Estudo do problema do caminho mais longo

Allan Cordeiro Rocha de Araújo
(1)Universidade Federal de Roraima
allanps32008@hotmail.com

Paulo Fábio dos Santos Ramos
(1)Universidade Federal de Roraima
paulofabyo@gmail.com

Resumo *Será feito um estudo do problema do caminho mais longo, assim como aplicação prática dele, analisando sua versão exata e uma versão aproximada com complexidade de tempo melhor. Também é feito uma comparação gráfica entre os dois, em relação ao tempo para certas entradas no algoritmo.*

Palavras-Chave: *Problema NP-Completo, Complexidade, NP-difícil, Grafo.*

Abstract *It will be done a study of the problem of the longest path, just like a practical application of it, analyzing its exact version and a linear time solution with better time complexity. Also a graphical comparison between the two, in relation to the time for certain entries in the algorithm is made.*

Keywords: *NP-Complete problem, Complexity, NP-hard, Graph.*

1 Introdução

O objetivo deste artigo é, a partir da versão exata do problema do caminho mais longo, implementar uma versão sua aproximada usando a técnica de ordenação topológica em grafos, para otimização da resolução do problema em questão, e mostrar suas respectivas complexidades com intuito de provar a otimização de tal problema.

2 Problemas NP-Completo

São problemas de decisão, ou seja, são problemas que possuem resposta sim-não para eles. Um problema B é NP-completo se todos os problemas NP se transformam polinomialmente em A, ou seja, se for possível resolver um problema NP-completo com um algoritmo determinístico em tempo polinomial, então todos os problemas da classe NP também podem ser resolvidos em tempo polinomial, porém isso não é possível.

3 Problemas NP-Difícil

Problemas NP-Difíceis são problemas computacionalmente difíceis de se resolver. Um problema H é NP-difícil se existe um problema B € NP-completo que pode ser reduzido para H em tempo polinomial, ou seja, H não é provado para ser NP.

4 Descrição formal e aplicações

Dado um grafo G=(V,E), onde V é o número de vértices e E o número de arestas, e um k € N. Questão: Qual o maior caminho simples em G começando de k?

Algumas aplicações no mundo real podem ser: análise de temporização tática (STA) e suas variantes, em automação de projetos eletrônicos e achar os caminhos críticos em um circuito digital.

5 Subproblema

O caminho mais longo é encontrar um caminho simples de valor máximo em um grafo, sem vértices repetidos. Ele é um problema NP-difícil, na verdade é uma redução do problema de decisão Hamiltoniano: onde em um grafo G=(V,E) o seu caminho hamiltoniano é um caminho n-1, onde n é o número de vértices V de G, saída sim para caso exista e não para caso não exista.

6 Versão exata do problema

Determinar o caminho mais longo em um determinado grafo consiste em verificar todos os caminhos que são possíveis a partir de um vértice inicial afim de obter o maior percurso entre eles.

Com isso, é proposto o seguinte algoritmo implementado em C++, que percorre uma matriz de adjacência verificando todos os caminhos possíveis, usando um vetor que guarda o caminho atual como um auxiliar para evitar que o mesmo vértice seja visitado duas vezes. Nessa implementação ele faz uso dos pesos das arestas para verificação de qual caminho mais longo foi encontrado e também guarda o número de vértices que fazem parte do mesmo.

```
      int longestPath(int node){
         int cam[MAX_NODO], tam=0,max=0, dest, i, peso=0;
         //Inicializa um vetor com valor -1
         for(i=0; i<MAX_NODO; i++)
            cam[i] = -1;

         dest = 0;
         while(1){
            if(matrix[node][dest] > 0){//Verifica se existe uma aresta entre nodo e dest
               if(verificarPath(cam, tam, dest) == 1){//Caso exista uma aresta, verifica se o 
destino já está no caminho
                  peso += matrix[node][dest];

                  cam[tam] = node;//salva os nodos que foram visitados
                  node = dest;
                  tam++;

                  dest=0;
                  continue;
               }
            }
            dest++;
            do{
               if(dest >= MAX_NODO){//verifica se o tamanho maximo da matriz ja foi alcançado, 
para então realizar o backtracking
                  if(peso>pesoPath){//verifica se na execução atual foi encontrado um caminho 
maior
                     for(i=0; i<tam; i++)
                        path[i] = cam[i];
                     path[i] = node;
                     max = tam;
                     pesoPath = peso;
                  }
                  tam--; //realização do backtracking
                  dest = node;
                  node = cam[tam];
                  peso -= matrix[node][dest];

                  dest++;
               }
            }while(dest >= MAX_NODO);

            if(tam < 0){//caso o tamanho do vetor seja negativo, é dito que todas as possibili-
dades ja foram testadas
               return max;
            }
         }
      }
```

Figura 1 : Função da implementação da versão exata

7 Versão aproximada do problema e Complexidade de tal

Nesta implementação foi usado a linguagem de programação C++, usando o GNU GCC Compiler para compilar os programas. No código em si foi usado suas estruturas de dados, vetor de lista (lista de adjacência) e pilhas das bibliotecas <list> e <stack> respectivamente.

