5.5 - Determinações astro-gravimétricas do Desvio da Vertical e do Geóide;

5.5.1 - Potencial perturbador e distúrbio da gravidade; Fórmula de Bruns;

Potencial perturbador (T)

$$T = W - U$$

$U \rightarrow$ esferopotencial $(U = Z + \Phi)$

$W \rightarrow$ geopotencial $(W = V + \Phi)$

- aplicando o operador gradiente $(\vec{\nabla})$:

$$\vec{\nabla} T = \vec{\nabla} W - \vec{\nabla} U$$

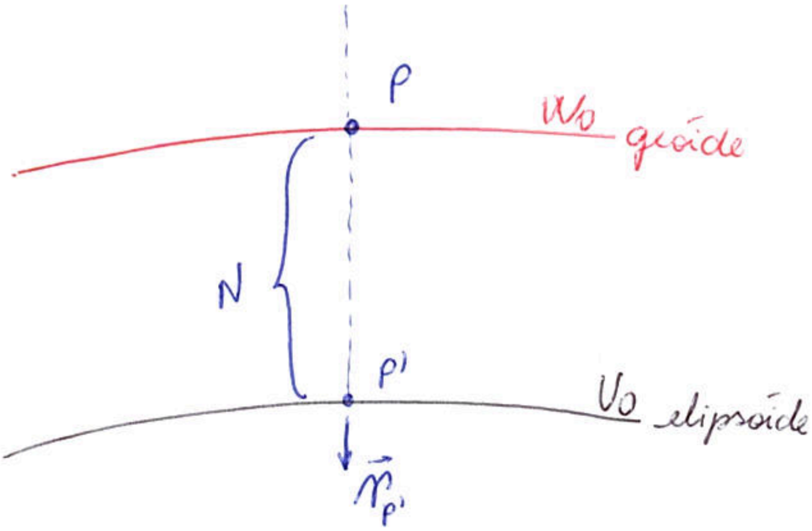
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\vec{\delta g} \qquad \vec{g} \qquad \vec{\gamma}$$

vetor distúrbio da gravidade

em módulo : $\boxed{\delta g = g - \gamma}$ $\Rightarrow$ distúrbio da gravidade é a diferença entre o valor da gravidade real (g) e a gravidade normal/teórica (γ) num mesmo ponto P.

O potencial perturbador ou potencial anômalo (T) é a diferença entre os potenciais produzidos num ponto P pela Terra real (W) e pela Terra Normal (U). Pode ser considerado como o potencial gerado pelas massas "anômalas", que transformam a Terra Normal na Terra real.



O esferopotencial em P (U_P) pode ser dado por:

$$U_0 - U_P = \vec{\gamma}_{P'} \cdot \vec{N} = \gamma_{P'} \cdot N \cdot \cos 0° = \gamma_{P'} N$$

$$U_P = U_0 - \gamma_{P'} N$$

E o potencial perturbador em P (T_P):

$$T_P = W_0 - U_P$$

como $U_P = U_0 - \gamma_{P'} N$

$$T_P = W_0 - U_0 + \gamma_{P'} N$$

Como, por definição, tem-se que o esferopotencial na superfície do elipsóide de referência (U_0) é igual ao geopotencial na superfície do geóide (W_0):

$$T_P = \cancel{W_0} - \cancel{W_0} + \gamma_{P'} N$$

$$\boxed{T_P = \gamma_{P'} N}$$ Fórmula de Bruns

$$T_{geóide} = \gamma_{elipsóide} \cdot N \Rightarrow \boxed{N = \frac{T_{geóide}}{\gamma_{elipsóide}}}$$ Fórmula de Bruns

