Máquinas universais

Teoria da computação

Prof. Allan Rodrigo Leite

Máquinas universais

- Algoritmos
  - Maneira de descrever se determinada propriedade é verificada ou não a partir de uma classe de entrada

- Noção intuitiva
  - A descrição deve ser finita e não-ambígua
  - Deve consistir de passos discretos, executáveis em tempo finito
  - Eventuais limitações de tempo ou espaço podem determinar se um algoritmo pode ou não ser utilizado na prática
  - Requer a definição da máquina a ser considerada

Máquinas universais

- Do ponto de vista das máquinas, elas devem ser:
  - Simples: permite estabelecer conclusões gerais sobre a classe de funções computáveis
  - Poderosa: capaz de simular qualquer característica de máquinas reais ou teóricas, de tal forma que os resultados provados sejam válidos para modelos aparentemente com mais recursos

- Definição de máquina universal
  - Uma máquina é dita universal se ela for capaz de representar qualquer algoritmo como um programa

Máquinas universais

- Caracterização de máquinas universais
  - Evidência interna: qualquer extensão das capacidades da máquina universal, computa, no máximo, a mesma classe de funções, ou seja, não aumenta o seu poder computacional
  - Evidência externa: consiste no exame de outros modelos que definem a noção de algoritmo, juntamente com a prova de que são, no máximo, computacionalmente equivalentes

- Exemplos de máquinas universais
  - Máquina Norma
  - Máquina de Turing
  - Máquina de Post
  - Máquina com Pilhas

Máquina Norma

- Máquina Norma (Number Theoretic Register Machine)
  - Introduzida por Richard Bird (1976)

- Constituída por
  - Conjunto de registradores naturais
  - Suporte à somente três operações sobre eles
    - Adição e subtração do valor um
    - Teste se o valor armazenado é zero

- Características da máquina Norma
  - Registradores podem assumir valores tão grande quanto necessário $(N \to \infty)$
  - O número de registradores é teoricamente infinito

Máquina Norma

- Definição $\texttt{Norma} = < N^\infty, N, N, \texttt{in}, \texttt{out}, \{\texttt{add}_K, \texttt{sub}_K\}, \{\texttt{zero}_K\} >$
  - N^∞: conjunto de valores suportados pela máquina
  - X: conjunto de valores de entrada
  - Y: conjunto de valores de saída
  - $\texttt{in}$: função de entrada $N \rightarrow N^\infty$
    - Carrega no registrador X o valor de entrada, inicializando todos os demais com zero
  - $\texttt{out}$: função de entrada $N^\infty \rightarrow N$
    - Retorna o valor corrente do registrador Y
  - $\{\texttt{add}_K, \texttt{sub}_K\}$: conjunto de operadores
  - $\{\texttt{zero}_K\}$: conjunto de testes

  - Registradores são em geral denotados por letras maiúsculas A,B,X,Y,...

Máquina Norma

- Conjunto de operações e teste
  - $\{add_K, sub_K\}$: conjunto de operadores
    - Operações indexadas pelos registradores, isto é, para cada registrador K
    - add_K: adiciona um ao valor do registrador K, deixando os demais valores inalterados
    - sub_K: subtrai um ao valor do registrador K quando este valor for maior que zero, caso contrário mantem-se zero, deixando as demais valores inalterados

  - $\{zero_K\}$: conjunto de testes
    - Resulta em verdadeiro se o valor do registrador K for zero e em falso, caso contrário
    - $N^\infty \rightarrow$ { verdadeiro, falso }

Máquina Norma

- Características
  - Máquina extremamente simples
  - Seu poder computacional é, no mínimo, o de qualquer computador moderno
  - As características de máquinas reais são simuladas usando a Máquina Norma
  - Reforça as evidências de que se trata de uma máquina universal

Máquina Norma

- Simulações suportadas
  - Operações e testes: definição de operações e testes mais complexos, tais como:
    - Adição, subtração, multiplicação e divisão de dois valores
    - Tratamento de valores diversos como os números primos
  - Valores numéricos: armazenamento e tratamento de valores numéricos de diversos tipos como inteiros (negativos e não-negativos)
  - Dados estruturados: armazenamento e tratamento de dados estruturados
    - Arranjos, vetores unidimensionais e multidimensionais, pilhas, dentre outros
  - Endereçamento indireto e recursão: desvio para uma instrução determinada pelo conteúdo de um registrador
  - Cadeia de caracteres: definição e manipulação de cadeias de caracteres

