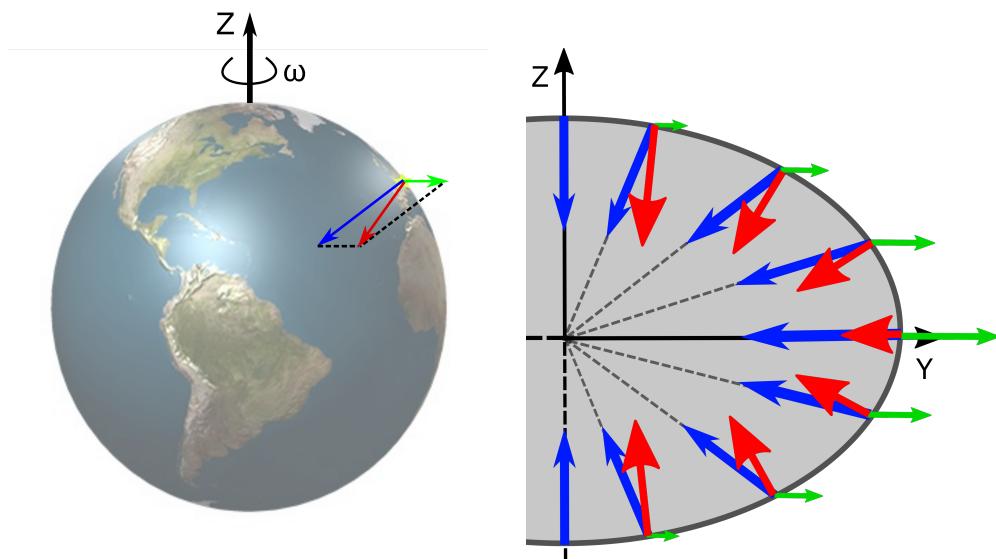


Figura 3.2: Esquema vetorial da gravidade.

3.3 Superfícies de nível e linhas de prumo

Um campo conservativo (que resulta do graviente de um potencial), in termos geométricos, é habitual o uso de famílias de linhas, as linhas de força do campo, e famílias de superfícies, as superfícies equipotenciais (Sideris, 2013). As superfícies

$$W(\mathbf{h}, \phi, \lambda) = \text{constante} \quad (3.7)$$

são chamadas de superfícies equipotenciais ou superfícies de nível ou, ainda, geopes. As linhas cinzas pontilhadas da Fig. 3.3 mostram os geopes de W . Derivando o potencial de

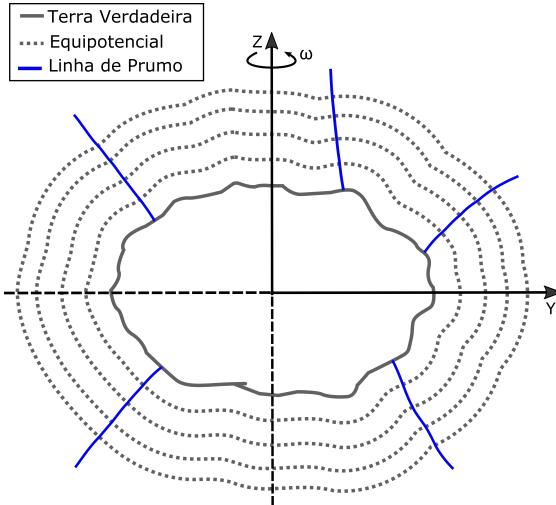


Figura 3.3: Terra verdadeira, superfícies equipotenciais e linhas de prumo.

gravidade obtém-se, em notação vetorial

$$dW = \bar{\nabla}W \cdot d\bar{r} = \bar{g} \cdot d\bar{r} \quad (3.8)$$

em que $d\bar{r} = [d\mathbf{h}, (M + \mathbf{h})d\phi, (N + \mathbf{h}) \cos \phi d\lambda]$. Ao longo da equipotencial, não há variação em W , o que matematicamente pode ser escrito como $dW = 0$, mostrando que o produto escalar de $\bar{g} \cdot d\bar{r} = 0$, neste caso. Isso indica que o vetor de gravidade é sempre ortogonal à superfície equipotencial em cada ponto avaliado.

As linhas de prumo são linhas de força que cortam perpendicularmente as equipotenciais e tendem a ser levemente curvadas. As linhas contínuas azuis seriam exemplos de linhas de prumo do potencial de gravidade mostrando pela Fig. 3.3. O vetor de gravidade é sempre tangente à linha de prumo no ponto considerado e é por isso que as linhas de prumo definem a direção do vetor de gravidade que pode ser interpretado como a direção vertical (vide lado esquerdo da Fig. 3.4). É interessante notar que o vetor de gravidade sofre alterações de direção e módulo quando avaliado em diferentes pontos da equipotencial (vide lado direito da Fig. 3.4). É importante mencionar que os gravímetro absolutos registram o módulo do vetor gravidade $\|\bar{g}\|$.

Existe uma equipotencial de particular interesse para a geodésia e geofísica que caracteriza a figura matemática da Terra, conhecida como geóide. O geóide representa a superfície média não-perturbada dos mares, sendo uma linha imaginária que penetra pelos continentes tornado-se levemente convexa nestas regiões e mais côncava em localidades oceânicas. O geóide está representado, de maneira um tanto exagerada, na Fig. 3.3 pela linha contínua cinza. O potencial sobre o geóide é

$$W_{geode} = W_0 = \text{constante}. \quad (3.9)$$

A superfície do geóide também pode ser definida como Terra Verdadeira.

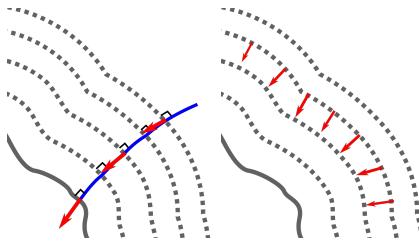


Figura 3.4: Vetor de gravidade representado pelas setas em vermelho tangenciando a linha de prumo em cada ponto (lado esquerdo). Mudança na direção do vetor de gravidade ao longo da superfície equipotencial (lado direito).

3.4 Terra Normal

O potencial de gravidade possui efeitos gerados tanto por fontes gravitacionais quanto por fenômenos não-gravitacionais. Os efeitos não-gravitacionais fazem com que o potencial de gravidade não seja harmônico em nenhuma região referente à Terra. Portanto, torna-se necessário remover estes efeitos do sistema.

A solução encontrada foi calcular o potencial de um elipsóide de revolução contendo a massa M da Terra, seu eixo de rotação Z coincidindo com o eixo de rotação média da Terra, seu eixo X coincidindo com o meridiano médio de Greenwich, sua velocidade angular igual a ω o mesmo que a da Terra, tenha sua origem no centro médio de gravidade da Terra, e que a sua superfície seja a própria equipotencial do seu campo de gravidade normal. O elipsóide de revolução é denominado Terra Normal.

O potencial de gravidade normal \tilde{W} desse novo sistema é dado por

$$\tilde{W} = U + \Phi = G \int \frac{\tilde{\rho} dv}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (3.10)$$

U é o potencial gravitacional devido à distribuição de densidade do elipsóide e Φ corresponde ao mesmo potencial centrífugo verificado anteriormente, posto que o movimento de rotação é o mesmo que o da Terra Verdadeira.

O gradiente da equação 3.10 produz o vetor gravidade normal (γ)

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \tilde{W} &= \bar{\nabla} U + \bar{\nabla} \Psi \\ \bar{\gamma} &= \bar{a}_U + \bar{a}_C. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O campo de gravidade de um elipsóide é de importância prática fundamental por causa de seu fácil manuseio matemático e os desvios do campo de gravidade verdadeiro relativo ao campo elipsoidal são tão pequenos que pode ser considerado linear. A divisão do campo de gravidade da Terra em uma parte 'normal' e a uma pequena parcela advinda de um campo 'perturbador' simplifica consideravelmente a sua determinação (Heiskanen and Moritz, 1981). Essa simplificação é aplicada na prática de forma que seja suficiente o cálculo desse campo perturbador.

A gravidade normal é obtida por meio de fórmulas fechadas dependentes da altitude geométrica e da latitude geodésica do observador. A expressão da Somigliana (Heiskanen and Moritz, 1981) realiza o cálculo sobre o elipsóide ($\mathfrak{h} = 0$). Li and Götze (2001) mostra uma fórmula fechada que retira a restrição de avaliação sobre o elipsóide. Quando utilizada, esta fórmula avalia a gravidade normal para altitudes arbitrárias ($\mathfrak{h} > 0$).

A análise das equipotenciais, ou esferópes, é feita para o caso da Terra normal também. As linhas cinzas pontilhadas da Fig. 3.5 mostram os esferópes de \tilde{W} .

$$\tilde{W}(\mathfrak{h}, \phi, \lambda) = \text{constante} \quad (3.12)$$

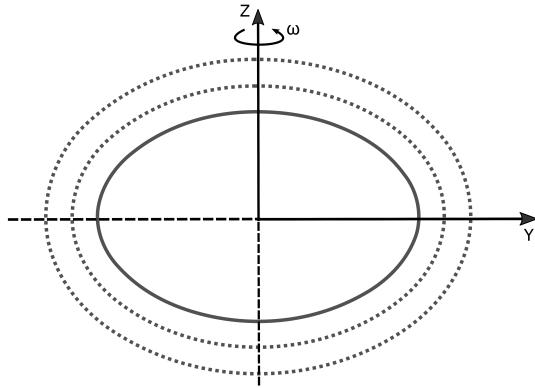


Figura 3.5: Terra normal e superfícies equipotenciais.

As linhas de força não estão representadas na figura, no entanto elas definem a direção do vetor de gravidade normal, ou a direção da normal.

