INTRODUÇÃO À GEODÉSIA FÍSICA

POR

José Milton Arana

Departamento de Cartografia
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Unesp – Campus de Presidente Prudente

OUTUBRO / 2009

SUMÁRIO

NOTAS DE AULAS

Geodésia Física

1. INTRODUÇÃO

Rotineiramente a Geodésia Física preocupa-se com o estudo da gravidade e suas aplicações geodésicas, pois o geodesista sempre está envolvido com três superfícies:

- **superfície física da Terra** é a superfície onde são efetuadas as operações geodésicas;
- **superfície de referência** é a superfície do modelo geométrico adotado - onde são efetuado os cálculos geodésicos (usualmente o elipsóide de revolução);
- **geóide** é uma superfície eqüipotencial do campo da gravidade, em uma primeira aproximação é aquela que mais se aproxima ao nível médio dos mares não perturbado.

Usualmente, devemos “conhecer” o geóide, pois entre outras, a altitude ortométrica (que possui interesse às obras de engenharia) é definida como “distância, contada ao longo da linha vertical, do geóide ao ponto de interesse”. A altitude ortométrica pode ser obtida com o nivelamento geométrico associado à gravimetria, ou com rastreio de satélites artificiais onde são conhecidas as ondulações do geóide **N** (**ondulação do geóide ou altura geoidal** é definida como a distância, contada ao longo da normal, do elipsóide de referência ao geoide).

Entende-se por superfície eqüipotencial, àquela que em todos os seus pontos possui o mesmo potencial; a superfície eqüipotencial do campo da gravidade possui a propriedade de *em todos seus pontos ser perpendicular à direção da* ***vertical***.

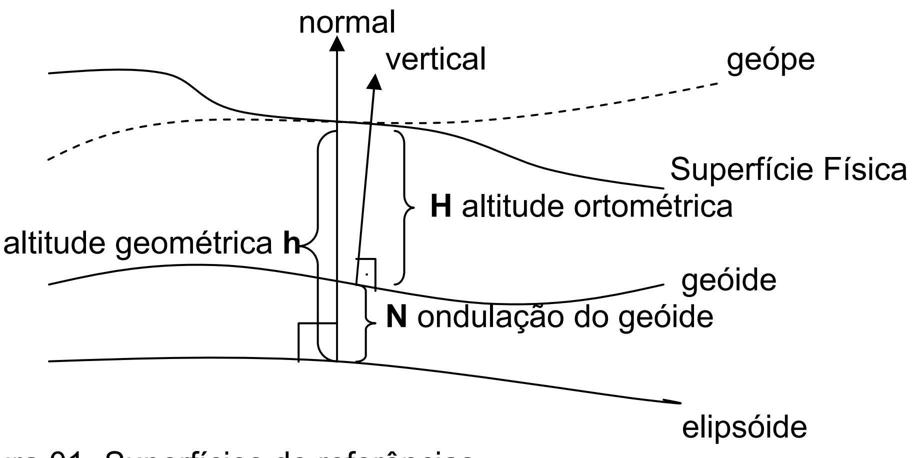


Figura 01- Superfícies de referências

1.2 Coordenadas Geodésicas

Um ponto da superfície terrestre é definida univocamente com três coordenadas: a latitude, a longitude e a altitude geométrica.

Latitude geodésica (*φ*) é definida como o ângulo que a normal ao elipsóide, passante pelo ponto, forma com sua projeção equatorial. (Variam de 0^o à 90^o e convencionalmente positivas as pertencentes ao hemisfério norte).

Longitude geodésica (*λ*) é o ângulo diedro formado pelo meridiano geodésico de Greenwich (origem) e o meridiano passante pelo ponto P. (Variam de 0^o à 360^o, positivamente por leste, ou ainda de 0^o à **+**180^o por leste e 0^o à **-**180^o por oeste).

Altitude geométrica (***h***) é definida como a distância, contada ao longo da normal, do elipsóide de referência ao ponto. Assim, a posição de um ponto P da superfície terrestre, pode ser definida sem ambigüidade pelas três coordenadas: latitude, longitude e altitude geométrica.

Azimute geodésico é definido como o ângulo que o meridiano passante pelo ponto forma com uma direção, usualmente contada a partir do norte por leste.

Com auxílio da Figura 01, tem-se:

$$h = N + H \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad 1.01$$

A Equação 1.01 relaciona a separação entre as três superfícies: do modelo, do geóide e de referência.

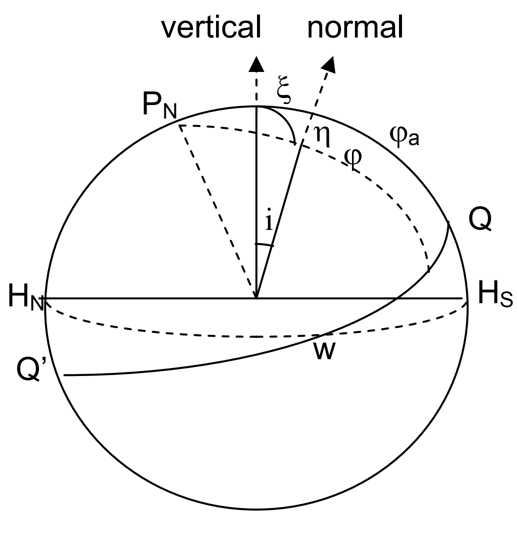


Figura 02 - Desvio da Vertical

Desvio da Vertical (i) é o ângulo formado pela normal (ao elipsóide) e pela vertical (perpendicular ao geope passante pelo ponto).

O desvio da vertical (*i*) pode ser decomposto em:

- componente meridiana (ξ); e
- componente primeiro vertical (η).

A componente meridiana do desvio da vertical pode ser determinada por:

$$\xi = \varphi_a - \varphi \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1.02$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1.03$$

$$\eta = (A_a - A) \operatorname{cotg} \varphi. \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1.04$$

Das Equações 1.03 e 1.04, tem-se:

$$(\lambda_a - \lambda) \cos \varphi = (A_a - A) \operatorname{cotg} \varphi$$

ou

$$A = A_a - (\lambda_a - \lambda) \operatorname{sen} \varphi \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1.05$$

Estas equações permitem transformar grandezas Astronômicas em Geodésicas e vice-versa, conhecidas as componentes do desvio da vertical. A Equação 1.05 é conhecida como Equação de Laplace (simplificada), possibilita a transformação de Azimute Astronômico em Geodésico, sem o conhecimento do desvio da vertical.

As componentes do desvio da vertical também podem ser determinadas a partir da anomalia da gravidade, a qual também permite a determinação da ondulação do geóide. Estes problemas são casos particulares da Geodésia Física, que faz parte de um mais geral “Problema de Contorno da Geodésia Física”, que implica na determinação gravimétrica da superfície terrestre.

1.3 Geodésia Física

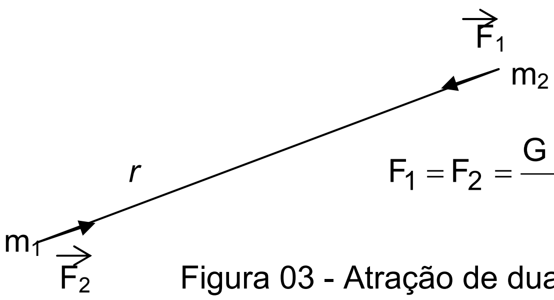
A "área" da Geodésia que se conhece sob a denominação de Geodésia Física preocupa-se com o estudo da gravidade e suas aplicações geodésicas. A partir das identidades de Green pode-se chegar às equações integrais que relacionam a Superfície Física do planeta com o potencial da gravidade e sua derivada normal.

Os instrumentos usados pelos geodesistas estão sujeitos à diversas forças físicas. A interpretação correta das medidas efetuadas necessita do conhecimento destas forças. A força mais comum é a Força da Gravidade da Terra. Para se estudar a geometria da Terra, o geodesista necessita do entendimento do Campo da Gravidade Terrestre, para este entendimento a Teoria de Newton é suficiente.

As determinações relativas da gravidade, notadamente simplificada com a utilização de gravímetros, permitem chegar às anomalias da gravidade e a partir destas é possível o cálculo das componentes do desvio da vertical (utilizam-se das fórmulas de Vening-Meinesz) e das ondulações do geóde (utilizando-se da Integral de Stokes), estes são considerados casos particulares do *Problema de Contorno da Geodésia Física*, que implica na determinação gravimétrica da Superfície Física da Terra (utlizando-se da Fórmula de Hunter-Molodenski).

1.3.1 *Campo da Gravidade*

A Lei da Gravitação Universal foi formulada por Newton, com base nas Leis de Kepler. A Lei da Gravitação Universal nos diz " *Uma partícula de matéria isolada no universo atrai outra partícula, com uma força cuja direção é a linha que as unem, cuja magnitude é diretamente proporcional ao produto de suas massas, e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separam".*



$$F_1 = F_2 = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2} \qquad . \qquad . \qquad . \quad 1.06$$

Figura 03 - Atração de duas partículas

A força exercida pelas partículas é conhecida como Força Gravitacional, também conhecida como Força de Atração Gravitacional ou Força de Atração de Newton. **G** é conhecido como Constante de Newton ou Gravitacional.

No sistema CGC, tem-se

$G = 66{,}72\ 10^{-9}\ cm^3\ g^{-1}\ s^{-2}$

No sistema Internacional,

$G = 66{,}72\ 10^{-12}\ m^3\ Kg^{-1}\ s^{-2}$

Vetorialmente, a força exercida por dois corpos m1 e m2 de dimensões neglicenciáveis, será:

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{G\, m_1\, m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \qquad . \qquad . \quad 1.07$$

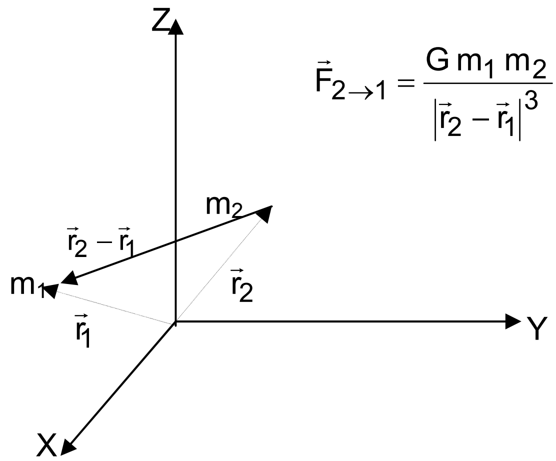


Figura 04 - Força Vetorial

Usualmente, considera-se uma da partículas atrativa e a outra como atraída.

m_1 = m (partícula atrativa, de coordenadas x', y', e z')

m_2 = 1 partícula atraída (x, y, z)

$$F = \frac{GM}{r^2} \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \quad 1.08$$

1.3.2 *Componentes da Força de Atração*

A Força de Atração exercida sobre partícula de massa unitária P(x,y,z) pela massa ***m*** localizada na origem do sistema, escreve-se:

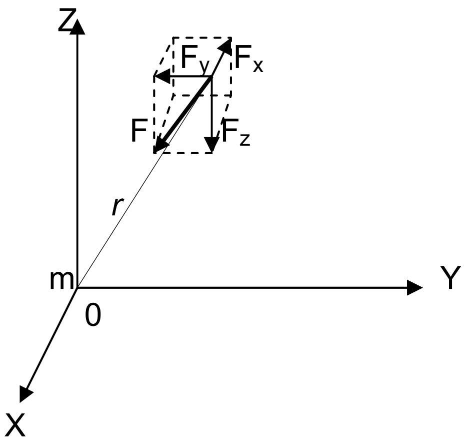


Figura 05 – Componentes da Força de Atração

Temos que:

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{G\, m_1\, m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

ou

$$\bar{F} = -\frac{Gm}{r^3}\bar{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.09$$

Estando o sistema de massas na origem, tem-se:

$$\bar{r} = P - 0 = x_{\bar{i}} + y_{\bar{j}} + z_{\vec{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.10$$

Levando a equação 1.10 em 1.9, tem-se:

$$F = -\frac{GM}{r^3}(x_{\bar{i}} + y_{\bar{j}} + z_{\vec{k}}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.11$$

Resultando para as componentes cartesianas:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{Gm}{r^3}x \\ F_y &= -\frac{Gm}{r^3}y \\ F_z &= -\frac{Gm}{r^3}z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.12$$

Prova:

Calculando-se o módulo da força de atração:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \quad = \quad \left(-\frac{Gm}{r^3}\right)^2 \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \quad = \quad \frac{G^2m^2}{r^6} r^2$$

$$F^2 = \frac{G^2m^2}{r^4} \quad \therefore \quad F = \frac{Gm}{r^2}$$

No caso geral, onde o sistema de massa atrativa não é coincidente com a origem do sistema de coordenadas P'(x',y',z'), tem-se:

$$\overline{F} = -\frac{Gm}{r^3}\left[\left(x - x'\right)_i^2 + \left(y - y'\right)_j^2 + \left(z - z'\right)_k^2\right]^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.13$$

Considerando um sistema discreto de massas atrativa formado ***n*** partículas não coincidente com a origem do sistema de coordenadas P'(x',y',z'), a expressão da força será:

$$\overline{F} = -G \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r}_i \qquad \text{. . . . . 1.14}$$

Cujas componentes serão:

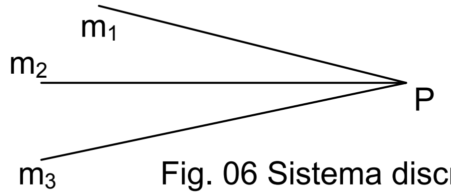


Fig. 06 Sistema discreto

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -G \sum_{i=1}^{n} \frac{(x - x'_i)}{r_i^3} m_i \\ F_y &= -G \sum_{i=1}^{n} \frac{(y - y'_i)}{r_i^3} m_i \\ F_z &= -G \sum_{i=1}^{n} \frac{(z - z'_i)}{r_i^3} m_i \end{aligned}\right\} \qquad \text{. . . . . . 1.15}$$

Considerando um sistema contínuo de massas atrativa, encerrado por um volume *v,* tem-se:

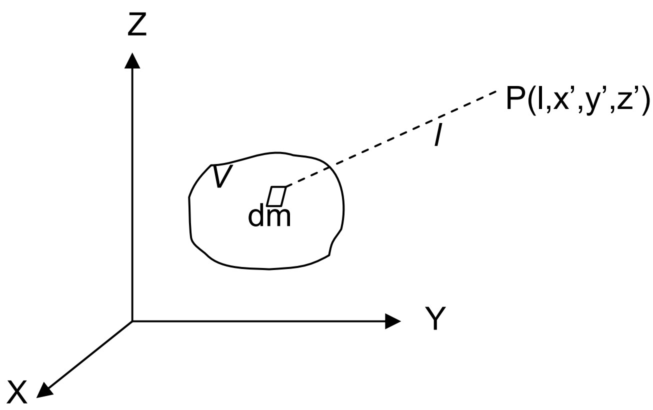


Figura 07 – Sistema contínuo de massas

$$F = -G \int_M \frac{dm}{r^3} \vec{r} \qquad \text{. . . . . 1.16}$$

cujas componentes serão:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -G\int_M \frac{x-x'}{r^3}\,dm \\ F_y &= -G\int_M \frac{y-y'}{r^3}\,dm \\ F_z &= -G\int_M \frac{z-z'}{r^3}\,dm \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1.17$$

2 POTENCIAL DE ATRAÇÃO

Os instrumentos utilizados em levantamentos geodésicos, sobre a superfície da Terra, estão sujeitos à forças físicas. Para a interpretação correta das medidas, faz-se necessário o conhecimento do efeito destas forças. A força física mais conhecida, à qual os equipamentos estão sujeitos, é a *Força da Gravidade*. Assim, nas reduções das medidas ao espaço geométrico, é necessário o conhecimento do campo da gravidade da Terra. Consequentemente, investigações da geometria do Campo da Gravidade fazem parte deste estudo, onde, é necessário o conhecimento da *Teoria Gravitacional de Newton.*

Isaac Newton[1] formulou matematicamente, a conhecida *lei da gravitação universal* que postula: "*a força de atração gravitacional **F** entre dois corpos, isolados no espaço, dotados de massa $\boldsymbol{m_1}$ e $\boldsymbol{m_2}$, é diretamente proporcional ao produto das duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância $\Delta \boldsymbol{l}$ que as separam*". Em modulo, tem-se:

$$F = G \frac{m_1 \ m_2}{\Delta l^2} \tag{2.1}$$

Esta força é conhecida como *força gravitacional*, também chamada por *atração gravitacional* ou de *Newton*, onde ***G*** é a *constante gravitacional de Newton.*

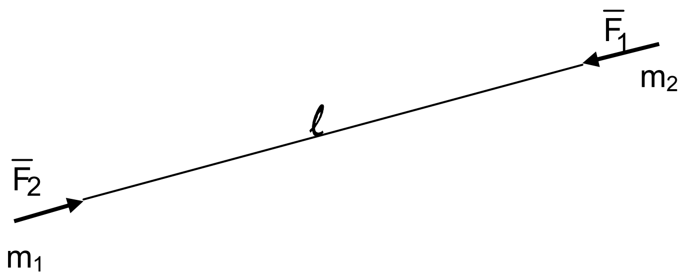


Figura 8 - Atração gravitacional entre duas partículas

A expressão vetorial para a força de atração $\vec{F}$ entre as duas partículas, é dada por:

[1] Isaac Newton (1642 – 1727). Matemático, físico e filósofo inglês, estabeleceu a lei que rege a atração entre corpos, em 1687.

$$\vec{F} = G\frac{m_1\ m_2}{l^3}\,\bar{l}. \tag{2.2}$$

Nos casos práticos, não se aplicam as condições de dimensões desprezíveis dos corpos m_1 e m_2. Em tais circunstâncias, faz-se necessária a consideração das dimensões dos corpos envolvidos e, assim um corpo de massa *M* pode ser considerado como composto por elementos de volume elementar dV com densidades ρ. A atração exercida pelo corpo pode ser considera como a integral das atrações exercidas pelos elementos de volumes dV.