Máquina Norma

- Operações e testes
  - Atribuição do valor zero a um registrador (`A := 0`)

- Exemplo de programa iterativo

```
até A = 0 //zeroA
   faça (A := A - 1) //subA
```

  - Representação por macros como `A := 0`
  - Com esta macro é usual definir operações de atribuição de um valor qualquer

Máquina Norma

- Atribuição um valor natural a um registrador
  - Macro: A `:= n`

- Exemplo: programa iterativo para `n = 3`

```
A := 0      //macro anterior
A := A + 1 //add_A
A := A + 1 //add_A
A := A + 1 //add_A
```

Máquina Norma

- Mais exemplos
  - Adição de dois registradores
  - Macro A `:= A + B`

- Programa iterativo

```
até B = 0 //zero_B
   faça (A := A + 1; B := B - 1) //add_A,sub_B
```

  - Note que, ao somar o valor de B em A, o registrador B é zerado

Máquina Norma

- Mais exemplos
  - Adição de dois registradores, preservando o conteúdo de B
  - Macro A `:=` `A` `+` B usando C

- Programa iterativo

```
C := 0

até B = 0 //zero_B
  faça (A := A + 1; C := C + 1; B := B – 1) //add_A,add_C,sub_B

até C = 0 //zero_C
  faça (B := B + 1; C := C - 1) //add_B,sub_C
```

Máquina Norma

- Mais exemplos
  - Multiplicação de dois registradores, preservando o conteúdo de B
  - Macro `A := A x B` usando `C,D`

- Programa iterativo

```
C := 0

até A = 0 //zeroA
  faça (C := C + 1; A := A - 1) //addC,subA

até C = 0 //zeroC
  faça (A := A + B usando D; C := C - 1) //macro,subC
```

Máquina Norma

- Mais exemplos
  - Fatorial de um registrador
  - Macro A `:= A!` usando B

- Programa iterativo

```
B := 0

até A = 0 //zeroA
  faça (B := B + 1; A := A - 1) //addB,subA

A := A + 1 //addA

até B = 0 //zeroB
  faça (A := A x B usando C,D; B := B - 1) //macro,subB
```

Máquina de Turing

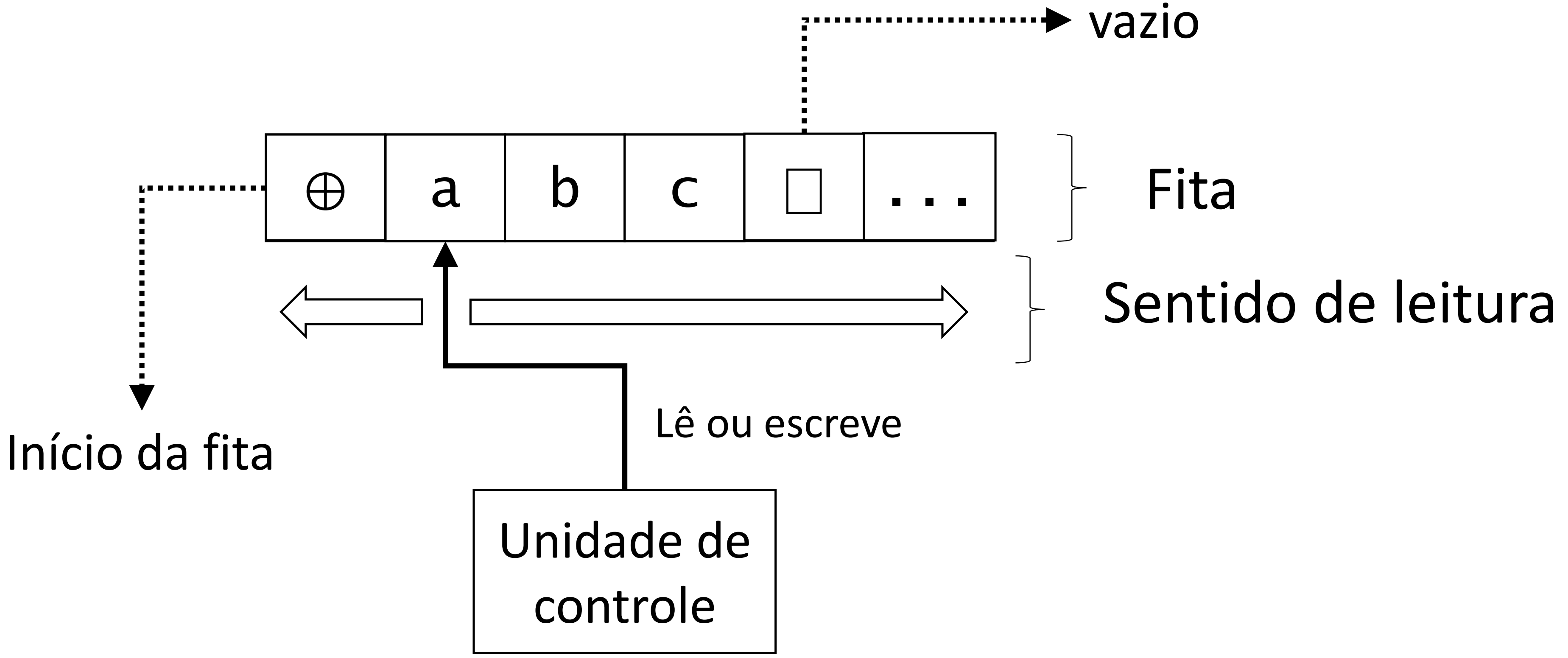
- Máquina de Turing
  - Proposta por Alan Turing (1936)
  - Mecanismo simples inspirado na ideia de uma pessoa que realiza cálculos usando um instrumento de escrita e um apagador

