

PRA - Projeto de Arquivos

# Introdução a árvores binárias

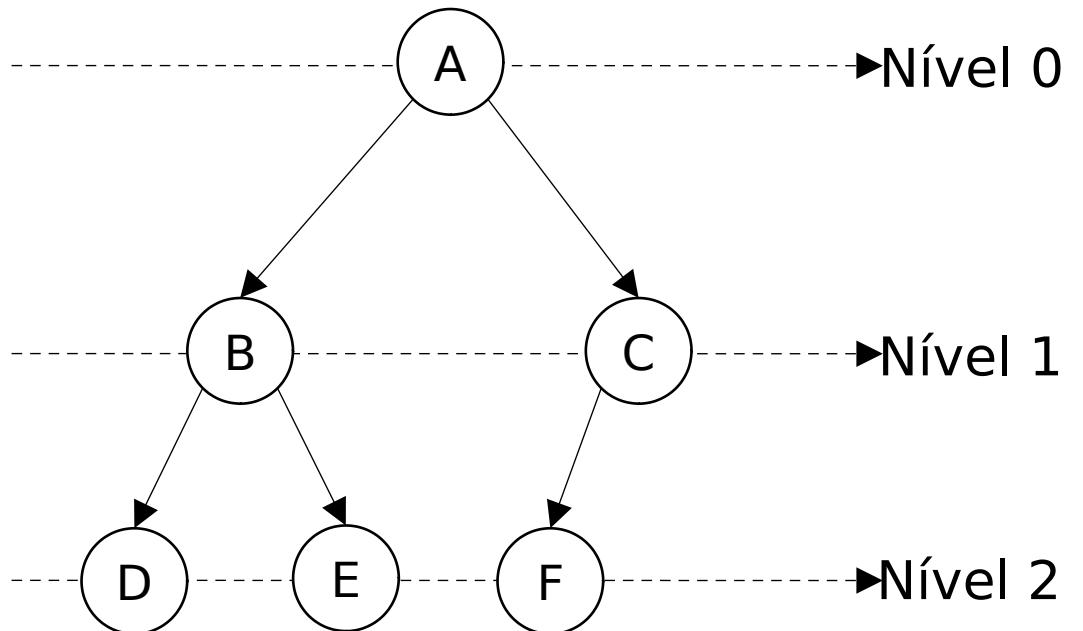
Prof. Allan Rodrigo Leite

# Introdução

- Estruturas de dados baseadas em lista representam dados de maneira sequencial
- Árvores são estruturas adequadas para representação hierárquica
  - Estruturas de árvores possuem uma definição recursiva
  - Cada nó da árvore forma uma subárvore
- Uma árvore é formada por
  - Um conjunto de nós
  - Um dos nós é denominado *raiz*
  - Cada nó pode ter múltiplos *filhos*
  - Os nós que não possuem filhos são chamados de *folhas*