3.5 Potencial Perturbador

É denominado potencial perturbador a diferença entre os potenciais de gravidade e de gravidade normal. Matematicamente,

$$\begin{aligned} T &= W - \tilde{W} \\ &= V + \Psi - (U + \Psi) \\ &= V - U \end{aligned} \quad (3.13)$$

que pode ser entendido como potencial gravitacional devido à diferença de densidade da Terra verdadeira e da Terra normal. Em outras palavras, como o elipsóide é a superfície de referência, a relação 3.13 é o potencial gravitacional devido às massas anômalas. Ele pode ser reescrito como

$$T = G \int \frac{(\rho - \tilde{\rho}) dv}{r} = G \int \frac{\Delta \rho dv}{r} \quad (3.14)$$

O potencial perturbador, ao contrário do potencial de gravidade, é harmônico

$$\nabla^2 T = 0. \quad (3.15)$$

3.6 Distúrbio de Gravidade

O vetor de gravidade é, então, dividido em duas partes: a gravidade proveniente de uma superfície de referência, o elipsóide de revolução, denominada gravidade normal e uma pequena parcela advinda da gravidade gerada pelo potencial perturbador. Define-se o vetor distúrbio de gravidade como sendo o gradiente do potencial perturbador. Em

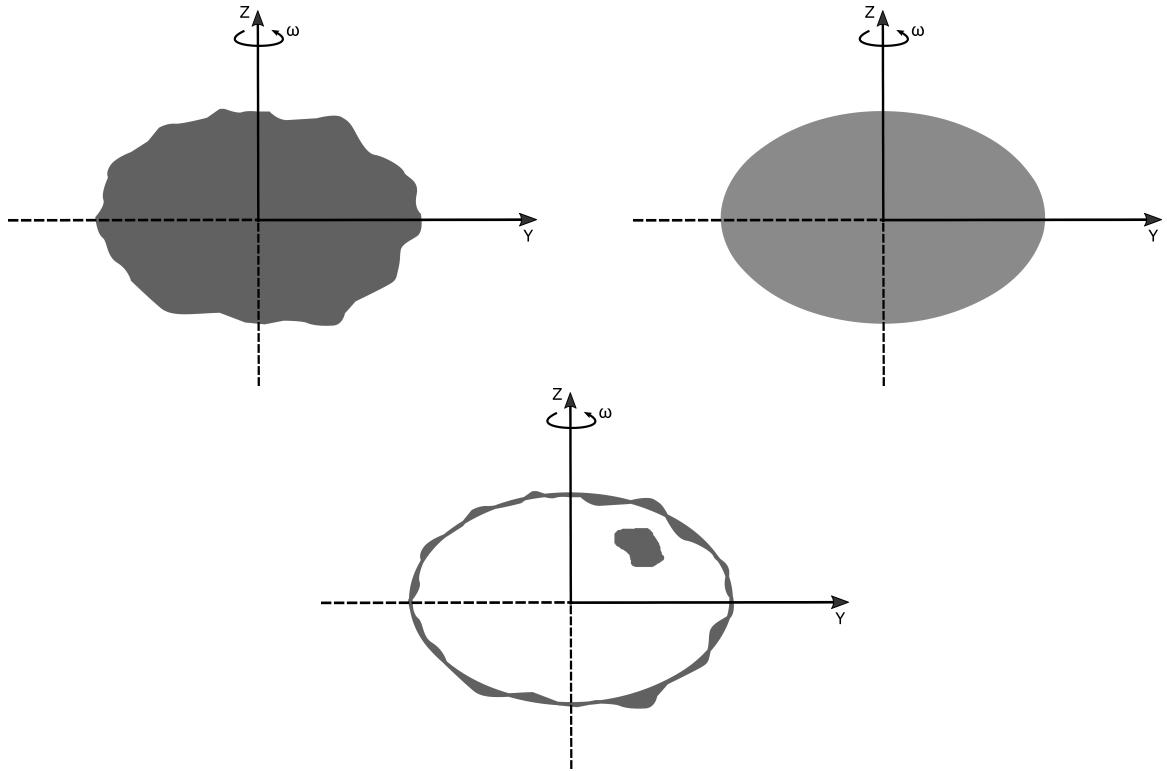


Figura 3.6: Topo: lado esquierdo - densidade da Terra verdadeira (ρ); lado direito - densidade da Terra normal ($\tilde{\rho}$). Base: $\Delta\rho = \rho - \tilde{\rho}$. O resultado da subtração mostra o constraste de densidade da Terra verdadeira em relação à Terra normal.

termos de gravidade, o vetor distúrbio de gravidade pode ser definido como a diferença entre o vetor gravidade e o vetor gravidade normal (equação 3.16).

$$\begin{aligned}\delta\bar{g} &= \bar{\nabla}T = \bar{\nabla}(W - \tilde{W}) \\ \delta\bar{g} &= \bar{g} - \bar{\gamma}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Logo, as equações gerais do potencial e da gravidade são

$$\begin{aligned}W &= \tilde{W} + T \\ \bar{g} &= \bar{\gamma} + \delta\bar{g}\end{aligned}\tag{3.17}$$

O distúrbio de gravidade δg não é igual à magnitude do vetor distúrbio de gravidade ($\delta g \neq \|\delta\bar{g}\|$), mas à diferença das magnitudes (Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006)

$$\delta g = \|\bar{g}\| - \|\bar{\gamma}\|\tag{3.18}$$

A expansão em séries de Taylor do módulo de \bar{g} fornece uma aproximação da magnitude do distúrbio de gravidade (vide seção A),

$$\delta g = \hat{\gamma}^T \cdot \delta\bar{g}\tag{3.19}$$

indicando que o módulo do distúrbio de gravidade é a sua projeção na direção do vetor gravidade normal (direção de $\hat{\gamma}$). Na realidade, o distúrbio é aproximadamente a componente normal do campo gravitacional. Para provar esta afirmação, foram realizados dois testes. Um deles usou um modelo sintético estruturado em forma linhas de massa, representando no total três linhas dispostas em longitudes diferentes. Cada linha era composto

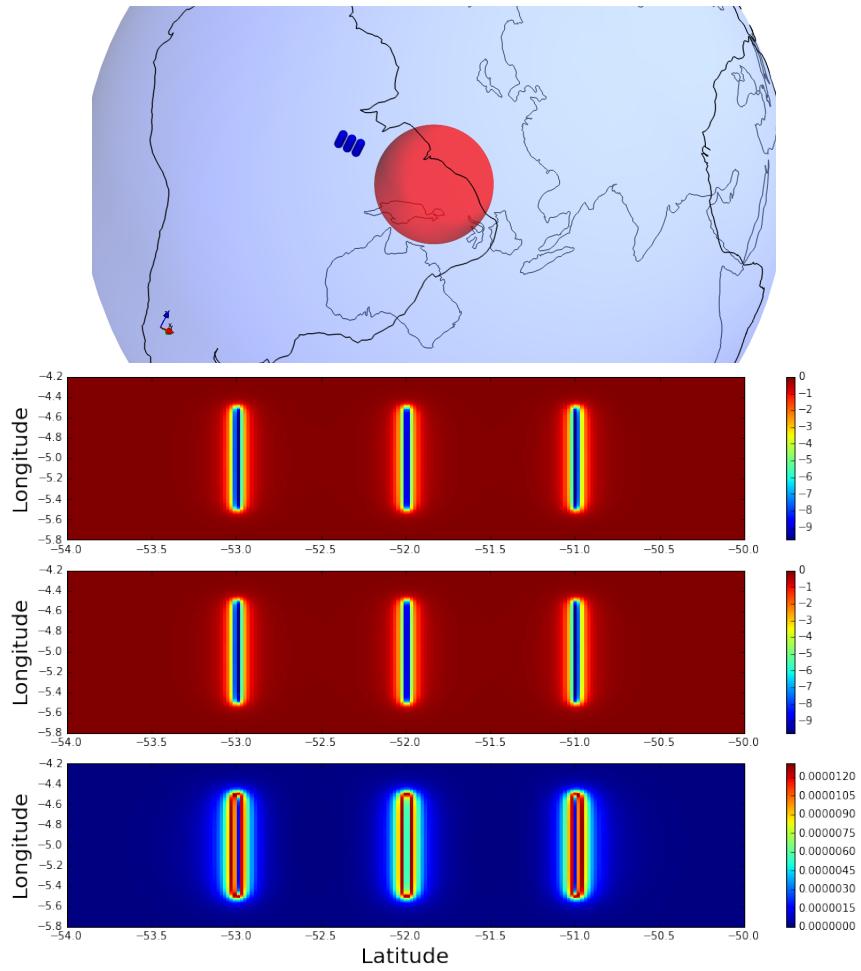


Figura 3.7: Cima: modelo sintético da Terra construído usando o Fatiando a Terra (Uieda et al., 2013); Baixo - Topo: componente- \mathfrak{h} da atração gravitacional; Meio: distúrbio de gravidade; Base: diferença entre os dois.

por esferas, em que para cada esfera individual variou-se a latitude, todas localizadas à uma profundidade de 3km, possuindo raio de 600m e densidade igual a 2800kgm^{-3} . A figura de cima de 3.7 mostra o modelo proposto. As esferas em azul são as fontes gravitacionais e a esfera maior em vermelho representa o núcleo interno da Terra. A figura de baixo de 3.7 mostra a discrepância entre componente- \mathfrak{h} da atração gravitacional e o distúrbio de gravidade que é da ordem de 10^{-5}mGal .

O outro teste feito usou um modelo composto por três esferas de raio de 6km a uma profundidade de 30km. No entanto, novamente percebe-se o mesmo resultado da modelagem anterior. A discrepância é da ordem de 10^{-5}mGal (base da figura de baixo de 3.8). Fica comprovado, com isso, que

$$\delta g \approx a_U^{\mathfrak{h}} \quad (3.20)$$

em que $a_U^{\mathfrak{h}}$ é a atração gravitacional das massa anômalas na direção de \mathfrak{h} .

