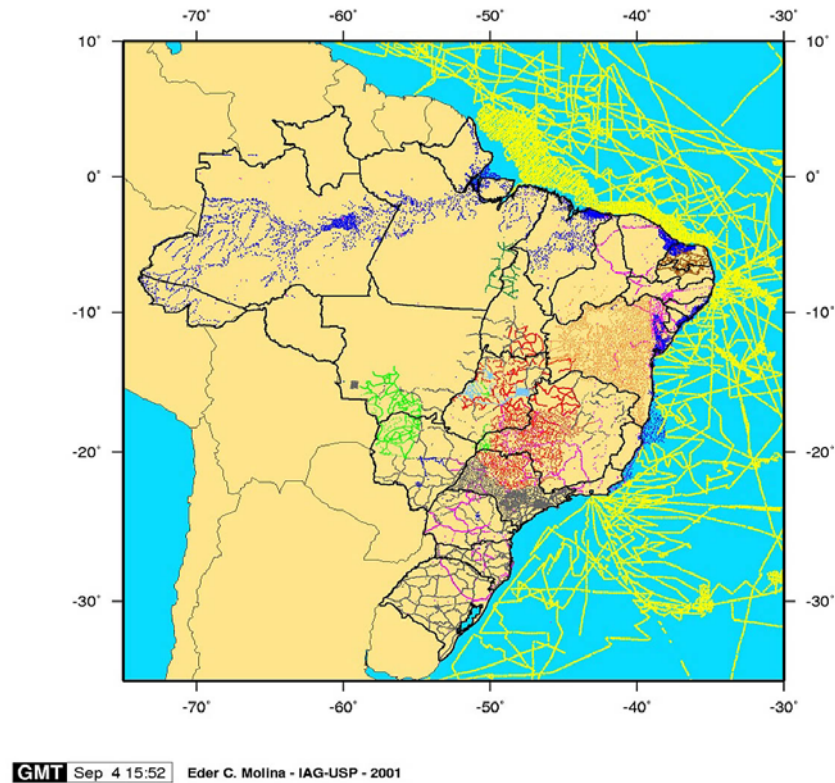


Gravimetria: fundamentos e aplicações



Gravimetria: fundamentos e aplicações – módulo 1

I. Introdução e conceitos

1. As leis e equações fundamentais

- A Lei da Gravitação Universal
- Força gravitacional, potencial gravitacional, equação de Laplace, equação de Poisson
- A influência da rotação terrestre.

2. O campo de gravidade terrestre

- Desenvolvimento do potencial gravitacional em harmônicos esféricos
- O elipsóide de referência. Características e propriedades do modelo.
- A fórmula internacional de gravidade
- O geóide.

3. Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas

- Anomalia ar livre
- Anomalia Bouguer
- Anomalia isostática

A Lei da Gravitação Universal

Desde o começo do séc. XVII, Johannes Kepler descreveu precisamente por meio de 3 leis o movimento dos planetas. Na mesma época, Galileu Galilei descobriu que objetos em queda livre próximos à superfície da Terra estavam sujeitos a uma aceleração constante.

O fato de que estas descobertas estavam ligadas por uma força comum só foi descoberto posteriormente, com Isaac Newton, que formulou a Lei da Gravitação Universal, que relaciona a força de atração F entre duas partículas de massas m e M como

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

A constante de proporcionalidade, G , chamada de constante de gravitação universal, só pôde ser determinada um século mais tarde, com o experimento de Henry Cavendish. O valor utilizado atualmente difere pouco do estabelecido naquela época.

Força gravitacional, potencial gravitacional, equação de Laplace, equação de Poisson

A força gravitacional é dada pela Lei de Newton

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

O potencial gravitacional é definido como

$$V = G \frac{m}{l}$$

A relação entre força e potencial é dada por

$$F = \text{grad } V$$

No exterior das massas atrativas, o potencial gravitacional satisfaz a equação de Laplace

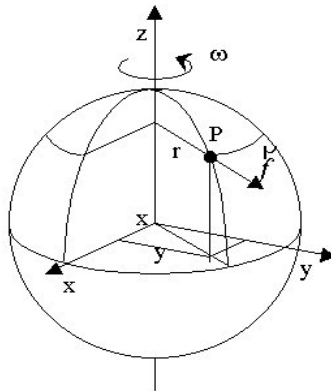
$$\nabla^2 V = 0$$

No interior das massas atrativas, o potencial gravitacional satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho$$

A influência da rotação terrestre

Uma massa m , sobre um corpo em movimento de rotação com velocidade angular constante ω , percorre um elemento de distância Δs sobre a circunferência de raio r , no deslocamento angular $\Delta\theta$. A relação entre esses elementos é dada por
$$\Delta s = \Delta\theta r$$



Representando por Δt o tempo decorrido no deslocamento, podemos escrever, para $\Delta t \rightarrow 0$

$$v = \omega r$$

onde v é a velocidade escalar e ω é a velocidade angular.

O movimento de rotação imprime à massa unitária, em P, uma aceleração cujas componentes normal e tangencial à sua trajetória são expressas por

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{r} \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Portanto, no movimento de rotação do corpo a massa unitária está sob a ação de uma força normal à sua trajetória, denominada força centrífuga.

I. Introdução e conceitos - As leis e equações fundamentais

$$f = \omega^2 r$$

O potencial da força centrífuga é a função escalar ϕ , definida por

$$\phi = \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

E sua relação com a força é dada por

$$\vec{f} = \text{grad}(\phi)$$

O laplaciano do potencial da força centrífuga é dado por

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad \nabla^2 \phi = 2 \omega^2$$

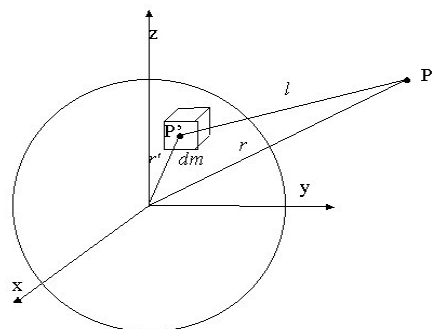
O potencial centrífugo, portanto, não satisfaz a equação de Laplace e, por isso, não é uma função harmônica.

