Aluno: Allan Cordeiro Rocha de Araújo

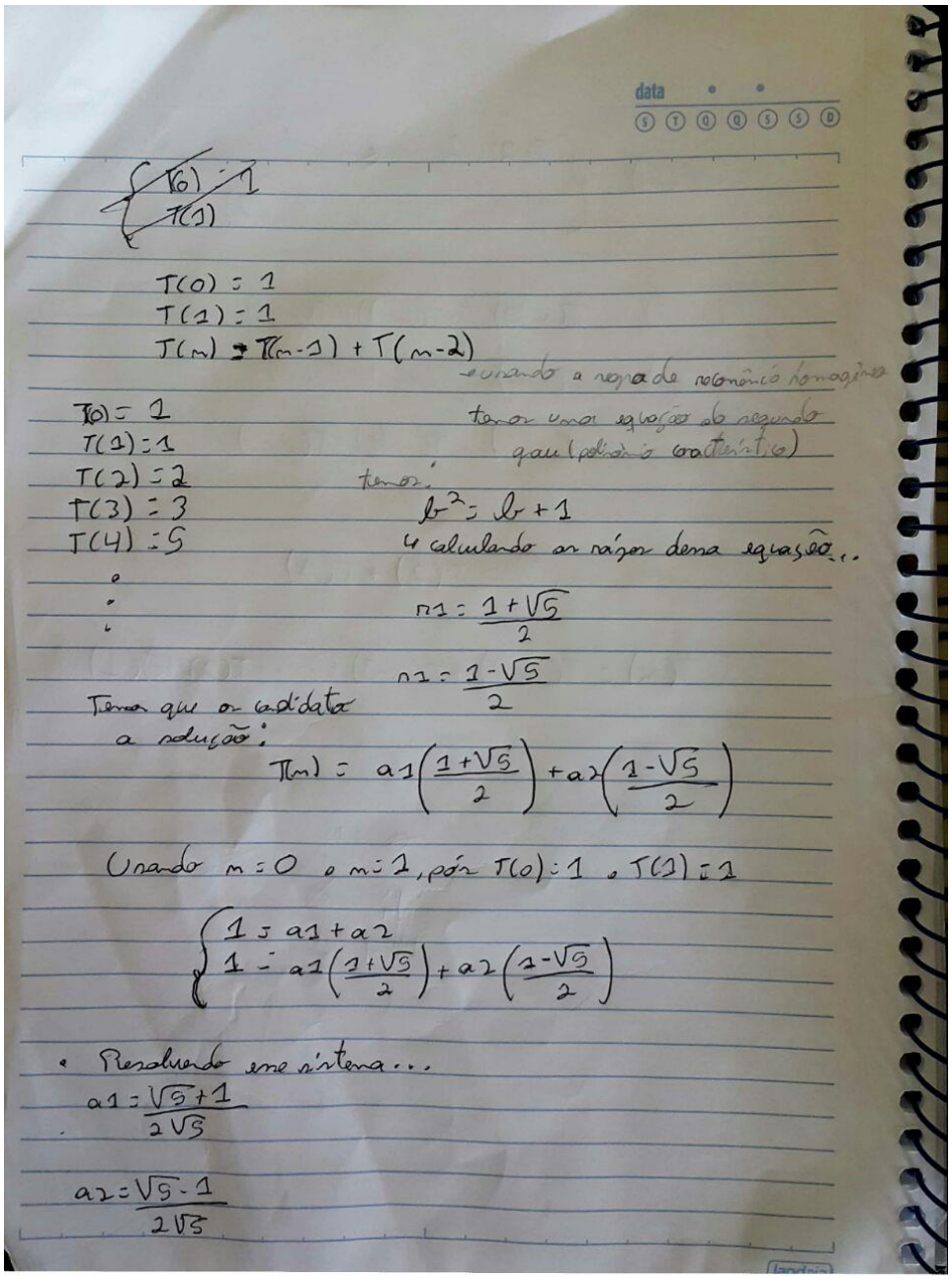
Disciplina: Análise de Algoritmo

Lista 2

Questão 1

Letra (A)

Complexidade da versão recursiva



data

$$T(n) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$T(n)\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

~~$F(n) = \ldots$~~ $T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) = \ldots \to$

A sequência de Fibonacci tende à proporção áurea, denominada φ. Esta é a raiz positiva da equação de segundo grau $x^2 - x - 1 = 0$ então $\varphi^2 = \varphi + 1$.

$$\varphi^n \cdot \varphi^2 = (\varphi + 1)\cdot \varphi^n$$

$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ logo φ^n é uma sequência de Fibonacci.