Sabe-se que o distúrbio da gravidade num ponto p é dado por:

$$\delta g_P = g_P - \gamma_P$$

mas $\gamma_P = \gamma_{P'} - \underbrace{0{,}3086}_{\text{gradiente da gravidade}} \cdot N$

e da fórmula de Bruns : $N = \dfrac{T_P}{\gamma_{P'}}$

Logo o distúrbio pode ser escrito como:

$$\delta g_P = \underbrace{g_P - \gamma_{P'}}_{\substack{\text{é a anomalia da}\\ \text{da gravidade } (\Delta g)}} + 0{,}3086 \cdot \frac{T_P}{\gamma_{P'}}$$

$$\Delta g = g_{\text{geóide}} - \gamma_{\text{elipsóide}}$$

$$\boxed{\delta g_P = \Delta g + 0{,}3086 \cdot N}$$

pode vir de um MGG

gravimetria + GPS, por exemplo

difícil obtenção

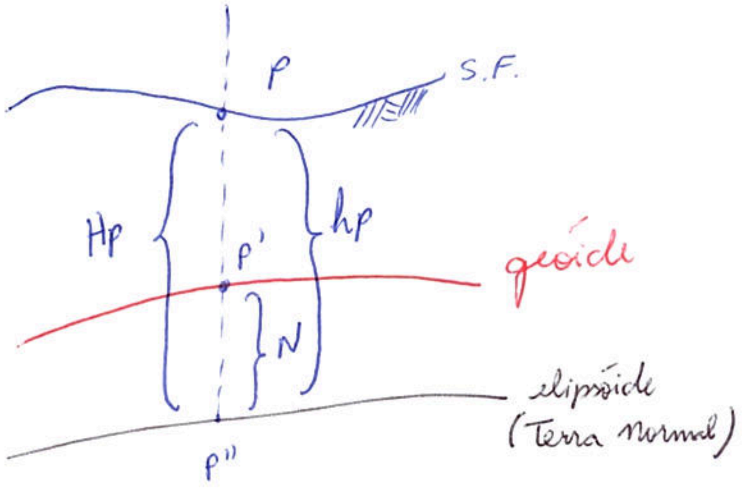
fornece a relação entre distúrbio e anomalia da gravidade que reescrita da seguinte forma:

$$\boxed{-\frac{\partial T}{\partial H} = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial H} \cdot N}$$

é conhecida como equação fundamental da Geodésia Física

5.5.2 - Problema do Valor de Contorno da Geodésia:

PVCG → determinar o campo da gravidade externo da Terra e suas implicações na forma e dimensões da Terra a partir do conhecimento do potencial e/ou sua derivada normal na superfície limite (geralmente desconhecida)



Anomalia da gravidade $\Delta g = g_{P'} - \gamma_{P''}$

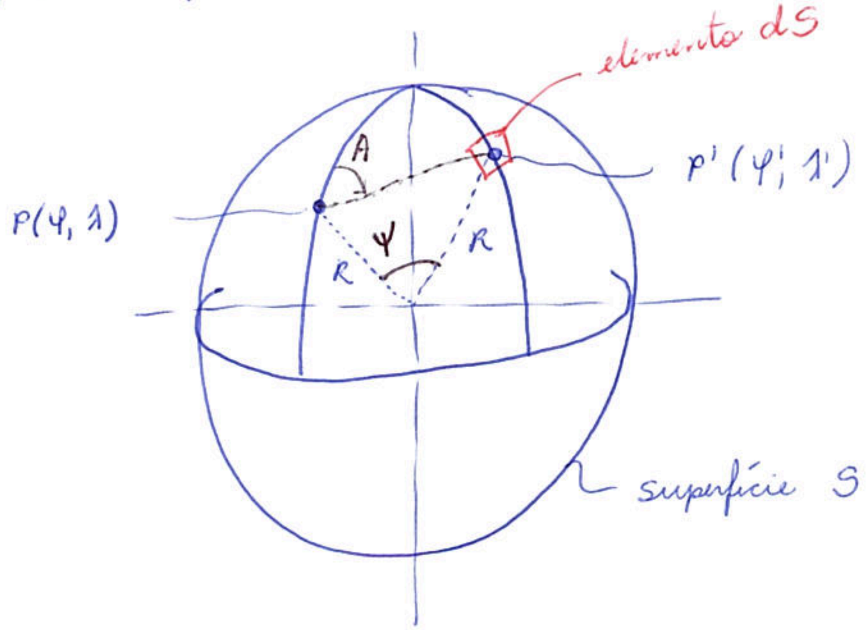
Distúrbio da gravidade $\delta g = g_P - \gamma_P$

São quantidades que relacionam a Terra real com o modelo, mostram as discrepâncias entre o real e o modelo perfeito.