Admitindo a massa atraída como massa unitária, ver figura 9, tem-se:

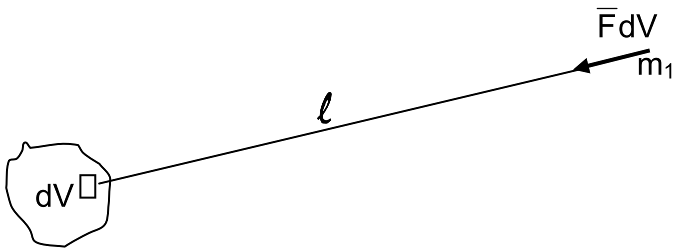


Figura 9 – Atração gravitacional exercida pelo elemento de massa, no corpo m_1.

$$\vec{F}_{dV} = -G\iiint_V \frac{\rho}{l^3}\,\bar{l}\,dV \tag{2.3}$$

A teoria do potencial é devida a Laplace[2] (1782) e desempenha importante papel na Geofísica, Geodésia e Física, entre outras áreas. A Geodésia utiliza-se da Teoria do Potencial como subsídio para o estudo do campo da gravidade e de suas vinculações com o problema da Forma da Terra.

O potencial gravitacional em um ponto P(x,y,z), engendrado por um corpo de massa ***m***, é dado por:

[2] Marquês Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827). Matemático, astrônomo e físico francês, estabeleceu entre outras contribuições, a equação diferencial parcial de segunda ordem que leva seu nome e cujas soluções (funções harmônicas), ocorrem em diversos problemas da física.

$$V = \frac{Gm}{l} \tag{2.4}$$

Em sistema discreto de massas, tem-se:

$$V = G \sum \frac{m_i}{l_i} \tag{2.5}$$

E o potencial engendrado por um sistema contínuo de massas é dado por:

$$V(P) = V(x, y, z) = G \iiint \frac{\rho}{l} dV \tag{2.6}$$

Fazendo *dm* = ρ *dV,* o potencial de atração segundo os eixos *x, y, z*, a expressão (2.3) pode ser escrita para a massa engendrada pelo volume V. Assim, tem-se:

$$\vec{F}_V = -\left[G\iiint_M \frac{(x-x_0)}{l^3} dm\ \vec{i} + G\iiint_M \frac{(y-y_0)}{l^3} dm\ \vec{j} + G\iiint_M \frac{(z-z_0)}{l^3} dm\ \vec{k} \right] \tag{2.7}$$

Considerando-se o corpo atraído de massa unitária, a expressão (2.3) pode ser utilizada na quantificação da atração exercida por uma massa *M* sobre corpos exteriores ou sobre o mesmo. Sendo desconhecida com precisão a estrutura interna da Terra, com relação à distribuição de densidades, a equação (2.3) é de uso limitados na Geodésia. No entanto, sua utilidade reside na demonstração da inter-relação da força de atração $\vec{F}$ com a densidade.

Em KRUEGER *et al*. (1994), demonstra-se que as derivadas parciais do potencial de atração segundo os eixos coordenados proporcionam as componentes da força de atração em relação aos mesmos eixos,

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = G \iiint_M \frac{x - x'}{l^3}\, dm \qquad (2.8)$$

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y} = G \iiint_M \frac{y - y'}{l^3}\, dm \qquad (2.9)$$

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = G \iiint_M \frac{z - z'}{l^3}\, dm \qquad (2.10)$$

Onde, nas equações (2.8), (2,9) e (2.10); F_x, F_y, F_z são as componentes de $\vec{F}$ em cada um dos eixos de do terno cartesiano.

Dado os operadores *rotacional* e *divergente*, respectivamente por:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

$$Div\ F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (2.12)$$

Os campos cujo rotacional é nulo $\left(\mathrm{Rot}(\vec{F}) = 0\right)$ são ditos não-rotacionais, e sob tal condição, admitem a existência de uma função escalar *V*, tal que:

$$\vec{F} = \nabla V \qquad (2.13)$$

onde, o ∇ representa o operador gradiente, ou seja:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \tag{2.14}$$

Onde, ***i, j, k*** são os versores no terno cartesiano. Funções harmônicas são definidas como aquelas que satisfazem a equação diferencial parcial de segunda ordem (HEISKANEN & MORITZ, 1967),

$$\mathrm{Div}(\nabla \mathrm{V}) = \Delta \mathrm{V} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}^2} = 0 \tag{2.15}$$

onde Δ é o operador laplaciano.

A expressão (2.15) é conhecida como equação de Laplace e é de grande utilidade na solução de problemas físicos através da Teoria do Potencial. Verifica-se que o potencial gravitacional é uma função harmônica, pois satisfaz a equação de Laplace, no exterior das massas.

Em GEMAEL 1999, encontra-se o desenvolvimento do laplaciano do potencial de atração, para pontos interiores ao corpo de massa **m**, onde tem-se a equação de Poisson:

$$\Delta \mathrm{V} = -4\,\pi\,\mathrm{G}\,\delta \tag{2.16}$$

2.1 Potencial Gravífico

A atração gravitacional produzida por um corpo de massa *M* para pontos exteriores ao mesmo, conforme visto na seção anterior, é derivada de um potencial harmônico. Para a aplicação da atração gravitacional no estudo do Campo da Gravidade Terrestre e suas relações com a forma da Terra, fazem-se necessárias algumas considerações adicionais.

O vetor gravidade, em um ponto da superfície terrestre, é resultante da força de atração gravitacional $\vec{F}$ e da força centrífuga $\vec{C}$. Estas duas forças atuam sobre o corpo (ver figura 10), onde a gravidade $\vec{g}$ é expressa como resultante da soma vetorial de ambas ($\vec{F}$ e $\vec{C}$), conforme expressão (2.17):

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C} \tag{2.17}$$

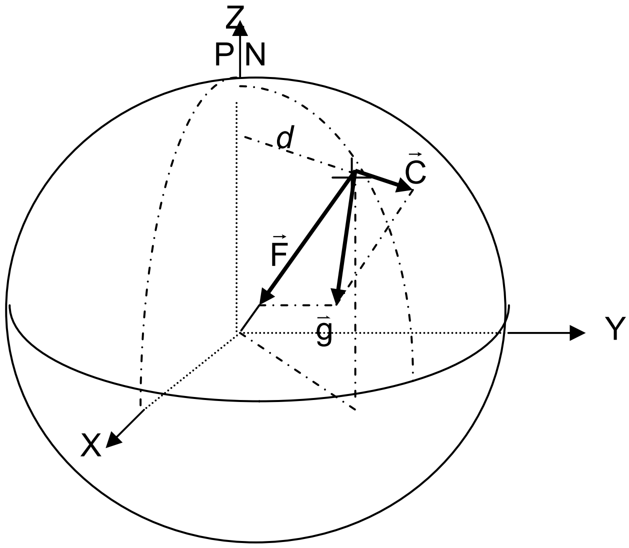


Figura 10 - Atração gravitacional $\vec{F}$ e força centrífuga $\vec{C}$.

A força centrífuga (vetor) é dada por:

$$\vec{C} = w^2 \vec{d} \tag{2.18}$$

onde:

. w – representa a magnitude da velocidade de rotação da Terra; e

. $\vec{d}$ - o vetor definido pela separação entre o ponto e o eixo de rotação terrestre, cujo módulo é dado por:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.19}$$

A força centrífuga ($\vec{C}$) é devida ao chamado potencial centrífugo (Q), dado por:

$$Q = \frac{1}{2} w^2 d^2 \tag{2.20}$$

$$\text{grad } Q = w^2 \, x\vec{i} + w^2 \, y\vec{j}$$

$$\text{grad } Q = w^2 \, \vec{d}$$

$$\text{grad } Q = \vec{C}$$

O *potencial da gravidade (W), potencial gravífico* ou *geopotencial* é expresso pela soma do potencial de atração *(V)* e do potencial centrífugo (*Q)*, conforme equação (2.21).

$$W = V + Q \tag{2.21}$$

ou

$$W = G\iiint_M \frac{dm}{l} + \frac{1}{2}w^2 d^2 = G\iiint_M \frac{dm}{l} + \frac{1}{2}w^2\left(x^2 + y^2\right) \tag{2.22}$$

O gradiente do geopotencial proporciona a aceleração da gravidade, conforme segue:

$$\vec{g} = \nabla W \tag{2.23}$$

Em GEMAEL (1999), encontra-se o desenvolvimento para obtenção da equação de Poisson Generalizada (equação 2.24), onde é aplicado o operador de Laplace (Δ) na equação (2.21).

$$\Delta(\mathrm{W}) = -4\pi \mathrm{G}\rho + 2\mathrm{w}^2 \tag{2.24}$$

Observa-se que, em média, o valor da força centrífuga, representa apenas aproximadamente, 0,35% da intensidade da força gravitacional, anulando-se nos pólos, e sendo máxima no equador (GEMAEL. C., 1999).

2.2 O Campo da Gravidade Normal

A denominação de *Terra Normal* é dada à *figura geométrica, elipsóide de revolução; o qual possui a mesma massa da Terra real (M), com distribuição homogênea, incluindo a massa da atmosfera; mesma velocidade de rotação (w); é imposta a condição de sua superfície limitante ser eqüipotencial (à superfície do geóide, é imposta a condição de possuir geopotencial (W), numericamente, igual ao* *esferopotencial (U) da superfície da Terra normal); e possui seu centro coincidente com o centro de massa da Terra".* Vinculado à Terra normal está o potencial de gravidade normal ou esferopotencial *U* e o vetor da gravidade normal $\bar{\gamma}$.

O esferopotencial é dado pela soma do potencial de atração da Terra normal (*Z*) e do potencial centrífugo (*Q*), que é igual ao da Terra verdadeira:

$$U = Z + Q \qquad (2.25)$$

A gravidade normal é dada pela aplicação do operador gradiente à equação (2.25):

$$\vec{\gamma} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.26)$$

Para o exterior do sistema de massas, o esferopotencial de atração é uma função harmônica, pois:

$$\nabla^2 Z = 0 \qquad (2.27)$$

Aplicando-se o operador laplaciano ao potencial centrífugo, tem-se:

$$\nabla^2 Q = 2w^2 \qquad (2.28)$$

Pelo fato do laplaciano do potencial centrífugo não ser nulo, caracteriza-o de não ser uma função harmônica.

2.3 Potencial anômalo

A diferença, num mesmo ponto, entre o potencial da Terra Real (geopotencial W) e o potencial da Terra Normal (esferopotencial U), constitui o *potencial anômalo* ou *anômalo* (T). Assim, o potencial anômalo (quantidade que o geopotencial difere do esferopotencial) pode ser considerado como o potencial produzido pelas massas anômalas terrestres.

$$T(x,y,z) = W(x,y,z) - U(x,y,z) \tag{2.29}$$

Ainda, os potenciais *V*, equação (2.21) e *Z*, equação (2.25) são harmônicos, no exterior das massas. A diferença, na equação 2.29, o potencial centrífugo *Q* (que é uma função não harmônica) é eliminado; esta subtração, a partir de duas equações não harmônicas, gera uma equação harmônica. O potencial anômalo pode ser interpretado como o potencial produzido pelas "massas anômalas", ou anomalias entre a Terra Real e a Terra Teórica.

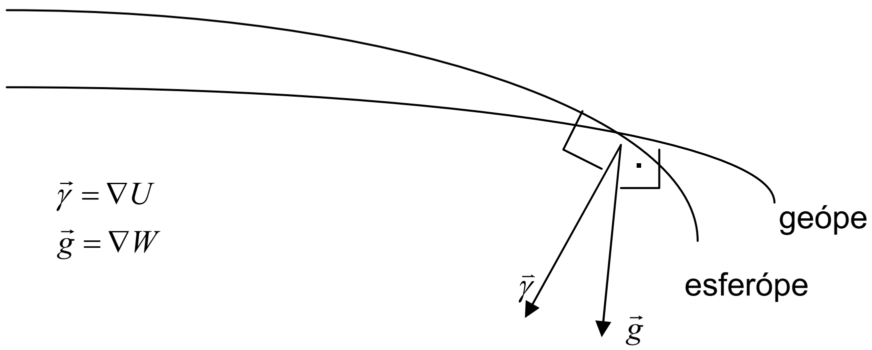


Figura 11 – Eqüipotenciais do campo da gravidade

A diferença entre os módulos dos vetores $\bar{g}$, equação (2.23) e $\bar{\gamma}$, equação (2.26), num mesmo ponto, é definida como *distúrbio da gravidade* $\bar{\delta}g(P)$, que é uma grandeza que está diretamente vinculada ao potencial anômalo.

$$\delta g(P) = g(P) - \gamma(P) \tag{2.30}$$

O vetor:

$$\bar{\delta}g = \mathrm{grad}\, T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \tag{2.31}$$

A *anomalia da gravidade (Δg)* é definida como a diferença entre a gravidade observada, reduzida ao geóide (P_0), e a gravidade normal, calculada sobre o elipsóide (Q).

$$\Delta g = g(P_0) - \gamma(Q) \tag{2.32}$$

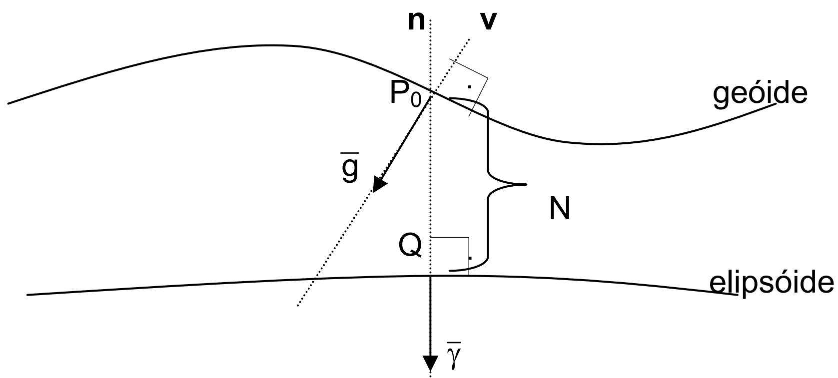


Figura 12 – Vetores $\overline{g}$ e $\overline{\gamma}$

Tomando-se a orientação da gravidade normal para o exterior, tem-se:

$$\gamma(P) = \gamma(Q) + \frac{\partial \gamma}{\partial n} N \tag{2.33}$$

Considerando as equações (2.30) e (2.31), tem-se:

$$\delta g = g(P) - \gamma(P) = -\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial n} \approx -\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n} = g(P) - \gamma(Q) - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N = -\frac{\partial T}{\partial n} \tag{2.34}$$

Na qual, *N* representa a altura geoidal, e $\overline{n}$ a direção da normal, orientada para o exterior.

Substituindo a equação (2.32) em (2.34), tem-se a Equação Diferencial da Geodésia Física, equação (2.35).

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N \tag{2.35}$$

Dada a fórmula de Bruns (VANICEK, KRAKIWSKY,1986):

$$N = \frac{T}{\gamma} \tag{2.36}$$

tem-se outra expressão para a *Equação Fundamental da Geodésia Física*:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial n} T \tag{2.37}$$

A equação (2.37) “mostra” que a anomalia da gravidade é expressa como uma combinação linear entre o potencial anômalo e sua derivada normal. Considerando T como um parâmetro a ser determinado em função de observações da anomalia da gravidade, trata-se de uma condição de contorno sobre a superfície à qual a anomalia da gravidade está referida. A resolução da equação proporciona a determinação de T, e através da fórmula de Bruns calcula-se a altura geoidal *N*.

Admitindo-se, em uma primeira aproximação, a Terra Normal como esférica, homogênea e sem movimento de rotação, tem-se (GEMAEL, C. 1999):

$$\gamma = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}^2} \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -2\frac{KM}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R} \tag{2.39}$$

Adotando-se a “aproximação esférica” e o valor médio de *R* para o raio da Terra, e um valor médio *G* para a aceleração da gravidade tem-se:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial n}=-\frac{2}{R} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial n}=-\frac{2G}{R} \tag{2.40}$$

assim, a Equação Fundamental da Geodésia Física será:

$$\Delta g=-\frac{\partial T}{\partial R}-\frac{2}{R}T \tag{2.41}$$

A equação 2.41 constitui a aproximação esférica da Equação Fundamental da Geodésia Física.

2.4 Funções Harmônicas

As funções harmônicas possuem a importante propriedade: "sobre a superfície de uma esfera, tais funções podem ser desenvolvidas em séries de harmônicos esféricos"

2.4.1 Equação de Laplace em coordenadas retangulares

Considerando-se o potencial de atração *V* gerado por um *sistema discreto de massa*, tem-se:

$$V=G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{l_i} \tag{2.6}$$

Onde:

$$l=[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{1/2} \tag{2.42}$$

Desenvolvendo:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2};\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\ ,$$

Demonstrado em KRUEGER et all, que no exterior das massas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{2.43}$$

Portanto, conclui-se que o Laplaciano do potencial de atração ***V*** é nulo ($\Delta\ \mathrm{V}=0$) no exterior das massas , e assim sendo, *V* é uma função harmônica.

Considerando-se o potencial de atração gerado por um sistema de *distribuição contínua de massas*, tem-se:

$$V=G\int_M \frac{dm}{r} \tag{2.44}$$

Analogamente, a conclusão da expressão 2.43, também é válida para um sistema de distribuição contínua de massas.