Desenvolvimento do potencial gravitacional em harmônicos esféricos

O potencial gravitacional de um corpo com distribuição de massa homogênea e forma geométrica simples admite em geral uma representação matemática exata. Mas o potencial de um corpo com distribuição de massa heterogênea e forma geométrica complexa como a Terra só pode ser obtido por aproximação. Em geral, as aproximações são expressas na forma de séries, onde o número de termos depende da resolução dos dados disponíveis e indica o grau de aproximação.

Para representar o potencial gravitacional de um corpo de massa m em um ponto P , utilizamos a relação

$$V = G \int \frac{dm}{l}$$



Desenvolvimento do potencial gravitacional em harmônicos esféricos

Desenvolvendo $1/l$ em série, temos em coordenadas cartesianas

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\psi)$$

Em coordenadas esféricas, temos

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r'}{r} \right)^n \left[a_{nm} P_{nm}(\theta) \cos(m\lambda) + b_{nm} P_{nm}(\theta) \sin(m\lambda) \right]$$

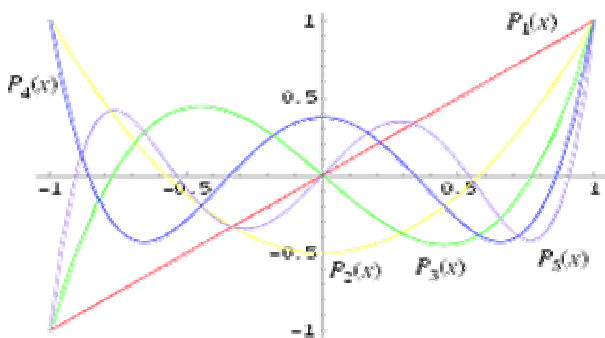
Onde

1) $P_{n0}(\psi) = P_n(\psi)$ (polinômios de Legendre de grau n) são chamados harmônicos esféricos zonais;

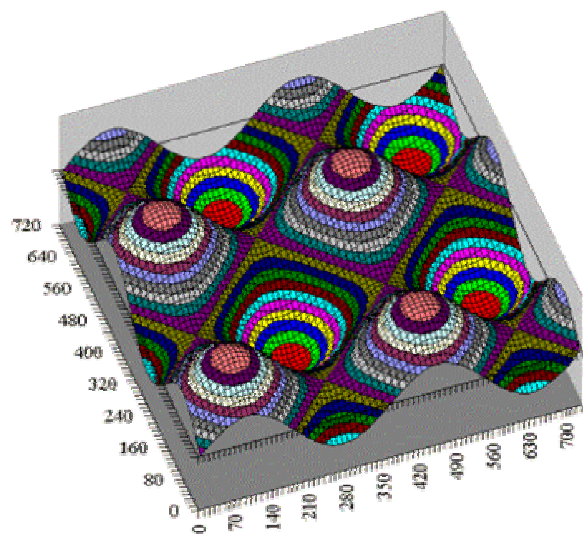
2) $P_{nm}(\theta) \cos(m\lambda)$ e $P_{nm}(\theta) \sin(m\lambda)$ (polinômios de Legendre associados de grau n e ordem m) são chamados:

- a) harmônicos esféricos tesserais, se $n \neq m$,
- b) harmônicos esféricos setoriais, se $n = m$.

Desenvolvimento do potencial gravitacional em harmônicos esféricos



Polinômios de Legendre



Harmônico esférico tesseral

Desenvolvimento do potencial gravitacional em harmônicos esféricos

O potencial gravitacional toma então a forma

$$V = \frac{G}{r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int \left(\frac{r'}{r} \right)^n (a_{nm} P_{nm}(\theta) \cos(m\lambda) + b_{nm} P_{nm}(\theta) \sin(m\lambda)) dm \right]$$

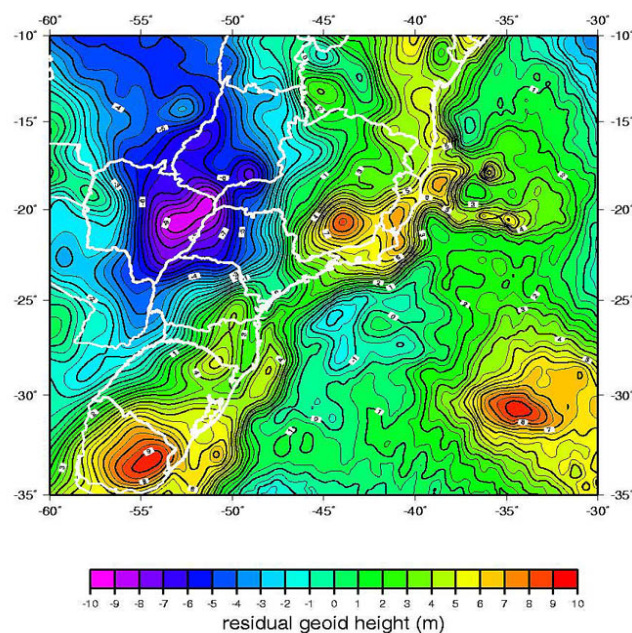
ou

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{1}{r^{n+1}} (A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\theta) \right]$$

Os modelos geopotenciais atualmente atingem no máximo $n=m=360$, como é o caso do EGM96. Nesta resolução máxima, pode-se representar anomalias de gravidade com resolução espacial média de 50 km, aproximadamente.

Com o advento das novas missões geodésicas por satélite, em particular a missão GRACE, espera-se atingir $n=m=720$ em poucos anos.