A técnica aplicada para otimização foi usa a estratégia da ordenação topológica, que consiste em organizar um grafo linearmente onde cada nó venha antes de todos aos quais tenha aresta ligando. No cálculo do caminho mais longo é usado um vetor para armazenar as distancias do nó origem para todos os outros nós, é tanto que a distância na posição do nó origem será zero (0) em todas as saídas do programa.

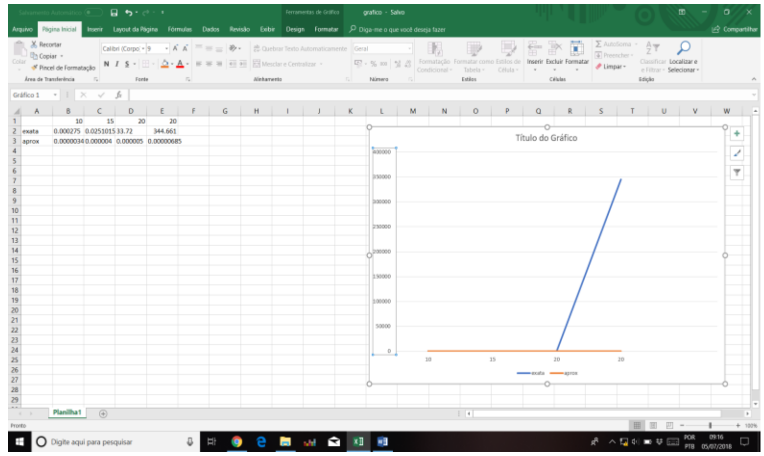
Nó código a seguir, foi colocado apenas as funções para calculo da distância e para a ordenação topológica que é de vital importância para essa resolução.

Para V=número de vértices, E=número de arestas. A complexidade de tempo para a ordenação topológica é O (V+E). Já no cálculo de caminho mais longo em si, para cada vértice, da pilha em ordem topológica, ele executa todos os vértices adjacentes, vértices adjacentes em um grafo é O(E), assim a complexidade de tempo é O(V+E).

```
void Graph::topologicalSortUtil(int v, bool visited[],stack<int> &Stack){
    visited[v] = true;//marca o nó que ele está como visitado

    list<AdjListNode>::iterator i;
    for (i = adj[v].begin(); i != adj[v].end(); ++i){
        AdjListNode node = *i;
        if (!visited[node.getV()])
            topologicalSortUtil(node.getV(), visited, Stack);
    }

    Stack.push(v);//empilha o vertice atual na pilha Stach
}
void Graph::longestPath(int s){
    stack<int> Stack; // uma pilha da classe 'stack' para empilhar os nós visitados
    int dist[V];

    bool *visited = new bool[V];
    for (int i = 0; i < V; i++)
        visited[i] = false;

    for (int i = 0; i < V; i++)
        if (visited[i] == false)
            topologicalSortUtil(i, visited, Stack);

    for (int i = 0; i < V; i++)
        dist[i] = NINF;
    dist[s] = 0;

    while (Stack.empty() == false){ // verifica se a pilha está vazia
        int u = Stack.top();

        Stack.pop(); //desempilha a pilha

        list<AdjListNode>::iterator i;
        if (dist[u] != NINF){
            for (i = adj[u].begin(); i != adj[u].end(); ++i){
                if(dist[i->getV()] < dist[u] + i->getWeight()){
                    dist[i->getV()] = dist[u] + i->getWeight();
                }
            }
        }
    }
    cout << "\n";
    for (int i = 0; i < V; i++)
        (dist[i] == NINF)? cout << "INF ": cout << dist[i] << " ";
}
```

8 Análise do tempo de execução dos algoritmos

Foi feito uma análise da execução dos algoritmos de versão exata e aproximada, dado um certo grafo G com um número de vértices, foi calculado o tempo de execução. Está plotado em um gráfico feito no Excel esses dados, os vértices e o tempo de execução



9 Referências

[1] "Teoria da Complexidade Computacional"; Leticioa Bueno/aa/materiais. Disponível em <http://professor.ufabc.edu.br/~leticia.bueno/classes/aa/materiais/complexidade2.pdf>. Acesso em 05 de julho de 2018.

[2] "Decisão"; Disponível em<https://web.fe.up.pt/~jfo/ensino/io/docs/IOT_decisao.pdf>. Acesso em 05 de julho de 2018.

[3] "Algoritmo de Posicionamento Analítico Guiado a Caminhos Críticos"; Jucemar Luis Monteiro. Disponível em<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/116139/000966425.pdf?sequence=1>. Acesso em 05 de julho de 2018.

[4] "Grafos Topológicos"; Jucemar Luis Monteiro. Disponível em< https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/graph-families.html#topological-numbering>. Acesso em 05 de julho de 2018.

[5] "Longest Path in a Directed Acyclic Graph"; geeks for geeks. Disponível em< https://www.geeksforgeeks.org/find-longest-path-directed-acyclic-graph/>. Acesso em 05 de julho de 2018.