2.4.2 Equação de Laplace em coordenadas esféricas

As funções harmônicas esféricas são importantes em soluções de problemas da Geodésia. No desenvolvimento, faz-se necessário expressar o potencial em coordenadas esféricas. Na figura 9, as coordenadas retangulares (*x, y, z*) estão relacionadas com as esféricas (*r, θ, λ*), mediante as expressões:

$$\begin{aligned} x &= r\ \mathrm{sen}\,\theta\ \cos\lambda \\ y &= r\ \mathrm{sen}\,\theta\ \mathrm{sen}\,\lambda \\ z &= r\ \cos\theta \end{aligned} \tag{2.44}$$

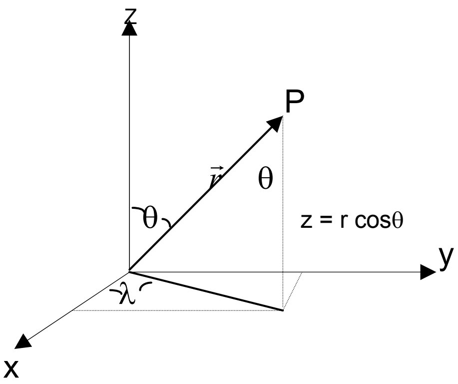


Figura 13 – Sistema de coordenas esféricas.

Encontra-se em KRUEGER *et al.(1994)* o desenvolvimento do laplaciano em coordenadas esféricas, equação (2.45) ou a (2.46).

$$\Delta V = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial^2 \theta} + \frac{\cot g\,\theta}{r^2}\frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} \tag{2.45}$$

ou,

$$\Delta\ V = r^2\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \cot g\theta\frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} \tag{2.46}$$

2.4.3 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre P_n ou harmônicos esféricos zonais, pertencem à classe das funções especiais, e foram desenvolvidos por Legendre, em 1782, quando investigava expansões em séries de funções potenciais. São casos particulares dos harmônicos de superfície (GEMAEL, 1999) e, sob determinadas condições, soluções da equação de Legendre.

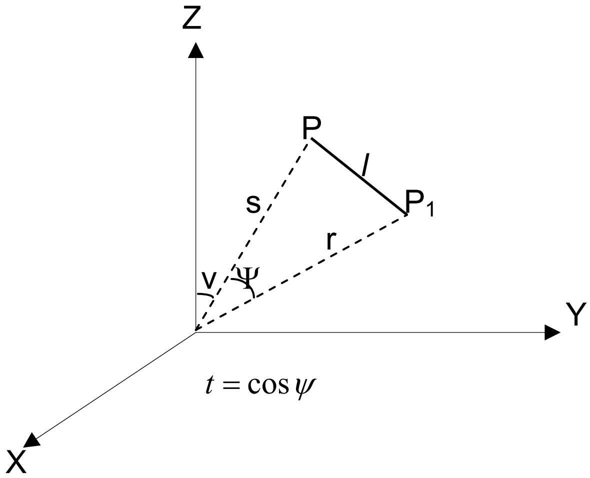


Figura 14 - Aplicação da Lei dos co-senos para obtenção de *l.*

A distância *l,* na figura 14, pode ser obtida pela lei dos co-senos;

$$l = (r^2 + s^2 - 2\,r\,s\cos(\Psi))^{1/2} \tag{2.47}$$

fazendo:

$$t = \cos(\Psi) \tag{2.48}$$

tem-se:

$$l = (r^2 + s^2 - 2\,r\,s\,t)^{1/2} \tag{2.49}$$

ou,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\left(\frac{s}{r}\right)t + \left(\frac{s}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.50}$$

Desenvolvendo a equação 2.50, em expansão binomial, resulta em:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{s}{r}\right)t + \left(\frac{s}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{s}{r}\right)^3\frac{5}{2}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right) + \dots\right] \tag{2.51}$$

ou

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{s}{r}\right)P_1+\left(\frac{s}{r}\right)^2 P_2+\left(\frac{s}{r}\right)^3 P_3+...\right] \tag{2.52}$$

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s}{r}\right)^n P_n \quad \text{para} \quad r \geq s \tag{2.53}$$

onde, P_n é o polinômio de Legendre, de grau n, que pode ser obtido a partir da Fórmula de Ferrer, equação (2.54):

$$P_{nm}(t)=(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\ \frac{\partial^m}{\partial t^m}P_n(t) \tag{2.54}$$

ou a partir da fórmula de Rodrigues:

$$P_n(t)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \tag{2.55}$$

2.4.4 Harmônicos esféricos

Das funções harmônicas, na Geodésia Física, as mais importantes são as funções harmônicas esféricas, que constituem as soluções da equação de Laplace ($\Delta \mathrm{V}=0$). A equação de Laplace analisa o potencial gerado por uma distribuição contínua de partículas num ponto exterior a essa distribuição. As soluções da equação de Laplace são dadas pelas funções harmônicas (HEISKANEN e MORITZ, 1979):

$$V_i(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sum_{m=0}^{n}\left[C_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda+S_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,m\lambda\right] \tag{2.56}$$

$$V_e(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\left[C_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda+S_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,m\lambda\right] \qquad (2.57)$$

As funções 2.56 e 2.57, representam as soluções gerais e, se ***V*** é função potencial, tem-se que as equações (2.56) e (2.57) representam a forma de expansão em séries de harmônicos esféricos do potencial de atração. Se o ponto for no interior da esfera, utiliza-se a equação (3.56) e, para pontos exteriores a esfera, utiliza-se a equação (2.57).

As equações (2.56) e (2.57) representam as funções harmônicas no espaço para formar uma série de harmônicos esféricos sólidos, as quais envolvem harmônicos de superfície, que por sua vez representam os coeficientes constantes representados por C_{nm} e S_{nm}, porém incógnitos.

2.4.5 Geopotencial em harmônicos esféricos

Substituindo-se o inverso da distância entre dois pontos, calculada com a equação (2.53), na expressão do geopotencial, dada pela equação (2.22) tem-se (o desenvolvimento da equação (2.58), encontra-se em GEMAEL, C. 1999):

$$W=\frac{G}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\int_M\left(\frac{s}{r}\right)^n\left(a_{n,m}\cos m\lambda+b_{n,m}\,\mathrm{sen}\,m\lambda\right)P_{n,m}(v)dm\right]+\frac{1}{2}w^2r^2\,\mathrm{sen}^2\,v \qquad (2.58)$$

Adotando-se:

$$A_{nm}=G\iiint_M s^n a_{n,m}dm \quad ; \quad \text{e}$$

$$(2.59)$$

$$B_{nm}=G\iiint_M s^n b_{n,m}dm$$

resulta em:

$$W = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{n} \left(\frac{a}{r} \right)^n \left[A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \operatorname{sen} m\lambda \right] \right\} P_{n,m}(t) + \frac{w^2 r^2 \operatorname{sen}^2 v}{2} \qquad (2.60)$$

Admitindo a coincidência da origem do sistema cartesiano com o centro de massa terrestre, e a coincidência do eixo de rotação com o eixo principal de inércia e adotando:

$$A_{nm} = C_{n,m} GM\, a^n \quad \text{; e} \qquad (2.61)$$

$$B_{nm} = S_{n,m} GM\, a^n \qquad (2.62)$$

tem-se:

$$W = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{r} \right)^n \left(C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \operatorname{sen} m\lambda \right) \right] P_{nm}(t) + \frac{w^2 r^2 \operatorname{sen}^2 v}{2} \qquad (2.63)$$

onde, os símbolos representam:

. *W* o geopotencial;

. *a* o semi eixo maior do elipsóide associado ao modelo;

. *r* a distância entre o ponto e o centro de massa terrestre;

. $C_{n,m}$ e $S_{n,m}$ os coeficientes do desenvolvimento em série; e

. *v* e λ respectivamente a co-latitude geocêntrica e a longitude do ponto.

2.4.6 Esferopotencial em harmônicos esféricos

Dada a simetria do elipsóide de revolução, a expressão do esferopotencial constitui-se em um caso particular da expressão do geopotencial, equação (2.63), proporcionando simplificações (GEMAEL, C. 1999):

a) Anulam-se os harmônicos setoriais e os tesserais pela simetria da rotação, e;
b) Anulam-se os harmônicos zonais ímpares, devido a simetria equatorial.

Devido as considerações, acima, a expressão do esferopotencial restringe-se aos zonais pares, assumindo a forma:

$$U(r,v) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(v)\right] + \frac{w^2 r^2 sen^2 v}{2} \quad (2.64)$$

Onde,

$$J_{2n} = (-1)^{n+1}\left(1 - n + \frac{5n\ J_2}{e^2}\right) \quad \frac{3\ e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \quad . \quad . \quad (2.65)$$

2.4.7 Potencial anômalo em harmônicos esféricos

O potencial anômalo, definido no item 2.4, pode ser expresso em harmônicos esféricos, onde é obtido a partir da expressões do geopotencial, equação (2.63) e do esferopotencial em harmônicos esféricos, equação (2.64), obtendo-se:

$$T(r,v,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \delta C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \operatorname{sen} m\lambda\right] P_{n,m}(\cos v) \quad (2.66)$$

onde, o termo $\delta C_{n,m}$ representa a diferença entre os coeficientes do geopotencial subtraídos dos respectivos coeficientes do esferopotencial.

O potencial gravitacional de atração (newtoniano) é uma função escalar de posição, já definida (2.4):

$$V_p = \frac{GM}{r}$$

V_P é o potencial exercido pela massa M (x', y', z') sobre a partícula de massa unitária P(x, y, z).

No caso de um sistema de discreto de massa, o potencial gravitacional dado por (2.5):

$$V = G \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{l_i}$$

E no caso de um sistema com distribuição contínua de massas, o potencial de atração será (2.6):

$$V = G \int_M \frac{dm}{l}$$

Lembrando que densidade (δ) é dado por:

$\delta = \frac{m}{v}$, tem-se:

$$\delta = \frac{dm}{dv}$$

ou 2.67

$$dm = \delta\, dv$$

Substituindo em 2.3, tem-se:

$$V = \int_V \frac{\delta}{l}\, dv \qquad 2.68$$

Onde,

dv = dx dy dz ⇒ elemento de volume.

O potencial gravitacional é uma função escalar de posição (varia de ponto a ponto) e,

V = V(x, y, z), tem-se (2.8):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{GM}{l}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = GM\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\right)$$

mas,

$$l = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

desenvolvendo, tem-se:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{GM}{l^3}x; \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{GM}{l^3}y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{GM}{l^3}z \end{aligned}\right\}$$

Comparando com o grupo de fórmulas 1.12, tem-se:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{F_x}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}} = \mathrm{Fy}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}} = \mathrm{F_z}$$

Este desenvolvimento nos mostrou que as derivadas do potencial gravitacional segundo os eixos coordenados proporcionam as componentes da força de atração em relação aos mesmos eixos.

2.5 Operadores

a) Nabla

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

b) Gradiente de um escalar E

$$\text{grad}\,E = \overline{\nabla}\,E$$

c) Divergência de um vetor $\overline{A}\left\lfloor A_x, A_y, A_z \right\rfloor$

$\text{div}\,\overline{A} = \overline{\nabla} \cdot \overline{A}$ Onde o ponto (.) significa produto interno de vetores.

$$\text{div}\,\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

d) Rotacional de um vetor $\overline{A}$

$$\text{rot}\,\overline{A} = \overline{\nabla} \wedge \overline{A}$$

$$\text{rot}\,\overline{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

e) Operador de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta = \text{div} \quad \text{grad}\,E$$

2.6 Campos vetoriais

Se a cada ponto de uma região pudermos associar de maneira unívoca um vetor à região em apreço, o conjunto de vetores associados constituem um ***campo vetorial***. Exemplo de tais vetores são força de atração, velocidade, aceleração que são "função de ponto" e admitiremos que variam de maneira contínua e uniforme, isto é, as derivadas das componentes do genérico vetor são finitos e determinados.

O Campo da Gravidade sendo um campo vetorial significa que há um vetor, isto é, um tripleto de números associados para cada ponto no espaço.

O potencial da gravidade **W** deve conter todos as informações que há no campo da gravidade. Espera-se que o potencial “suave” refira-se a um campo da gravidade também suave. Um potencial irregular deve representar um campo da gravidade também irregular.

A superfície eqüipotencial da gravidade é uma superfície onde o potencial gravidade (geopotencial) é constante

$$W = \text{Constante}$$

Há uma infinidade de superfícies eqüipotenciais, simplesmente assumindo valores diferentes para o potencial. As linhas de forças do campo da gravidade terrestre são chamadas *linhas de prumo (plumb-line)*.

Descreve-se abaixo algumas propriedades das superfícies eqüipotenciais do campo da gravidade:

- Nunca se cruzam, são superfícies fechadas, cada uma “cobrindo” a outra tal como uma cebola;
- Elas são contínuas;
- O raio de curvatura varia muito lentamente de ponto a ponto;
- As superfícies equipotenciais são convexas em todos os pontos (elas não tem baixadas ou vales)

2.7 Geóide e desvio da vertical

A superfície eqüipotencial do campo da gravidade de particular interesse é aquela que mais se aproxima ao nível médio dos mares não perturbado, estendido sobre toda a Terra.

Ela é chamada **geóide**, Gauss descreveu o geóide como uma superfície matemática da Terra, e portanto é a superfície “chave” na Geodésia, prestando um papel importante em posicionamento. Em uma primeira aproximação o geóide pode ser representado pelo nível médio dos mares.

O desvio da vertical “mede” a inclinação entre as superfícies do elipsóide de referência e a do geóide. (Estes assuntos serão tratados pormenorizadamente em capítulos seguintes). O desvio da vertical é o ângulo que a vertical do lugar (materializada pelo fio de prumo) forma com a normal (ao elipsóide).

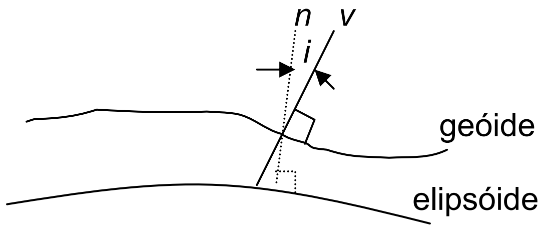


Figura 15 – Geóide e desvio da vertical

2.8 Campo da Gravidade Terrestre

As transformações das observações geodésicas, coletadas no espaço físico (afetada pela força da gravidade) para o espaço geométrico, nas quais as posições são relacionadas **requer** o conhecimento do Campo da Gravidade da Terra.

O Campo da Gravidade é um campo vetorial, possui magnitude (valor absoluto) e direção. A magnitude é um escalar com unidade *Gal*, nome este devido ao Glileu Galilei, 1 Gal = cm/s^2. A gravidade média é da ordem de 980 Gal

Os instrumentos usados pelos geodesistas estão sujeitos à diversas forças físicas. A interpretação correta das medidas necessita do conhecimento destas forças. A força mais comum é a Força da Gravidade da Terra. Assim, para estudar a geometria da Terra, o geodesista necessita entender o campo da gravidade terrestre, onde, para tal a Teoria de Newton é suficiente.

Para estudar as propriedades geométricas do campo de força da gravidade $\overline{F}$, é suficiente o estudo da aceleração da gravidade $\overline{g}$. A massa $\underline{m}$ pode ser considerada como um escalar do campo F. O vetor gravidade dá uma completa descrição do campo de força gravitacional.

O campo da gravidade é conservativo, ou seja, é dotado de um potencial escalar V = V(x, y, z), tal que:

$$\overline{F} = \text{grad V}, \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 2.69$$

então:

$$F = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

ou 2.70

$$F = F_x + F_y + F_z$$

A partir das expressões acima, tem-se que as derivadas parciais de V segundo os eixos coordenados representam as componentes do vetor $\overline{F}$ segundo os mesmos eixos; o que confere a V a qualidade de potencial.

Assim,

$$\overline{g} = \text{grad } W$$

$$\overline{g} = \text{grad}\,(V + Q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2.71$$

$$\overline{g} = \overline{F} + \overline{C}$$

Onde:

- $\overline{g}$ --> Vetor gravidade;
- V --> Potencial gravitacional (atração);
- Q --> Potencial centrífugo (rotação); $Q = \dfrac{w^2\ d^2}{2}$
- $\overline{F}$ --> Representa a atração exercida pela massa da Terra sobre a partícula de massa unitária;
- $\overline{C}$ --> Força centrifuga que a massa unitária se acha sujeita.

O **potencial W**, é decorrente das massas terrestre e da rotação do planeta e é denominado como **Geopotencial.**

Pelo fato do geopotencial ser um campo conservativo, tem-se:

$$\text{grad } W = \frac{\partial W_{\vec{i}}}{\partial_x} + \frac{\partial W_{\vec{j}}}{\partial_y} + \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial_z}$$

ou 2.72

$$\text{grad } W = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} + g_z\vec{k}$$

Onde, as componentes podem ser escritas da forma:

$$g_x = F_x + C_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -G \int_{M_T} \frac{(x-x')}{l^3} dm + w^2 x$$

$$g_y = F_y + C_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -G \int_{M_T} \frac{(y-y')}{l^3} dm + w^2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 2.73$$

$$g_z = F_z + C_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -G \int_{M_T} \frac{(z-z')}{l^3} dm + w^2 z$$

Ps: As integrais devem ser estendida ao total volume da Terra.

O módulo de g (gravidade) pode ser obtida através de determinações **absolutas** ou, indiretamente, por meio de determinações **relativas**. Sempre considera-se a partícula atraída com massa unitária, os módulos da **Força** e da **Aceleração** podem ser expressas pelo mesmo número (grandeza), respeitada a unidade de cada uma delas.

- **Força da gravidade**, expressa em Newton x 10^{-5},
- **Aceleração da gravidade,** expressa em miligal.

A **atração luni-solar** perturba o vetor da gravidade $\overline{g}$ em **módulo** e em **direção**. A perturbação em módulo afeta as medidas da gravidade e perturbação em direção afeta o desvio da vertical (inclinação entre a superfície do geópe e o elipsóide), repercutindo no nivelamento geométrico. Nas determinações de alta precisão, os efeitos atrativos da Lua e do Sol devem ser eliminados matematicamente.