Desenvolvimento do potencial gravitacional em harmônicos esféricos



Altura geoidal residual calculada com dados do modelo geopotencial EGM96

O elipsóide de referência – A Terra Normal

Terra normal é um elipsóide de revolução biaxial ao qual se atribui a mesma massa M e a mesma velocidade angular ω da Terra real, e tal que o esferopotencial U seja uma função constante sobre a superfície limitante.

A Terra Normal apresenta massa distribuída com simetria axial em torno do eixo de rotação e com simetria em relação ao plano equatorial. O centro de gravidade da Terra normal coincide com o centro de massa da Terra.

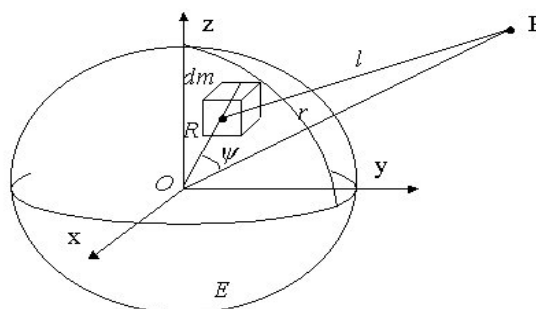
Pelo teorema de Stokes, o campo externo da gravidade normal não se altera quando há uma redistribuição de massa no interior da Terra normal, desde que a superfície limitante satisfaça a condição de esferope. Em outras palavras: o campo exterior da gravidade normal ficará definido se forem conhecidas a massa M e a velocidade angular ω da Terra normal.

As dimensões da Terra normal serão aquelas da superfície de referência adotadas para os cálculos geodésicos. No sistema Geodésico de Referência, adotado em 1967, temos

Semi-eixo maior: $a = 6.378.160$ m

achatamento polar: $\alpha = \frac{1}{298,247}$

Para calcular o esferopotencial U , utilizamos a seguinte configuração



O elipsóide de referência. Características e propriedades do modelo

e o esferopotencial U assume a forma

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\theta) \right] + \frac{1}{2} (\omega r \sin \theta)^2$$

O conhecimento dos coeficientes J_n possibilita a determinação do esferopotencial num ponto em que as coordenadas r e θ sejam conhecidas. A determinação dos coeficientes J_n tem sido um dos principais objetivos da Geodésia celeste. Até o início da era espacial, apenas J_2 e J_4 eram conhecidos.

O coeficiente J_2 , por exemplo, vinculado ao achatamento terrestre, é cerca de mil vezes maior que os restantes e tem sido objeto de rigorosas determinações. Hoje este coeficiente desempenha papel importante em Geodésia e Astronomia e, por isso, o valor

$$J_2 = 10.827 \times 10^{-7}$$

figura no Sistema de Constantes Astronômicas da U.A.I e consta na definição do sistema Geodésico de Referência – 1967 (Resolução nº 1 da Assembléia Geral da U.G.G.I de Lucerne)

A fórmula internacional de gravidade – o teorema de Clairaut

As investigações teóricas sobre a forma de equilíbrio hidrostático de uma massa homogênea sob a ação do campo da gravidade normal foram iniciadas por Newton no final do século XVII, quando este postulou a forma elipsoidal para a Terra.

Clairaut, admitindo densidade variável entre camadas homogêneas formadas por superfícies confocais, infinitesimalmente próximas, estabeleceu as fórmulas que hoje constituem o teorema que leva seu nome.

A importância de tais fórmulas está no fato de correlacionarem o achatamento do modelo com os valores da gravidade teórica sobre o mesmo nos pólos e no equador, permitindo a determinação do achatamento a partir do método gravimétrico, considerando a chamada precisão de primeira ordem ($\alpha^2 = 0$).

O desenvolvimento do esferopotencial considerando a aproximação de primeira ordem leva à seguinte relação

$$\gamma \cong \gamma_e \left[1 + \left(\frac{5}{2} m - \alpha \right) \cos^2 \theta \right] \qquad \gamma \cong \gamma_e (1 + \beta \cos^2 \theta)$$

A fórmula internacional de gravidade

nos pólos, temos

$$\gamma_p \cong \gamma_e (1 + \beta) \quad \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \beta = \frac{5}{2} m - \alpha \quad , \quad \text{onde } m = \frac{a\omega^2}{\gamma_e}$$

$$\alpha \cong \frac{1}{300} = 0,00333333 \dots \quad \beta \cong 0,005 \quad ; \quad m \cong 0,00333 \dots$$

A partir do teorema de Clairaut, obtém-se a fórmula internacional da gravidade

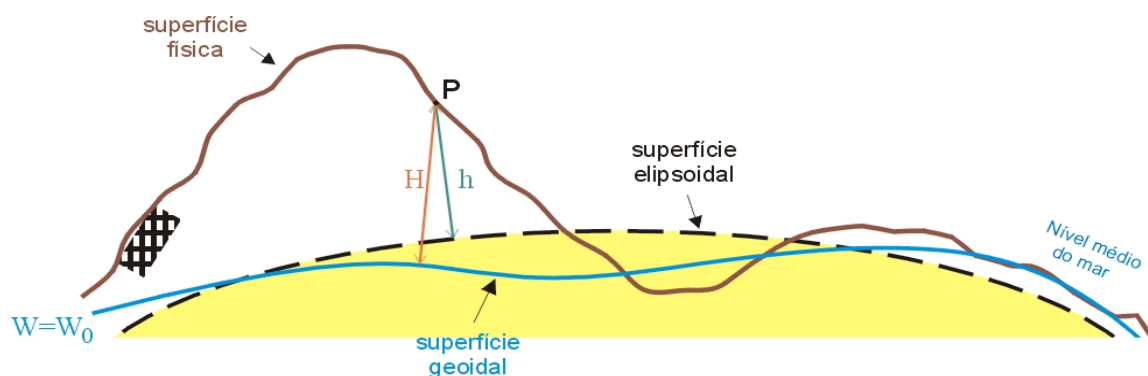
$$\gamma = 978032,7 (1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi) \text{ mGal}$$