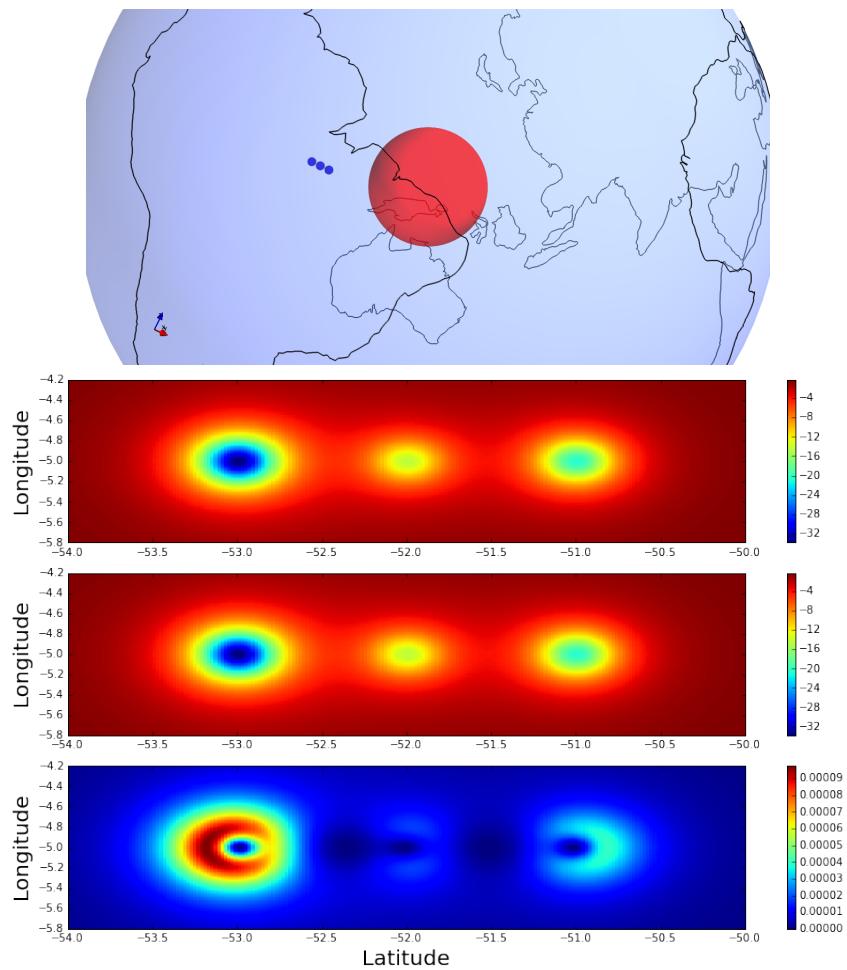


Figura 3.8: Cima: modelo sintético da Terra construído usando o Fatiando a Terra (Uieda et al., 2013); Baixo - Topo: componente- \mathfrak{h} da atração gravitacional; Meio: distúrbio de gravidade; Base: diferença entre os dois.

Capítulo 4

Ajustamento de uma rede gravimétrica

4.1 Rede Gravimétrica

Segundo Vitushkin (2011), uma rede gravimétrica é mencionada em geodésia e na geofísica como sendo um *array* de pontos de controle (nós) de gravidade na superfície da Terra cujas coordenadas geográficas são bem definidas. Estas redes desempenham um papel importante no estudo do campo de gravidade e de suas variações temporais. Elas podem ter extensão global ou regional e consequentemente seu estabelecimento segue convenções internacionais ou regulações nacionais. Redes nacionais deveriam estar conectadas a referência global e são exigidas altas precisões e confiabilidade nos valores de gravidade.

Uma rede gravimétrica é construída a partir de medições da gravidade referente às diversas estações que a compõe. Conhecendo a posição no espaço de cada uma destas estações, os valores de gravidade são avaliados por instrumentos conhecidos como gravímetros. Estes instrumentos pode ser divididos em dois grupos: os gravímetros absolutos e os relativos ou diferenciais. Os gravímetros absolutos permitem a determinação da magnitude do vetor de gravidade com alta precisão e reproduzibilidade, são extremamente sensíveis e costumam ser instalados de forma a operarem fixos em observatórios. Devido à precisão alcançada por estes dispositivos, fica sob sua incumbência o estabelecimento das chamadas estações absolutas das redes gravimétricas, estações essas responsáveis pela propagação dos valores de gravidade e incertezas para o restante da rede durante o ajustamento. Os modernos gravímetros relativos, por outro lado, medem a diferença dos valores de gravidade (intervalos de gravidade) de estações adjacentes. São de fácil manuseio, baixo custo logístico de operação, em comparação com os gravímetros absolutos, e instauram as estações relativas. As Fig. 4.1, 4.2 e 4.3 mostram alguns exemplos de rede gravimétrica. Os triângulos verdes correspondem a estações absolutas e aqueles azuis são relativas.

Na abordagem clássica, o princípio básico para se estabelecer um sistema de gravidade de referência consiste em definir o padrão de gravidade absoluta de acordo com uma *estaçao de gravidade* muito bem determinada com *apenas um valor de gravidade* e para submeter todas as medidas relativas de uma *rede global* a esse valor fundamental. A abordagem moderna leva em conta tanto medidas absolutas como relativas em redes bem estabelecidas, usando pesos apropriados com a finalidade de aperfeiçoar as estimativas das variâncias (Torge, 1989). O futuro da instalação de redes gravimétricas cada vez mais precisas recai sobre o avanço tecnológico dos gravímetros absolutos. Espera-se que as novas redes de larga escala sejam compostas apenas por estações absolutas em que a precisão das conexões relativas não alcancem a qualidade dos valores absolutos medidos.

Segundo a abordagem moderna mencionada no parágrafo anterior, uma rede gravimétrica nada mais é do que um conjunto de pontos interligados entre si via medição relativa

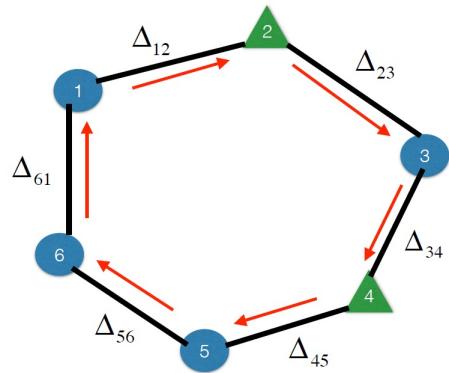


Figura 4.1: Rede fechada com 2 estações absolutas

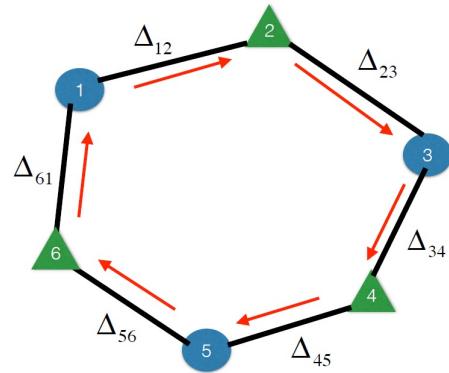


Figura 4.2: Rede fechada com 3 estações absolutas

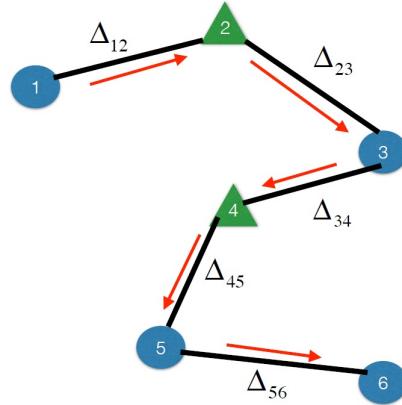


Figura 4.3: Rede aberta com 2 estações absolutas

Figura 4.4: Redes gravimétricas sintéticas com 6 estações totais. As setas vermelhas definem o sentido do caminho tomado. As variáveis Δ_{ij} correspondem aos intervalos de gravidade da estação i para a estação j .

cujas coordenadas geográficas são conhecidas. Não é obrigatório que os pontos tenham interligação com todos os seus vizinhos e nem que o circuito seja fechado. Alguns destes pontos possuem seu próprio valor de gravidade e desvio padrão estabelecido via medição absoluta. O ajustamento da rede gravimétrica é um método de inversão que estima os valores de gravidade das estações relativas e suas variâncias, a partir do conhecimento dos valores de gravidade das estações absolutas.

4.2 Modelo Matemático Geral

O modelo matemático geral de um sistema de equações lineares com o intuito de estimar valores de gravidade, considerando, para isso, um vetor de parâmetros g e um vetor de observações d , é:

$$\bar{d}^o = \bar{\bar{A}}\bar{g} \quad (4.1)$$

em que \bar{d}^o é o vetor de intervalo de gravidade (dados observados) de dimensões $N \times 1$, \bar{g} é o vetor de gravidade $L \times 1$ representando os valores de todas as estações e $\bar{\bar{A}}$ é a matriz de sensibilidade $N \times L$ do sistema. O vetor de parâmetros g é obtido pela inversão por mínimos quadrados, dado por:

$$g = (A^T A)^{-1} A^T d \quad (4.2)$$

sendo, A uma matriz não-singular, possuindo, portanto, inversa.

4.3 Formulação do Modelo Matemático da Rede Gravimétrica

Considerando duas estações gravimétricas (i e j) consecutivas e conectadas via medições de gravímetros diferenciais, a relação fundamental estabelecida entre seus valores de gravidade e suas leituras instrumentais (Δl_{ij}) em unidades de mGal é:

$$g_i - g_j = k\Delta l_{ij} \quad (4.3)$$

Tendo as leituras sido previamente corrigidas de maré e deriva instrumental e supondo conhecido o fator de escala k , presume-se que ele possa ser absorvido pelo vetor de intervalo de gravidade Δl_{ij} . Supondo que o problema seja estimar os valores de gravidade da rede gravimétrica do esquema da Fig. 4.3, o modelo matemático é montado como a seguir:

$$g_1 - \tilde{g}_2 = \Delta l_{12} \quad (4.4)$$

$$\tilde{g}_2 - g_3 = \Delta l_{23} \quad (4.5)$$

$$g_3 - \tilde{g}_4 = \Delta l_{34} \quad (4.6)$$

$$\tilde{g}_4 - g_5 = \Delta l_{45} \quad (4.7)$$

$$g_5 - g_6 = \Delta l_{56} \quad (4.8)$$

em que g_i é o valor de gravidade da i -ésima estação relativa, \tilde{g}_i é o valor de gravidade da i -ésima estação absoluta e Δl_{ij} é a diferença de leituras instrumentais entre a i -ésima e a j -ésima estação. Transcrevendo tais relações para a forma matricial:

$$\bar{\bar{R}}\bar{g} = \Delta \bar{l} \quad (4.9)$$

em que $\bar{\bar{R}}$ é a matriz sensibilidade e o vetor de parâmetros (gravidade) são dados por

$$\bar{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \tilde{g}_2 \\ g_3 \\ \tilde{g}_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Os parâmetros a serem estimados correspondem aos valores de gravidade das estações relativas. Portanto, sabendo que $\bar{\bar{R}}\bar{g} = \bar{\bar{G}}\bar{p} + \bar{\bar{B}}\bar{b}$ em que \bar{p} e \bar{b} são os parâmetros relativos e absolutos, respectivamente, e que $\bar{\bar{G}}$ corresponde à matriz sensibilidade associada aos parâmetros relativos e $\bar{\bar{B}}$ corresponde à matriz sensibilidade associada aos parâmetros absolutos, a equação 4.9 pode ser reescrita como:

$$\bar{\bar{G}}\bar{p} + \bar{\bar{B}}\bar{b} = \Delta\bar{l} \quad (4.11)$$

Passando $\bar{\bar{B}}\bar{b}$ para o lado direito da equação e chamando de t o novo vetor de observações, sendo ele dado por $\bar{t} = \Delta\bar{l} - \bar{\bar{B}}\bar{b}$, a equação 4.11 pode ser expressa como em 4.12.

$$\bar{\bar{G}}\bar{p} = \bar{t} \quad (4.12)$$

em que esta expressão apresenta apenas termos referentes aos parâmetros relativos. De maneira análoga a 4.2, a estimativa do vetor de parâmetros relativos \bar{p}^* é obtida por mínimos quadrados

$$\bar{p}^* = (\bar{\bar{G}}^T \bar{\bar{G}})^{-1} \bar{\bar{G}}^T \bar{t}. \quad (4.13)$$

Portanto, após o cálculo das estimativas, o vetor de gravidade predita será dada por

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} p_1^* \\ \tilde{g}_2 \\ p_3^* \\ \tilde{g}_4 \\ p_5^* \\ p_6^* \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

em que cada um desses parâmetros estão relacionados unica e exclusivamente à estação. Em outras palavras, não há como estimar a gravidade de pontos que não sejam os nós da rede.