$1-\varphi$ é uma das raízes
e tem a mesma propriedade que φ^n

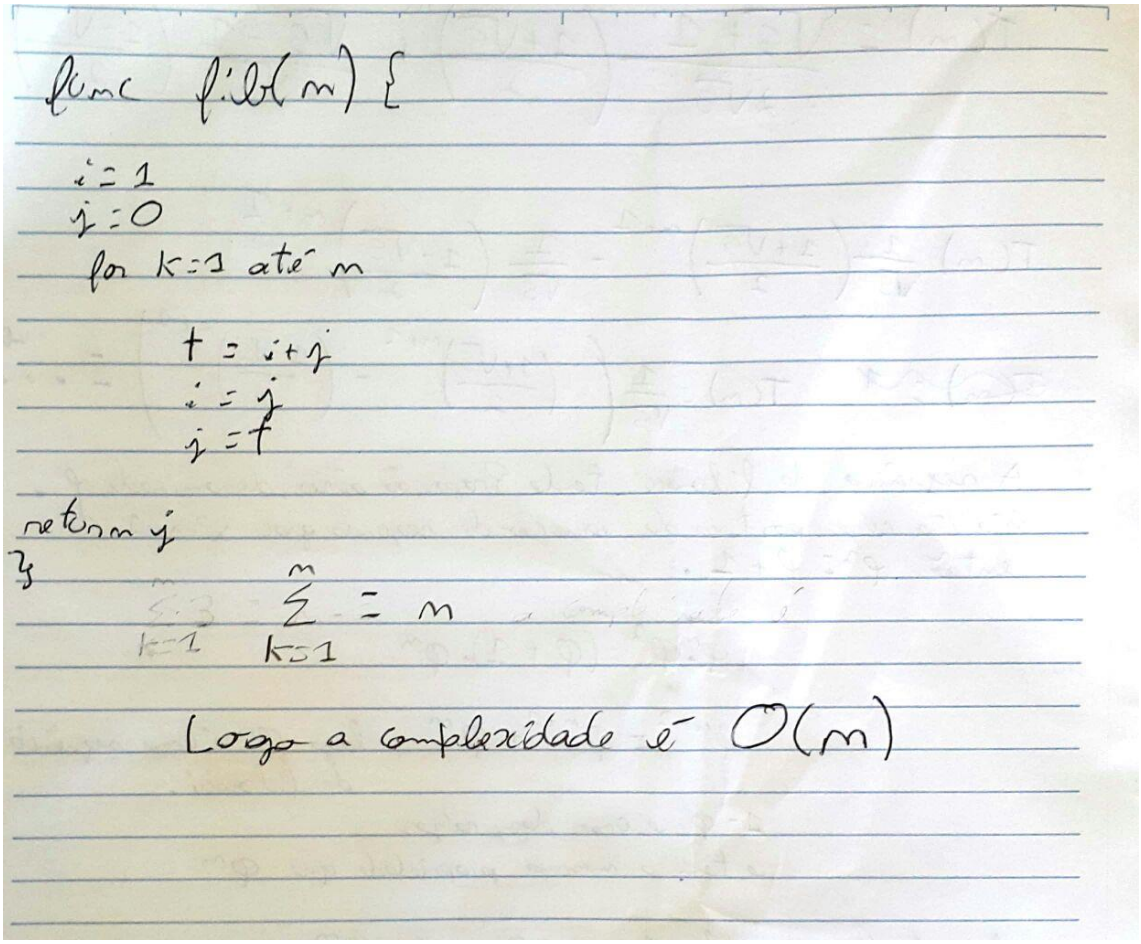
Ajustando os coeficientes φ^n e $1-\varphi^n$ para $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$