(fórmula do GRS-80, Moritz 1984)

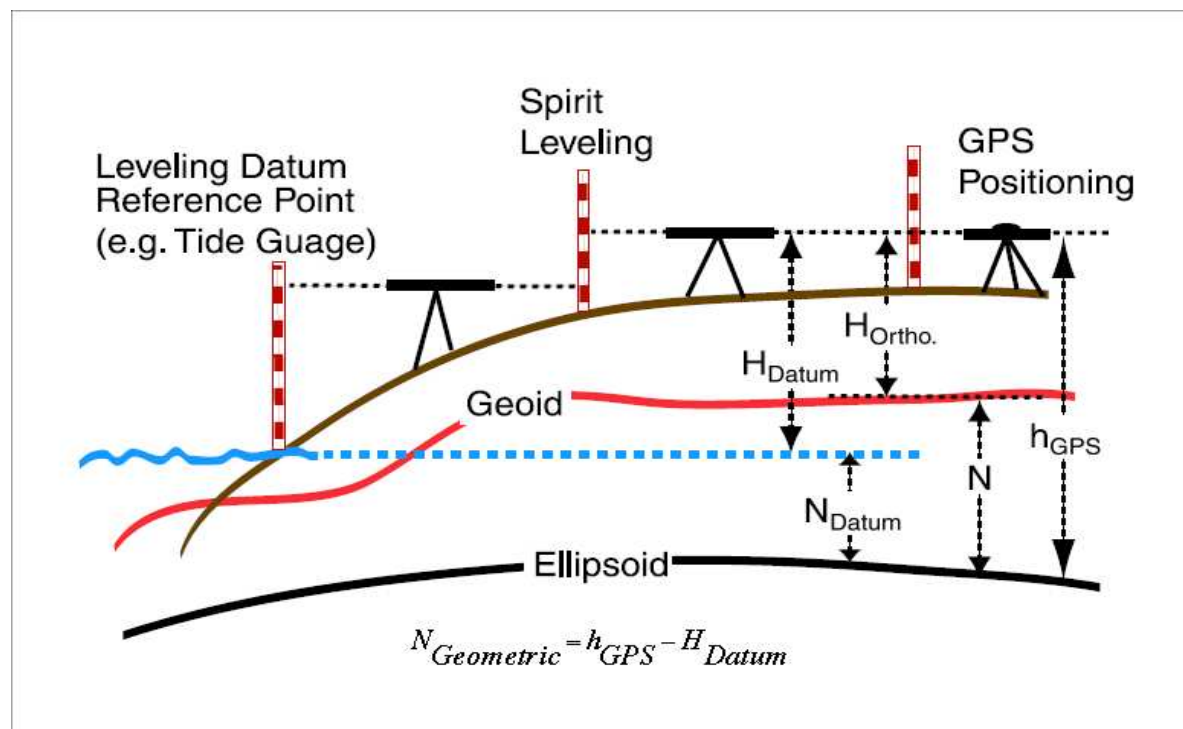
Vale lembrar que $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm s}^{-2}$, e portanto $1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ cm s}^{-2}$

A superfície geoidal

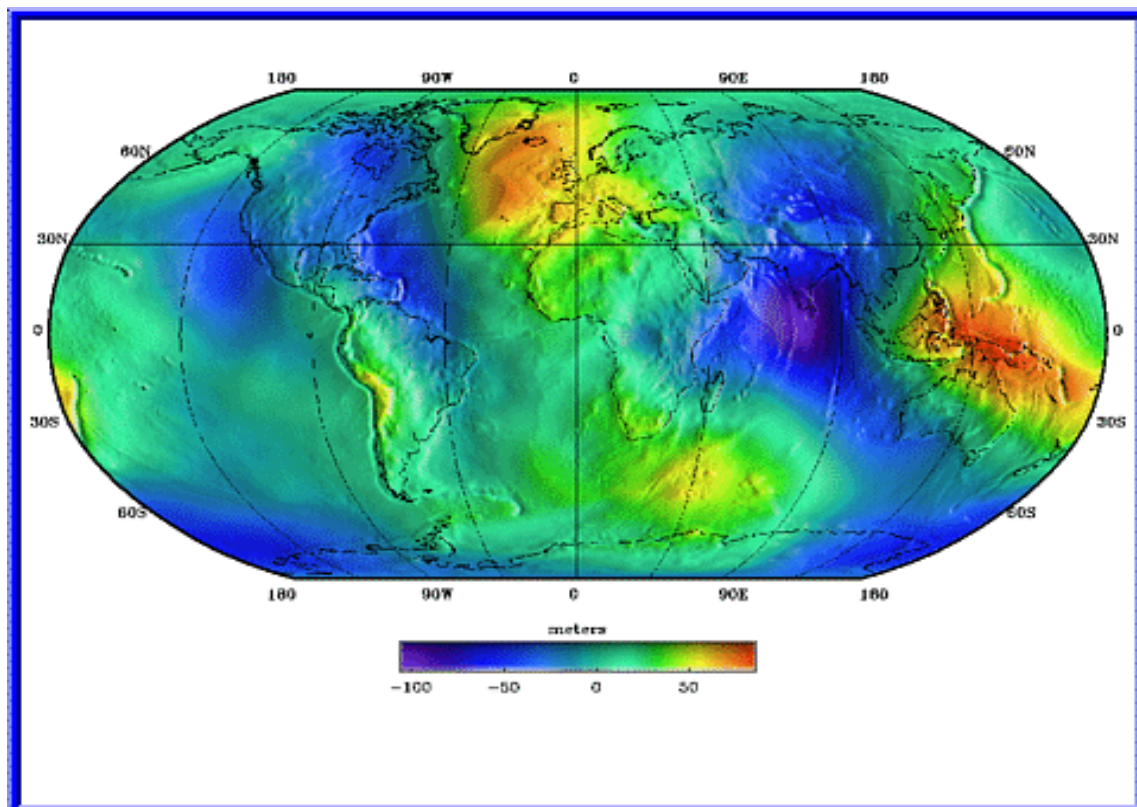
A superfície geoidal é a superfície equipotencial do campo de gravidade que coincide com o nível médio do mar nos oceanos não perturbados. Sua importância prática reside no fato de que o nível médio do mar é a referência para a altitude ortométrica, utilizada nas correções gravimétricas.