Estimativa da Matriz Variância-Covariância (MVC)

As matrizes de covariância são

$$\Sigma_p = M \Sigma_{\Delta l} M^T \quad (4.15)$$

em que $\Sigma_l = \sigma_l \bar{I}$ é a matriz de covariância dos dados observados que no caso são os intervalos de gravidade e a matriz $M = (G^T G)^{-1} G^T$ (Escobar, 1985) (Vanicek and Krakiwsky, 2015).

Supondo que nenhuma estação relativa tem influência sobre a outra, a diagonal principal da matriz Σ_p descreverá as variâncias de cada medida dos parâmetros estimados. Sendo assim, seus desvios padrão corresponderão à raiz quadrada destes valores.

Capítulo 5

Camada Equivalente

O método da inversão de dados potenciais tenta inferir como estão organizados as fontes geradoras das propriedades físicas, sua localização e suas dimensões. Entretanto, diferentes fontes podem causar o mesmo efeito gravitacional provocando ambiguidade nos resultados da inversão.

A técnica da camada equivalente é uma poderosa ferramenta para fins de processamento e interpretação de dados de campos potenciais. Assim como o fato da ambiguidade nas características das fontes após a inversão dos dados, a técnica tem como premissa básica que uma distribuição de densidade qualquer em subsuperfície cause o mesmo efeito potencial de uma distribuição superficial contínua e horizontalmente infinita avaliados nos mesmos pontos de observação. Essa distribuição de densidade superficial forma uma camada imaginária de fontes posicionada a uma profundidade definida que produz um campo potencial que satisfaz a equação de Laplace e reproduz os dados observados. Neste sentido, as atenções são voltadas na busca dos coeficientes da camada (vetor de densidades) que melhor se ajusta aos dados observados. Os dados de entrada podem ter origem em qualquer campo harmônico. Tanto os termos *camada equivalente* quanto *fontes equivalentes* encontrados na literatura referem-se à mesma técnica explicada neste capítulo.

Dampney (1969) foi o pioneiro em estabelecer a camada equivalente como uma superfície fictícia localizada abaixo do plano de observação, com dimensões horizontais finitas composta por um conjunto finito e discreto de fontes equivalentes. Ele a aplicou para projetar anomalias Bouguer, originalmente em pontos aleatórios no espaço, em planos horizontais regularmente espaçados e realizar a posterior transformação de continuação para cima. Bott and Ingles (1972) propuseram uma metodologia que combinou o teorema de Poisson e a técnica da camada equivalente para calcular transformações pseudogravimétricas e pseudomagnéticas e para estimar a direção de magnetização, bem como a razão magnetização-densidade. Emilia (1973) foi o primeiro autor a utilizar a camada equivalente no domínio do número de onda computando dados filtrados por filtro passa-banda e o espectro de amplitude. Mostrou que é possível obter as transformações de primeira e segunda derivadas, continuações para cima e baixo e redução ao pólo do processamento de dados magnéticos usando a camada equivalente. Von Frese et al. (1981) deu uma excelente contribuição quando estimou uma distribuição esférica de fontes equivalentes pontuais para o processamento de anomalias gravimétricas e magnéticas no sistema de coordenadas esférico. Obteve, com isso, anomalias geoidais, pseudoanomalias, componentes de anomalias vetoriais, derivadas espaciais, continuações e redução ao pólo magnético. Mayhew (1982) foi o primeiro autor na aplicação da camada equivalente no processamento de dados de satélite. Silva (1986) utilizou-se da técnica da camada equivalente para reduzir os dados magnéticos ao pólo em baixas latitudes buscando um modo de superar a instabilidade gerada pelos métodos convencionais de redução ao pólo por filtragem. Ainda sobre esse assunto, Li et al. (2014) impôs um vínculo positivo nas estimativas da

distribuição de propriedade física removendo a instabilidade na redução ao pólo de dados magnéticos em baixas latitudes. Cordell (1992) e Mendonca and Silva (1994) propuseram dois esquemas para realizar a interpolação de dados de campos potenciais tridimensionais. Usando um sistema de camada equivalente dupla, Pawlowski (1994) montou um esquema de filtragem capaz de fazer a separação regional-residual dos dados de campo. Uma das camadas modelou o campo residual gerado pelas fontes rasas e a outra, o campo regional das fontes mais profundas. Recentemente, Barnes (2014) e Barnes and Lumley (2011) aplicaram a técnica com o intuito de processar dados aéreos de gradiente de gravidade. Na área de métodos elétromagnéticos, a camada equivalente foi empregada por MacLennan and Li (2013) com o objetivo de retirar o ruído dos dados de campo elétrico dos levantamentos de fontes eletromagnéticas controladas no domínio da frequencia.

A única desvantagem mais visível da técnica da camada equivalente recai sobre o custo computacional. À medida que volume de dados cresce, torna-se cada vez mais inviável a utilização da camada equivalente na montagem do sistema linear e solução do problema inverso. Por conseguinte, foram desenvolvidos vários métodos que aperfeiçoassem a eficiência da camada equivalente para estes casos. Leao and Silva (1989) empregaram duas janelas móveis, sendo uma para os dados e a outra para as fontes equivalentes, em que os dados transformados foram computados somente no centro da janela de dados. Xia et al. (1993) desenvolveu um esquema iterativo rápido de atualização da distribuição das fontes equivalentes. A compressão por *wavelet* foi usada por Li and Oldenburg (2010) e por Davis and Li (2011). A estratégia usada por Barnes and Lumley (2011) foi de agrupar um conjunto de fontes equivalentes equidistantes de um ponto de observação i , formando uma fonte equivalente média, desprezando a necessidade de calcular toda a matriz de sensibilidade. Oliveira Jr et al. (2012) reduziu drasticamente o número de equações lineares quando aproximou a distribuição de propriedade física dentro da camada equivalente por uma função polinomial definida em um conjunto de janelas de fontes equivalentes. No trabalho de Siqueira et al. (2017), uma distribuição de massa inicial proporcional aos dados observados foi usado com subsequentes atualizações iterativas adicionando correções de massa correspondente aos resíduos gravitacionais. A matriz diagonal da relação linear destes resíduos com os incrementos de massa permitiu a redução do custo computacional da técnica.

5.1 Camada Equivalente aplicada à Gravidade

A relação matemática da camada equivalente tem origem na terceira identidade de Green e de uma série de suposições impostas às funções potenciais envolvidas, tais como $U(\mathfrak{h}, \phi, \lambda)$ sendo uma função escalar regular e contínua, tem derivadas primeira e segunda contínua e tende a zero no infinito (Kellogg, 1929). O seu uso é restrito a campos harmônicos.

A camada equivalente no presente estudo será usada para obter a parte harmônica da gravidade

$$g \approx \gamma + \delta g. \quad (5.1)$$

Das quantidades apresentadas em 5.1, apenas o distúrbio de gravidade δg apresenta caráter harmônico. A Fig. 5.1 mostra um esquema de massas anômalas em subsuperfície que produzem o campo do distúrbio de gravidade nos pontos de observação em vermelho. Neste contexto, o distúrbio no ponto de observação i seria dado por

$$\delta g_i \approx \int \Delta \rho' dv' \partial_{\mathfrak{h}} \phi \quad (5.2)$$

em que $\partial_{\mathfrak{h}} \phi$ é a derivada na direção normal da função harmônica que representa o inverso

da distância entre estes dois pontos, $\Delta\rho'$ representa as densidades anômalas de cada fonte e a integral é realizada sobre o volume das fontes anômalas.

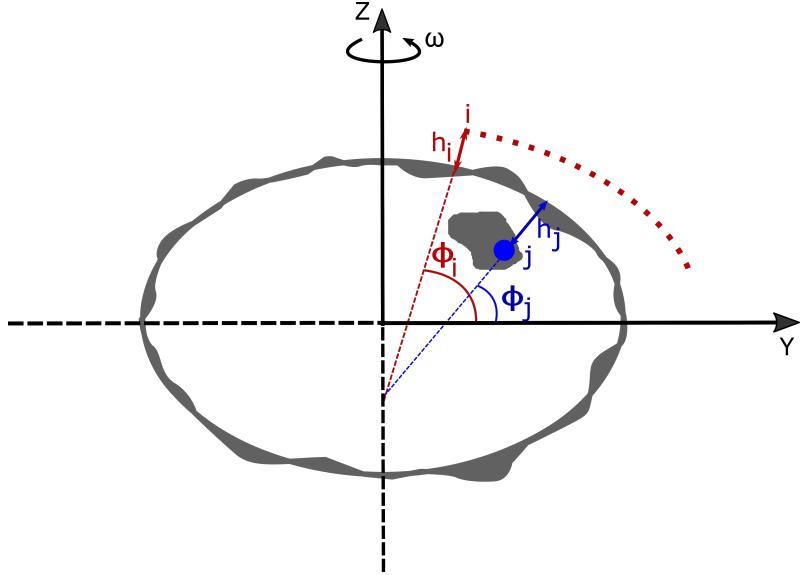


Figura 5.1: Efeito do distúrbio de gravidade nos pontos de observação (em vermelho) devido à distribuição de densidade anômala em subsuperfície.