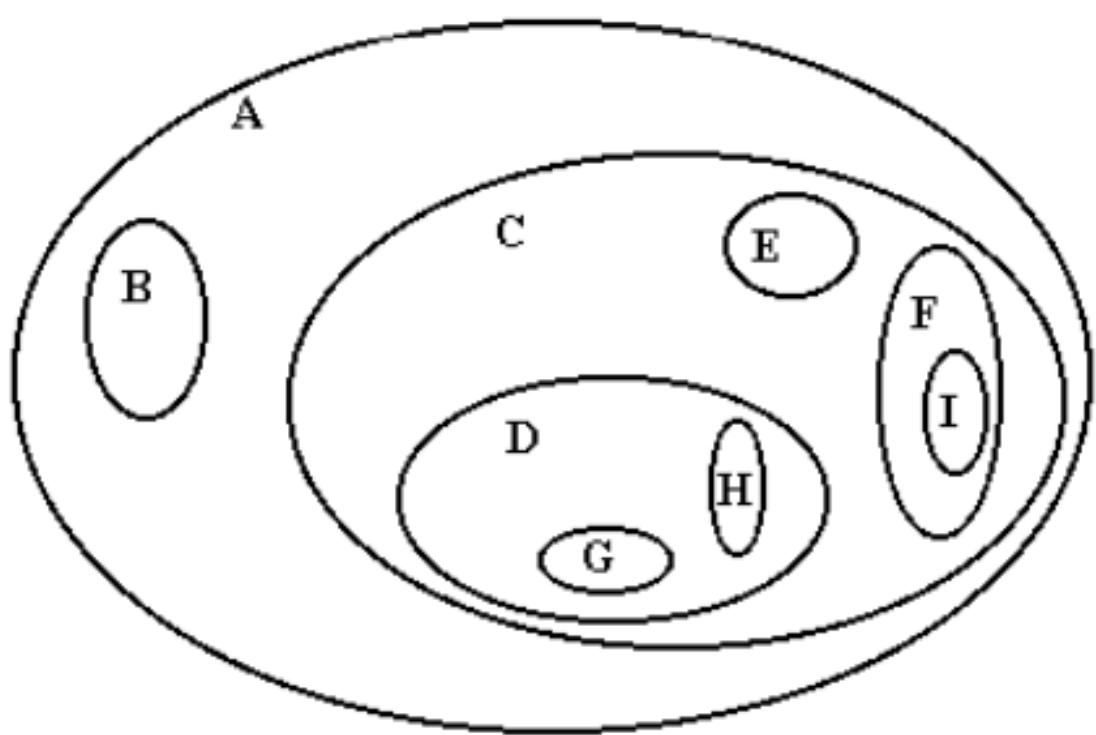
# Introdução

- Estrutura de uma árvore
  - Nós representam os vértices da árvore
  - Areias conectam dois vértices
  - Níveis da árvore