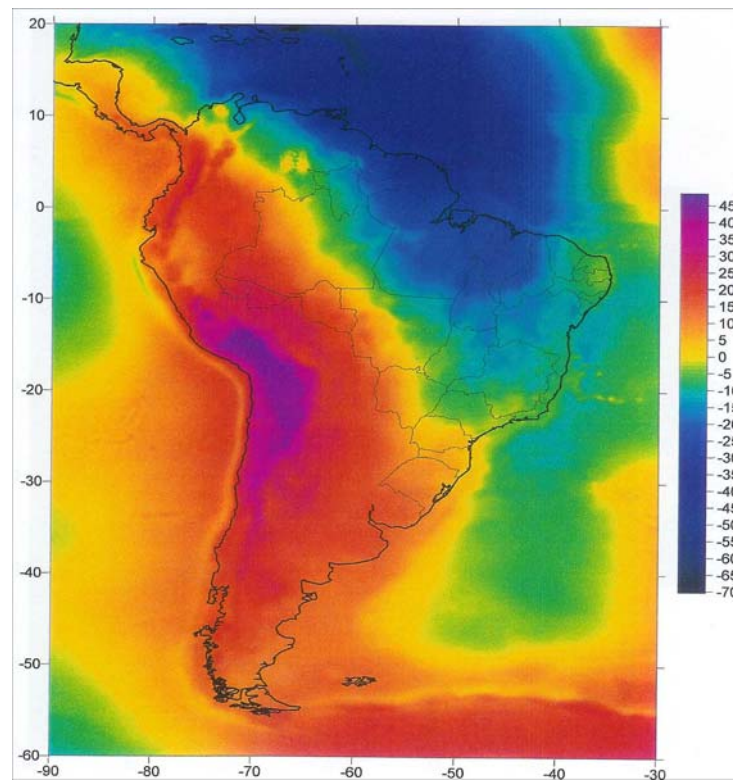
A superficie geoidal



A superficie geoidal



A superfície geoidal



Altura geoidal
Para a América
do Sul
(Sá, 2004)

Anomalias gravimétricas



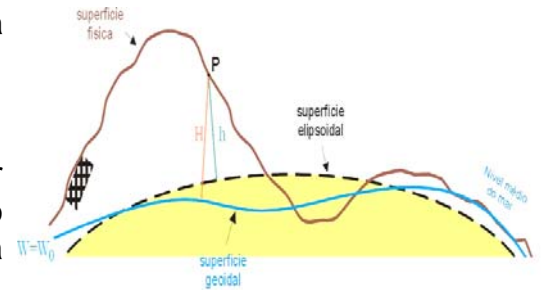
Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas

O valor de gravidade medido sobre a superfície física deve sofrer algumas correções. A definição adotada de anomalia da gravidade envolve o valor de g sobre a superfície do geóide, daí a clássica redução da gravidade ao nível do mar.

A definição genérica de anomalia da gravidade tem a fórmula

$$\Delta g = g_o - \gamma$$

O índice que aparece nesta expressão é para enfatizar que a gravidade real está associada a um ponto do geóide; a gravidade normal é obtida com a fórmula internacional, em função da latitude da estação.



Para reduzir a gravidade observada (na superfície física) ao nível médio dos mares (geóide), introduzimos a chamada correção ar-livre (C_A); a anomalia resultante recebe o mesmo nome.

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas

Anomalia ar-livre

A correção ar-livre para uma estação gravimétrica com altitude ortométrica h é expressa por

$$C_A = \frac{\partial \gamma}{\partial h} h \quad (1)$$

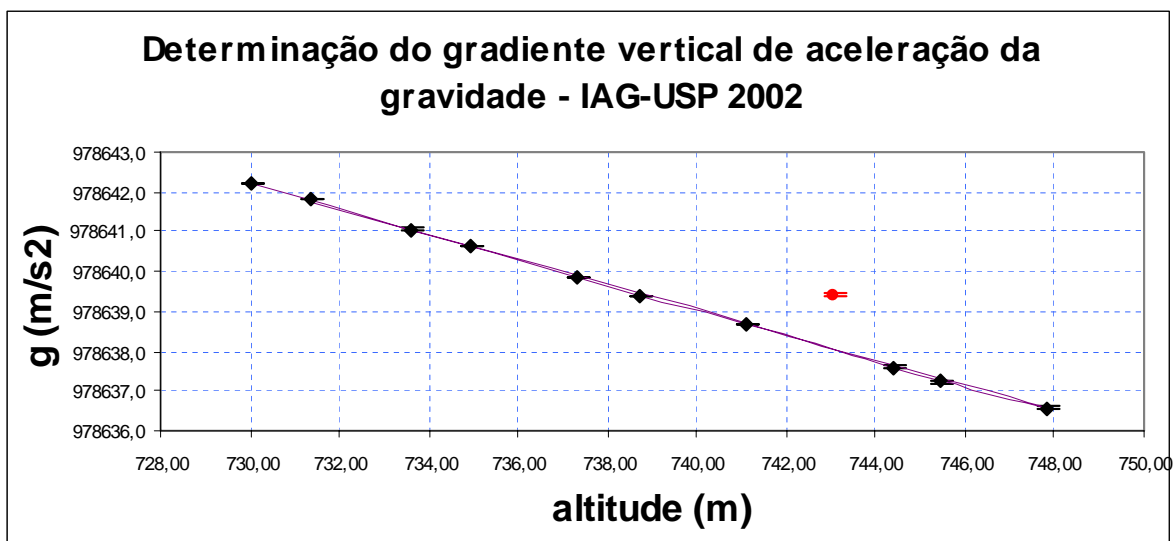
Onde $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ é o gradiente vertical da gravidade. Nos trabalhos rotineiros podemos utilizar o gradiente da gravidade normal e resulta