Uma camada composta por fontes pontuais posicionadas sob as coordenadas horizontais dos pontos de observação, porém a uma profundidade escolhida, causa o mesmo efeito gravitacional que a distribuição de densidade considerada em 5.2. A Fig. 5.2 exemplifica este caso. O distúrbio no ponto de observação i é dado por

$$\delta g_i \approx \sum_j \partial_h \phi_{ij} \rho_j = \sum_{j=1}^M H_{ij} \rho_j \quad (5.3)$$

em que ρ_j representa a densidade da j -ésima fonte equivalente e H_{ij} é a função harmônica que relaciona o distúrbio produzido no ponto i pela fonte j com volume e densidade unitários.

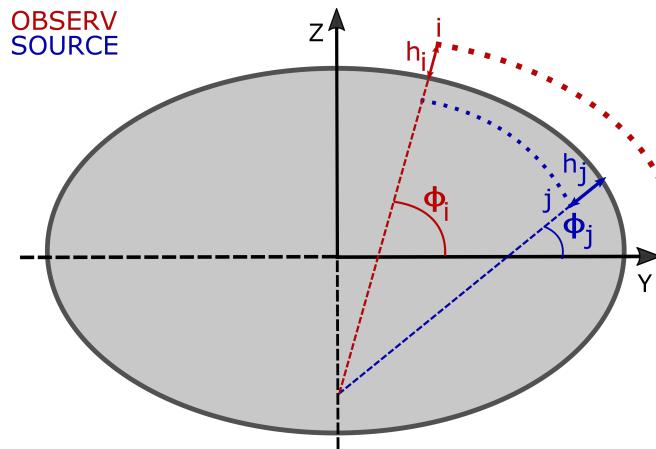


Figura 5.2: Esquema da camada equivalente em coordenadas geodésicas.

δg é, portanto, a combinação linear das funções harmônicas H com os coeficientes da camada equivalente ρ . Em notação matricial, pode-se escrever

$$\delta \bar{g} \approx \bar{H} \bar{\rho} \quad (5.4)$$

Em 5.4, $\delta\bar{g}$ é o vetor de distúrbio de gravidade $N \times 1$, ρ representa o vetor de densidades $M \times 1$ da camada equivalente e H_{ij} é a matriz $N \times M$. Já que os termos δg e H são conhecidos, o vetor ρ é obtido via método dos mínimos quadrados.

$$\bar{\rho}^* = \left(\bar{H}^T \bar{H} \right)^{-1} \bar{H}^T \delta\bar{g} \quad (5.5)$$

5.2 Modelagem do Campo de Gravidade usando a Camada Equivalente

Um modelo de densidade sintético foi gerado para obter o distúrbio de gravidade. Este modelo consistiu de três esferas de raio de 6km a uma profundidade de 30km cujas densidades eram de 5000, 2000 e 3000 kgm^{-3} , respectivamente (vide figura da esquerda de Fig. 5.3).

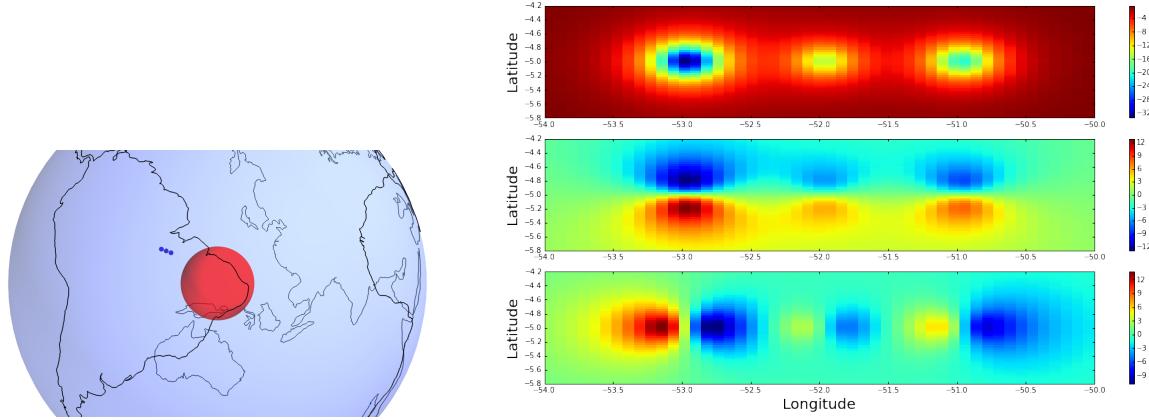


Figura 5.3: À esquerda: modelo sintético da Terra construído usando o Fatiando a Terra (Uieda et al., 2013); à direita: Mapas da atração gravitacional do modelo de densidade contendo três esferas. Topo: componente- \mathfrak{h} ; No meio: componente- ϕ ; Base: componente- λ .

O grid de observação regular consistiu de uma matriz 50×50 , de latitude geodésica variando de -4.2 a -5.8° e longitude geodésica, -54 a -50° . A altitude geométrica do grid foi de $\mathfrak{h} = 0$, ou seja, sobre o elipsóide. Os mapas da figura da direita de 5.3 mostram as três componentes geodésicas da atração gravitacional.

A gravidade é computada obtendo o módulo da soma vetorial destas componentes da atração gravitacional com a gravidade normal. Sabe-se que a gravidade normal tem componentes apenas na direção normal (\mathfrak{h}). Logo, o módulo da soma vetorial é dada por

$$\| \bar{g} \| = \sqrt{[a_V^\mathfrak{h} + \gamma \quad a_V^\phi \quad a_V^\lambda] \begin{bmatrix} a_V^\mathfrak{h} + \gamma \\ a_V^\phi \\ a_V^\lambda \end{bmatrix}}. \quad (5.6)$$

em que a_V é o vetor que corresponde à atração gravitacional. O topo da Fig. 5.4 ilustra o mapa de gravidade, assim como a base expõe o distúrbio de gravidade do modelo sintético usado.

A matriz \bar{H} (equação 5.4) é determinada pelas características impostas à camada, sendo esta composta por pequenas esferas de raio unitário, coordenadas horizontais iguais aos pontos de observação e profundidade fixa de 5km. Uma vez estabelecidos a matriz \bar{H} e o distúrbio, os coeficientes da camada são por mínimos quadrados através de 5.5. O distúrbio predito $\delta\bar{g}^*$ oriundo da camada equivalente é definido como

$$\delta\bar{g}^* \approx \bar{H}\bar{\rho}^*. \quad (5.7)$$

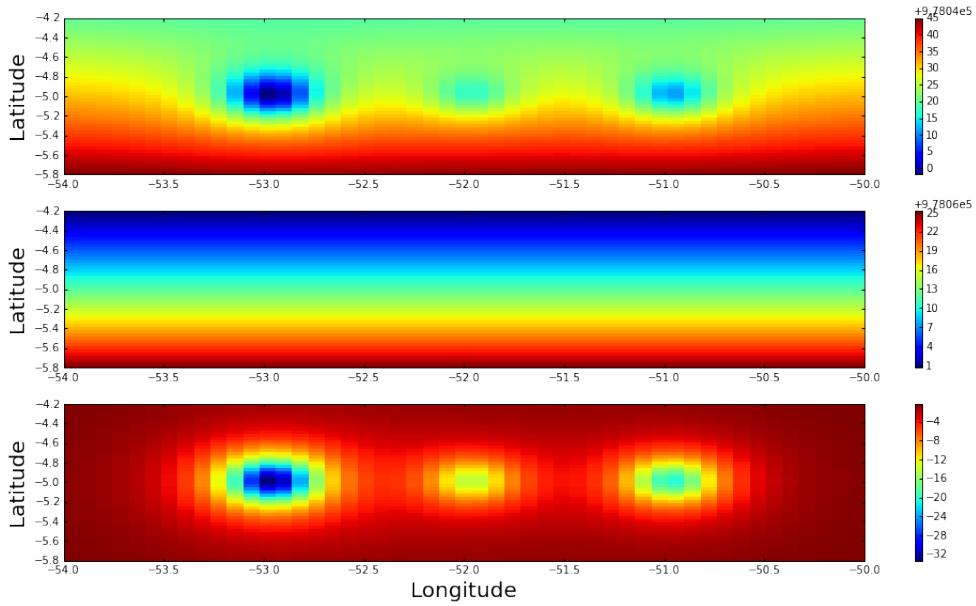


Figura 5.4: Topo: gravidade; No meio: gravidade normal; Base: distúrbio.

A gravidade predita é aquela obtida pela soma da gravidade normal e do distúrbio predito pela camada equivalente. A mesma análise feita para o distúrbio pode ser elaborada com relação à gravidade. Analisando a figura da direita de 5.5, repara-se que a discrepância entre a gravidade calculada e a predita é praticamente nula. A discrepância entre o distúrbio calculado e o predito é avaliado como na figura da esquerda de 5.5. É possível reparar que a diferença dos distúrbios é bem pequena, da ordem de 10^{-11} , confirmando que o distúrbio predito é uma excelente aproximação do calculado.

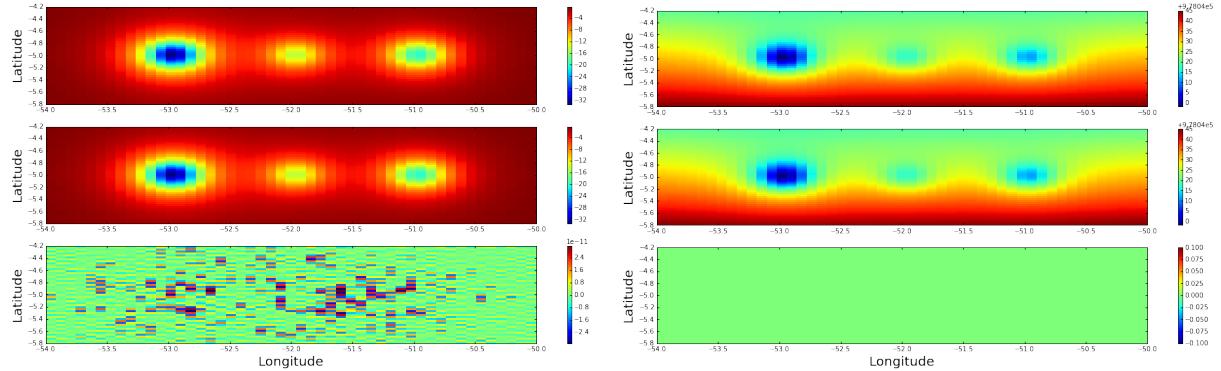


Figura 5.5: Figura da esquerda - Topo: distúrbio calculado; No meio: distúrbio predito; Base: diferença entre os distúrbios. Figura da direita - Topo: gravidade calculada; No meio: gravidade predita; Base: diferença entre as gravidades.