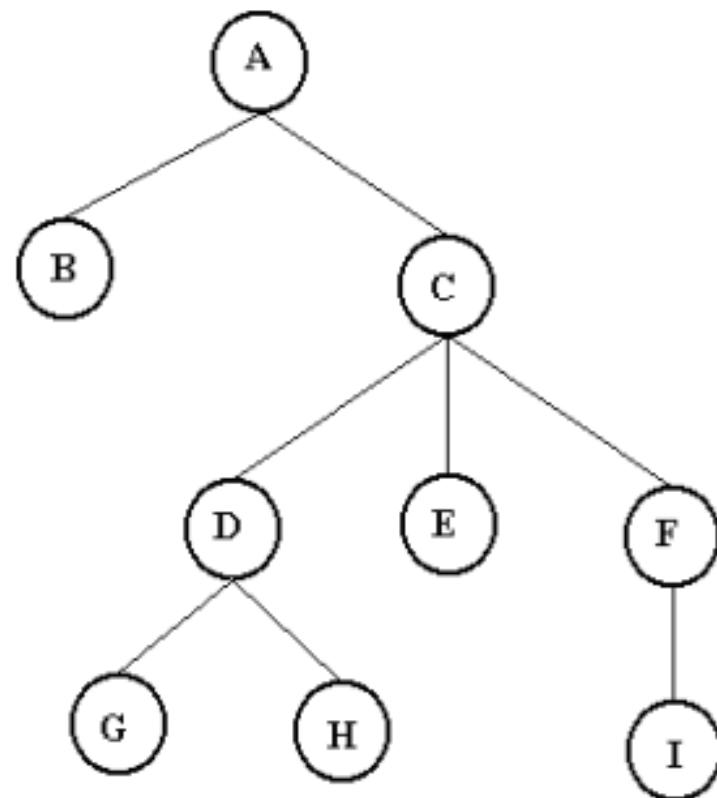


# Introdução

Diagrama de Inclusão

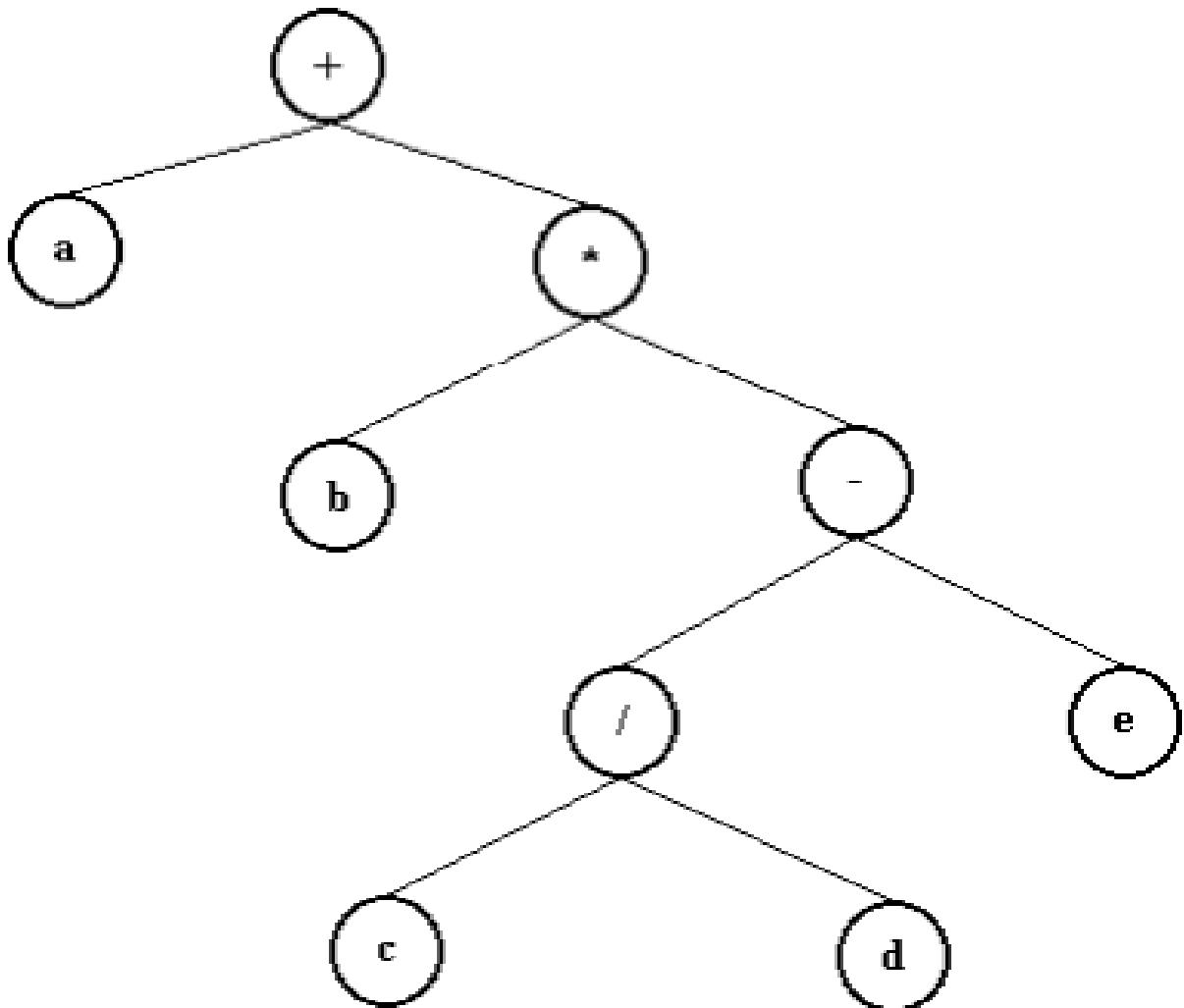


Representação Hierárquica



# Introdução

- Exemplos
  - Representação de expressões aritméticas  
 $(a + (b * (c / d - e)))$



# Introdução

- Conceitos
  - Cada nó pode possuir um único nó pai e uma coleção de zero ou mais nós filhos
  - Nó raiz não possui nó pai
  - Nós folhas possuem uma coleção vazia de filhos
  - Grau de saída representa a quantidade de filhos de um nó
  - Grau de uma árvore representa a maior quantidade de filhos entre todos os nós
  - Uma floresta é uma coleção de árvores

# Introdução

- Caminho
  - É uma sequência de nós distintos ligados pela relação de pai e filho
  - Existe apenas um caminho da raiz para qualquer nó
  - O comprimento de um caminho refere-se ao número de nós contidos
- Profundidade
  - Comprimento do maior caminho da raiz até o nó folha mais distante
  - Profundidade é uma medida de altura da árvore
- Largura
  - Maior número de filhos dos nós pertencentes ao mesmo nível