$\to \ldots = \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$ com $n \to \infty$ o segundo termo tende a zero (0)

logo $O(\varphi^n)$

onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

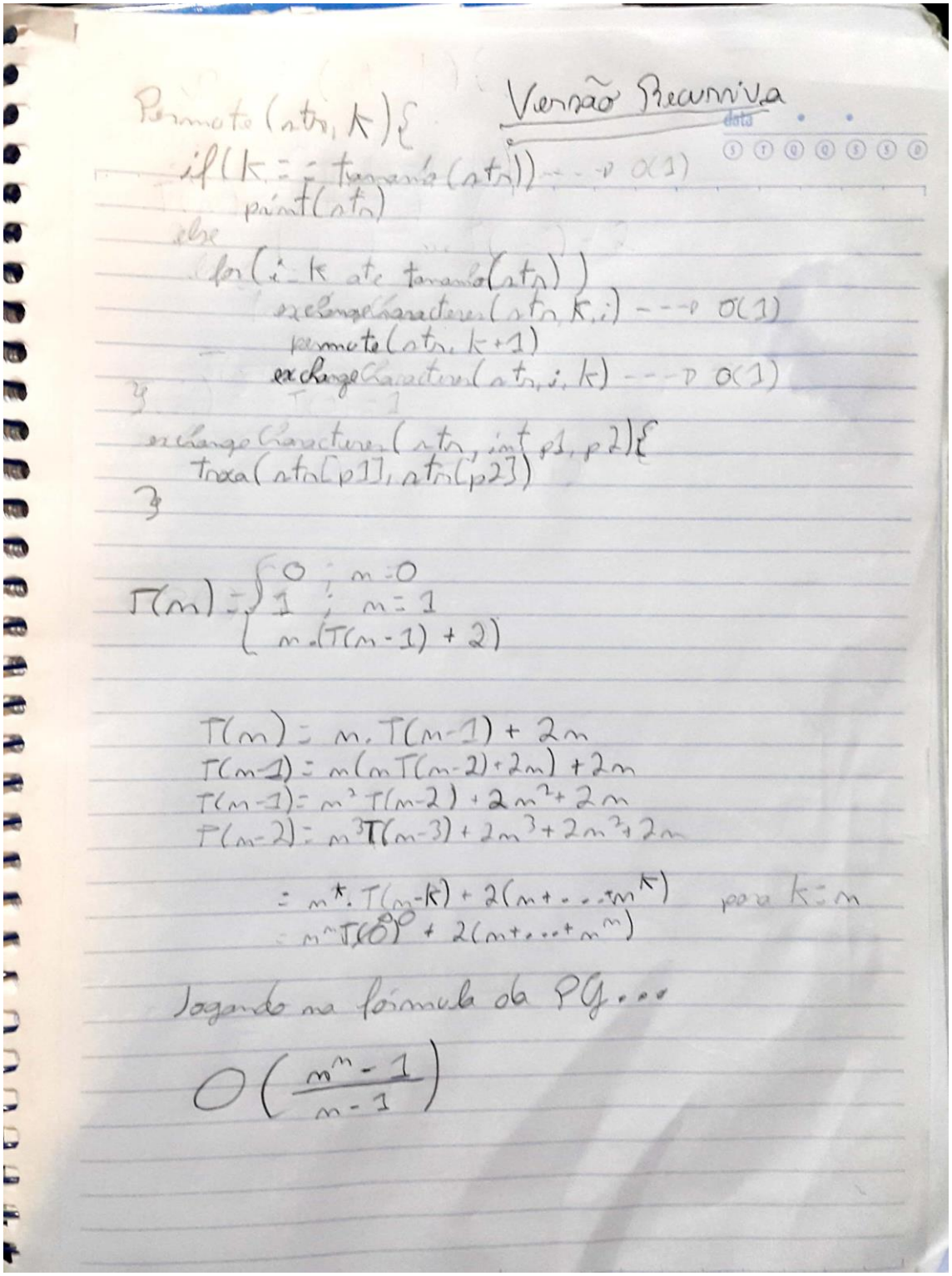
Calculo da complexidade para a versão iterativa



O limite inferior para ele é O(log(n)), pois é a melhor complexidade entre os algoritmos de Fibonacci, neste caso é um algoritmo que usa exponenciação de matrizes.