2.9 Geópes e vertical

As superfícies eqüipotencias, também denominados de ***superfícies de nível***, caracterizam-se por apresentar o mesmo potencial em todos os seus pontos. No caso particular do *campo da gravidade* estas superfícies são denominadas de ***GEÓPES***.

$$W_{(x,\,y,\,z)} = \text{Constante}$$

As linhas de forças do campo da gravidade terrestre são denominadas de ***"linhas de prumo"***, e na literatura inglesa de "***plumb-line***".

Segue algumas propriedades das superfícies eqüipotenciais:

- Nunca se cruzam, são superfícies fechadas, cada uma cobrindo a outra tal como uma cebola;
- Elas são contínuas;
- Não apresentam "quebra brusca";
- O raio de curvatura local muda muito lentamente de ponto para ponto, com exceção onde a densidade de massas variam bruscamente; e
- As superfícies eqüipotenciais são convexas em todos os pontos (elas não tem "baixadas", vales ou valas).

Quando movimentando sobre uma superfície eqüipontencial (o potencial não muda) não realizamos trabalho, pois este movimento não vai no mesmo sentido e nem contra a direção do campo de força. A conseqüência é que as linhas de forças devem ser perpendicular às superfícies eqüipotenciais. Como a direção da linha de prumo é referida com a direção da vertical, as superfícies eqüipontencias definem a direção horizontal, desta forma são chamadas de superfície de nível.

O ***geópe fundamental*** é o ***geóide*** (W_o), este é definido com sendo a "*superfície eqüipotencial que mais se aproxima ao nível médio dos mares não perturbado, prolongada aos continentes*"

A Figura 16, abaixo, mostra-nos o caso ideal: corpo esférico, imóvel, com distribuição de massas perfeitamente homogênea. Assim, pontos eqüidistantes do centro possuem o mesmo potencial resultando superfícies eqüipotenciais esféricas e concêntricas (as radiais representam as linhas de força do campo

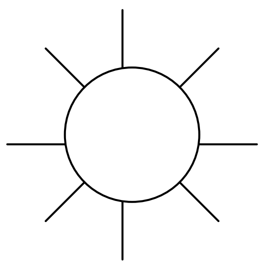


Figura 16 – Campos de forças (caso ideal)

Imprimindo ao corpo (caso acima) um movimento de rotação, resultará que as superfícies eqüipotenciais deixarão de ser esféricas, pois a contribuição do potencial centrífugo diminui com o aumento da latitude (nos pólos a força centrífuga é nula). Se a distribuição de massas deixam de ser simétricas, elas “fugirão” também do modelo primitivo (caso ideal). A principal conseqüência é que as linhas de forças, conservando-se, perpendiculares às superfícies eqüipotenciais, elas deixam de ser retas, conforme ilustrado na Figura 17.

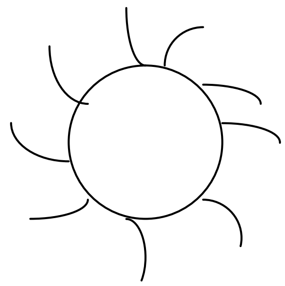


Figura 17 – Campo de forças (corpo em rotação)

3 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA GEODÉSIA FÍSICA

3.1 Potencial anômalo

Defini-se ***Terra Normal*** como "*corpo sólido, homogêneo, com a mesma massa da Terra Real, incluindo a atmosfera, cuja figura geométrica é o elipsóide de revolução, com as dimensões do modelo adotado, possuindo uma velocidade de rotação uniforme, cujo período é igual ao da Terra Verdadeira, possui superfície limitante eqüipotencial* $U = W_{geóide}$".

A diferença entre os potenciais produzidos, num mesmo ponto, pela *Terra Real* e pela *Terra Normal*, denomina-se de ***Potencial Anômalo*** ou ***Potencial Anômalo***. Matematicamente pode ser considerado como o potencial gerado pelas "***massas anômalas***", estas massas "transformam" a Terra Normal em Terra Verdadeira. A soma das massas anômalas, positivas e negativas, é nula; pois admite-se que a Terra Normal e a Verdadeira possuem massas iguais (da definição de Terra Normal), varia apenas a distribuição de massa.

O potencial produzido pela Terra Verdadeira é denominado de ***Geopotencial (W)***, e o potencial produzido pela Terra Normal é denominado de ***Esferopotencial (U)***. A diferença do Geopotencial e do Esferopotencial, em um mesmo ponto, é denominado de ***Potencial Anômalo***.

$$T = W - U \qquad 3.1$$

O potencial anômalo pode ser considerado como sendo o potencial produzido pelas massa anômalas, estas transformam a Terra Normal em Terra Verdadeira.

O ***Potencial Centrífugo*** (Q), é o potencial devido à rotação da Terra, é o mesmo para a Terra Real e Terra Normal, ao efetuar a operação ***W – U,*** tem-se que a influência do potencial centrífugo no potencial anômalo é nula. Isto significa que o potencial anômalo é uma função harmônica no exterior das massas atraentes.

Tem-se que a condição para uma função ser harmônica é:

$$\Delta \, \text{Funcao} = 0$$

Mas,

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.2$$

Tem-se que a condição para uma função ser harmônica é: $\Delta\,\text{Funcao} = 0$.

Então:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.3$$

Sendo o potencial anômalo uma função harmônica, implica dizer que este pode ser desenvolvido em uma série de harmônicos esféricos.

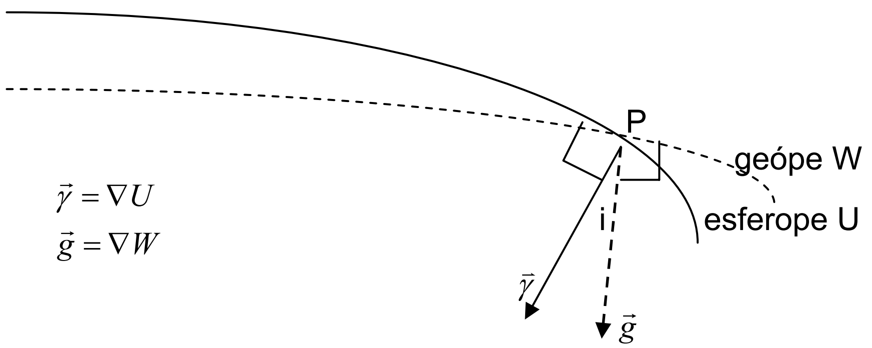


Figura 18 - geópe e esferope

Os três parâmetros básicos do campo da gravidade que são usados na Geodésia Física são: a ***anomalia da gravidade***, o ***desvio da vertical***, e a ***altura geoidal.***

3.2 Anomalia da Gravidade (Δg)

A anomalia da gravidade *(Δg)* é definida como o escalar cujo valor é igual a diferença entre a magnitude da gravidade do ponto, reduzido ao geóide, e a gravidade normal do ponto (no elipsóide).

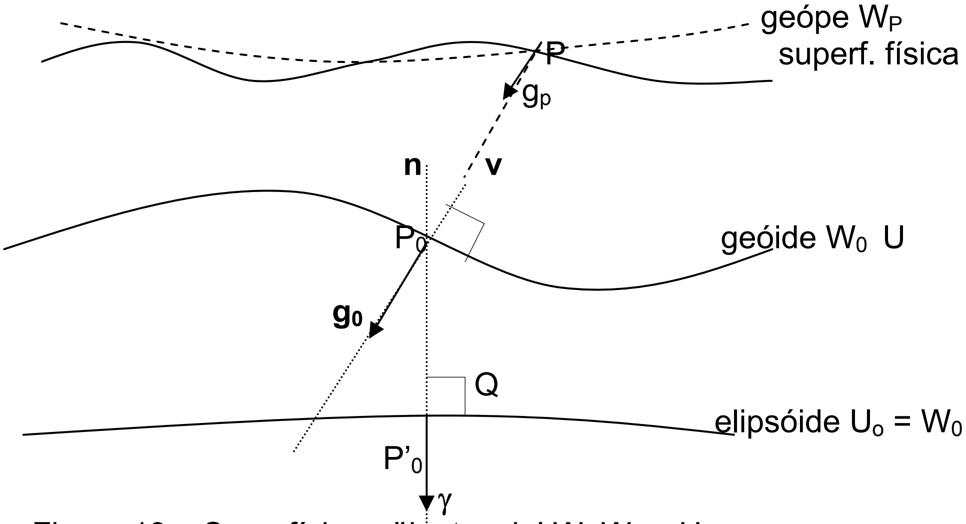


Figura 19 – Superfície eqüipotencial W, W_0 e U

A separação entre as superfícies do elipsóide e a do geóide é denominado de ***ondulação do geóide*** ou ***altitude geoidal***, que pode ser calculada utilizando-se das Fórmulas de Stokes (em função da anomalia da gravidade).

O ângulo em P, formado pela direção do vetor gravidade $\overline{g}_P$ e $\overline{\gamma}_{P_0'}$ constitui o desvio da vertical, que é definido pelos componentes meridiana ξ e pela componente primeiro vertical η, onde:

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g \qquad 3.4$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda_g)\cos\varphi \qquad 3.5$$

As componentes do desvio da vertical, na Geodésia Física, são calculadas com as fórmulas de Vening-Meinesz, que derivam das fórmulas de Stokes, cujo argumento nas fórmulas são as *Anomalias da Gravidade*.

3.3 Distúrbio da Gravidade ∂g

O distúrbio da gravidade é definido como a diferença entre os módulos do vetor gravidade ($\bar{g}_P$) e o módulo da gravidade normal ($\bar{\gamma}_P$) no mesmo ponto.

$$\partial g = g_p - \gamma_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.6$$

O vetor *distúrbio da gravidade*:

$$\bar{\partial} g = \bar{g}_p - \bar{\gamma}_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.7$$

$$\bar{\partial} g = \text{grad}\,(W - U) = \text{grad}\, T \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.8$$

$$\delta = -\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.9$$

Fazendo a "normal coincidir com a vertical", tem-se:

$$\delta = -\frac{\partial T}{\partial H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.10$$

3.4 Equação fundamental da Geodésia Física

a) Considerando a diferença de potencial entre o esferope (superfície eqüipotencial da Terra Normal) passante por P_0, projeção de P sobre o geóide, e P_0', projeção de P sobre o elipsóide.

$$U_0 - U = \overline{N} \,.\, \bar{\gamma}$$
$$U = U_0 - N\,\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.11$$

Lembrando: T = W – U,

$$T = W_0 - U_0 + N\,\gamma \qquad 3.12$$

Derivando esta equação (3.12) e forçando para que a normal coincida com a vertical, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial W_0}{\partial n} - \frac{\partial U_0}{\partial n} + N\frac{\partial \gamma}{\partial n}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -g + \gamma + N\frac{\partial \gamma}{\partial n} \qquad 3.13$$

$$g - \gamma = \Delta g = N\frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \qquad 3.14$$

A equação acima (Eq, 3.14) é a ***Equação diferencial básica da Geodésia Física***, esta equação nos "mostra" que a anomalia da gravidade Δg é conseqüência de:

- a gravidade **g** referir-se a gravidade medida na superfície física e reduzida ao geóide, e a gravidade normal λ ser calculada sobre o elipsóide; e
- da atração das massas anômalas.

Assumindo que o *esferopotencial* sobre o elipsóide possui o mesmo valor que o *geopotencial* sobre o geóide, a Equação 3.12 será:

$$T = N\,\gamma \qquad 3.15$$

Esta Equação (3.15) é conhecida como ***Equação de Bruns***, ela relaciona a ondulação do geóide com o potencial anômalo.

Introduzindo a Equação de Bruns na Equação diferencial básica da Geodésia Física, tem-se a ***Equação Fundamental da Geodésia Física*** (3.16):

$$\Delta g = \frac{T}{\gamma}\;\frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n} \qquad 3.16$$

A Equação Fundamental da Geodésia Física relaciona a anomalia da gravidade, que resulta de medidas efetuadas sobre a superfície física da Terra, com o potencial anômalo que é desconhecido.

3.5 Potencial anômalo, anomalias e ondulações expressos em *séries de harmônicos esféricos*

Conforme já visto no Item 3.1, o potencial anômalo **T** é uma função harmônica no exterior das massas atrativas. Isto significa que **T** pode ser desenvolvido em séries de harmônicos esféricos. Fazendo r = R, tem-se:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{R^{n+1}} \left[a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \operatorname{sen} m\lambda\right] P_{nm}(\nu) \quad . \quad . \quad . \quad 3.17$$

ou

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{R^{n+1}}$$

Derivando, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial R} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{S_n}{R^{n+2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.18$$

$$\Delta g = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{R^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{R^{n+2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.19$$

$$\Delta g = \sum \frac{S_n}{R^{n+2}} (n+1-2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.20$$

$$\Delta g = \sum (n-1) \frac{S_n}{R^{n+2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.21$$

Considerando a Equação de Brun (T = N γ), e fazendo γ = G (gravidade média de todo o globo Terrestre), tem-se:

$$N = \frac{1}{G} \sum \frac{S_n}{R^{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.22$$

Matematicamente, as Equações 3.21 e 3.22 resolvem o problema de determinação gravimétrica do geóide. Isto quando conhecido inteiramente o campo da gravidade (Terra Real), a Equação 3.21 possibilita o cálculo (pelo método dos mínimos quadrados) de 2n+1 coeficientes arbitrários de cada harmônico S_n**;** com estes coeficientes conhecidos, a Equação 3.22 possibilita o cálculo de **N.**

3.6 Campo da gravidade normal

Conforme já mencionado, o geopotencial refere-se ao potencial da Terra Real (W); adotando-se um modelo para representar a Terra, a este modelo refere-se o **esferopotencial** (**U**). Na Geodésia Física, adota-se o modelo denominado de ***Terra Normal***, que é um elipsóide de revolução, ao qual lhe é atribuído a mesma massa (incluindo a atmosfera) e a superfície do modelo possui superfície eqüipotencial.

Referente ao geopotencial, tem-se:

$$\overline{g} = \text{grad } W$$

Referente ao esteropotencial, tem-se a gravidade normal (γ),

$$\overline{\gamma} = \text{grad } U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.23$$

As superfícies eqüipotenciais da Terra Real são denominadas de ***geópes*** (W=constante) e as superfícies eqüipotencias da Terra Normal são denominadas de ***esferópes*** (U = constante).

3.6.1 *Esferopotencial*

O potencial produzido pela Terra Normal (U) é:

$$U = Z + Q \qquad 3.24$$

Onde,

Z – refere-se ao potencial de atração produzido pela Terra Normal; e

Q – refere-se ao potencial centrífugo.

$$\text{grad } U = \bar{\gamma} = \frac{\delta U}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta U}{\delta x}\vec{j} + \frac{\delta U}{\delta x}\vec{k} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_x \vec{j} + \gamma_x \vec{k} \qquad 3.25$$

Onde, γ_x, γ_y e γ_z representam as componentes cartesianas do vetor gravidade normal.

O Laplaciano (Δ), no exterior ao elipsóide de revolução, tem-se:

$$\Delta Z = 0,$$

$$\Delta Q = \Delta U = 2w^2, \qquad 3.26$$

Onde w representa a velocidade angular da Terra Normal (igual à velocidade da Terra Real).

Esferopotencial Centrífugo

O esferopotencial centrífugo é dado por:

$$Q = w^2 (x^2 + y^2)/2 \qquad 3.27$$

É devido à força centrífuga (C), dada por:

$$\overline{C} = \text{grad } Q = w^2 x_{\bar{i}} + w^2 y_{\bar{j}} \qquad 3.28$$

- ***fator dinâmico da forma***

Para o Sistema Geodésico de Referência 1967:

a = 6 378 160 m

km = GM = 398 603 x 10^9 m^3 s^{-2}

J_2 = 10 827 x 10^{-7}

α = $298{,}247^{-1}$ (este achatamento é devido ao J_2)

$$J_2 = \frac{\left(2\alpha - m - \alpha^2\right)}{3} + \frac{2\alpha m}{21} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.30$$

m – relação entre a força centrífuga no equador e a gravidade normal equatorial,

$$m = \frac{a\,w^2}{\gamma_e} - \frac{3}{2}\,m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.31$$

Para o Sistema Geodésico de Referência 1980

a = 6 378 137 m

GM = 398 600,5 x 10^9 m^3 s^{-2}

J_2 = 10 826,3 x 10^{-7}

gravidade normal

$$\gamma = \gamma_e\,(1 + \beta\,\mathrm{sen}^2\varphi + \beta_1\,\mathrm{sen}^2 2\varphi - \beta_2\,\mathrm{sen}^2\varphi\ \ \mathrm{sen}^2 2\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.32$$

fórmula Internacional da 1967

α = $298{,}247^{-1}$
w = 72 921 151 467 x 10^{-15} rad/s
γ_e = 978 031,845 mGal
γ_p = 983 217,730 mGal
β = 0,005 302 365 5
β' = -0,000 005 9
resultando:

γ = 978 031,8 (1 + 0,005 302 4 $\mathrm{sen}^2\varphi$ - 0,000 005 9 $\mathrm{sen}^2 2\varphi$) mGal ou

γ = 978 031,846 (1 + 0,005 278 895 sen$^2\varphi$ - 0,000 023 462 sen^4 2φ) mGal

gradiente normal da gravidade normal

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\eta} = -\frac{2\gamma}{a}\left(1 + \alpha - 2\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + m\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 3.34$$

Para o Sistema Geodésico de Referência 1967,
a = 6 378 160 m
α = 298,25^{-1}
m = 0,003 449 801 4, resulta:

.no equador,
γ_{eq} = 978 031,846 mGal

$$\frac{\partial\gamma}{\partial n} = -\,0{,}30877$$

.no paralelo 45^o
γ_{45} = 980 619,047 mGal

$$\frac{\partial\gamma}{\partial n} = -\,0{,}30856$$

. no pólo
γ_{45} = 983 217,72 mGal

$$\frac{\partial\gamma}{\partial n} = -\,0{,}30834$$

.***gravidade normal em um ponto qualquer***

$$\gamma = \gamma_{el}\left[1 - 2\,h\left(1 + \alpha - 2\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + m\right)/\,a + 3\,h^2\,/\,a^2\right]$$

.Unidades

Gal	m s^{-2} ou cm s^{-2}	N = Kg 1 m s^{-2}
miliGal mGal	m s^{-2} x 10^{-5}	F = m a
microGal μGal	m s^{-2} x 10^{-8}	

Exercício:
Calcular a gravidade normal, referente ao SAD69, para φ = 20^{o}S; para φ = 22^{o}S; para 24^{o}S; para 26^{o}S; para 28^{o}S; e para 30^{o}S.