# Introdução

- Árvore cheia
  - Árvore de grau  $D$  onde todos os nós possuem o mesmo número de filhos, exceto os nós folha
- Árvore cheia de grau 2
  - Pode ser implementadas sequencialmente por vetor
  - Chamadas de árvores binárias
  - Exemplo com expressões aritméticas
    - Nós folhas representam os operandos (números)
    - Nós internos representam os operadores

# Árvores binárias

- Representação em C

```
typedef struct {
    struct No* pai;          //ponteiro para o nó pai
    struct No* esquerda;     //ponteiro para o nó filho a esquerda
    struct No* direita;      //ponteiro para o nó filho a direita
    float v;                 //conteúdo de um nó arbitrário da árvore
} No;
```

```
typedef struct arvore {
    No* raiz;
} Arvore;
```

# Árvores binárias

- Operações básicas
  - Criar uma estrutura de árvore
  - Inserir um novo elemento no árvore
  - Remover o elemento da árvore
  - Verificar se a árvore está vazia
  - Liberar memória da árvore
  - Percorrer os caminhos da árvore

# Árvores binárias

- Criar uma árvore

```
Arvore* cria() {  
    Arvore *arvore;  
    arvore = malloc(sizeof(Arvore));  
    arvore->raiz = NULL;  
  
    return arvore;  
}
```

- Verifica se a árvore está vazia

```
int vazia(Arvore* arvore) {  
    return (arvore->raiz == NULL);  
}
```

# Árvores binárias

- Inserir um elemento na árvore

```
No* adiciona(Arvore* arvore, No* pai, float valor) {  
    No *no = malloc(sizeof(No));  
  
    no->pai = pai;  
    no->esquerda = NULL;  
    no->direita = NULL;  
    no->valor = valor;  
  
    if (pai == NULL)  
        arvore->raiz = no;  
  
    return no;  
}
```

# Árvores binárias

- Remover um elemento na árvore

```
void remove(Arvore* arvore, No* no) {  
    if (no->esquerda != NULL)  
        remove(arvore, no->esquerda);  
  
    if (no->direita != NULL)  
        remove(arvore, no->direita);  
  
    if (no->pai == NULL) {  
        arvore->raiz = NULL;  
    } else {  
        if (no->pai->esquerda == no) {  
            no->pai->esquerda = NULL;  
        } else {  
            no->pai->direita = NULL;  
        }  
    }  
  
    free(no);  
}
```

# Árvores binárias

- Percorrer a árvore

```
void percorrer(No* no) {  
    if (no != NULL) {  
        printf("%f", no->valor);  
  
        percorrer(no->esquerda);  
        percorrer(no->direita);  
    }  
}
```

# Árvores binárias

- Busca em árvore
  - Estratégia para visitar os nós de uma árvore
- Busca em profundidade
  - Elementos são visitados intercalando os níveis da árvore
  - O resultado da busca a partir da raiz forma múltiplos caminhos
- Busca em largura
  - Elementos são visitados no mesmo nível da árvore
  - Em seguida é realizada a mesma busca no próximo nível da árvore
  - Precisa ser conhecido quais nós pertencem a cada nível

# Árvores binárias

- Busca em profundidade
  - A busca ocorre da esquerda para a direita a cada subárvore
  - Estratégias para visitar os nós: *pre-order*, *in-order* e *post-order*
- *Pre-order*
  - Raiz, esquerda, direita
- *In-order*
  - Esquerda, raiz e direita
- *Post-order*
  - Esquerda, direita e raiz

# Árvores binárias

- Árvores ordenadas
  - Os nós são dispostos de forma hierárquica e ordenados
  - O nó da esquerda possui um conteúdo menor que o nó atual
  - O nó da direita possui um conteúdo maior que o nó atual
- Altura e largura máxima são as dimensões da árvore
  - O esforço computacional para percorrer uma árvore é proporcional a altura e largura

# Árvores binárias

- Balanceamento de árvores
  - Árvore degenerada
    - Ocorre quando cada nó possui uma única subárvore associada
    - Neste caso a árvore representa uma estrutura linear
    - Percorrer nesta árvore corresponde a complexidade  $N$
  - Árvore cheia
    - Possui um balanceamento perfeito
    - Todos os nós possuem dois filhos ou são folhas
    - Percorrer nesta árvore corresponde a complexidade  $\log N$