Letra (B)

Cálculo para complexidade da versão recursiva

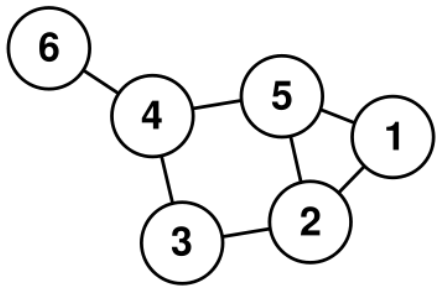


Questão 2

(A)

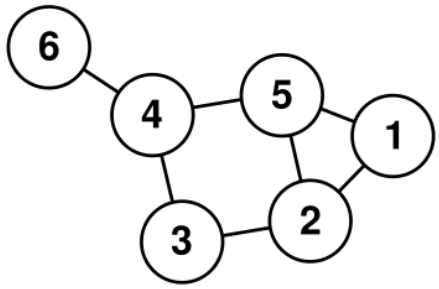
É um modelo matemático que representa relações entre objetos G = (V,E).

V é o número de vértices e E é o número de arestas.

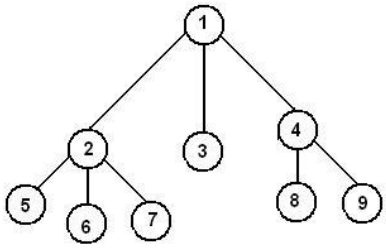


(B)

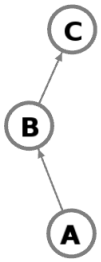
Grafo conexo: Grafo que possui arestas



Grafo acíclico: Grafo que não possui ciclos, ou seja, uma árvore

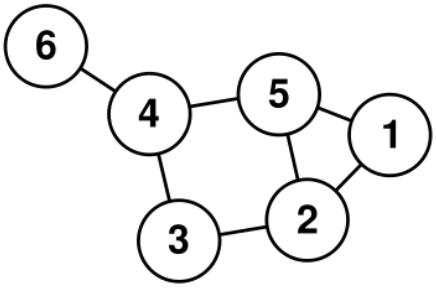


Grafo direcionado: Grafo onde as arestas possuem uma direção definida



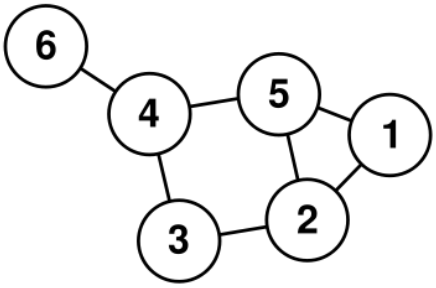
(C)

Adjacência em vértices é quando dois vértices x e y forem ligados por uma mesma aresta e=(x,y).



O vértice 6 é adjacente ao vértice 4

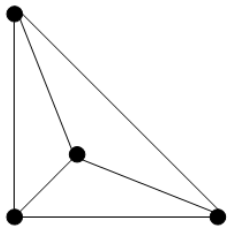
Já adjacência em arestas é quando duas arestas possuem o mesmo extremo (um mesmo vértice)



(6,4) é adjacente a (4,5)

(D)

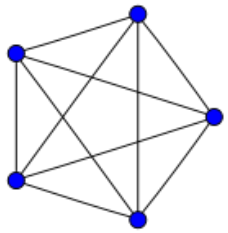
Um grafo planar é quando um grafo é colocado em um plano onde suas arestas não se cruzem



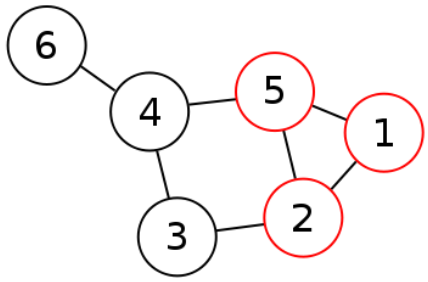
(F)

Grafo Completo: Um grafo é completo quando todos os seus vértices forem adjacentes.

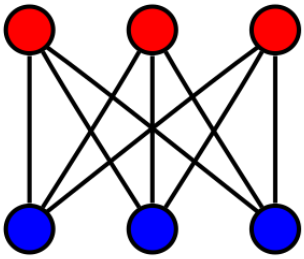
Um grafo completo Kn possui n(n-1)/2 arestas.



Clique: é um subgrafo de um grafo G, que é completo.

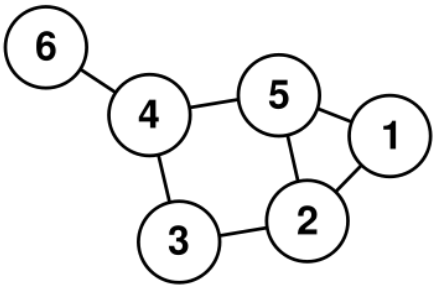


Grafo bipartido: Um grafo G=(V,E) é bipartido quando seu conjunto de vértices V pode ser dividido em dois subconjuntos de vértices tais que toda aresta conecta um vértice de um subconjunto com o do outro subconjunto.