$$C_A = 0,3086 h \quad (2)$$

Com h em metros e C_A em mGal, resultando para a anomalia ar-livre

$$\Delta g_A = \Delta g + 0,3086 h \quad (3)$$

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas



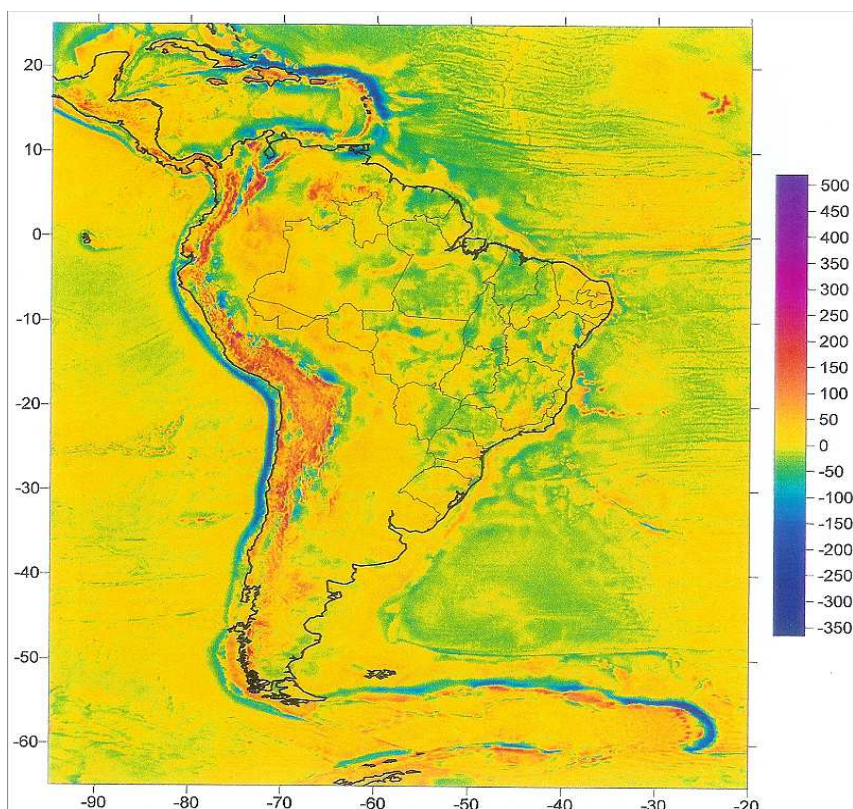
$$Y(x) = ax + b$$

$$a = -0,3190 \pm 0,0009 \text{ mGal/m}$$

Valor padrão utilizado na gravimetria: - 0,3086 mGal/m (Diferença : 3,37 %)

Valor para uma Terra de raio R e massa M : -0,3080 mGal/m (Diferença: 3,57%)

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas



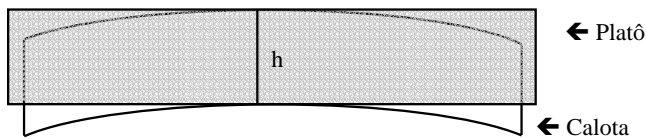
Anomalia ar-livre
da América do Sul
(Sá, 2004)

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas

A anomalia Bouguer considera a massa existente entre o geóide e a superfície física da Terra. A remoção do efeito das massas topográficas pode ser expressa por

$$C_B = -A - B + C$$

O primeiro termo (**A**) constitui a correção de Bouguer propriamente dita: corresponde à componente vertical da atração exercida por um platô horizontal de espessura H sobre um ponto de massa unitária situado à sua superfície.



Platô e calota de Bouguer

$$A = F_z = G\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^h z dz \int_0^\infty r (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dr$$

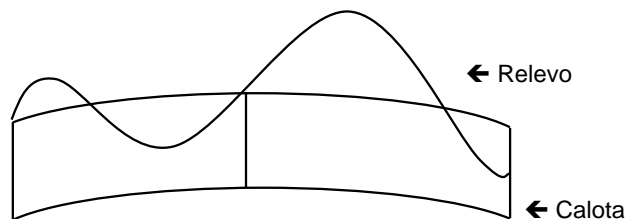
$$A = 2\pi G \rho h$$

Adotando os valores $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ erg.cm}^2/\text{g}^2$ e $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$, temos para a correção Bouguer a fórmula **$A = 0,1119 h$**

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas

Essa componente, na realidade, se aproxima da que seria produzida por uma calota de mesma espessura e com raio esférico de 166,7 km. Esta, aliás, é a função do segundo termo (**B**); converter o platô em calota.

O terceiro termo (**C**), chamado de correção topográfica, considera as irregularidades da topografia em relação à calota.