# Árvores binárias genéricas

- Estrutura de uma árvore binária genérica

```
typedef struct {  
    struct No* esquerda; //ponteiro para o filho a esquerda  
    struct No* direita; //ponteiro para o filho a direita  
    void *v;           //conteúdo genérico do nó  
} No;
```

```
typedef struct arvore {  
    No* raiz;          //raiz da árvore  
    int tamanho;        //tamanho do conteúdo em bytes  
} Arvore;
```

# Árvores binárias genéricas

- Como tornar genérica a operação de pesquisa?
- Estratégia baseada em *callback*
  - Permite separação entre
    - Função que percorre os elementos da estrutura de dados
    - Operação realizada sobre cada elemento visitado na iteração
  - Função para percorrer é genérica
    - A parte específica é o que será feito a cada elemento visitado
    - Operação de *callback*

# Árvores binárias genéricas

- Implementação ocorre por meio de ponteiro de funções
  - Nome de uma função representa o endereço da função
- Exemplo
  - Assinatura da função

```
void callback(void* v);
```
  - Declaração do ponteiro para armazenar o endereço da função

```
void *(cb)(void*);
```

onde cb é ponteiro para funções com mesma assinatura que callback.

# Árvores binárias genéricas

- Recomendações sobre o uso de *callbacks*
  - Evitar uso de varáveis globais
    - Problemas de concorrência
    - Dificuldade para compreensão do código
  - Passar parâmetros genéricos, se for o caso
    - Pode ter, além do ponteiro do elemento atual, um ponteiro para dados
  - Isolar o comportamento genérico específico do *callback*
    - Reduz o acoplamento entre o cliente e a implementação de lista genérica

# Árvores binárias genéricas

- Operação de percorrer genérica com suporte a *callback*

```
void percorrer(No* no, void (callback)(void*)) {
    if (no != NULL) {
        callback(no->v);

        percorrer(no->esquerda);
        percorrer(no->direita);
    }
}
```

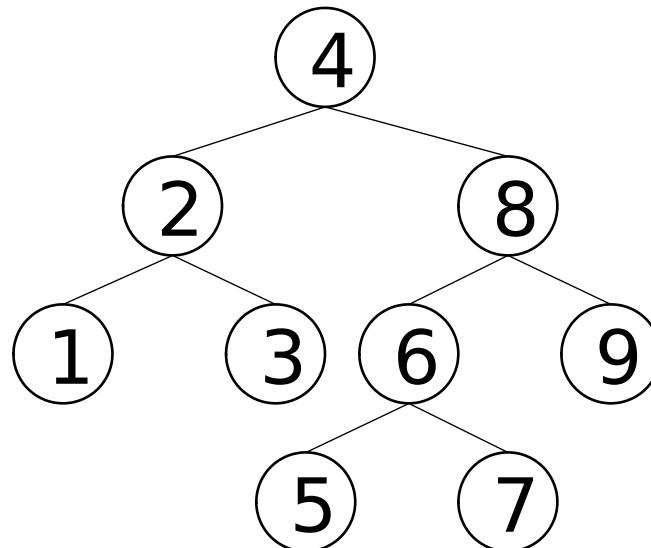
# Implementação de listas genéricas

- Operação de percorrer sendo chamada pelo cliente

```
void meuCb(void* par) {  
    float *v = (float*) par;  
    printf("%f\n", v);  
}  
  
int main(int argc, char *argv[]){  
    Arvore *a = cria();  
    //Insere dados na lista...  
    percorre(a, meuCb); //Passando a função como parâmetro  
}
```