Em posse dos coeficientes de densidade da camada equivalente, a modelagem do distúrbio de gravidade e, consequentemente, da gravidade pode ser obtida em qualquer outro grid observational diferente do usado anteriormente. A critério de ilustração, os pontos de observação foram elevados a uma altitude geométrica de 20km. A matriz \bar{H} é recalculada para as novas coordenadas dos pontos de observação, que ao ser multiplicada pelos coeficientes da camada, gera um novo distúrbio de gravidade. Calcula-se a gravidade de maneira semelhante a como foi feito anteriormente. A Fig. 5.6 exibe estes resultados.

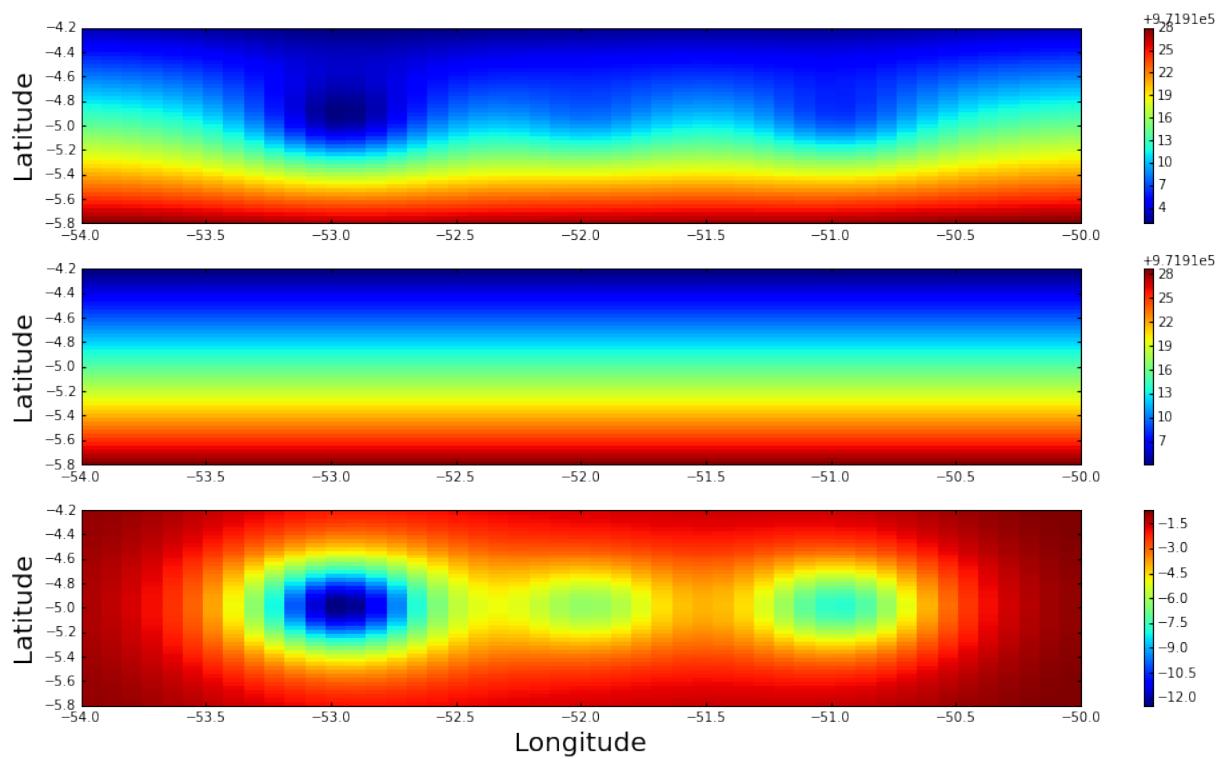


Figura 5.6: Quantidades computadas num grid de observação a 20km de altitude. Topo: gravidade; No meio: gravidade normal; Base: distúrbio.

Capítulo 6

Metodologia do Problema Híbrido

O problema híbrido, foi assim chamado, por aplicar os conceitos da camada equivalente com o intuito de estimar os parâmetros de gravidade da rede gravimétrica. Esta metodologia é inovadora e faz a conexão entre assuntos importantes da geodésia e da geofísica.

As equações que serão mostradas neste capítulo já foram trabalhadas anteriormente de forma que não serão necessárias maiores explicações. Inicialmente, o sistema de equações lineares descrita pela rede gravimétrica é

$$\bar{d}^o = \bar{A}\bar{g} \quad (6.1)$$

Sabe-se que a gravidade no ponto de observação P é a soma das contribuições da gravidade normal mais o distúrbio de gravidade

$$\bar{g}_P = \bar{\gamma}_P + \delta\bar{g}_P \quad (6.2)$$

e que o distúrbio de gravidade é aproximado para a componente normal \mathfrak{h} da gravidade ($\bar{g}_{\mathfrak{h}P}$), conforme a Fig. 3.6. Logo, a relação 6.2 pode ser reescrita como

$$\bar{g}_P^o \approx \bar{\gamma}_P + \bar{g}_{\mathfrak{h}P}. \quad (6.3)$$

O último termo da relação 6.3 está associada à camada equivalente segundo a equação 6.4.

$$\bar{g}_{\mathfrak{h}P} = \bar{H}\bar{\rho}. \quad (6.4)$$

Substituindo a equação 6.4 em 6.2 e, por conseguinte, na 6.1, encontra-se

$$\bar{d}_{N \times 1}^o \approx \bar{A}_{N \times L} \left(\bar{\gamma}_{L \times 1} + \bar{H}_{L \times M} \bar{\rho}_{M \times 1} \right). \quad (6.5)$$

em que os subscritos referem-se às dimensões de cada termo. Isola-se o termo referente à densidade

$$\bar{d}^o - \bar{A}\bar{\gamma}_P \approx \bar{A}\bar{H}\bar{\rho} \quad (6.6)$$

e alguns termos são renomeados de forma que

$$\bar{t} \approx \bar{\Upsilon}\bar{\rho} \quad (6.7)$$

em que $\bar{t} = \bar{d}^o - \bar{A}\bar{\gamma}_P$ e $\bar{\Upsilon} = \bar{A}\bar{H}$. A solução deste sistema linear recai novamente sobre a inversão por mínimos quadrados

$$\bar{\rho}^* \approx \left(\bar{\Upsilon}^T \bar{\Upsilon} \right)^{-1} \bar{\Upsilon}^T \bar{t}. \quad (6.8)$$

Por fim, calcula-se a gravidade predita (\bar{g}^*) substituindo as estimativas de $\bar{\rho}^*$ encontradas em 6.8 na equação 6.4

$$\bar{g}_{\mathfrak{h}P}^* = \bar{H}\bar{\rho}^* \quad (6.9)$$

e o resultado de 6.7 na equação 6.3

$$\bar{g}_P^* \approx \bar{\gamma}_P + \bar{g}_{\mathfrak{h}P}. \quad (6.10)$$

Cálculo dos desvios padrão da gravidade predita

Levando em conta que o vetor \bar{d}^o possui valores de intervalos de gravidade empilhados com valores de gravidade proveniente das estações absolutas, a matriz de covariância dos dados deve ser composta também por duas partes. Neste caso, Σ_d é dado por

$$\Sigma_d = \begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta l} \\ \Sigma_{\tilde{g}} \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

A submatriz $\Sigma_{\Delta l}$ tem dimensão $(S \times S + Na)$ com valores $\sigma_{\Delta l}^2$ em sua diagonal principal. De forma análoga, é montada a submatriz $\Sigma_{\tilde{g}}$: dimensão igual a $(Na \times S + Na)$ e valores iguais a $\sigma_{\tilde{g}}^2$ na diagonal. A soma $S + Na = N$ corresponde ao número total de elementos do vetor d^o . Sendo assim, a matriz covariância dos parâmetros da camada é obtida

$$\Sigma_{\rho^*} = \left(\bar{\Upsilon}^T \bar{\Upsilon} \right)^{-1} \bar{\Upsilon}^T \Sigma_d \bar{\Upsilon} \left(\bar{\Upsilon}^T \bar{\Upsilon} \right)^{-1}. \quad (6.12)$$

Contudo, os valores de gravidade das estações absolutas são mais precisas que os intervalos de gravidade adquiridos pelos gravímetros relativos. Por isso, é necessário ponderar os desvios padrão, dando pesos maiores àqueles referentes às absolutas. É neste contexto que é inserida a matriz de peso W na relação 6.12. Tal matriz assemelha-se a Σ_d , com a diferença que os elementos da diagonal são exatamente o inverso das variâncias. Nestas condições, a relação 6.12 é reescrita com a matriz de peso.

$$\Sigma_{\rho^*} = \left(\bar{\Upsilon}^T \bar{W} \bar{\Upsilon} \right)^{-1} \bar{\Upsilon}^T \bar{W} \Sigma_d \bar{W}^T \bar{\Upsilon} \left(\bar{\Upsilon}^T \bar{W}^T \bar{\Upsilon} \right)^{-1} \quad (6.13)$$

Para calcular os desvios padrão da gravidade predita nas estações selecionadas, são, primeiramente, analisados os termos da equação 6.3. Apenas o termo referente à camada equivalente ($H\rho$) apresenta incertezas, já que a gravidade normal é obtida deterministicamente. Logo,

$$\Sigma_{g^*} = H \Sigma_{\rho^*} H^T. \quad (6.14)$$

Capítulo 7

Resultados e Discussões

7.1 Estimativa da gravidade nos nós da rede gravimétrica

Para o ajustamento da rede gravimétrica, foi utilizada o mesmo modelo sintético da seção 5.2, bem como o mesmo grid de observação 50×50 pontos. Estipulou-se que destes 2500 pontos, 40 seriam usados para a estações da rede. Sendo assim, foram escolhidas aleatoriamente 40 pontos e calculados sobre eles todas as componentes da atração gravitacional e a gravidade normal a fim de estabelecer a gravidade *in loco*. A rede construída está ilustrada na Fig. 7.1.