4 PROBLEMA DE CONTORNO

problema direto da Teoria do Potencial

”determinação do potencial a partir das massas geradoras”

problema inverso da Teoria do Potencial

“a partir do potencial, determinar as massas geradoras”

O problema inverso não admite solução única, pois existem infinitas distribuições de massas que conduzem ao mesmo potencial (tal conclusão basta considerar esferas concêntricas com a mesma massa). Interessa ao geodesista o problema inverso.

Problema de contorno *(da Teoria do Potencial)*

- *primeiro problema –* ***DIRICHLET***

  “determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície ***S*** *quando são conhecidos os valores que a função assume sobre a superfície (contorno)”.*

- *segundo problema –* ***NEUMANN***

  “determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície ***S*** *quando são conhecidos os valores que a derivada normal da função assume sobre a superfície”.*

- *terceiro problema –* ***HILBERT***

  “determinar uma função harmônica no interior de uma dada superfície ***S*** *quando são conhecidos os valores que assume sobre a superfície uma combinação da função e de sua derivada normal”.*

Problema de contorno da Geodésia Física

O problema de contorno da Geodésia Física nos diz: “*conhecidos os valores do potencial gravífico e de sua derivada normal sobre a superfície Física da Terra determinar essa superfície”.* e ainda nos diz: “*conhecidos os valores do potencial gravífico e de sua derivada normal sobre a superfície Física da Terra determinar o campo gravífico externo à superfície”.*

propriedades do potencial de atração

- *é uma função harmônica no exterior das massas;*
- *satisfaz a equação de Poisson no interior de tais massas;*
- *é uma função escalar de ponto cujo gradiente representa a força de atração produzida pelas massas sobre a partícula de massa unitária;*
- *é uma função contínua;*
- *tem derivadas primeiras contínuas;*
- *tem derivadas segundas contínuas exceto sobre a superfície limitante das massas;*
- *tende a zero quando o ponto se afasta para o infinito;*
- *é uma função harmônica no interior e exterior de uma superfície material;*
- *é uma função cuja derivada direcional representa a componente da força de atração nessa direção; e*
- *é constante no interior de uma superfície material esférica.*

4.1 Determinação Gravimétrica das Ondulações do Geóide e do Desvio da Vertical

A Fórmula de Stokes (1849) é de grande importância à Geodésia Física, pois proporciona a ondulação geoidal (separação entre o geóide e o elipsóide) em função das anomalias da gravidade. O uso desta fórmula envolve o conhecimento da gravidade em todo o planeta.

No trabalho original de Stokes “On the variation of gravity at the surface of the Earth”, dois tópicos são tratados:

1. Conhecendo-se a forma de uma superfície eqüipotencial, limitante de um sistema de massas atrativas, dotado de movimento de rotação e o valor da gravidade em um ponto da superfície, determinar o campo externo independente de qualquer hipótese sobre a distribuição de massas no interior da superfície; e
2. Inversamente, conhecendo-se o valor da gravidade em todos os pontos de uma superfície eqüipotencial, determinar a forma dessa superfície.

Interessa ao geodesista o segundo problema: o geóide é uma superfícies eqüipotencial e a ela podem ser reduzidos todos os valores da gravidade, observados na superfície física da Terra. Queremos então referir esse geóide a uma superfície conhecida, ou seja, determinar a ondulação geoidal. Esta ondulação pode ser determinada utilizando-se das Fórmulas de Stokes, cujos argumentos são as anomalias da gravidade.

Stokes admitiu a inexistência de massas externas à superfície eqüipotencial (o que não ocorre com a Terra, pois as massas topógráficas são externas ao geóide, ou seja o geóide não é uma superfície limitante do sistema de massas).

4.2 Integral de Stokes

Laplace e Dirichlet demonstraram que uma função de posição sobre uma esfera pode ser expressa por uma série de harmônicos esféricos:

$$F(\nu', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} P_n(\psi) F(\nu, \lambda)\, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.1$$

$d\sigma$ - elemento de superfície de uma esfera de raio unitário.

Considerando-se a função **F** sendo a anomalia da gravidade Δg (ν', λ'), ou simplesmente Δg, ainda, considerando a superfície eqüipotencial sendo uma esfera **S** de raio **R**, tem-se:

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int_{S} P_n(\psi)\ \Delta g_S\ dS \ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.2$$

Δg_S – Anomalia da gravidade no elemento de superfície;

ψ - distância angular entre os pontos P(ν', λ') e o elemento de área dS ((ν, λ)

$$dS = R^2\ d\sigma \ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.3$$

Das expressões 3.21 e 3.22, tem-se:

$$N_n = \frac{R}{G} \; \frac{\Delta g_n}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.4$$

Δg_n – termo genérico do desenvolvimento em harmônico esférico.

Introduzindo a expressão 4.2 na expressão 4.4, tem-se:

$$N = \frac{1}{4\pi RG} \int_S \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \; P_n(\psi) \quad \Delta g_S \; ds \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.5$$

Na equação 4.5, o termo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \; P_n(\psi) \quad = \quad S(\psi)$$

é dependente somente de ψ, e pode ser expresso por:

$$S(\psi) = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 1 - 6\,\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi \;\; \log_e[\operatorname{sen}\frac{\psi}{2}(1+\operatorname{sen}\frac{\psi}{2})] \qquad .4.6$$

Substituindo 4.6 em 4.5, tem-se:

$$N = \frac{1}{4\pi RG} \int_S S(\psi)\,\Delta g_S \quad dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.7$$

ou,

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g_S \quad S(\psi)\,\operatorname{sen}(\psi)\,d\psi\; dA \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.8$$

4.3 Co-geóide

A aplicação da integral de Stokes pressupõe a inexistência de massas externas ao geóide. A supressão das massas topográficas (externas ao geóide) acarreta um novo problema, ou seja, “produz” uma Terra Fictícia com a conseqüente alteração do potencial gravífico. Em tais condições, a Fórmula de Stokes proporcionará a separação entre o elipsóide de referência e um “geóide fictício”, designado por co-geóide.

4.4 Restrições na aplicação da integral de Stokes

Stokes, na dedução utilizou-se da “aproximação esférica” e também do desenvolvimento de Δg em harmônico esféricos, ocasionando problemas de convergência da série.

A integral de Stokes dever ser estendida ao total da superfície da Terra, o que implica em dizer que deve-se conhecer a anomalia da gravidade em toda a superfície da Terra, ou em quantidade e distribuição geográfica convenientes. Esta é uma grande dificuldade, pois ainda em nossos dias, são desconhecidas as anomalias da gravidade na maioria das área oceânica, nos desertos e nas florestas.

O potencial anômalo dever ser harmônico em qualquer ponto externo do geóide o que implica na necessidade da remoção das massas topográficas (massas externas ao geóide).

A fórmula de Stokes pressupõe a igualdade das massas do elipsóide de referência e da Terra Verdadeira, pressupõe também que o geopotencial ser igual ao esferopotencial do elipsóide de referência e impõe a condição de que o centro de gravidade do elipsóide coincidir com o da Terra.

A fórmula 4.9, abaixo, é designada por ***Fórmula de Stokes Generalizada***

$$N = \frac{k\ \Delta M}{RG} - \frac{\Delta W}{G} + \frac{R}{4\pi G} \int_{\sigma} \Delta g \quad S(\psi) \quad d\sigma \qquad . \qquad . \qquad 4.9$$

Onde:

$\frac{k\ \Delta M}{RG} = T_0$, representa o termo de grau zero no desenvolvimento do potencial anômalo, e

$\Delta M = M_T - M_E$, representando, respectivamente, a massa da Terra e a do elipsóide, e

$\Delta W = W_0 - U_0$, diferença entre o potencial do geóide e do elipsóide.

4.5 Fórmula de Vening-Meinesz

O cálculo das componentes do desvio da vertical podem ser calculadas por astronomia associada à geodésia. Na Geodésia Física as componentes são calculadas utilizando-se das anomalias da gravidade na fórmula de Vening-Meinesz. O desvio da vertical determinado a partir da anomalia da gravidade é denominado de desvio gravimétrico, enquanto o desvio da vertical determinado pela geodésia associada à astronomia é denominado de desvio astro-geodésico. O desvio da vertical em um ponto do geóide mede a inclinação do geóide em relação ao elipsóide de referencia.

$$\begin{matrix} \xi'' \\ \eta'' \end{matrix} = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \Delta g \; f'(\psi) \; \mathrm{sen}\,\psi \; d\psi \begin{matrix} \cos A \\ \mathrm{sen}\, A \end{matrix} dA \; . \quad . \tag{4.10}$$

A Fórmula de Veining-Meinesz (Equação 4.10) pode ser re-escrita em função de coordenadas geográficas:

$$\begin{matrix} \xi'' \\ \eta'' \end{matrix} = -\frac{\rho''}{2\pi G} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2\pi} \Delta g(\phi', \lambda') \; f'(\psi) \begin{matrix} \cos A \\ \mathrm{sen}\, A \end{matrix} \cos\phi' \; d\phi' \; d\lambda' \tag{4.11}$$

4.6 Aplicação da Fórmula de Stokes

Quando Stokes desenvolveu a fórmula para o cálculo da ondulação do geóide, reconheceu que era um trabalho apenas teórico, pois naquela época (meados do século XVIII) a determinação da anomalia da gravidade em todo o globo terrestre era uma tarefa inexeqüível. Somente após o desenvolvimento dos gravímetros (dispositivo tri-pendular de Veining-Meinesz), que possibilitam a determinação da gravidade com grande rapidez, foi possível a determinação da gravidade nos oceanos.

4.6.1 determinação de N pelo método das zonas

Considera-se a superfície da Terra dividida em zonas esféricas, onde admite-se a estação gravimétrica, na qual pretende-se determinar **N**, como polo, conforme Figura 20.

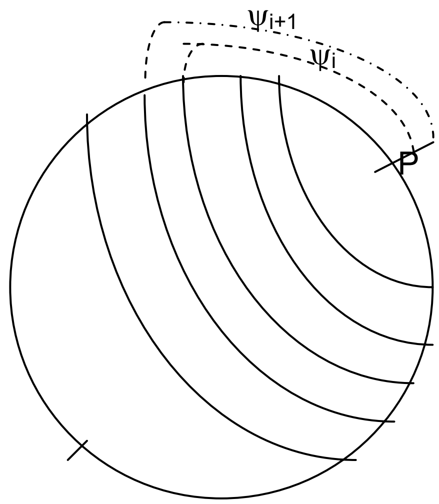


Figura 20 – Zonas esféricas

$$\Delta N = \frac{R}{G} \quad \Delta g \int_{\psi_1}^{\psi_2} F(\psi) \quad d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.12$$

Fazendo:

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} F(\psi) \quad d\psi = \int_{0}^{\psi_2} F(\psi) \quad d\psi - \int_{0}^{\psi_1} F(\psi) \quad d\psi = \phi(\psi_2) - \phi(\psi_1) \qquad 4.13$$

Substituindo 4.13 em 4.12, tem-se:

$$\Delta N = \frac{R}{G}\,\Delta g\,[\,\phi(\psi_2) - \phi(\psi_1)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .4.14$$

Onde,

$$\phi(\psi) = \int_0^{\psi} F(\psi) =$$

$$= 0{,}5\,[1 + 4\,\text{sen}\frac{\psi}{2} - \cos\psi - 6\,\text{sen}^2\frac{\psi}{2} - \frac{7}{4}\text{sen}^2\psi - \frac{3}{2}\text{sen}^2\psi\,\log_e(\text{sen}\frac{\psi}{2} + \text{sen}^2\frac{\psi}{2})]\; 4.15$$

Lambert e Darling tabelaram a função 4.15, cujo argumento Ψ, varia de 0^o a 180^o.

A contribuição, na estação gravimétrica P, das **n** zonas será:

$$N = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^{n} \Delta g_i\,[\phi(\psi_{i+1}) - \phi(\psi_i)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.16$$

Onde, Δg_i representa a anomalia média de cada zona esférica.

4.6.2 determinação de N pelo método dos quadrados

No método determinação de N pelo método dos quadrados, proposto por Hirvonen, a superfície terrestre é “dividida” em quadrados pelos paralelos e meridianos, por exemplo de 10^o em 10^o.

Na Fórmula 4.7, fazendo $S(\Psi) = 2\,f(\Psi)$ e considerando a área elementar $d\sigma$ pertencente à esfera de raio unitário, tem-se:

$$N = \frac{R}{2\,G} \int_{\sigma} \Delta g_{\sigma}\, f(\psi)\, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.17$$

Substituindo-se a integral por uma somatória, tem-se:

$$N = \frac{R}{2\,\pi\,G} \quad \sum \Delta g_q \ f(\psi)\,q \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.18$$

Onde:

- Δg_q : é a anomalia média do "quadrado";
- ψ é a distância angular do ponto, no qual pretende-se calcular **N**, ao centro de cada quadrado; e
- **q** é a área do quadrado.

Na Fórmula 4.18, fazendo:

$$C_q = \frac{R.\,q.\,f(\psi)}{2.\,\pi\,G} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.19$$

no qual C_q é designado por ***Coeficiente de Stokes***, a contribuição do quadrado na determinação de ΔN na determinação de **N** será:

$$\Delta N = \Delta g_q\ C_q \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.20$$

A ondulação geoidal no ponto considerado será:

$$N = \sum C_q\ \Delta g_q \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.21$$

Analisando a Equação 4.19, verifica-se que o coeficiente de Stokes independe do campo da gravidade, assim, pode-se calcular este coeficiente *a priori* para cada ponto de interesse. A Função $f(\psi)$, conforme já mencionada, foram tabeladas por Lamber e Darling, assim sendo, estes coeficientes podem ser determinados na tabelas ou podem ser calculados pela Equação 4.15.

A área do quadrado **q**, pode ser calculada por

$$q = 2\ \Delta\lambda \text{ sen } \Delta\varphi \cos \varphi_m \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4.22$$

Onde, $\Delta\lambda$ e $\Delta\varphi$ define a amplitude do quadrado de latitude média φ_m.

ψ é a distância esférica da estação gravimétrica (onde se pretende determinar calcular a contribuição ΔN) ao centro do quadrado. ψ é calculado utilizando-se da fórmula fundamental da Trigonometria Esférica:

$$\cos\psi = \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_o \cos \varphi \cos \Delta\lambda \quad . \quad . \quad . \qquad 4.23$$

O cálculo de **N** é determinado utilizando-se um mapa mundi, dividido em quadrado, onde são inscritos os coeficientes de Stokes; a partir dos dados gravimétricos de todo o Globo Terrestre avalia-se a anomalia média de cada quadrado; o produto do coeficiente de Stokes pela anomalia média do quadrado nos proporciona a contribuição ΔN do quadrado na determinação final de **N**, que será determinado pela somatória de destes ΔN.

Hirvonen, em 1934, foi o pioneiro a determinar um geóide onde, reuniu anomalias da gravidade esparsas, aproximadamente 4 500, reduziu-as a um mesmo sistema (Potsdam), calculou a ondulação do geóide em 62 pontos. Utilizando-se da anomalia Faye.

Tanni, em 1948, elaborou o mapa geoidal a partir de 218 valores de **N** calculados em anomalias isostáticas no sistema Pratt-Hayford, onde adotou a profundidade de 113,7 Km.

5 REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS

A anomalia da gravidade, ou o valor da gravidade estão sujeitas a diferentes tipos de reduções, que dependem da finalidade para as quais estão sendo determinadas. Exemplificando: a anomalia de Bouguer considerada isoladamente tem pouca importância ao geodesista nas determinações das ondulações do geóide; já as reduções isostática tem interesse aos geodesistas e aos geólogos, mas não se adequam aos trabalhos de prospecção de natureza local.

Vimos que na aplicação da fórmula de Stokes, pressupõe o conhecimento da gravidade em toda a superfície do geóide, o que implicará na redução da gravidade *ao nível do mar,* e também pressupõe a inexistência das massas topográficas (massas externas ao geóide), assim, deve-se aplicar métodos de redução que eliminem ou transfiram para outras posições as *"massas topográfica"*, e consequentemente implicará que o geóide sofrerá variações.

Considerando a escassez de anomalias da gravidade, a anomalia deve ser o mais possível representativa da região circunvizinha à estação. Devido à menor correlação com a topografia, a anomalia isostática são as mais representativa da região. Quando aplica-se a correção isostática, tanto as massas externas ao geóide como as correspondentes massas internas de compensação são eliminadas.