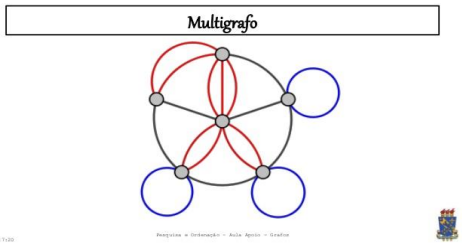


(G)

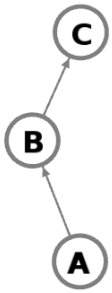
Grafo Simples: É um grafo que não possui arestas múltiplas.



Multigrafo: Quando um grafo possui mais de uma aresta interligando os mesmos dois vértices dizem-se que esse grafo possui arestas múltiplas (ou arestas paralelas).

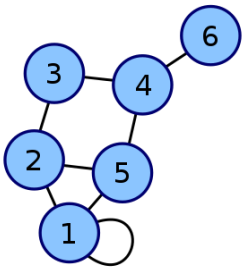


Dígrafo: quando o grafo é direcionado, ou seja, quando as arestas possuem direções.



Questão 3

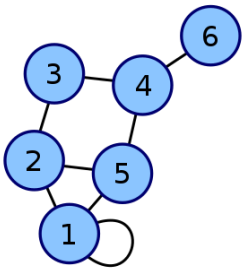
Matriz de incidência: É a representação computacional de um grafo através de uma matriz bidimensional, uma dimensão são os vértices e a outra são as arestas. De forma geral ela guarda informações sobre a relação de cada vértice com cada aresta (a incidência de uma aresta sobre um vértice)



A Matriz de incidência abaixo é a representação do grafo acima.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

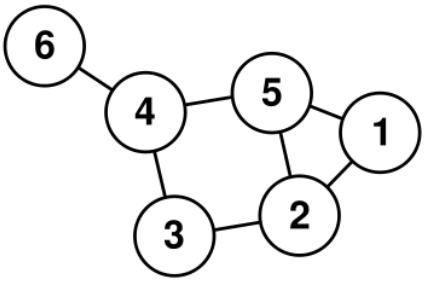
Matriz de adjacência: Seja um grafo com n vértices, a matriz de adjacência é uma matriz n x n. A matriz guarda informações sobre como o vértice v1 se relaciona com o vértice v2.



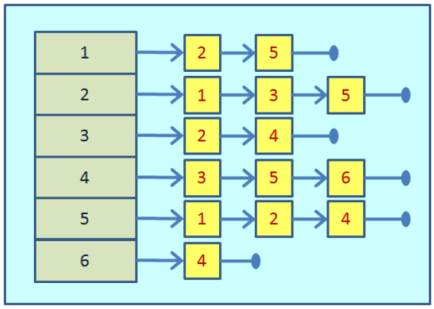
A matriz de adjacência abaixo é a representação do Grafo acima.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lista de adjacência: É a representação computacional de um Grafo em uma estrutura de dados de lista de listas (ou vetor de listas).



A lista de adjacência a seguir é a representação do grafo acima.



A vantagem da matriz de adjacência é sua velocidade de busca, para buscar qualquer informação nela o custo é O(1). Já a desvantagen é que o gasto de memória talvez não compense isso, pois ele sempre vai armazenar um matriz n x n (n é o número de vértices), logo se o grafo possuir poucas arestas talvez não valha pena.

A vantagem da lista de adjacência é que caso o grafo possua poucas arestas o custo para a lista será baixo, por exemplo, caso possua nenhuma aresta a lista de adjacência será basicamente um vetor. A desvantagem é caso o grafo seja um grafo completo, ou seja, todos os seus vértices estão ligados entre si.

Questão 4

Tabela hash / tabela de dispersão / tabela de espalhamento é uma estrutura de dados que associa chaves aos elementos. Com esta chave será feito a busca do elemento. Existe vários métodos para o cálculo do espalhamento dos elementos (calcular sua posição na tabela), o mais conhecido é usar resto da divisão do elemento pelo tamanho da tabela (tamanho da tabela normalmente é um número primo).