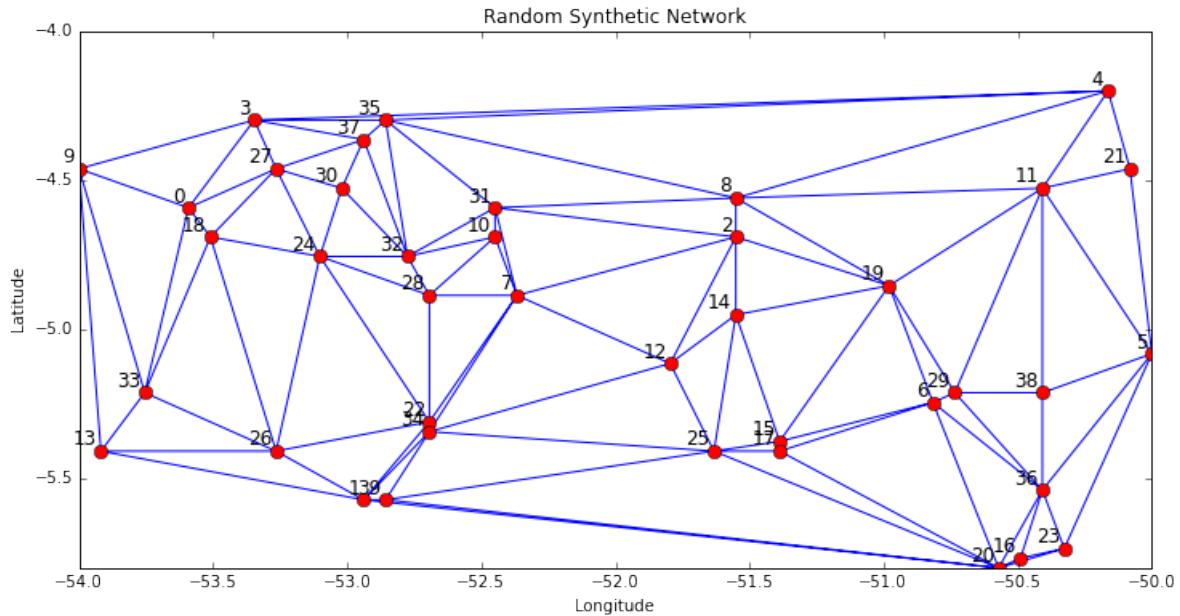


Figura 7.1: Rede gravimétrica sintética.

Sabe-se que os dados de uma rede gravimétrica compreendem intervalos de gravidade e que os valores absolutos de gravidade, associados a estações absolutas, servem de base para a determinação dos parâmetros relativos (gravidade nas estações relativas) e seus desvios padrão são usados para a propagação da incerteza. Sabendo a gravidade de todas as estações, os intervalos de gravidade Δl_{ij} foram obtidos fazendo

$$\Delta l_{ij} = g_i - g_j \quad (7.1)$$

toda vez que a estação i possuía conexão com a estação j . Em seguida, foram selecionados 15 estações para servirem de estações absolutas conforme a Fig. 7.2 mostra. Usando a

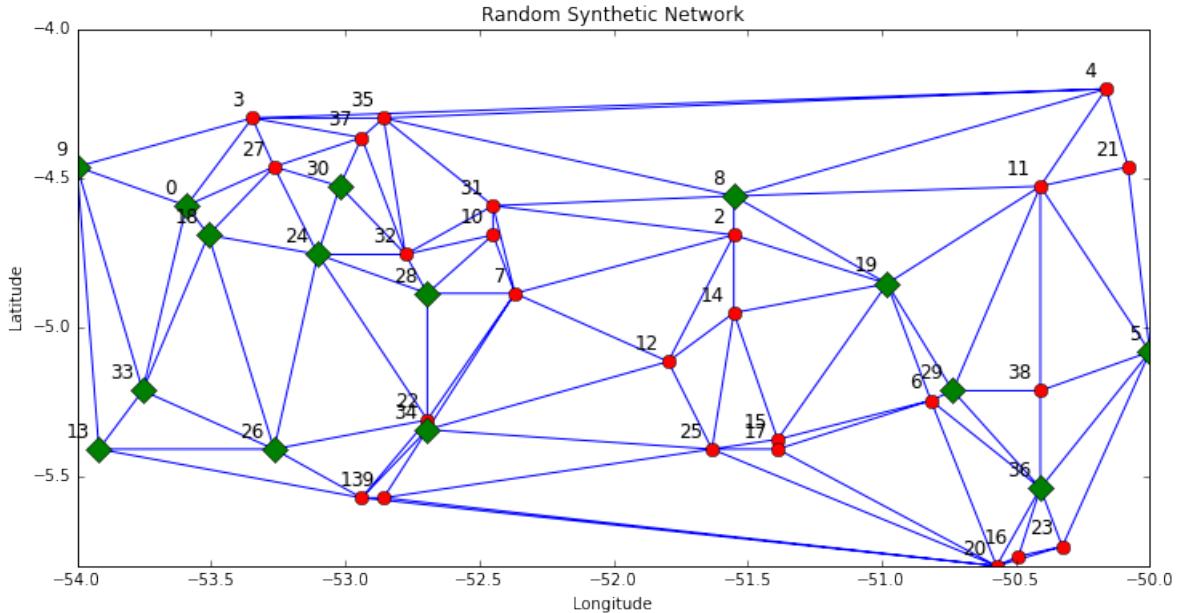


Figura 7.2: Rede gravimétrica sintética. Pontos vermelhos representando estações relativas e pontos verdes, estações absolutas.

relação

$$\bar{p}^* = (\bar{\bar{G}}^T \bar{\bar{G}})^{-1} \bar{\bar{G}}^T \bar{t} \quad (7.2)$$

em que \bar{p}^* é o vetor de parâmetros relativos, $\bar{\bar{G}}$ é a matriz de sensibilidade dos parâmetros relativos e $\bar{t} = \Delta \bar{l} - \bar{\bar{B}} \bar{b}$, realizou-se o ajustamento da rede. Supondo os desvios padrão dos parâmetros relativos e absolutos iguais a 0.1 e 0.001mGal, respectivamente, a matriz covariância dos parâmetros é obtida através de

$$\Sigma_p = M \Sigma_{\Delta l} M^T \quad (7.3)$$

cujos valores da diagonal principal referem-se às variâncias de cada estação relativa. A raiz quadrada destes valores resulta nos desvios padrão. Os resultados estão expostos na Fig. 7.3.

7.2 Estimativa da gravidade usando o problema híbrido

Usando a metodologia descrita na seção 5.1, usando os mesmos parâmetros da rede da seção anterior, estimaram-se os parâmetros das estações selecionadas via camada equivalente. A camada equivalente era composta por 40 esferas raio e densidade unitários a uma profundidade de 2km, posicionadas abaixo de cada estação. A matriz $\bar{\bar{H}}$ pôde, então ser obtida. O vetor de dados d^o era composto por intervalos de gravidade empilhados verticalmente por valores absolutos de gravidade, logo a matriz de sensibilidade $\bar{\bar{A}}$, neste caso, era composta por uma parte das linhas que faziam a conexão das estações e outra com linhas onde o único elemento diferente de zero e igual a 1 representava a estação absoluta. Os círculos representam as estações da rede e estão localizadas nas suas respectivas coordenadas geográficas. O tamanho dos círculos está associado ao valor de desvio padrão de cada estação, multiplicado por uma constante (15×10^3) para torná-lo visível no mapa. Para cada estação estão sobrepostos dois círculos: um deles tem cor azul que corresponde às estimativas do método híbrido; o outro tem cor branca e provém do ajustamento da rede.

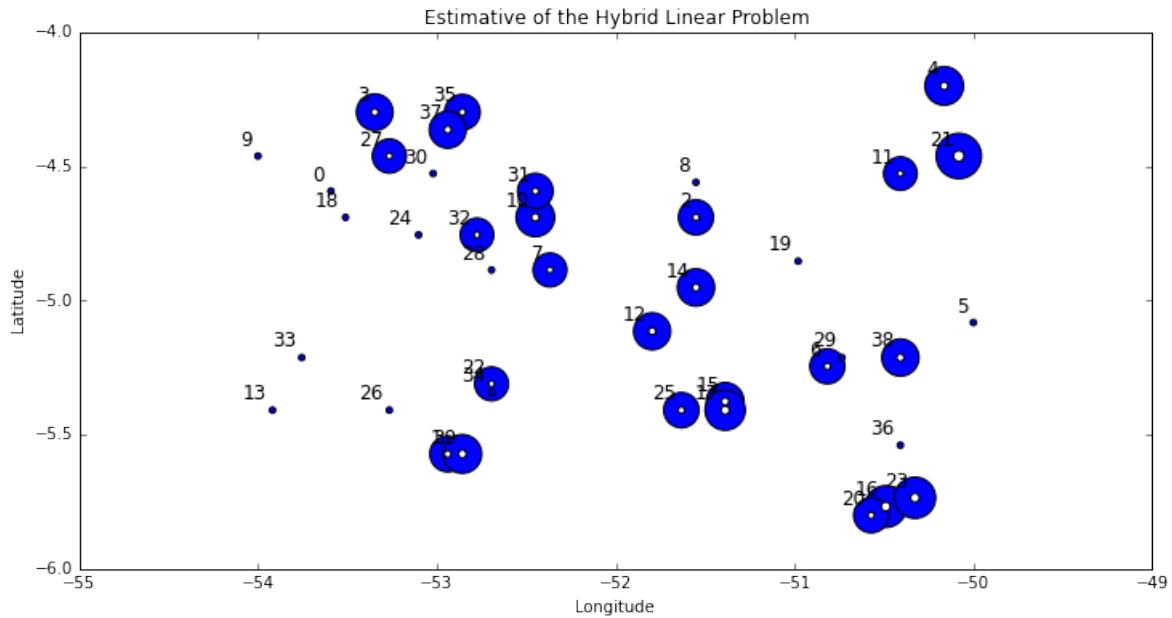


Figura 7.3: Mapa dos desvios padrão das estimativas das estações da rede gravimétrica.

Todos os valores dos desvios padrão das estações obtidas pelo método híbrido ficaram piores que os valores encontrados pela rede. Os círculos maiores representam as estimativas das estações relativas, por exemplo estação 21 (vide Fig. 7.3). A diferença para estas estações é da ordem de 10^{-1} . No mapa existem alguns pontos com círculos menores, por exemplo estação 5. Estes círculos representam as estações absolutas. Para estar estas a diferença é ainda maior, da ordem de 10^{-3} .

7.3 Conclusões

A metodologia apresentada funciona para o objetivo proposto, muito embora o cruzamento da técnica da camada equivalente para ajustar os valores de gravidade de estações da rede não forneça desvios padrões comparáveis ao simples ajustamento convencional. No entanto, maior pesquisa deve ser feita com relação à profundidade da camada. É possível que, uma vez encontrada uma profundidade ótima, os desvios padrão diminuam. Uma outra solução seria o refinamento dos resíduos, recalculando os parâmetros em cada iteração nova.