5.5.3 - Fórmula de Stokes; Co-Geóide; Efeito Indireto

A fórmula de Stokes propicia a separação geóide-elipsóide (N: altura geoidal) como função das anomalias da gravidade (Δg).

Stokes propôs (1849) uma formulação para obter o potencial perturbador (T) em função da anomalia de gravidade sobre a superfície geoidal, usando uma aproximação esférica:



A: azimute da direção PP'

Onde:

- R é o raio da esfera, pode ser por exemplo $R = \sqrt[3]{a^2 b}$ (esfera de mesmo volume que o elipsóide de revolução)
- ψ é a distância angular entre o ponto P e o elemento de superfície dS, tal que $\cos\psi = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$
- P é o ponto de cálculo (para o qual se quer obter o valor de T) e dS é o elemento de superfície para o qual se conhece o valor médio da anomalia de gravidade (Δg).

$$\boxed{T = \frac{R}{4\pi}\int_S \Delta g \; S(\psi)\, dS}$$

$\Rightarrow$ implica em algumas dificuldades pois é um problema interno às massas

$S(\psi)$ é denominada função de Stokes

$$S(\psi) = \operatorname{cosec}\left(\frac{\psi}{2}\right) - 6\,\mathrm{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \,\ln\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) + \mathrm{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right]$$

Considerando o Teorema de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma}$$

A fórmula de Stokes para o potencial perturbador pode ser reescrita para a altura geoidal:

$$\boxed{N = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_S \Delta g \; S(\psi)\, dS}$$

N é função, portanto, das anomalias da gravidade em todo o globo (necessário a integração sobre toda a superfície S). Para evitar a integração sobre todo o globo, na prática se reduz o cálculo de N por decomposição espectral (que não será abordado aqui!)

Porém a resolução proposta por Stokes ou Pizetti-Stokes, supõe que não excistam massas externas ao geóide. Logo, esta solução, na realidade, conduz ao denominado co-geóide.

A diferença produzida pela existência de massas acima do geóide é denominada de efeito indireto e pode ser modelada.

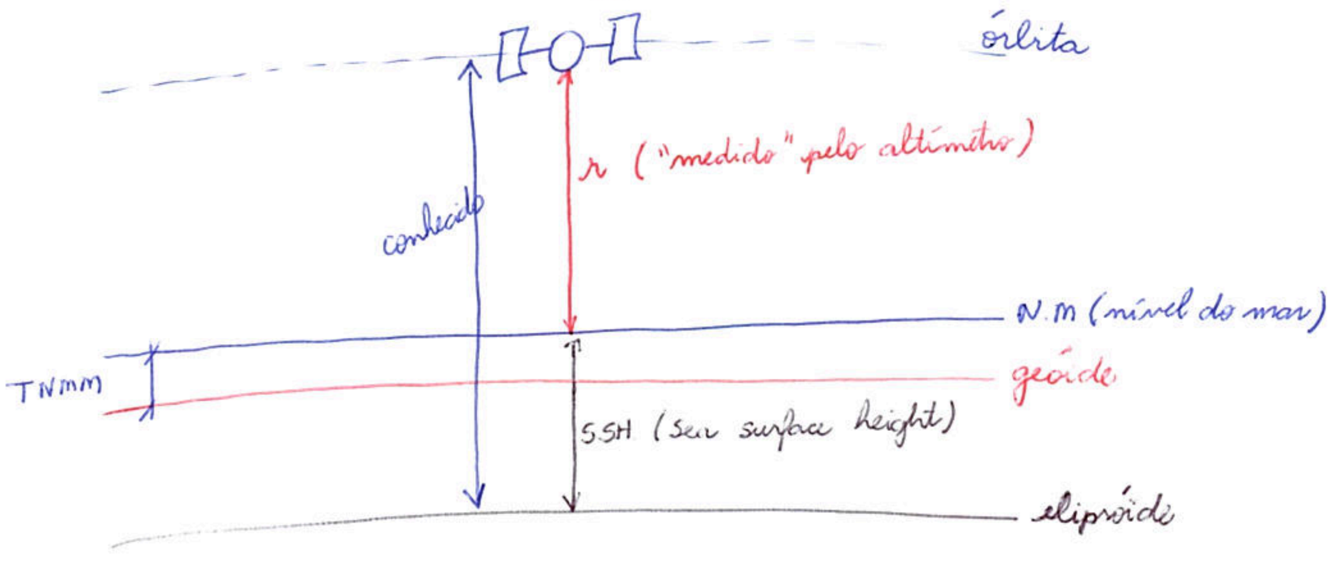
5.5.4 – Fórmulas de Veining-Meinesz;