A complexidade da inserção e remoção no pior caso é O(n).

A complexidade da busca é O(1).

Estrutura do hash com lista encadeada

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>                    //para uso da função calloc
#include <math.h>

typedef struct modlista {
        int valor;
```

```
        struct modlista *prox;          //ponteiro para o proximo elemento
}*vetor,lista, *elo;                //um vetor de ponteiro para a struct, a estrutura,
ponteiro para a struct


void inicio(vetor *v,int n){
                                    elo novo;
                                    int i;
                                    for(i=0;i<n;i++){
                                            novo = (elo)calloc(1,sizeof(lista));
                                            novo->valor = i;
                                            novo->prox = NULL;
                                            v[i] = novo;
                                    }
}



int calculoHash(int x,int m){
                                    return (x%m);
}
int inserir(vetor *v,int valor,int m){
                                     elo aux, novo;

                                     int posicao = calculoHash(valor,m);

                                     aux = v[posicao];

                                     while(1){
                                            if(aux->prox == NULL)
                                                    break;
                                            aux = aux->prox;
                                     }
```

```
                                novo = (elo)calloc(1,sizeof(lista));
                                novo->valor = valor;
                                novo->prox = NULL;
                                aux->prox = novo;

}

void imprimir(vetor *v,int m){
                                elo aux;
                                int i;

                                for(i=0;i<m;i++){
                                        aux = v[i];

                                        while(1){
                                                if(aux == NULL)
                                                        break;

                                                printf("%d -> ",aux->valor);

                                                aux = aux->prox;
                                        }
                                        printf("\\\n");

                                }
}
```

Questão 5

Enumeração explicita: é a famosa resolução por força bruta, onde é feita todas as comparações possíveis em um conjunto de dados para se obter a resposta desejada.

Exemplo: algoritmos de força bruta.

Enumeração implícita: Quando apenas uma parte dos dados é realmente analisada, sem necessidade de se analisar todos os casos possíveis.

Exemplo: Algoritmos gulosos.

Programação dinâmica: É a técnica de resolução de problemas onde os sub-resultados são armazenados em tabelas para consulta, por exemplo, em uma resolução recursiva normalmente a mesma operação é feita mais de uma vez, nesses casos essas respostas repetidas não são calculadas mais de uma vez, pois já estão armazenadas em tabelas.

Exemplos: algoritmo de Dijkstra, algoritmo para o problema da mochila booleana.

Algoritmo Guloso: é uma resolução baseada em achar a melhor escolha local com a esperança de achar a melhor escolha global, ou seja, o primeiro resultado que satisfaz a condição ele já aceita e desconsidera as outras possíveis possibilidades.

Exemplos: problema da mochila fracionaria, problema do escalonamento de intervalos.

BackTracking: é um refinamento de busca por força bruta, onde varias soluções porem ser descartadas sem serem necessariamente analisadas.

Exemplos: N-rainhas, Caixeiro Viajante.

Questão 6

Pseudocódigo da multiplicação de matrizes usando programação dinâmica

```
MATRIXCHAINORDER (p,n )
1 para i ← 1 até n faça
2       m[i,i] ← 0
3 para l ← 2 até n faça
4        para i ← 1 até n − l + 1 faça
5                j ← i + l − 1
6                m[i, j] ← ∞
7                para k ← i até j − 1 faça
```

```
8                 q ← m[i, k] + p[i − 1] p[k]p[j] + m[k+1, j]
9                 se q < m[i, j]
10                    então m[i, j] ← q
11 devolva m[1, n]
```

Questão 7

```
// algoritmo de Dijkstra  /CAMINHO MINIMO


void dijkstra (Graph G,int Vi,int *dis){
//calcula as distancias e armazena no VETOR dis[]


/*
Ele irá calcular a distancia da raiz Vi até todos os outros vértices armazenados no vetor dis[]
*/


char vis[G->v];
memset (vis, 0, sizeof (vis));
memset (dis, 0x7f, sizeof (dis));


dis[Vi] = 0;
int t, i;


for (t = 0; t < G->v; t++){
    int v = -1;
    for (i = 0; i < G->v; i++){
        if (!vis[i] && (v < 0 || dis[i] < dis[v]) )
            v = i;
     }
    vis[v] = 1;
    for (i = 0; i < G->v; i++){
```