- Constituída por
  - Uma fita usada para entrada, saída e rascunho
  - Uma unidade de controle
  - Um programa que define a função de transição

Máquina de Turing

- Fita
  - Utilizada como um dispositivo de entrada, saída e memória
  - É dividida em células que armazenam um símbolo de cada vez
- Unidade de controle
  - Detém o estado de controle da máquina
  - Possui uma unidade de leitura e gravação que pode se deslocar tanto para esquerda (L) quanto para a direita (R) da fita
- Função de transição
  - A função de transição comanda as leituras e gravações
  - O sentido de movimento da cabeça define o estado da máquina

Máquina de Turing



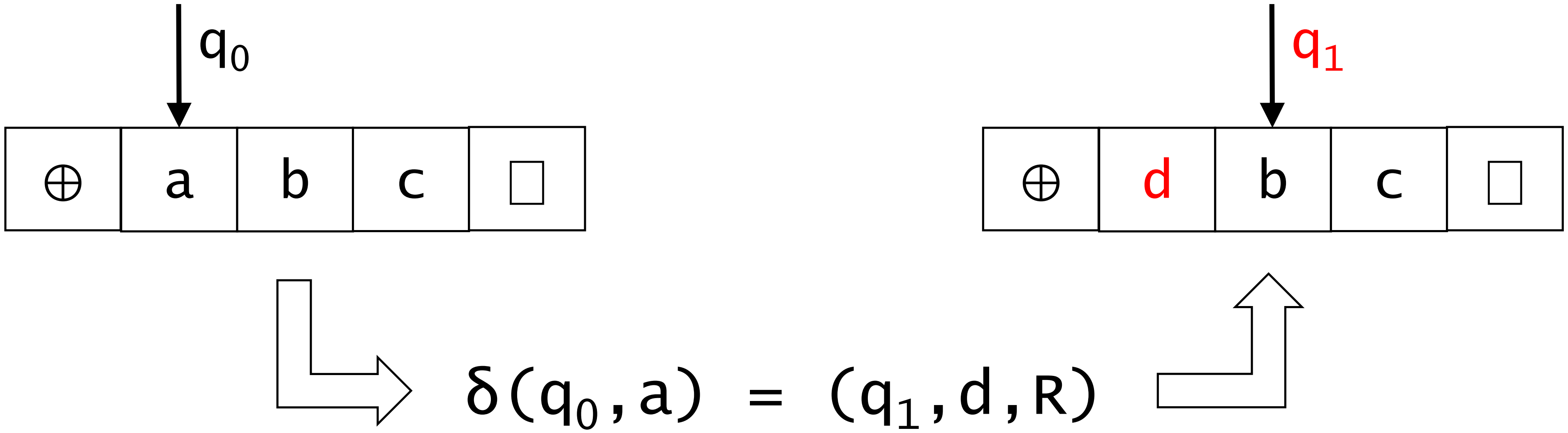
Máquina de Turing

- Definida por $M = < Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F >$
  - Q: conjunto de estados internos
  - Σ: conjunto do alfabeto de entrada
  - Γ: conjunto finito de símbolos, chamado de alfabeto da fita
  - δ: função de transição, definida por $\delta\colon Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
  - q_0: estado inicial ($q_0 \in Q$)
  - F: conjunto de estados finais ($F \in Q$)