Fornecem as componentes ξ, η do desvio da vertical:

$$\begin{matrix}\xi''\\ \eta''\end{matrix} = -\frac{\text{sen}\,1''}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g\,\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\,\text{sen}\,\psi\,\begin{matrix}\cos A\\ \text{sen}\,A\end{matrix}\,dA\,d\psi$$

Com A sendo o azimute da direção considerada. Na prática, torna-se um somatório e pode ser resolvida também por decomposição espectral.

Exemplo de aplicação: cálculo do geóide nos oceanos



→ Com passagens sucessivas do satélite, é possível determinar o NMM (nível médio do mar) e a inclinação deste relativamente ao elipsoide de referência (com isso é possível ter uma estimativa inicial de ξ e η considerando que a inclinação do NMM é muito próxima da inclinação do geóide).

→ a partir dos valores aproximados de ξ e η realiza-se uma primeira estimativa de Δg pelas fórmulas de Vening-Meinesz

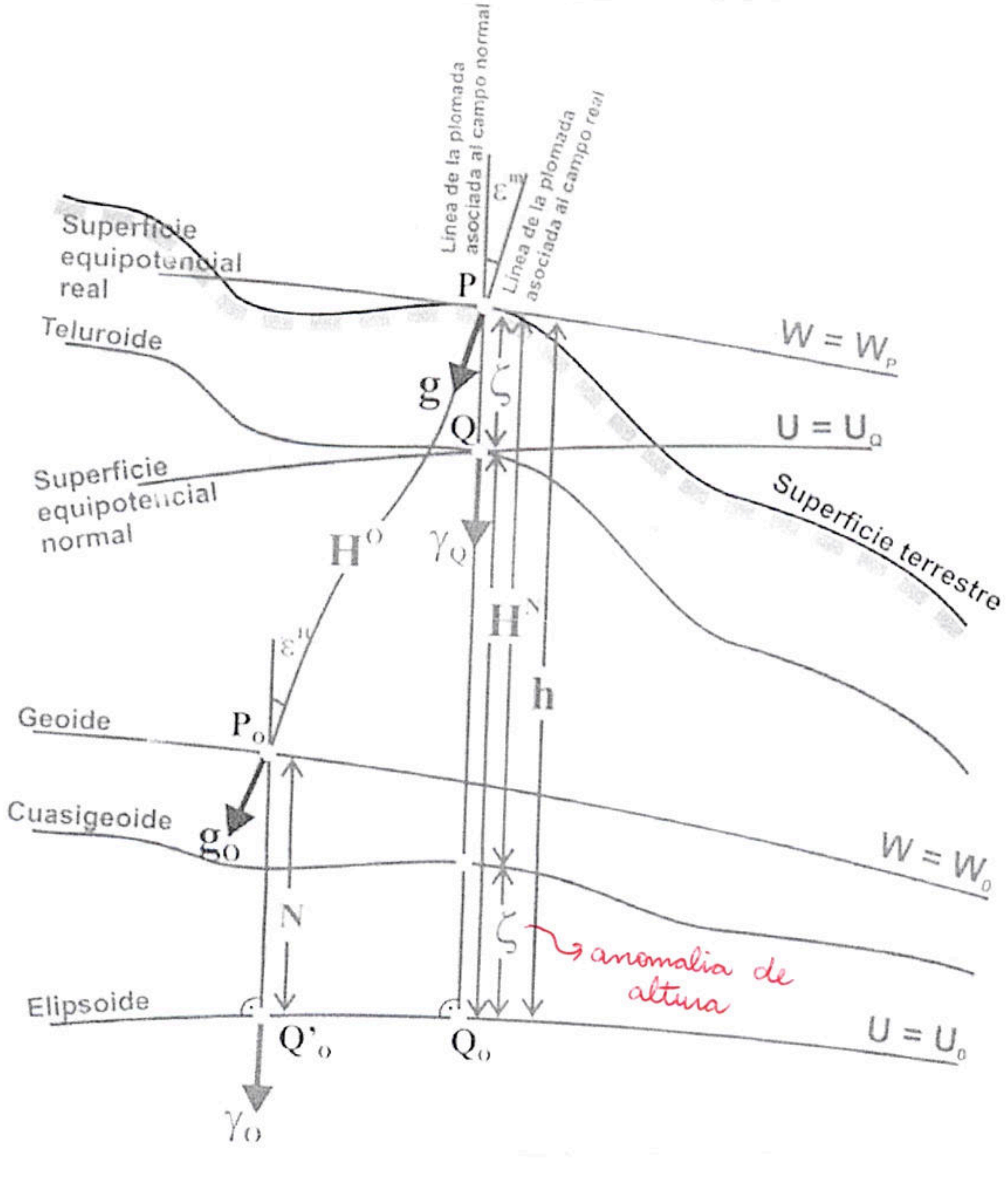
→ aplica esta estimativa de Δg na fórmula de Stokes e obtém-se N (uma primeira estimativa do geóide)