Vimos que:

$$\Delta g = g_0 - \gamma \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5.1$$

A gravidade observada na superfície física deve ser reduzida ao *nível do mar* utilizando-se da ***correção do ar livre (C$_F$)***, também designada de ***correção de Faye***, ou ainda correção ***free-air*** a anomalia reduzida resultante recebe a mesma denominação ***anomalia free-air***

$$\Delta g_f = g + C_F - \lambda \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5.2$$

Para que seja legitimada a utilização da fórmula de Stokes, deve-se fazer a *"remoção das massas topográfica"*, isto é consumado através da ***correção de Bouguer*** (**C$_B$)**, a anomalia resultante recebe o mesmo nome (anomalia de Bouguer).

$$\Delta g_B = g + C_F + C_B - \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5.3$$

Considerando que a maior parte da crosta terrestre encontra-se em *equilíbrio isostático*, impõe-se a ***correção isostática*** (C_I):

$$\Delta g_I = g + C_F + C_B + C_I - \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5.4$$

5.1 Anomalia free-air

Considerando-se conhecida a altitude ortométrica (H) da estação onde se deseja determinar a anamalia free-air, a correção free-air é dada por:

$$C_F = \frac{\partial g}{\partial H} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5.5$$

Onde, $\frac{\partial g}{\partial H}$ é o gradiente vertical da gravidade. Em trabalhos práticos utiliza-se o gradiente da gravidade normal:

$$C_F = 0{,}3086\ H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5.6$$

utIlizando-se **H** em metros e C_F em miligal, resultará a anomalia ***free-air***:

$$\Delta g_F = g + 0{,}3086\ H - \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 5.7$$

5.2 Anomalia de Bouguer

Conforme já mencionado, a fórmula de Stokes pressupõe a inexistência de massas topográfica (externas ao geóide). A remoção dessas massas dá-se, conforme segue:

a) *redução modificada de Bouguer*: onde é considerada as massas da região próxima à estação, *zonas literais de Hayford*, é formada por uma calota esférica cujo polo é a estação e cujo raio é de 166,7 Km.

b) redução topo-isostática: esta considera as massas topográficas das regiões distântes, que se estende até o ponto antípoda da estação.

A redução modificada de Bouguer C_B ou eliminação das massas topográficas num raio de 166,7 Km, será:

$$C_B = -A \; -B \; +C \qquad \text{. . . . .} \qquad 5.8$$

$$A = 2\,\pi\,k\,\delta\,H \qquad \text{. . . . .} \qquad 5.9$$

$k = 6672\ 10^{-14}\ {}_{m}^{3}\ s^{-2}\ Kg^{-1}$

$\delta = 2670\ Kg\ m^{-3}$

Substituindo estes valores em 5.9, tem-se:

$A = 0{,}1119\ H$

O termo B, da Equação 5.8 encontra-se tabelado em função de H. O termo **C** encontra-se tabelado.

Onde, o termo ***A*** constitui a correção de Bouguer propriamente dita (corresponde à componente vertical da atração exercida por um platô horizontal de espessura H [3] sobre uma partícula de massa unitária situado na sua superfície). Tal componente é aproximadamente igual à que seria produzida por uma *calota* de raio de 166,7 Km. O termo ***B*** “transforma” o platô em calota. O termo ***C*** é designado por *correção de terreno*, onde é considerado as irregularidades topográficas em relação à calota.

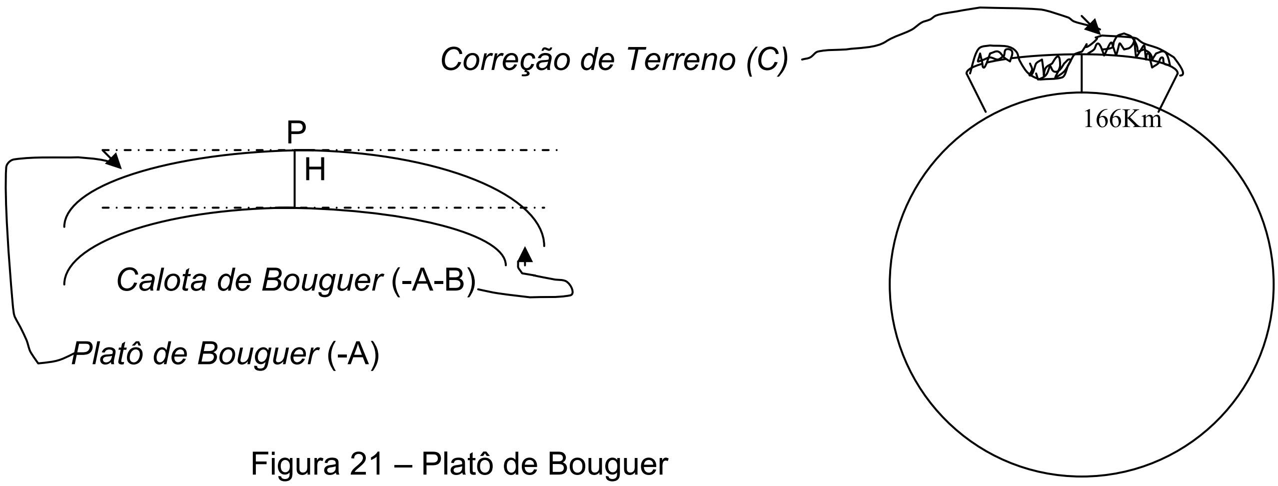


Figura 21 – Platô de Bouguer

[3] igual a altitude ortométrica da estação

O termo **B** da Fórmula 5.8 corresponde a diferença entre as componentes verticais da atração produzida pela *calota* e pelo *platô* de Bouguer. Prestando para "transformar" o platô numa calota.

correção de terreno

O termo ***C*** da Fórmula 5.8 (correção do terreno) é responsável pela "eliminação" das massas topográficas irregulares em relação à calota. Seu cálculo é executado a partir de cartas altimétricas da região vizinha à estação. A região é dividida em *zonas* (denominadas de ***zonas literais de Hayford***) são designadas pelo alfabeto maiúsculo **A** pequena calota que envolve a estação gravimétrica, por **B . .,** por **C . . , . . . O,** esta representa a *zona mais afastada, com raio de 166,7 Km* e delimita a calota de Bouguer.

5.3 Reduções isostática

A isostasia postula a existência de um estado de equilíbrio na litosfera com relação às ações decorrentes da gravidade. Neste estado de equilíbrio, aos excessos de massas (exemplificando, nas montanhas) e às deficiências de massas (nos oceanos) em relação ao geóide, correspondem ***massas internas de compensação***.

O equilíbrio isostático é atingido em determinadas regiões do planeta, estas regiões são denominadas de ***regiões compensadas***, há regiões em que o equilíbrio isostático ainda não está completo, ou seja, a região encontra-se em fase de processamento (são as regiões ***sub-compensadas***); ou ainda há regiões onde o equilíbrio foi ultrapassado (são as regiões ***super-compensadas***).

5.3.1 *Sistema Prat-Hayford*

O sistema Prat postula a igualdade entre as massas topográficas e as *massas de compensação* que se estendem do geóide até uma determinada ***profundidade de compensação***. O equilíbrio isostático é consumado pela variação de densidade do material subjacente ao geóide (sob as montanhas – excessos de massa em relação ao geóide – haveria uma deficiência de densidade e sob o leito dos oceanos – as águas oceânicas representariam uma deficiência de massa – haveria um excesso em relação ao valor médio atribuído às massas superficiais).

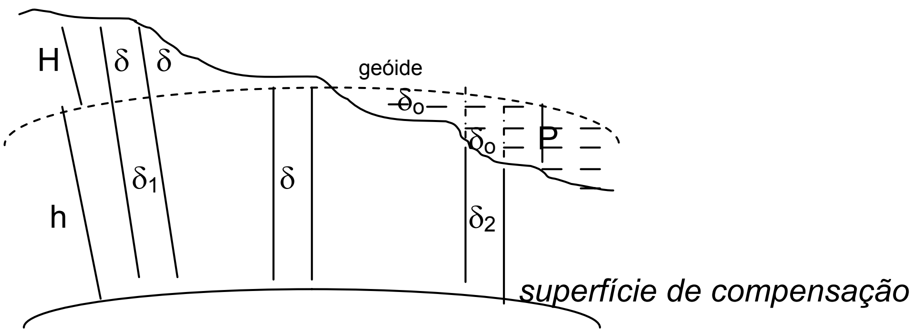


Figura 22 – Sistema Prat-Hayford

5.3.2 *Sistema Airy-Heiskanen*

O sistema Airy-Heiskanen postula um equilíbrio isostático baseado na igualdade de massas topográficas e as massas de compensação que seria atingido de maneira diferente daquela de Pratt. No sistema de Pratt a profundidade de compensação é constante, varia a densidade da litosfera. Já no sistema Airy a ***densidade é constante*** e varia a profundidade de compensação. Onde o ***magma***, "flutua" na litosfera, seria de densidade constante. Assim sendo, nas montanhas haveria uma "*raiz"* que é a maior parte que "mergulha" no magma. Sob os oceanos é a "*anti-raiz"* que ocupa lugar de material mais leve compesando as deficiências oceânicas.

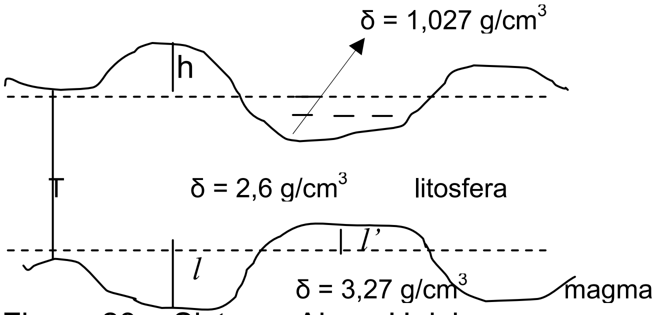


Figura 23 – Sistema Airy – Heiskanen

5.4 Efeito indireto

Resultante da eliminação das massas topográficas e compensadas, tem-se a superfície eqüipotencial da Terra fictícia, esta superfície é denominada, conforme já vimos, de *co-geóide.* Interessa-nos determinar a separação entre o co-geóide e o geóide, a correção que nos conduz a este objetivo denomina-se ***efeito indireto*** ***(C_{EI})***, ou efeito de Bowie, e é obtido multiplicando-se a distância ***n*** entre as duas superfícies eqüipotenciais pelo gradiente da gravidade.

$$C_{EI} = \frac{\partial g}{\partial n} n = \frac{2g}{a} n \qquad 5.10$$

Na equação de Bruns, tem-se:

$$n = \frac{\Delta V}{g} \qquad 5.11$$

Onde, ΔV é a variação de potencial devido à transferência de massas.
Assim, tem-se:

$$C_{EI} = \frac{\Delta V}{a} \qquad 5.12$$

Que nos proporcionará a anomalia:

$$\Delta g = g + C_F + C_B + C_I + C_{EI} - \gamma \qquad 5.13$$

6 ALTITUDE

Define-se altitude de um ponto, pertencente à superfície física da Terra como sendo a distância, contada ao longo da vertical, da superfície eqüipotencial do campo da gravidade, denominada ***geóide***, que tem por convenção altitude zero ao ponto.

A diferença de altitude entre dois pontos da superfície terrestre pode ser determinada pelo ***nivelamento geométrico***, onde são realizadas as leituras das miras em pontos distintos, cuja diferença de leitura proporciona a diferença de altitude entre os dois pontos considerados; a repetição desta operação sucessivamente ao longo de um circuito de ***n*** estações proporciona a diferença de altitude entre os pontos extremos. Conforme Equação 6.1:

$$H_n - H_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta H_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6.1$$

A Figura 17 nos proporciona a visualização do ***não paralelismo*** das superfícies equipotenciais do campo da gravidade. Evidentemente a Figura 6.1 foi construída de maneira que pudesse evidenciar o não paralelismo das superfícies. Imaginando que se pretende determinar, por nivelamento geométrico, a altitude do ponto ***P***, em uma primeira situação o nivelamento foi desenvolvido a partir do lado direito da figura abaixo, na segunda situação o nivelamento deu-se a partir do lado esquerdo da citada figura. Percebe-se que os intervalos entre as superfícies eqüipotenciais, do lado direito do hipotético morro, são maiores que os intervalos das respectivas superfícies do lado esquerdo. Diante do exposto, é evidente que o mesmo ponto ***P*** possuirá altitudes que dependerá do caminho percorrido na execução do nivelamento, o que não é admissível em levantamentos geodésicos.

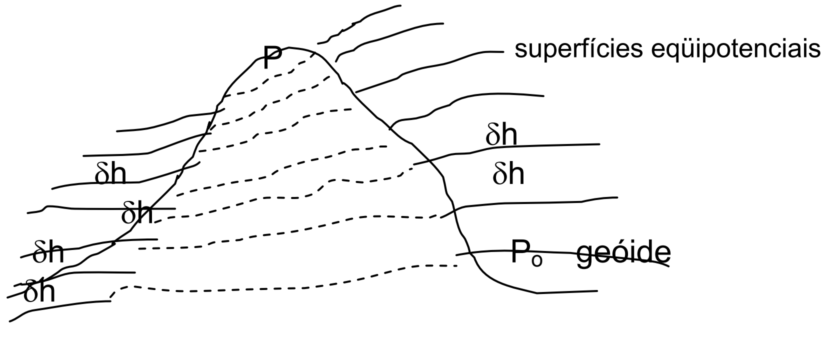


Figura 24 – Não paralelismo das superfícies eqüipotenciais

6.1 Números geopotenciais

Número geopotencial de um ponto ***(C_P)*** pertencente à superfície física da Terra é definido como a diferença entre o geopotencial W_0 do geóide e o geopotencial W_P no ponto considerado, ou seja é a diferença do potencial entre o geope do fundamental (geóide) e o geópe do ponto. Ainda, número geopotencial é igual ao trabalho da gravidade para transportar a partícula de massa unitária do geóide ao ponto.

$$C_P = W_0 - W_P$$

$$C_P = \int_0^P g\,dz \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6.2$$

O nivelamento geométrico tem sua origem nos marégrafos, que por sua vez tem origem no nível médio dos mares ***geóide***, assim sendo, o nivelamento geométrico possui origem no "*geóide*" que possui geompotencial ***W_0***. O nivelamento geométrico desenvolvido acompanhado de determinações gravimétrica nos possibilita a determinação do número geopotencial, onde, a integral acima é substituída pou um somatório, conforme Equação 6.3:

$$C_P = \sum_0^P g_i\ \Delta Z_i \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6.3$$

Onde, ΔZ_i representa os desníveis observados, e g_i os valores médios da gravidade determinado em cada seção nivelada, ou seja é a média da gravidade observada nos extremos da seção nivelada.

O ***geopotencial*** é uma grandeza que não pode ser diretamente medida, diante do exposto, o geopotencial W_0 é desconhecido. Assim, é atribuído ao geóide o mesmo valor do ***esferopotencial*** da superfície do modelo (elipsóide de referência). Tem-se:

a) para o elipsóide de ***Hayford*** (1924)

$$\boldsymbol{W_0 = U_0 = 6\ 263\ 977}\ \textit{kilogal x metro}$$

b) para o elipsóide de ***referêncial 67***

$$W_0 = U_0 = 6\ 263\ 703 \textit{ kilogal x metro}$$

6.2 Altitudes científicas (H_C)

As altitudes científicas possuem as seguintes propriedades:

1 – é uma função unívoca, ou seja, independe do caminho percorrido no nivelamento;

2 – tem dimensão de um comprimento;

3 – difere pouco dos desníveis observados; e

4 – pode, facilmente, ser convertido em número geopotencial.

Os números geopotenciais nos possibilitam a determinação de altitudes científicas, onde, dependendo da maneira de como foi determinado a gravidade γ (tipo de gravidade utilizada) na Equação 6.4 nos proporcionará um sistema de altitude, a saber:

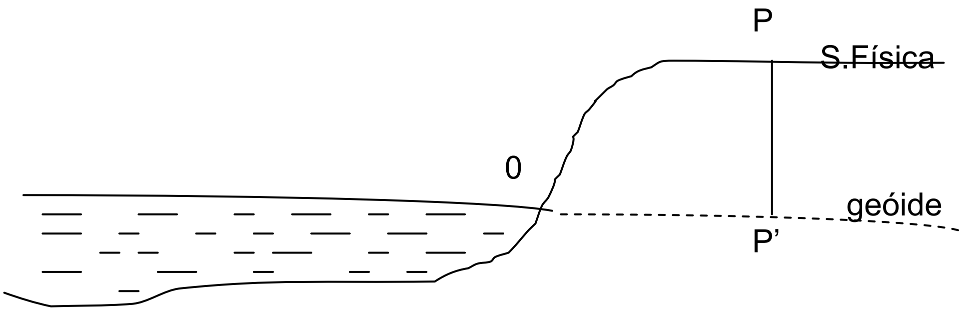


Figura 25 – Altitude científica

$$H_C = \frac{\sum_{0}^{P} g\,\Delta z}{\gamma} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6.4$$

6.2.1 Altitude ortométrica H

No sistema de altitude ortométrica γ é definido como sendo o valor médio da gravidade verdadeira ao longo de P P', assim, tem-se:

$$H = \frac{\sum g \, \Delta z}{g_m} \qquad 6.5$$

Conforme definido, γ deve ser determinado ao longo de P P', ou seja é a média da gravidade observada na superfície física da Terra e na superfície do geóide. Diante do exposto, verifica-se a impossibilidade de se obter a altitude ortométrica de um ponto. Pois é impossível a determinação da gravidade no interior da crosta terrestre. Deduz-se então que a altitude ortométrica possui apenas um cunho teórico.

O nivelamento de precisão executado em nosso país tem sido desenvolvido desacompanhado de determinações gravimétricas. Para tornar unívoca, a rede altimétrica pertencente a ***Rede Fundamental de Nivelamento do Brasil*** utiliza-se da ***correção ortométrica*** (que é a correção do não paralelismo das superfícies eqüipotenciais).

6.2.2 Altitude de Helmert

O sistema de altitude de Helmert, utiliza-se o γ, na expressão 6.4:

$$\gamma = g + 0{,}042\,4 \times 10^{-6}\,H \quad \text{Kgal} \qquad 6.6$$

6.2.3 Altitude de Vignal

Neste sistema de altitude, na equação 6.4 o γ é utilizado a média da gravidade teórica (gravidade normal) do ponto e a gravidade teórica no geóide. Assim, tem-se:

- γ_o é a gravidade normal do ponto; e

- $\gamma_p = \gamma_o - C_F$

- $\gamma_p = \gamma_o – 0{,}154 \times 10^{-6}$ H

C_F – é a correção free-air = 0,3086 H x 10^{-6} Kgal

Observa-se que este sistema de altitude é adotado na França.