  - Observação: $\square$ é um símbolo especial chamado de branco ($\square \in \Gamma$)

Máquina de Turing

- Função de transição
  - $\delta(q_0, a) = (q_1, d, R)$
  - Em q_0, ao ler o símbolo a da fita, então troca a por d, desloca-se uma casa para a direita e altera o estado para q_1



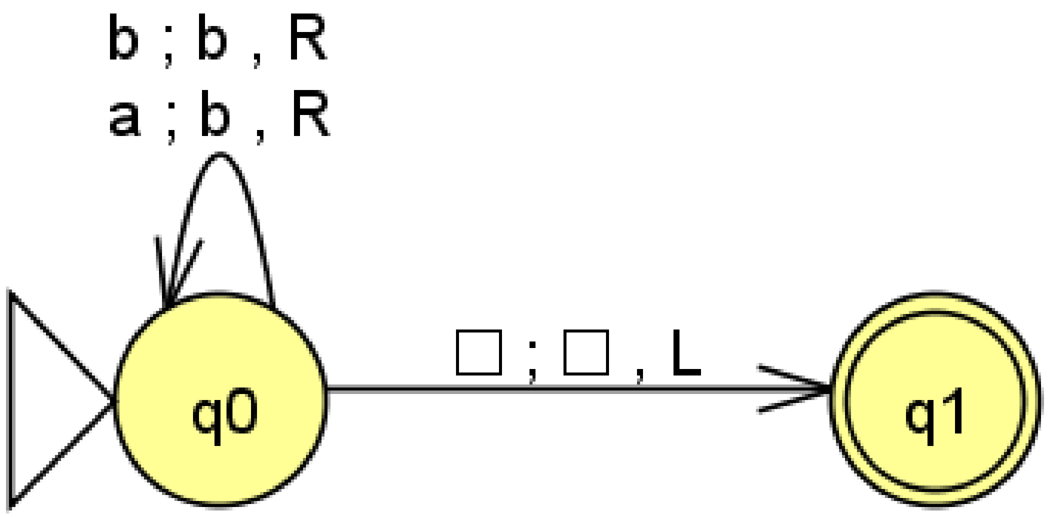
Máquina de Turing

- Exemplo 1
  - $M = < \{q_0,q_1\},\{a,b\},\{a,b,\square\},\delta,q_0,\{q_1\} >$
  - $\delta(q_0,a) = (q_0,b,R)$
  - $\delta(q_0,b) = (q_0,b,R)$
  - $\delta(q_0,\square) = (q_1,\square,L)$

  - $\delta(q_0,a) = (q_0,b,R)$: ao ler o símbolo a no estado q_0, escreve-se o símbolo b, anda uma célula para a direita e permanece no mesmo estado
  - $\delta(q_0,b) = (q_0,b,R)$: ao ler o símbolo b no estado q_0, mantém-se o símbolo b, anda uma célula para a direita e permanece no mesmo estado
  - $\delta(q_0,\square) = (q_1,\square,L)$: ao ler o símbolo $\square$ no estado q_0, mantém-se o símbolo $\square$, anda uma célula para a esquerda e muda para o estado q_1, que é o estado final

Máquina de Turing

- Exemplo 1
  - $M = < \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \{q_1\} >$
  - $\delta(q_0, a) = (q_0, b, R)$
  - $\delta(q_0, b) = (q_0, b, R)$
  - $\delta(q_0, \square) = (q_1, \square, L)$



Máquina de Turing

- Exemplo 2
  - $M = < \{q_0,q_1\},\{a,b\},\{a,b,\square\},\delta,q_0,\{\} >$
  - $\delta(q_0,a) = (q_1,a,R)$
  - $\delta(q_0,b) = (q_1,b,R)$
  - $\delta(q_0,\square) = (q_1,\square,R)$
  - $\delta(q_1,a) = (q_0,a,L)$
  - $\delta(q_1,b) = (q_0,b,L)$
  - $\delta(q_1,\square) = (q_0,\square,L)$