Correção topográfica

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas

A correção topográfica normalmente assume valores relativamente pequenos. Em escala regional, esta correção pode ser negligenciada desde que a topografia seja plana ou moderada. Em escala local, no entanto, ela tem que ser considerada, pois as anomalias envolvidas, neste caso, normalmente são pequenas. Para a maior parte do território brasileiro, esta correção é inferior a 3 mGal

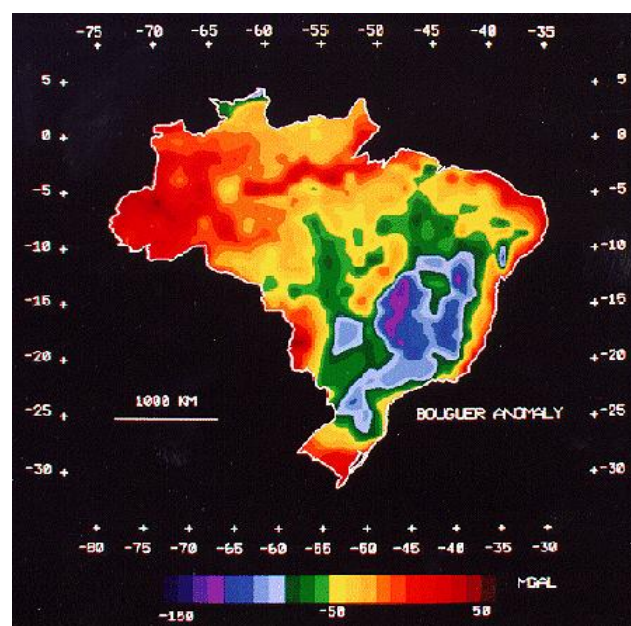
O cálculo da correção topográfica envolve boas cartas topográficas da região vizinha à estação, e um processamento intenso de dados, motivos pelos quais normalmente não é utilizada.

Desconsiderando o termo B, que corrige o platô de Bouguer para uma calota, e não realizando a correção topográfica ($C=0$), se h for dado em metros, a anomalia Bouguer será, em mGal

$$\Delta g_B = g - \gamma + 0,3086 h - 0,1119 h - B + C$$

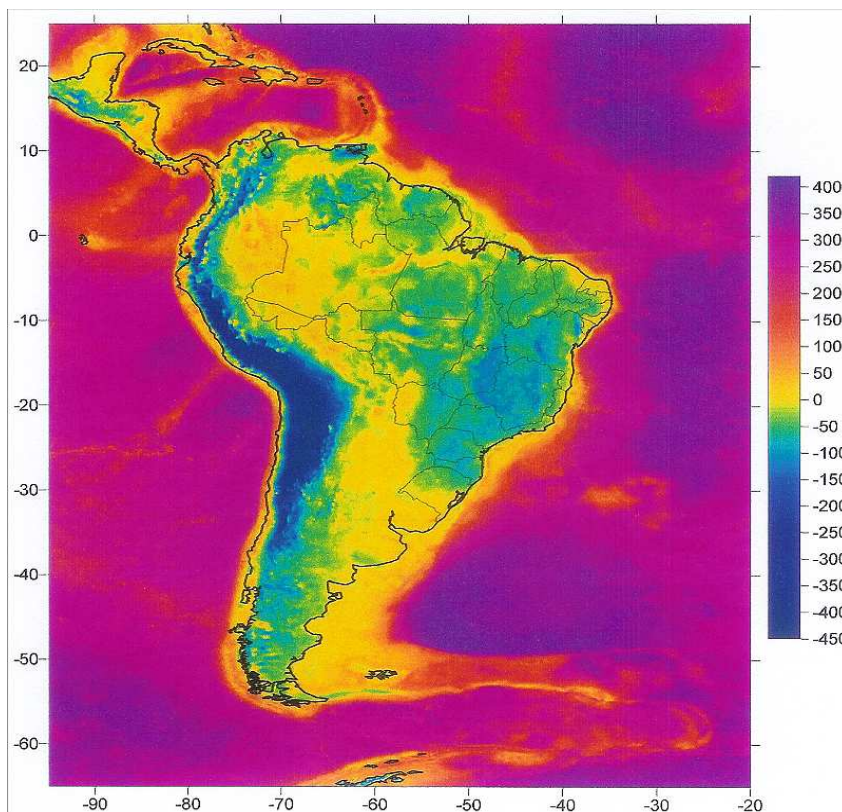
com γ calculado com a fórmula da gravidade teórica.

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas



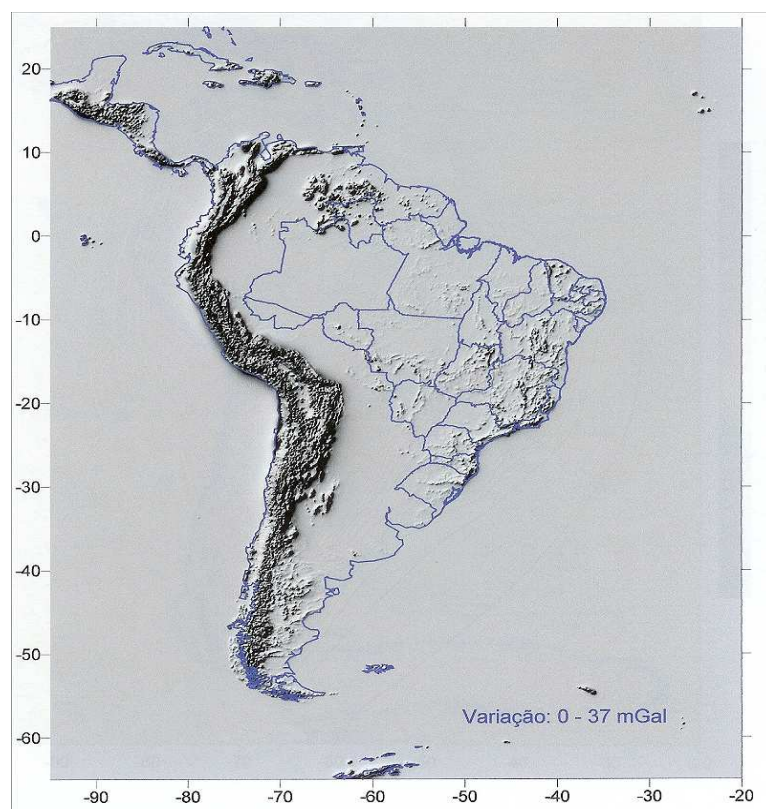
Mapa de anomalia Bouguer do Brasil (Ussami et al., 1989)

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas



Anomalia Bouguer
da América do Sul
(Sá, 2004)

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas



Correção topográfica para
a América do Sul (Sá, 2004)

Anomalia isostática

A isostasia estuda o estado de equilíbrio da litosfera sob os efeitos da gravidade. Aos excessos (montanhas) e às deficiências (oceanos) de massa em relação ao geóide corresponde massas internas de compensação.