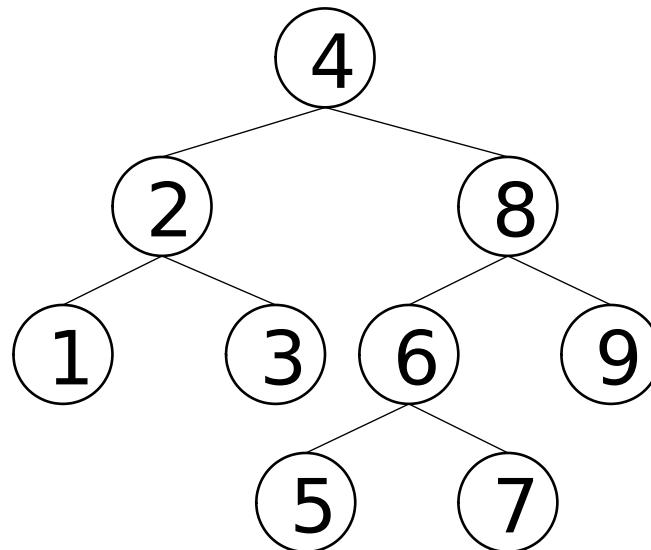
# Exercícios

1. Implemente um algoritmo que visite todos os nós de uma árvore binária com uma busca em profundidade *in-order*, *pre-order* e *pos-order*
  - Exemplo, para a árvore abaixo a saída deve ser:
    - *Pre-order*: 4, 2, 1, 3, 8, 6, 5, 7, 9
    - *In-order*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
    - *Pos-order*: 1, 3, 2, 5, 7, 6, 9, 8, 4



# Exercícios

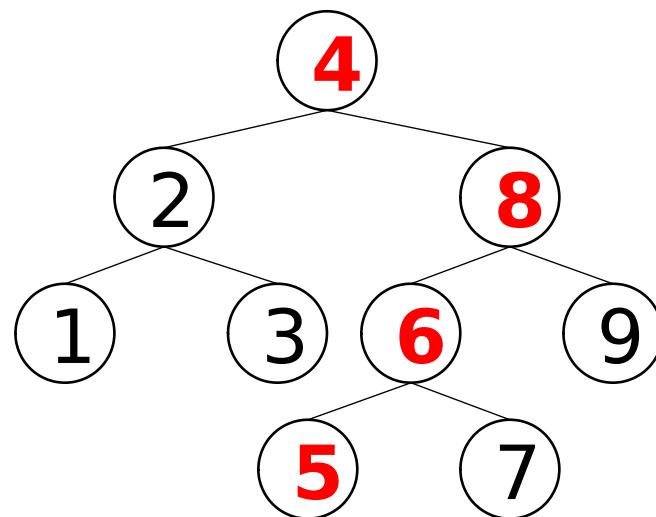
2. Implemente um algoritmo que visite todos os nós de uma árvore binária com uma busca em largura
- Exemplo, para a árvore abaixo a saída deve ser: 4, 2, 8, 1, 3, 6, 9, 5, 7



# Exercícios

3. Dada uma árvore binária, retorne o número de comparações feitas em uma pesquisa binária para localizar um nó dada uma chave de acesso.

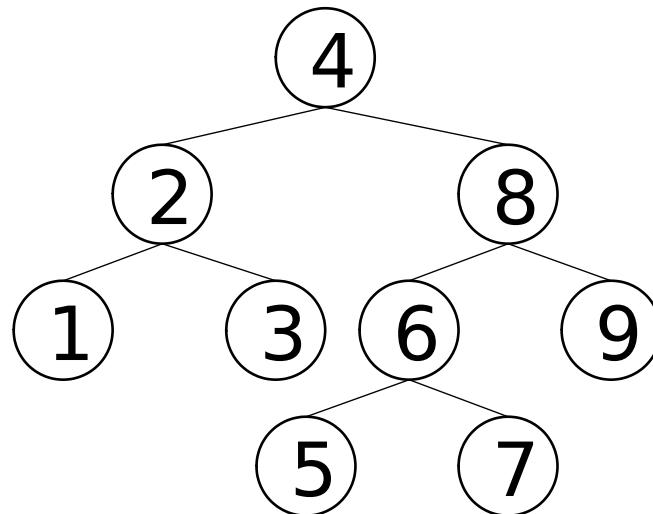
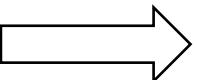
- Os nós desta árvore devem respeitar as seguintes regras:
  - O valor de cada nó deve ser inteiro
  - O nó filho à esquerda possui um valor menor ou igual ao valor de seu nó pai
  - O nó filho à direita possui um valor maior do que o valor de seu nó pai
- Exemplo: dada a árvore abaixo e a chave de pesquisa 5, a saída esperada é 4