  - Esta MT entrará em “loop” infinito, já que não tem estado final definido
  - A aceitação de uma cadeia pela MT acontece quando o estado final é atingido,
  - independente de onde a cabeça está na fita
  - Se a MT para em algum estado não final ou simplesmente entrar em “loop” infinito, então a cadeia não é aceita

Máquina de Turing

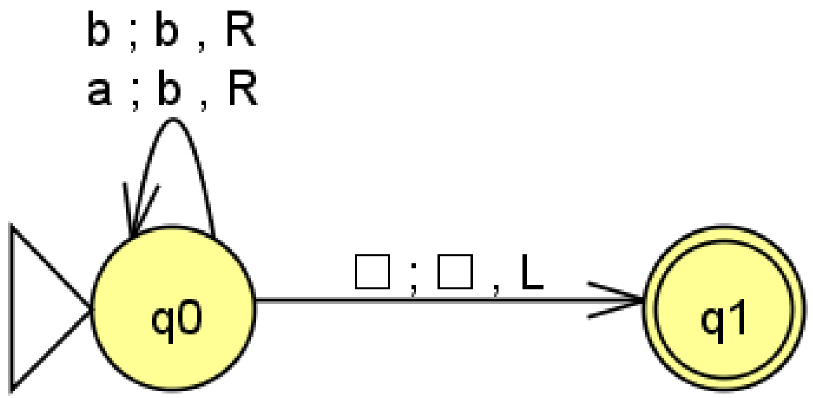
- Descrição instantânea
  - Qualquer configuração de uma MT é completamente determinada pelo:
    - Estado corrente da unidade de controle
    - Conteúdo da fita
    - Posição da cabeça de leitura-escrita
  - A configuração pode ser dada pela notação:
    - xqy onde x e y é o conteúdo da fita e q é o estado da unidade de controle

Máquina de Turing

- Descrição instantânea (cont.)
  - Se $\delta(q,a) = (p,b,R)$, então $x\underline{\mathbf{qa}}y \vdash x\underline{\mathbf{bp}}y$
  - Se $\delta(q,a) = (p,b,L)$, então $xc\underline{\mathbf{qa}}y \vdash x\underline{\mathbf{p}}c\underline{\mathbf{b}}y$
  - Se $\delta(q,\square) = (p,b,R)$, então $x\underline{\mathbf{q}} \vdash x\underline{\mathbf{bp}}$
  - Se $\delta(q,\square) = (p,b,L)$, então $xc\underline{\mathbf{q}} \vdash x\underline{\mathbf{p}}c\underline{\mathbf{b}}$

Máquina de Turing

- Descrição instantânea (cont.)
  - Aplicando a cadeia aa no exemplo 1
  - $M = < \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \{q_1\} >$
  - $\delta(q_0, a) = (q_0, b, R)$
  - $\delta(q_0, b) = (q_0, b, R)$
  - $\delta(q_0, \square) = (q_1, \square, L)$

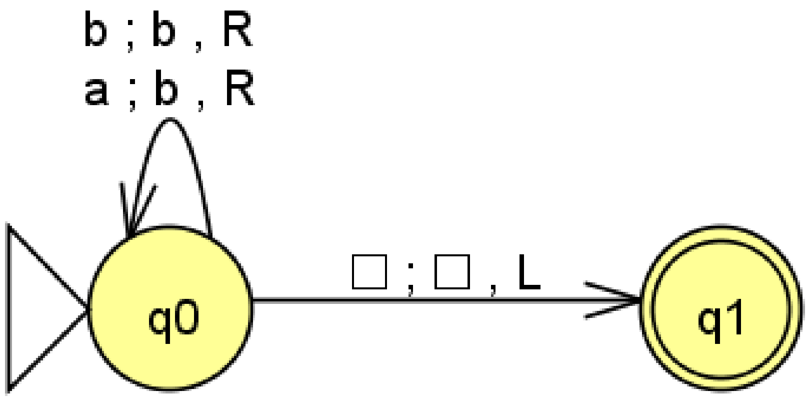


Máquina de Turing

- Descrição instantânea (cont.)
  - Aplicando a cadeia aa no exemplo 1
  - $M = < \{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \{q_1\} >$
  - $\delta(q_0, a) = (q_0, b, R)$
  - $\delta(q_0, b) = (q_0, b, R)$
  - $\delta(q_0, \square) = (q_1, \square, L)$