6.2.4 Altitude normal

Na definição de altitude normal, utiliza-se o valor de γ da expressão 6.4, sendo igual ao valor médio da *gravidade teórica* do ponto, calculado na superfície do elipsóide Q_0 e a gravidade teórica calculada na superfície que possui esferopotencial igual ao geopotencial do ponto Q, conforme figura 26.

Considerando a figura 26, na qual o ponto Q, situado sobre a normal ao elipsóide relativo ao ponto P, possui *esferopotencial* igual ao *geopotencial*.

A superfície do campo da gravidade que possui ***esferopotencial*** igual ***geopotencial*** do ***ponto*** é denominada de ***TELURÓIDE***. A distancia do *teluróide* ao ponto, contada ao longo da normal do ponto, é definida como ***anomalia de altitude*** ζ. A superfície que esta afastada da superfície do elipsóide de referência de uma quantidade igual a *anomalia de altitude* é designada de ***guase-geóide de Molodensky.***

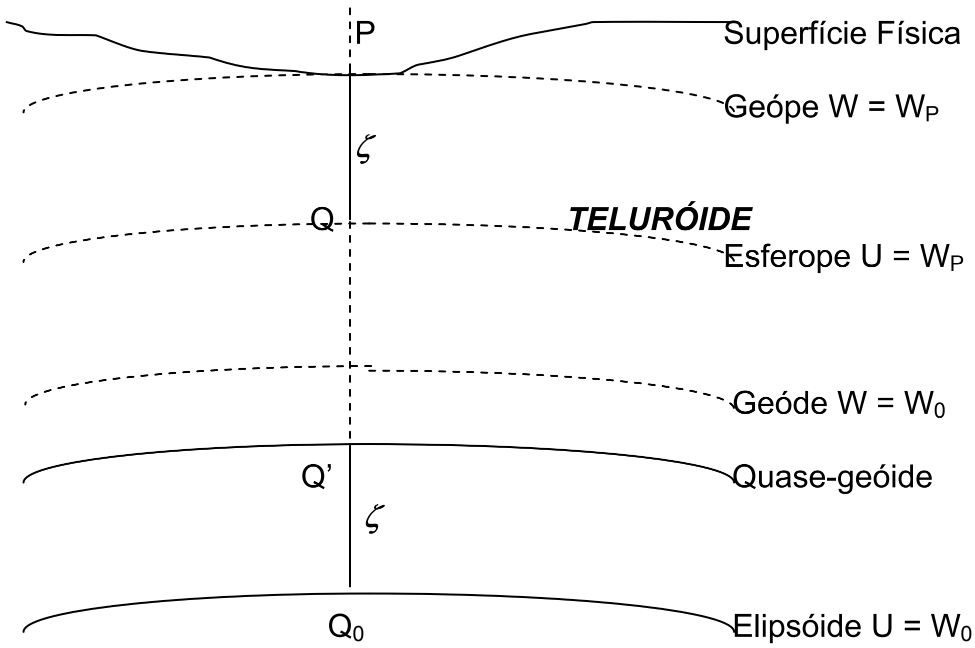


Figura 26 – Altitude normal

Na Figura 26, tem-se:

Altitude normal de P = PQ' que é igual à QQ_0.

A altitude normal é obtida quando utilizar-se na expressão 6.4 γ por:

$$\gamma_n = \gamma\,[1 - (1 + \alpha + m - 2\alpha\ \mathrm{sen}^2\varphi) H^M / a + H^{M^2} / a^2] \qquad . \qquad . \qquad . \qquad 6.7$$

Onde, m = 0,003 449 801

6.2.5 Altitude dinâmica

A altitude dinâmica é obtida utilizando, na equação 6.4, o valor constante de γ, usualmente adota-se o valor da gravidade teórica (normal) média da região, por exemplo, utilizar o valor médio da região de γ .

$$\gamma_{67} = 978{,}0318\ (1 + 0{,}005\ 302\ 4\ \mathrm{sen}^2\varphi\ -\ 0{,}000\ 005\ 9\ \mathrm{sen}^2\ 2\varphi)$$

6.3 Influência da atação luni-solar no valor da gravidade

Conforme já estudado em capítulos anteriores, a gravidade é resultante da força de atração exercida pela massa da Terra e da força centrífuga decorrente da rotação do nosso planeta. A força de atração do Sol e da Lua influencia nas determinações da gravidade na superfície da Terra, produzindo alteração da intensidade e da direção da gravidade. Devido à contínua mudança da posição do Sol e da Lua, implica afirmar que a intensidade e a direção da gravidade está continuamente alterando a força de atração sobre a Terra. Devido a esta contínua alteração da posição dos planetas mencionados, nas determinações da gravidade deve-se determinar a hora em que foi executada a determinação, isto permitirá a eliminação da influência da atração luni-solar.

Define-se ***força de maré*** como sento a diferença da atração exercida pelo Sol e Lua sobre a unidade de massa colocada nesse ponto (superfície da Terra) e no centro da Terra.

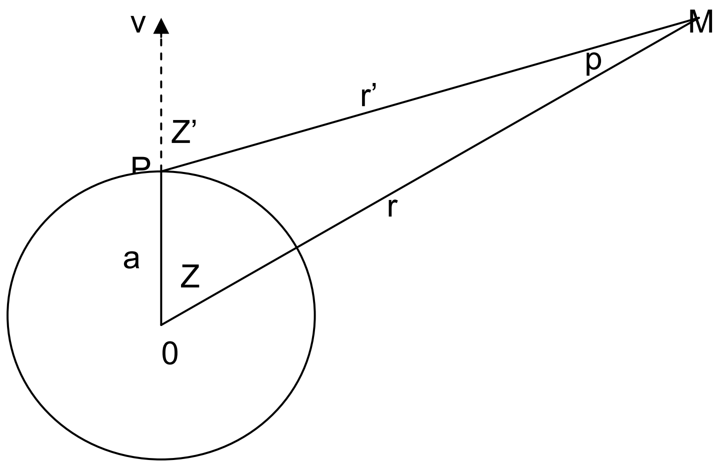


Figura 27 – Força de Maré (tidal force)

Tem-se que a componente horizontal da força de maré é dada por:

$$F_h = \frac{3 \ GM \, p^3 \ \text{sen} \ 2Z}{2 \, a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6.8$$

e a componente vertical da força de maré

$$F_v = \frac{GM \, p^3}{a^2} \left[3 \cos^2 Z - 1 \right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6.9$$

Onde, as Expressões 6.8 e 6.9 são utilizadas tanto para o Sol como para a Lua (distâncias zenitais e/ou paralaxe horizontal do astro anômalo – p); e **a** é o raio da esfera de mesmo volume que o elipsóide de referência.

7 MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE

A determinação do geóide tem o significado da determinação da posição que este ocupa em relação ao elipsóide. Assim, determinar o geóide consiste na obtenção da separação, em todos os pontos, das superfícies do elipsóide e do geóide. Convencionalmente, são atribuídos os sinais positivos às ondulações acima do elipsóide e negativos em caso contrário.

A determinação do geóide, nas últimas quatro décadas tem tido uma evolução lenta, mas atualmente constitui um tema muito promissor tanto no aspecto teórico como prático. Os satélites artificiais propiciaram uma grande variedade de dados e o desenvolvimento da informática, aliada aos novos algoritmos, possibilitou o processamento destes dados com extraordinária rapidez; estes desenvolvimentos estão proporcionando alterações nas técnicas de posicionamento e de representação do campo da gravidade da Terra.

Com o advento do GPS, o geóide deixa de ser importante apenas no posicionamento horizontal e faz-se importantíssimo no posicionamento vertical. Atualmente, uma operação relativamente simples com receptores GPS, permite a determinação das coordenadas cartesianas de um ponto P(X,Y,Z) sobre a superfície terrestre. A partir dos parâmetros elipsoidais do sistema de referência, pode-se calcular as correspondentes coordenadas geodésicas do ponto $P(\varphi,\lambda,h)$. O cálculo da altitude ortométrica (H) do ponto envolve o conhecimento da ondulação do geóide (N) no ponto considerado, pois as altitudes geométricas e as ortométricas estão relacionadas pela equação, que segue:

$$(H \cong h - N)$$

Assim, a determinação da altitude ortométrica através do GPS pressupõe o conhecimento da ondulação do geóide (N) com precisão compatível ao desejado na componente altitude.

Existem três métodos para a determinação de N, destaca-se que apesar de sua longa existência, mantém-se atuais. O primeiro método, aqui apresentado, adota-se a fórmula proposta por Stokes e o geóide obtido é denominado de *geóide gravimétrico*, visto que N é obtida a partir da anomalia da gravidade. Para o segundo método, utiliza-se do desvio da vertical, obtido pela comparação das coordenadas astronômicas e as geodésicas, o geóide assim determinado é denominado de *astro-geodésico*, utilizando-se fórmulas de Vening-Meinesz que através das anomalias da gravidade, determina-se as componentes dos desvios da vertical e a partir destas a ondulação do geóide é determinada em relação a outro ponto cuja ondulação do geóide seja conhecida. O terceiro método utiliza-se de dados obtidos das observações aos satélites artificiais, onde geodesicamente, pode-se classificar os satélites em dois grupos: satélites para aplicações geométrica; e satélites para aplicações dinâmicas.

Atualmente, as técnicas mais usadas para a determinação do geóide com alta precisão, visando o nivelamento com o GPS, consistem basicamente na representação das altitudes geoidais através de componentes distintas, denominadas ***global, a regional e local*** (SÁ, N.C., 1993). A **componente global** é determinada a partir dos coeficientes que representam o esferóide (elipsóide de revolução (TORGE, W. 1980)); a **componente regional** é determinada a partir de dados do campo de gravidade reduzidos ao esferóide; e a **componente local** introduz correções calculadas através de dados complementares, tais como modelos digitais da topografia e da densidade da crosta.

7.1 N a partir da anomalia da gravidade

No ano de 1849, Stokes desenvolveu a fórmula que leva seu nome, esta de fundamental importância à Geodésia Física, pois proporciona a determinação da separação geóide - elipsóide em função da anomalia da gravidade, Stokes em seu trabalho postula: "*conhecendo-se a forma de uma superfície eqüipotencial, limitante de um sistema de massas atrativas, dotado de movimento de rotação e o valor da gravidade em um ponto da superfície, determinar o campo externo, independente de qualquer hipótese sobre a distribuição de massas no interior da superfície*" ou *"conhecendo-se o valor da gravidade em todos os pontos de uma superfície eqüipotencial, determinar a forma dessa superfície"*. Stokes tinha consciência do valor apenas teórico, visto que naquela época não era possível obter o valor da gravidade em todo o planeta, principalmente nas regiões oceânicas.

No início deste século, com o desenvolvimento de gravímetros com dispositivos tri-pendular de Vening-Meinesz de fácil manejo, permitem as determinações gravimétricas em regiões oceânicas.

Uma das formas da fórmula para a determinação de N, apresentada por Stokes é:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta g_S \, S(\psi) \operatorname{sen} \psi \, d\psi \, dA \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .7.1$$

onde:

. N – ondulação do geóide;

. R – raio médio terrestre;

. G – valor médio da gravidade;

. Δg - anomalia média da gravidade no elemento de área ds; e

. $S(\psi)$ - função de Stokes, obtida em função da distância angular entre o ponto onde se calcula a ondulação e o elemento de área ds, que contribui na determinação de N.

$$S(\psi) = \cos ec \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \log_e \left[\operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \right) \right]. \qquad . \ 7.2$$

7.2 N a partir do desvio astro-geodésico

O desvio da vertical em um ponto é definido como sendo o ângulo compreendido entre a vertical e anormal neste ponto. Usualmente este ângulo é decomposto em duas componentes; a componente meridiana e a componente primeiro vertical.

Através das coordenadas astronômicas e as geodésicas, pode-se calcular as componentes do desvio da vertical através das fórmulas de Laplace.

$$\xi = \varphi_a - \varphi$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \qquad . \qquad . \qquad .. \quad . \quad . \quad . \qquad 7.3$$

$$\eta = (A_a - A) \cot g \varphi$$

onde;

. φ - latitude geodésica;

. λ - longitude geodésica;

. A – azimute geodésico;

. ξ - componente meridiana do desvio; e

. η - componente primeiro vertical do desvio;

os sub-índices *a* denotam grandezas astronômicas

Na figura 28, o desvio da vertical está representado segundo um plano de azimute qualquer,

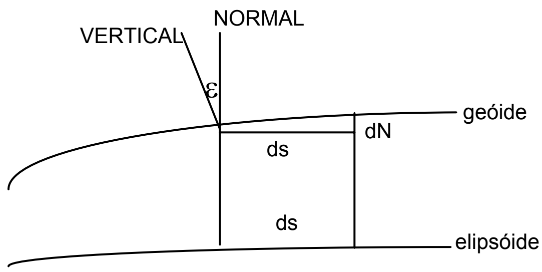


Figura 28 – Desvio da vertical num plano qualquer.

nota-se que a diferença da ondulação do geóide entre dois pontos, separados a uma distância infinitesimal ds, será de:

$$dN = -\varepsilon\, ds \qquad 7.4$$

o símbolo ε representa o desvio da vertical na direção. Para manter a coerência do sinal das componentes do desvio da vertical, positivo nos sentidos sul-norte e oeste-leste, adota-se o sinal negativo na equação 7.4.

Para pontos separados por uma distância maior, a diferença da ondulação geoidal de dois pontos **A** e **B**, será determinada pela função:

$$N_B = N_A - \int_A^B \varepsilon\, ds \qquad .7.5$$

onde,

$$\varepsilon = \xi \cos A + \eta \operatorname{sen} A \qquad 7.6$$

7.3 N a partir de modelos geopotencial

A representação do potencial gravitacional da Terra através de séries harmônicas esféricas tem sido um dos objetivos da comunidade geodésica a mais de 40 anos (Rapp, R.H. & Nerem, R.S. 1996). Dados gravimétricos obtidos de satélites e de superfície tem possibilitado uma maior e mais precisa representação do geopotencial. A combinação destes dados permitiram os cálculos dos coeficientes dos modelos do geopotencial até o grau 360.

O uso de modelos de alto grau podem ser usados para uma variedade de aplicações, dentre as quais, cita-se: cálculo da predição das órbitas de satélites; uso em estudos simulados que envolvem quantidades gravimétricas; e cálculos de ondulações geoidais. O uso mais freqüente dos modelos geopotencias de alto grau tem sido na determinação da ondulação do geóide ou da anomalia de altitude. Este uso é devido à facilidade proporcionada pelo GPS nas determinações de altitudes e conseqüente necessidade do conhecimento da altura geoidal.

A grande acuracidade proporcionada pelo GPS é relativa à altitude elipsóidica (geométrica), assim, determinações das ondulações relativas são uma importante quantidade, conforme equação 7.7:

$$H_2 - H_1 = h_2 - h_1 - (N_2 - N_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7.7$$

Onde:

H – altitude ortométrica;

h – altitude geométrica; e

N – ondulação geoidal.

Muitas das aplicações dos modelos geopotenciais, apontadas acima, são para aplicações em regiões continentais, salienta-se também que uma importante aplicação da ondulação do geóide é na área de Oceanografia, onde os dados de altitude da superfície do mar, obtidos pelos satélites altimétricos, podem ser usados nos estudos das circulações oceânicas. As extensas circulações oceânicas podem ser estudadas se forem conhecidas os longos comprimentos de ondas da ondulação do geóide. A estimativa da topografia dinâmica do oceano (separação entre a superfície do oceano e o geóide) tem sido determinada utilizando-se dos dados dos satélites Geosat e Topex/Poseidon.

O potencial gravitacional da Terra, V é representado por uma expansão harmônica esférica, onde os coeficientes do potencial podem ser determinados por várias técnicas. A determinação dos coeficientes do potencial podem ser por duas maneiras: o mais alto grau, na expansão foi estendido para melhorar os coeficientes de alto grau através do uso de dados adicionais de satélites e dados gravimétricos terrestres, conseqüêntemente proporcionando um modelo de maior resolução; a acuracidade dos coeficientes são continuamente “melhorados” com inclusão de dados adicionais que melhora a “cobertura” geográfica e a acuracidade.

Até meados da década passada, mais de 30 modelos do geopotencial haviam sido desenvolvidos, baseados em diferentes aproximações. Após o lançamento do primeiro satélite artificial, os dados orbitais vêm sendo armazenados e analizados, proporcionando melhora gradativa. Os modelos mais divulgados são os da série ***S**mithsonian **A**strophysical **O**bservatory **S**tandar **E**arth* - SAO-SE, o ***G**oddard **E**arth **M**odel – **N**atinal **A**eronautics and **S**pace **A**dministration* NASA **–** GEM, o ***O**hio **S**tate **U**niversity* – OSU, o ***G**roupe de **R**echerche Spatial – Institut Universität **M**üchen* – GRIM e o ***G**eo**P**otential Model* – GPM. Outros modelos foram elaborados com missões específicas, tais como LAGEOS, STARLETTE, ERS-1, etc. Alguns destes modelos foram determinados a partir de dados orbitais de satélites (GEM-T1 e GEM-T2), enquanto outros combinam estes elementos com observações gravimétricas e altimétricas (OSU-86, OSU-89, OSU91A, GPM1 e GPM2). Em função da posição geográfica, a estimativa da acurácia global dos parâmetros derivados de tais modelos podem variar de modelo para modelo.