→ obtém-se novamente ξ e η $\Rightarrow N \Rightarrow \ldots$ de forma iterativa

Atualmente N nos oceanos é melhor que 2 cm.

5.5.5 - Teoria de Molodenskii, Teluróide e Quase-geóide.

Molodenskii propôs (1945) uma nova formulação para o problema fundamental da geodésia, tratando-se de um problema externo às massas que utiliza a superfície física como limite, dado o desconhecimento de um modelo de distribuição de densidade no interior da crosta da Terra ⇒ ou seja propõe trabalhar sem as reduções (necessárias na teoria de Stokes) e sobre uma superfície limite conhecida (S.F).



Postula que:
- deve existir um ponto Q cujo valor do potencial normal (U_Q) seja igual ao potencial real do ponto P (W_P) situado sobre a superfície terrestre

$$U_Q = W_P$$

Os pontos Q definem uma superfície chamada teluróide.

A anomalia de altura (ζ) é a distância ao longo da normal entre a superfície terrestre e o teluróide.

Se ζ for representada a partir do elipsóide se obtêm o quase geóide.

OBS:

→ teluróide, quase geoide e cogeóide não são superfícies equipotenciais

→ geóide e quase geóide são idênticos em áreas marinhas

→ U_Q pode ser determinado de forma iterativa a partir de V_0 e assim modelar a anomalia de altura (ζ)

→ Molodenskii definiu também uma anomalia da gravidade sobre a S.F da Terra como:

solução iterativa

$$\Delta g^{molodenskii} = g_P - \gamma_Q$$

→ $$\zeta_P = \frac{T_P}{\gamma_Q}$$ → do teorema de Bruns, agora com o potencial perturbador (T) referindo-se a S.F. da Terra

→ $$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_S (\underbrace{u_0}_{\Delta g^{molodenskii}} + \underbrace{u_1}_{\text{correção do terreno}} + u_2)\, S(\psi)\, dS$$

→ $$N_P = \zeta + \frac{g_m - \gamma_m}{\gamma_m} H_P$$ } relaciona anomalia de altura (ζ) com altura geoidal (N)