```
        if (G->adj[v][i] > (dis[v] + G->adj[v][i]) && dis[i] > (dis[v] + G->adj[v][i]) )
            dis[i] = dis[v] + G->adj[v][i];
      }

   }
}
```

Questão 8

(A)

A teoria NP-Completude abrange os problemas NP-Completos, que são problemas que são um subconjunto de NP e são computacionalmente difíceis de se resolver, no caso problemas que são resolvidos em tempo exponencial.

Já o problema SAT é um problema NP-Completo, mais precisamente foi o primeiro identificado como pertencente à classe NP-Completo. O problema SAT é pra determinar se existe uma valor (positivo ou negativo) para um expressão booleana.

(B)

Classe P: É o conjunto de problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por uma máquina de Turing determinística.

Exemplo: cálculo do máximo divisor comum.

Classe NP: É o conjunto de problemas que são decidíveis em tempo polinomial por uma máquina de Turing não-determinística.

Exemplo: problema do caixeiro viajante.

Classe NP-Difícil: um problema H é NP-Difícil se e somente se existe um problema NP-Completo L que é Turing-redutivel em tempo polinomial para H.

Exemplo: problema de decisão da soma de subconjuntos.

NP-Completo: São problemas que são um subconjunto de NP e são computacionalmente difíceis de se resolver.

Exemplo: Problema do caminho mais longo.

Questão 10

Uma redução (ou redução polinomial) é reduzir um problema x em um problema y onde um algoritmo 1 que resolve x usando uma subrotina hipotética

algoritmo 2 que resolve y, tal que, se algoritmo 2 é um algoritmo polinomial, então algoritmo 1 é um algoritmo polinomial também.

A notação: x <=p y. Significa que existe uma redução de x a y.

Se x <=p y e y está em P, então x está em P.

Para mostrar que SAT <=p Clique primeiro mostraremos que SAT <=p 3-SAT e que 3-SAT <=p Clique.

SAT <=p 3-SAT

Legenda

Quando se diz 3 literais por clausula significa isso:

Ø = (x1 v !x1 v !x2) ^ (x3 v x2 v x4)

Um literal são as variáveis x1,x2.. e sua negação é !x1,!x2...

Uma clausula é (x1 v !x1 v !x2)...

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana Ø e devolve uma fórmula booleana Ø' com exatamente 3 literais por cláusulas tais que:

Ø é satisfazível se e somente se Ø' é satisfazível

A transformação consiste em substituir cada clausula de Ø por uma coleção de claúsulas com exatamente 3 literais cada e equivalente a Ø;

Seja (l1 ∨ l2 ∨ · · · ∨ lk) uma claúsula de Ø .

Caso 1. k = 1

Troque (l1)

por (l1 ∨ y1 ∨ y2) (l1 ∨ ¬ y1 ∨ y2) (l1 ∨ y1 ∨ ¬ y2) (l1 ∨ ¬ y1 ∨ ¬ y2) onde y1 e y2 são variáveis novas.

Caso 2. k = 2

Troque (l1 ∨ l2) por (l1 ∨ l2 ∨y) (l1 ∨ l2 ∨ ¬y). onde y é uma variáveis nova.
Caso 3. k = 3

Mantenha (l1 ∨ l2 ∨ l3).

Caso 4. k > 3

Troque (l 1 ∨ l 2 ∨ · · · ∨ l k) por

(l 1 ∨ l 2 ∨ y 1)

(¬ y 1 ∨ l 3 ∨ y 2) (¬ y 2 ∨ l 4 ∨ y 3) (¬ y 3 ∨ l 5 ∨ y 4) . . .

(¬ y k − 3 ∨ l k − 1 ∨ l k)

onde y 1, y 2, . . . , y k − 3 são variáveis novas

Verifique que Ø é satisfazível se e somente se nova fórmula é satisfazível. O tamanho da nova claúsula é O(m), onde m é o número de literais que ocorrem em Ø (contando-se as repetições).

Agora para 3-SAT <=p Clique

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana Ø com k clausulas e exatamente 3 literais por clausula e devolve um grafo G tais que

Ø é satisfativel se e somente se G possui um clique >= k

Para cada clausula o grafo G terá 3 vértices, um correspondente a cada literal da clausula, Logo G terá 3k vértices. Teremos arestas ligando vértices u e v se

u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes clausulas;

e se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal !x.