# Exercícios

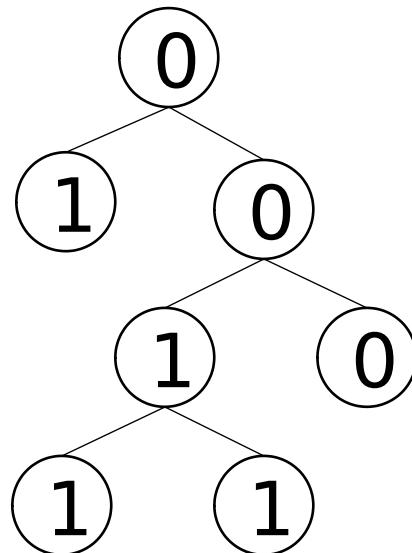
4. Implemente uma função para adicionar nós em uma árvore binária que respeite as regras abaixo necessárias para uma pesquisa binária.
- O valor de cada nó deve ser inteiro
  - O nó filho à esquerda possui um valor menor ou igual ao valor de seu nó pai
  - O nó filho à direita possui um valor maior do que o valor de seu nó pai
  - Exemplo: deve ser gerada a árvore abaixo ao adicionar 4, 2, 1, 3, 8, 9, 6, 5, 7.

```
Arvore *a = cria();
adiciona(a,4);
adiciona(a,2);
adiciona(a,1);
adiciona(a,3);
adiciona(a,8);
adiciona(a,9);
adiciona(a,6);
adiciona(a,5);
adiciona(a,7);
```



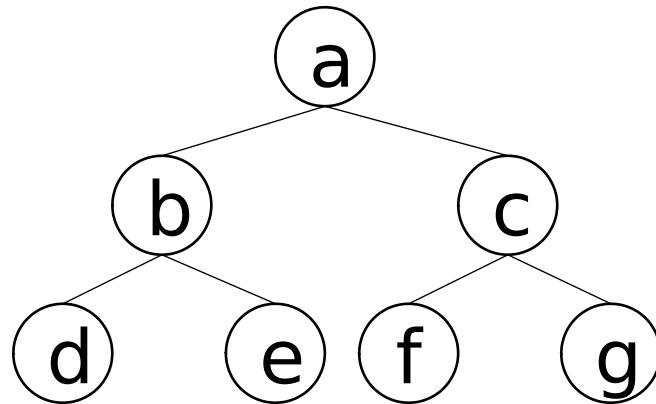
# Exercícios

5. Uma árvore *unival* (valor universal) é uma árvore na qual todos os nós abaixo dela possuem o mesmo valor. Dada a raiz de uma árvore binária, conte o número de subárvore *unival*
- Exemplo, a árvore abaixo possui 5 subárvore *unival*



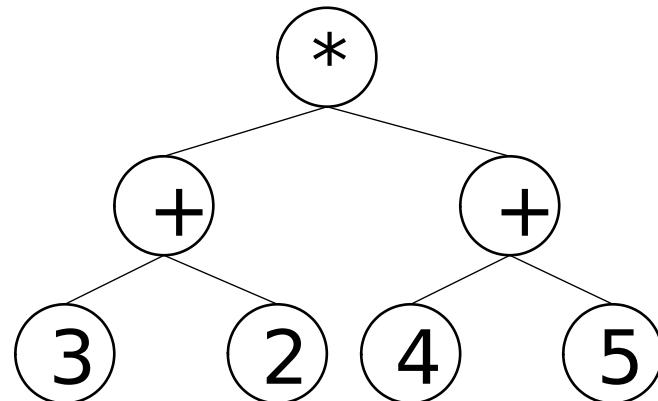
# Exercícios

6. Dadas duas listas de nós de uma mesma árvore binária geradas em *pre-order* e *in-order*, escreva um programa capaz de reconstruir a árvore.
- Exemplo, *pre-order*: [a, b, d, e, c, f, g] e *in-order*: [d, b, e, a, f, c, g], a saída esperada é:



# Exercícios

7. Suponha uma expressão aritmética representada como uma árvore binária. Cada folha é um número inteiro e cada nó interno representa uma operação, como +, -, \*, ou /. Dada a raiz da árvore, escreva um programa que avalia a expressão.
- Exemplo, dada a árvore abaixo a saída é 45 pois  $(3 + 2) * (4 + 5)$



PRA – Projeto de Arquivos

# Introdução a árvores binárias

Prof. Allan Rodrigo Leite