7.3.1 Modelo OSU91A

O modelo OSU91A foi desenvolvido pela ***O**hio **S**tate **U**niversity* no ano de 1991. Os coeficientes do grau de 2 à 50 foram gerado a partir do modelo GEM-T2 e de anomalias de gravidade médias em blocos de 30' x 30' e de dados altimétricos da superfície dos oceanos gerados pelo Geosat. As anomalias da gravidade terrestres foram combinadas com anomalias estimadas. Os coeficientes de grau 51 à 360 foram obtidos a partir do modelo GEM-T2 combinados com anomalias da gravidade espaçadas de 30'. As anomalias ajustadas resultantes da combinação acima, foram então utilizadas na determinação do conjunto completo de coeficientes até grau e ordem 360, bem como do respectivo desvio padrão para cada coeficiente, obtidos do ajustamento por mínimos quadrados. O desvio padrão estimado (1 sigma) para valores das ondulações geoidais no OSU91A são da ordem de 26 cm nas áreas oceânicas; 38 cm em áreas terrestres com uma boa cobertura de dados da gravidade; 56 cm em áreas terrestres com fraca cobertura de dados da gravidade; e 200 cm em área terrestre onde não existem dados da gravidade.

7.3.2 Modelo EGM2008

Nas últimas décadas (1990-2000), tem havido uma soma de esforços envolvendo a colaboração, análises e recursos do ***N**ational **I**magery and **M**apping **A**gency* – NIMA, da NASA ***G**oddard **S**pace **F**light **C**enter* – GSFC e da ***O**hio **S**tate **U**niversity*. Como resultado desta junção de esforços, tem-se o novo modelo global do campo gravitacional da Terra denominado ***E**arth **G**ravitational **M**odelo 1996* – EGM96. A forma do modelo EGM96 é uma expansão do potencial gravitcional (V). Este modelo é completo até grau e ordem 360, contendo 130 676 coeficientes.

O desenvolvimento do EGM96 deu-se com uso dos dados da gravidade do NIMA e dados de satélites da NASA/GSFC. A NIMA proporcionou dados da anomalia da gravidade de todo o globo terrestre de 30' e 1^{o} , esta anomalia foram determinada a partir de pontos de anomalia da gravidade de 5' X 5' obtidos do arquivo de altura do geóide do GEOSAT *Geodetic Mission.* O processamento do Geosat foi executado utilizando-se da técnica de colocação por mínimos quadráticos para estimar a anomalia da gravidade 30' x 30', com suas respectivas precisões.

A participação do GSFC envolveu muitas fases, incluindo a determinação de órbita de satélites a partir de dados de rastreio de, aproximadamente, 30 satélites, incluindo os satélites do SLR, TDRSS e GPS. Nesta fase resultou no EGM96S (modelo com base apenas nos dados dos satélites do EGM96 para grau e ordem 70).

No desenvolvimento do modelo para o grau e ordem 70, foi incorporado os dados dos satélites altimétricos do TOPEX/POSEIDON, ERS-1 and GEOSAT juntamente com o EGM96S. A maior contribuição dos dados usados pelo GSFC incluiu novas observações do Lageos, Lageos-2, Ajisai, Saterlette, Stella, TOPEX, GPSMET, GEOS-1 and GEOSAT.

Finalmente, o GSFC desenvolveu o modelo de alto grau EGM96 utilizando-se da combinação de dados até grau e ordem 70 (dados de satélites EGM96S, dados de altimetria e dados terrestres), para a determinação dos coeficientes do grau e ordem de 71 à 359 utilizou-se da solução de bloco diagonal, e para o grau e ordem 360 utilizou-se da solução por quadratura.

Dando sequência ao EGM96, foi elaborado o modelo gravimétrico EGM2008, onde o mesmo é composto coeficientes que o representam a ondulação geoidal por grau 2190 e ordem 2159.

7.4 N a partir do GPS/nivelamento

O desenvolvimento do nivelamento geométrico, usualmente realizado ao longo de rodovias (lugares de fácil acesso) nos proporcionam a altitude ortométrica (assunto contido no capítulo VI). Os pontos da superfície terrestre com altitude conhecidas são denominados de **R**eferencia de **N**ível – RN.

No processamento, a determinação da coordenadas geodésicas utilizando-se do sistema GPS nos proporcionam coordenadas retangulares (X, Y, Z) referenciadas ao sistema ao sistema WGS84 (isto quando utilizado as efemérides transmitidas). Quando utiliza-se as coordenadas precisas, deve-se ter em mente que as efemérides podem estar em outro sistema de referência, por exemplo no ITRF. Estas coordenadas retangulares podem ser transformadas para outros sistemas de referências, e a partir destas, calcular as coordenadas geodésicas elipsoidais (latitude, longitude e altitude geométrica).

A realização do rastreamento dos satélites do sistema GPS sobre as RN, nos propicia a determinação da ondulação do geóide. Assim, em uma linha formada por duas RN com altitude geométrica conhecida, pode-se interpolar a ondulação do geóide em pontos desta linha, ou próximo à mesma.

Featherstone, W. E., apresenta o modelo:

$$H_X = H_A + \Delta h_{AX} - \frac{l_{AX}}{l_{AB}} \Delta N_{AB} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7.8$$

Onde,

H_X – representa a altitude ortométrica do ponto a ser interpolado;

H_A – altitude ortométrica da RN, situada em A;

Δh_{AX} – diferença de altitudes geométricas do ponto a ser interpolado e RN, situada em A;

l_{AX} – distância entre o ponto a ser interpolado e a RN, em A;

l_{AB} – distância entre as RN, situadas em A e em B; e

ΔN_{AB} – diferença de ondulações geoidais nas RN em A e em B.

No caso em que se deseja a interpolação de vários valores da ondulação do geóide, em uma área, pode-se determinar um plano (equação 7.9) ou uma poli-superfície (equações de 7.10 à 7.12, assim, conhecendo-se pelo menos três RRNN com altitudes geométricas determinadas, sendo não co-lineares, pode-se determinar a ondulação geoidal destes pontos, e a partir destas determinar um plano, ou poli-superfície), que representa o geóide nas RN. Estendendo-se o conceito de interpolação, descrito acima, para regiões que possuam números maior de pontos com ondulação do geóide conhecidos pelo nivelamento associado ao GPS, pode-se utilizar modelos matemáticos que representam o geóide na região em apreço. Há autores que caracterizam o geóide obtido por este procedimento de ***geóide geométrico***, ainda, por se tratar da determinação do geóide em uma específica região, há autores que o designam de ***geóide local***. FIEDLER, J. apresenta modelos matemáticos (modelos de interpolação) que representam o geóide na região em apreço, conforme segue:

$$z_i = aE_i + bN_i + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7.9$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cEN_i + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7.10$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cEi^2 + dN_i^2 + e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7.11$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cN_iE_i + dE_i^2 + eN_i^2 + f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7.12$$

Onde:

z_i – representa a ondulação do geóide na RN;

E_i,N_i – coordenadas UTM das RN_i; e

a, b, c, d, e , f – são os parâmetros a serem determinados no ajustamento.

Ainda, as equações acima, podem sofre algumas adaptações, tais como substituir as coordenadas “E”, “N”, pelas coordenadas geodésicas X, Y, Z, . . .

7.5 Determinação de N a partir do GPS/nivelamento associado aos modelos geopotenciais

Os modelos do geopotencial tem a capacidade de representar, com fidelidade, os longos comprimentos de ondas do campo da gravidade terrestre . Em levantamentos de áreas, relativamente pequenas, é o caso da presente pesquisa, há a necessidade da representação dos curtos comprimentos de onda. A determinação da altitude com GPS esses pontos com referência de nível conhecidas, permite a determinação da ondulação do geóide com fidelidade.

A determinação da ondulação do geóide a partir do rastreamento GPS em pontos pertencentes à rede fundamental de nivelamento do Brasil RN, nos possibilita calcular a “real” ondulação do geóide, os modelos do geopotencial nos fornece a ondulação do geóide do modelo. A diferença entre as ondulações geoidais do modelo com as ondulações determinadas com GPS/nivelamento, nos permite o cálculo da “separação” entre o modelo e o efetivo geóide; levado este conceito de diferenças de ondulações geoidais (modelo – GPS/nivelamento) às várias RRNN existentes em uma região, pode-se, com auxílio de uma das equações 3.97 à 3.100

e do método dos mínimos quadrados (m.m.q.), determinar um plano (equação 3.97) ou uma poli-superfície (uma das equações 3.98, 3.99 ou 3.100) que representará um “modelo matemático” da separação existente entre o geóide, naquela região, e o modelo geopotencial.

Assim, o procedimento para a determinação da ondulação do geóide pelos modelos do geopotencial associado ao GPS/nivelamento, deve-se primeiramente determinar a ondulação do geóide pelo modelo do geopotencial, em um ponto qualquer de interesse pertencente à região, aplica-se o modelo matemático (determinado pelo m.m.q.) ao ponto de interesse; determinando assim a separação entre os modelos matemático e geopotencial, soma-se esta quantidade ao valor determinado pelo modelo geopotencial, obtendo assim a ondulação do geóide a partir do GPS/nivelamento associado ao modelo do geopotencial.

Esquematicamente, a Figura 22 nos mostra a situação da determinação da ondulação do geóide por GPS/nivelamento associado aos modelos dos geopotencial.

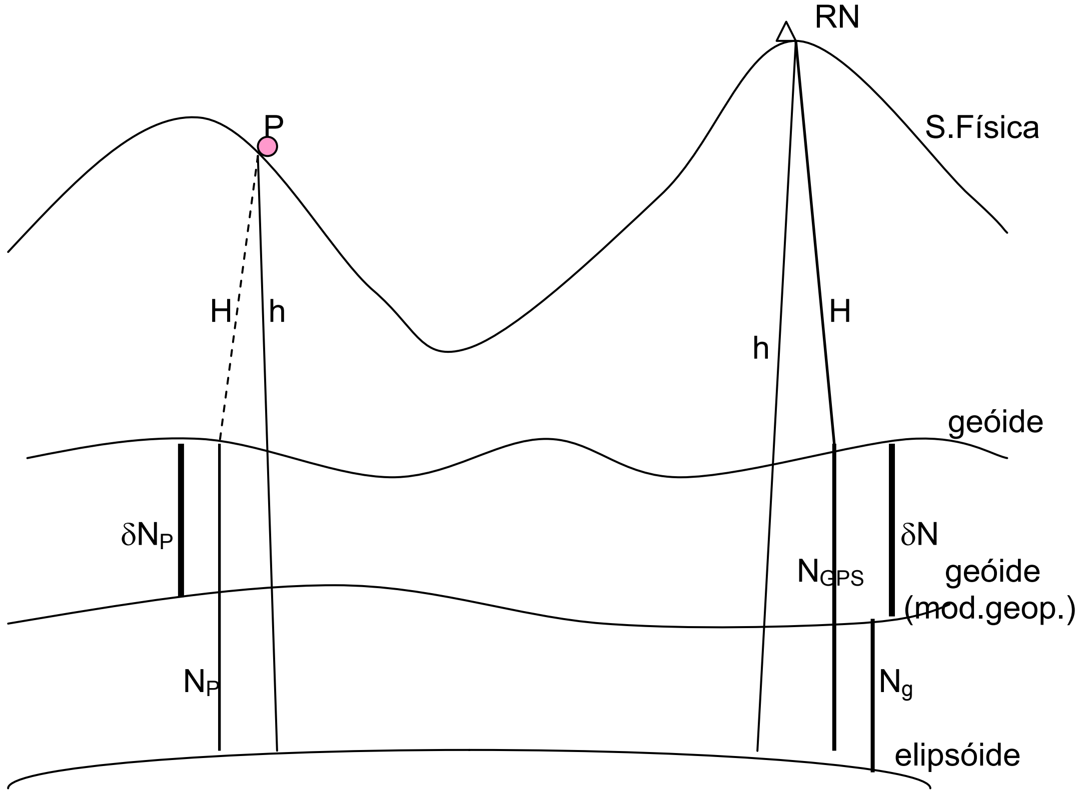


Figura 29 - Determinação da ondulação do geóide pelo modelo do geopotencial associado ao GPS/nivelamento.

Onde:

. H – Altitude ortométrica;

. h – Altitude geométrica;

. N_g – Ondulação do geóide obtida pelo modelo do geopotencial;

. N_{GPS} – Ondulação do geóide obtida pelo GPS/nivelamento; e

. δN – Separação entre o modelo geopotencial e o geóide.

Com auxílio da Figura 29 tem-se:

$$\delta N = N_{GPS} - N_g$$

ou,

$$N_{GPS} = N_g + \delta N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7.10$$

Ainda, utilizando a Figura 29 e imaginando uma situação onde determinar a altitude ortométrica, utilizando desta técnica – associação do GPS/nivelamento com o modelo geopotencial – onde, P representa o ponto no qual intenciona-se a determinação do N_P. Em uma situação ideal, tem-se:

$$N_P = N_g + \delta N_P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7.11$$

A determinação do modelo matemático que proporciona δN_P dá-se de maneira análoga à determinação do geóide geométrico, onde será modelado a diferença de ondulação (δN_P), obtido pelo modelo geopotencial e GPS/nivelamento nas RRNN. Lembra-se que nas equações, acima mencionadas, z_i devem ser substituídos por δN_i. Selecionada qual das equações será utilizada para representar a separação, com auxílio do m.m.q., determina-se os parâmetros da equação selecionada. Esta equação deverá representar a separação entre o modelo geopotencial e o geóide da região em apreço. Utiliza-se o modelo do geopotencial, ao ponto no qual pretende-se N_P, e com auxílio dos parâmetros determinados no ajustamento, calcula-se o δN_P, a expressão 3.102 nos proporcionará a ondulação do geóide no ponto.

8 BIBLIOGRAFIA

ARANA, J. M. (2000) **O Uso do GPS na Elaboração de Carta Geoidal**. Tese de Doutorado. Departamento de Geomática. Setor de Ciências da Terra. Universidade Federal do Paraná UFPR. Curitiba.

AYHAN,M.E. Geoid determination in Turkey (TG-91). **Bulletin Géodésique**. Springer-Verlag. Berlin. v 67. n 1. 1993.

BIRARD, G., SANTARSIERO, D., TUFILLARO, D., SURACE, L. Setting-up local "mapping geoids" with the aid of GPS/LEV Traverses Application to the geoids of Sardinia and Calabria. **Journal of Geodesy**. Springer-Verlag. Berlin. v 70. n 1-2. 1995.

BLITZKOW, D. **O Problema de valor de contorno da Geodésia: resultados práticos para a América do Sul**. Tese de Livre Docência. Departamento de Engenharia de Transporte, Escola Politécnica, USP. São Paulo. 1996.

BONFORD, G. **Geodesy**, 2ed., London, Oxford University Press, 1962.

FIELDER, J. Orthometric heigts from Global Positioning System**. Journal of Surveying Engineering**. New York. v 118. n 3. 1992.

FORSBERG, R. Terrain effects in geoid computations. **International School for the Determination and use of the Geoid**. Milan. n 1, 1994.

GEMAEL, C. **Marés Terrestre**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Departamento de Geociências. Setor de Tecnologia. Universidade Federal do Paraná – ufpr. cURITIBA. 1986

GEMAEL, C. **Geodésia Celeste: Introdução**. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná UFPR. Curitiba. 1991.

_______. **Determinação da gravidade em Geodésia**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Departamento de Geociências. Setor de Tecnologia. Universidade Federal do Paraná - UFPR. Curitiba. 1985.

_______. Introdução à Geodésia Física. Editora da Universidade Federal do Paraná . Curitiba. 1999.

HEISKANEN, W. A., MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Depointed Institute of Physical Geodesy, Techinical University, Gras, Australia, 1979.

KRUEGER, C. P., ARANA, J. M., CORDINI, J., FERREIRA, L. D. D., CAMARGO, P. O., FABRI, S. M. **Teoria do Potencial**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Departamento de Geociências. Setor de Tecnologia. Universidade Federal do Paraná UFPR. Curitiba. 1994.

KUANG, S., FIDIS, C., THOMAS, F. **Modeling of the local geoid with GPS and leveling: A case study.**

LI, Y. C. e SIDERIS, M. G. Minization and estimation of geoid undulation errors. **Bulletin Géodésique.** Springer – Verlag. v. 68. 1994.

MALYS, S., SÇATER, K; A.. S,OTH. R. W., KUNZ, L. E., KENYON, S. C. **International Symposium on Kinematic Systens Geodesy. Geomatics and Navigation**. Department of Geomatics Engineering. The University of Calgary, Canadá. 1997.

MARTINEC, A., VANICEK, P., MAINVILLE, A., VÉRONNEAU, M**.** The effect of lake water on geoidal height. **Manuscripta Geodaetica**. Springer-Verlag. Berlin. 1995.

PAVLIS, N.K. Development Applications of Geopotential Models. **Escola de Geóide**. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, Rio de Janeiro. 1997.

PESSOA, L. M. da C. **Análise comparativa de Modelos Geoidais na Bacia do Paraná: contribuição à Determinação do Geóide.** Seminário Apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas _ UFPR. Curitiba, 1994.

PRADO, W. S. **Determinação das ondulações do geóide através de harmônicos esféricos**. Dissertação de Mestrado em Ciências Espacial. INPE. 1981.

RAPP, T. H. and NEREM, R. S. **A joint GSFC/DMA project for improving the model of the Earth's gravitational field**. Ohio.

SÁ, N. C. de. **III Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica**. Um Geóide para aplicações do GPS em Geociências. Instituto Astronômico e Geofísico. Universidade de São Paulo – IAG/USP. São Paulo. 1993

SÁ, N. C. de, MOLINA. E. C. **XVII Congresso Brasileiro de Cartografia**. O geóide gravimétrico no Estado de São Paulo: resultados preliminares. Instituto Astronomico e Geofisico. Universidade de São Paulo - IAG/USP. São Paulo. 1995.

TORGE, W. **Geodesy**. Berlin. Walter de Gruyter. 1980.

VANICK, P. e KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy:The concepts**. NHPC - Amsterdan, New York, Oxford. University of New Brunswch. Canadá. 1982.