O equilíbrio isostático pode estar plenamente atingido em certas regiões, por isso ditas compensadas. Em outras pode se achar em fase de processamento (são as regiões ditas subcompensadas) ou ter sido ultrapassado (regiões supercompensadas), daí um processamento no sentido inverso.

Não dispomos de uma prova concreta e cabal que a isostasia seja uma realidade. Mas o fato de serem as anomalias de Bouguer sistematicamente negativas, nos continentes, e positivas nas regiões oceânicas, parece indicar a existência de irregularidades internas da densidade, positiva no primeiro caso e negativa no segundo, tal como preconiza a isostasia. Uma anomalia isostática aproximadamente nula indicaria equilíbrio isostático; as anomalias fortemente negativas corresponderiam regiões super compensadas e às positivas, regiões subcompensadas.

Um exemplo notável é a existência de anomalias negativas na península escandinava e Finlândia, e também na parte nordeste dos Estados Unidos, regiões onde a crosta acha-se, desde a glaciação do quaternário, em elevação concordante com evidências de natureza geológica e geodésica.

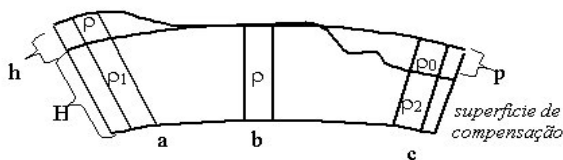
A isostasia foi descoberta na Índia. A diferença entre as latitudes geodésicas dos vértices Kaliana, no sopé do Himalaia, e Kalianpur, distanciado do primeiro cerca de 6700 km, superava em 5" a correspondente diferença entre as latitudes astronômicas, discrepância inadmissível face ao grau de precisão da triangulação indiana.

Pratt atribuiu-a à maior atração exercida sobre Kaliana pela enorme cordilheira; mas, passando aos cálculos concluiu, pra surpresa sua e geral, que a ação do Himalaia deveria se traduzir por uma discrepância não de 5" mas de 15". As explicações iniciais propiciaram a Airy a oportunidade de lançar os fundamentos da isostasia. Posteriormente Pratt retornou ao assunto propondo também um sistema isostático. Ambos preconizavam uma deficiência de densidade interna para compensar os excessos superficiais apesar de encararem o problema por prismas completamente diversos.

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas

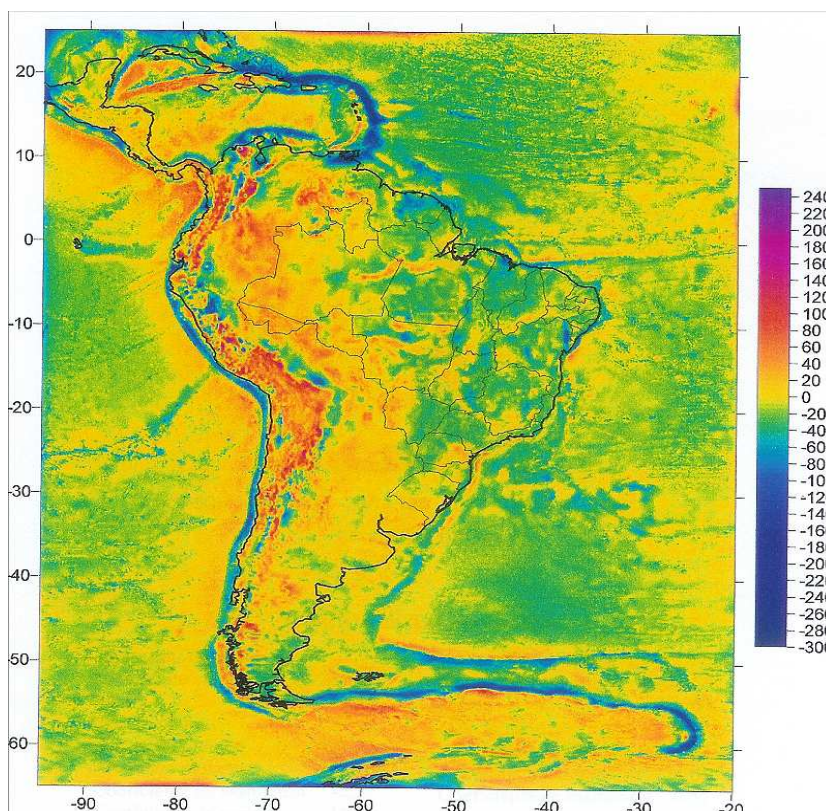
São três os principais modelos utilizados para a correção isostática:

- Modelo de Airy – assume a crosta com uma densidade constante, e a variação de topografia é compensada por uma variação de nível de compensação em subsuperfície;
- Modelo de Pratt – assume a crosta com um nível de compensação constante, com variação lateral de densidades;
- Modelo de Vening-Meinesz – assume que a crosta é uma placa elástica fina, com uma rigidez finita, capaz de suportar esforços de certa magnitude, deformando-se para cargas de maior magnitude. É um modelo de compensação regional, pois a ação de uma carga em um determinado ponto influencia uma região ao longo da placa.



Esquema do modelo de compensação isostática de Pratt.

Conceitos e características gerais das anomalias gravimétricas



Anomalia isostática para a América do Sul – modelo de Airy-Heiskanen (Sá, 2004)