A utilização do sistema de coordenadas geodésico geocêntrico traz benefícios no sentido de excluir a necessidade de transformação de coordenada tanto para o posicionamento dos pontos avaliados quanto para o cálculo da gravidade normal, além de ser inovador quando aplicado às funções harmônicas relacionadas aos campos potenciais.

Apesar disto não ter sido explorado neste estudo, a metodologia do problema híbrido também prevê o cálculo de gravidade em pontos que não sejam nós da rede, justamente pelo fato da camada lidar com o campo harmônico. Para realizar este tipo de investigação, o ajustamento convencional de rede dependeria de um interpolador matemático que aumentaria o grau de incerteza dos pontos avaliados. Mais ainda, dados de outra natureza podem ser incorporados no sistema de forma a refinar as estimativas.

Os trabalhos futuros envolvem a aplicação da técnica rápida da camada equivalente construída por Siqueira et al. (2017) para poder comportar um grid maior de pontos e inserir os dados da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB) com o intuito de testar a metodologia para dados reais.

Apêndice A

Distúrbio de Gravidade

Seja $f = f(a, b, c)$ uma função arbitrária, contínua e suave. Deseja-se estudá-la no entorno de um ponto fixo, $P = (a_0, b_0, c_0)$. Exatamente neste ponto, a função toma valores iguais a $f(P)$. Considerando uma variação de $a = a_0 + \delta a$, em que δa é uma quantidade bem pequena, deseja-se saber como a função varia dado este novo ponto.

Sabendo que

$$\begin{bmatrix} a = a_0 + \delta a \\ b = b_0 + \delta b \\ c = c_0 + \delta c \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$f(a, b, c) \simeq f(a_0, b_0, c_0) + \nabla f(a_0, b_0, c_0)^T \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \\ \delta c \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Sendo,

$$f(a, b, c) = \sqrt{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{A.3})$$

$$f(a_0, b_0, c_0) = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2}$$

As derivadas parciais da função são escritas da forma

$$\partial_\alpha f = \frac{\alpha}{\sqrt{\dots}} = \frac{\alpha}{f} \quad (\text{A.4})$$

onde $\alpha_i = a, b, c$. Generalizando a derivada parcial da equação A.4 para o gradiente

$$\nabla f(a, b, c) = \frac{1}{f} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Sabendo que $f(a_0, b_0, c_0) = f_0$, a relação A.5 avaliada no ponto (a_0, b_0, c_0) é escrita

$$\nabla f(a_0, b_0, c_0) = \nabla f_0 = \frac{1}{f_0} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A idéia é realizar uma expansão em séries de Taylor do módulo do vetor gravidade no entorno do elipsóide de revolução. Nestas condições, $\|\bar{g}\| \rightarrow f$ e $\|\bar{g}\| \rightarrow f_0$. Substituindo estas quantidades na equação A.2,

$$\|\bar{g}\| \simeq \|\bar{g}\| + \nabla f(a_0, b_0, c_0)^T \delta \bar{g}. \quad (\text{A.7})$$

Assumindo que $\|\bar{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$

$$\nabla f(a_0, b_0, c_0) = \nabla \|\bar{\gamma}\| = \frac{1}{\|\bar{\gamma}\|} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \frac{\bar{\gamma}}{\|\bar{\gamma}\|} = \hat{\gamma} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo o resultado de A.8 em A.7

$$\|\bar{g}\| \simeq \|\bar{\gamma}\| + \hat{\gamma}^T \delta \bar{g}. \quad (\text{A.9})$$

A ponderação de que $\|\bar{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$ não é verdadeira, pois sabe-se que $\bar{\gamma}$ tem apenas a componente normal ao elipsóide. Mas isso não desqualifica o resultado da equação A.9 porque apenas γ_2 e γ_3 seriam nulos. Substituindo a equação A.9 na relação da magnitude do distúrbio de gravidade 3.18, é obtido

$$\|\delta \bar{g}\| = \delta g \simeq \hat{\gamma}^T \cdot \delta \bar{g} \quad (\text{A.10})$$

indicando que o módulo do distúrbio de gravidade é a projeção do vetor distúrbio na direção normal ao elipsóide.

Referências Bibliográficas

- Antunes, C., Pail, R., and Catalão, J. (2003). Point mass method applied to the regional gravimetric determination of the geoid. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 47(3):495–509.
- Arfken, G. B. and Weber, H. J. (1995). *Mathematical methods for physicists*. AP Academic Press, 4th edition.
- Balmino, G. (1972). Representation of the earth potential by buried masses. *The use of artificial satellites for geodesy*, pages 121–124.
- Barnes, G. (2014). Reconstructing the gravity gradient anomaly field from surveys with wide line spacing using equivalent source processing: An error analysis. *Geophysical Prospecting*, 62(3):646–657.
- Barnes, G. and Lumley, J. (2011). Processing gravity gradient data. *Geophysics*, 76(2):I33–I47.
- Bentel, K., Schmidt, M., and Gerlach, C. (2013). Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere. *GEM-International Journal on Geomathematics*, 4(1):67–96.
- Bott, M. and Ingles, A. (1972). Matrix methods for joint interpretation of two-dimensional gravity and magnetic anomalies with application to the iceland-faeroe ridge. *Geophysical Journal International*, 30(1):55–67.
- Cordell, L. (1992). A scattered equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimensions. *Geophysics*, 57(4):629–636.
- Dampney, C. (1969). The equivalent source technique. *Geophysics*, 34(1):39–53.
- Davis, K. and Li, Y. (2011). Fast solution of geophysical inversion using adaptive mesh, space-filling curves and wavelet compression. *Geophysical Journal International*, 185(1):157–166.
- Dymant, J. and Arkani-Hamed, J. (1998). Equivalent source magnetic dipoles revisited. *Geophysical research letters*, 25(11):2003–2006.
- Emilia, D. A. (1973). Equivalent sources used as an analytic base for processing total magnetic field profiles. *Geophysics*, 38(2):339–348.
- Escobar, I. P. (1985). *Injunções relativas em ajustamento gravimétrico*. Universidade Federal do Paraná.
- Guspí, F., Introcaso, A., and Introcaso, B. (2004). Gravity-enhanced representation of measured geoid undulations using equivalent sources. *Geophysical Journal International*, 159(1):1–8.

- Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1981). *Physical geodesy*. Institute of Physical Geodesy, Technical University.
- Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H. (2006). *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media.
- Kellogg, O. D. (1929). Potential theory. *F. Unger*, pages 228–249.
- Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I., and Wittwer, T. (2008). A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 82(8):457–471.
- Leao, J. W. and Silva, J. B. (1989). Discrete linear transformations of potential field data. *Geophysics*, 54(4):497–507.
- Lehmann, R. (1993). The method of free-positioned point masses—geoid studies on the gulf of bothnia. *Journal of Geodesy*, 67(1):31–40.
- Li, X. and Götze, H.-J. (2001). Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics. *Geophysics*, 66(6):1660–1668.
- Li, Y., Nabighian, M., and Oldenburg, D. W. (2014). Using an equivalent source with positivity for low-latitude reduction to the pole without striation. *Geophysics*, 79(6):J81–J90.
- Li, Y. and Oldenburg, D. W. (2010). Rapid construction of equivalent sources using wavelets. *Geophysics*, 75(3):L51–L59.
- Lin, M., Denker, H., and Müller, J. (2014). Regional gravity field modeling using free-positioned point masses. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 58(2):207.
- MacLennan, K. and Li, Y. (2013). Denoising multicomponent csem data with equivalent source processing techniques. *Geophysics*, 78(3):E125–E135.
- Mayhew, M. (1982). Application of satellite magnetic anomaly data to curie isotherm mapping. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 87(B6):4846–4854.
- Mendonca, C. A. and Silva, J. B. (1994). The equivalent data concept applied to the interpolation of potential field data. *Geophysics*, 59(5):722–732.
- Needham, P. E. (1970). The formation and evaluation of detailed geopotential models based on point masses. Technical report, DTIC Document.
- Novák, P. and Grafarend, E. (2005). Ellipsoidal representation of the topographical potential and its vertical gradient. *Journal of Geodesy*, 78(11-12):691–706.
- Oliveira Jr, V. C., Barbosa, V. C., and Uieda, L. (2012). Polynomial equivalent layer. *Geophysics*, 78(1):G1–G13.
- Pawlowski, R. S. (1994). Green’s equivalent-layer concept in gravity band-pass filter design. *Geophysics*, 59(1):69–76.
- Sideris, M. G. (2013). Geoid determination by fft techniques. In *Geoid Determination*, pages 453–516. Springer.
- Silva, J. B. (1986). Reduction to the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies. *Geophysics*, 51(2):369–382.

- Siqueira, F. C., Oliveira Jr, V. C., and Barbosa, V. C. (2017). Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint. *Geophysics*, 82(4):1–45.
- Soler, T. (1976). On differential transformations between cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates. Technical report, NASA.
- Soler, T. and Hothem, L. D. (1988). Coordinate systems used in geodesy: Basic definitions and concepts. *Journal of Surveying Engineering*, 114(2):84–97.
- Stratton, J. A. (2007). *Electromagnetic theory*. John Wiley & Sons.
- Tenzer, R. and Klees, R. (2008). The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 52(3):287–304.
- Torge, W. (1989). Gravimetry, 465 pp. Gruyter, Berlin.
- Torge, W. and Müller, J. (2012). *Geodesy*. Walter de Gruyter.
- Uieda, L., Jr., V. C. O., and Barbosa, V. C. F. (2013). Modeling the earth with fatiando a terra. In van der Walt, S., Millman, J., and Huff, K., editors, *Proceedings of the 12th Python in Science Conference*, pages 96 – 103.
- Vajda, P., Vaníček, P., Novák, P., and Meurers, B. (2004). On evaluation of newton integrals in geodetic coordinates: Exact formulation and spherical approximation. *Contributions to geophysics and geodesy*, 34(4):289–314.
- Vanicek, P. and Krakiwsky, E. J. (2015). *Geodesy: the concepts*. Elsevier.
- Vitushkin, L. (2011). Measurement standards in gravimetry. *Gyroscopy and navigation*, 2(3):184–191.
- Von Frese, R. R., Hinze, W. J., and Braile, L. W. (1981). Spherical earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent point source inversion. *Earth and Planetary Science Letters*, 53(1):69–83.
- Xia, J., Sprowl, D. R., and Adkins-Helgeson, D. (1993). Correction of topographic distortions in potential-field data: A fast and accurate approach. *Geophysics*, 58(4):515–523.