  - $q_0aa \vdash bq_0a \vdash bbq_0\square \vdash bq_1b$

  - $q_0aa \vdash^* bq_1b$



Máquina de Turing

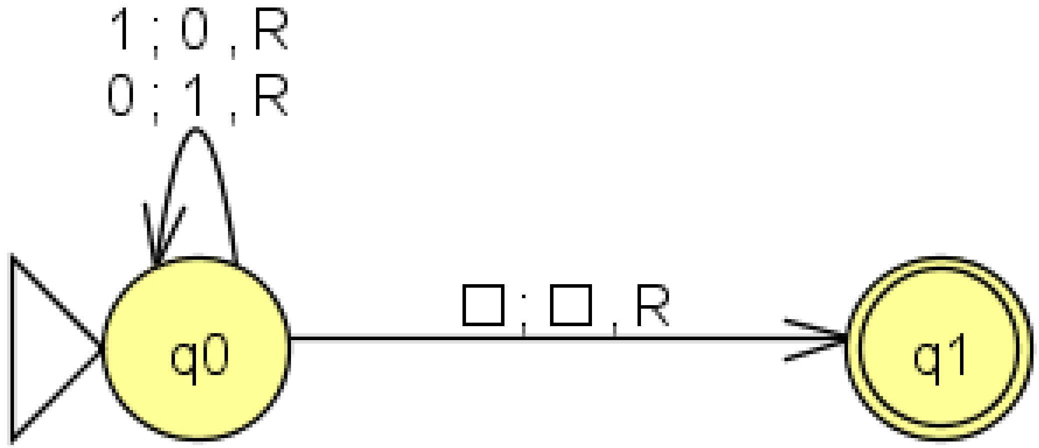
- Descrição instantânea (cont.)
  - Dada uma MT $= < Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F >$
  - Qualquer cadeia $a_1...a_{k-1}q_1a_ka_{k+1}...a_n$, com $a_i \in \Gamma$ e $q_i \in Q$ é uma descrição instantânea de M
  - Um movimento $a_1...a_{k-1}\mathbf{q_1a_k}a_{k+1}...a_n \vdash a_1...a_{k-1}b\mathbf{q_2a_{k+1}}...a_n$ é possível se e somente se $\delta(q_1,a_k) = (q_2,b,R)$
  - Um movimento $a_1...a_{k-1}\mathbf{q_1a_k}a_{k+1}...a_n \vdash a_1...\mathbf{q_2a_{k-1}}ba_{k+1}...a_n$ é possível se e somente se $\delta(q_1,a_k) = (q_2,b,L)$
  - MT é dito estar no <u>estado de interrupção</u> para alguma configuração inicial $x_1q_ix_2$ se $x_1q_ix_2 \vdash^* y_1q_jay_2$ para quaisquer q_j e a, para os quais $\delta(q_j,a)$ é indefinida

Máquina de Turing

- Exemplo 3
  - Crie uma Máquina de Turing para substituir 1 por 0 e vice-versa

Máquina de Turing

- Exemplo 3 (cont.)
  - Crie uma Máquina de Turing para substituir 1 por 0 e vice-versa
  - $M = < \{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \delta, q_0, \{q_1\} >$
  - $\delta(q_0, 0) = (q_0, 1, R)$
  - $\delta(q_0, 1) = (q_0, 0, R)$
  - $\delta(q_0, \square) = (q_1, \square, R)$



Máquina de Turing

- Exemplos clássicos de uso
  - Reconhecedores de linguagem
    - Identifica se uma dada cadeia pertence a linguagem L(MT)
  - Calcular funções
    - Resolução de problemas
  - Problemas de decisão
    - Aceita / rejeita, sim / não

Reconhecedor de linguagem

- Tem como objetivo determinar se uma determinada palavra sobre o alfabeto de entrada pertence ou não a uma certa linguagem

- Uma linguagem L reconhecida por uma MT é definida como:
  - $MT = < Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F >$
  - $L(MT) = \{ w \in \Sigma^+ : q_0 w \vdash^* x_1 q_f x_2$ onde $q_f \in F$ e $x_1, x_2 \in \Gamma^* \}$

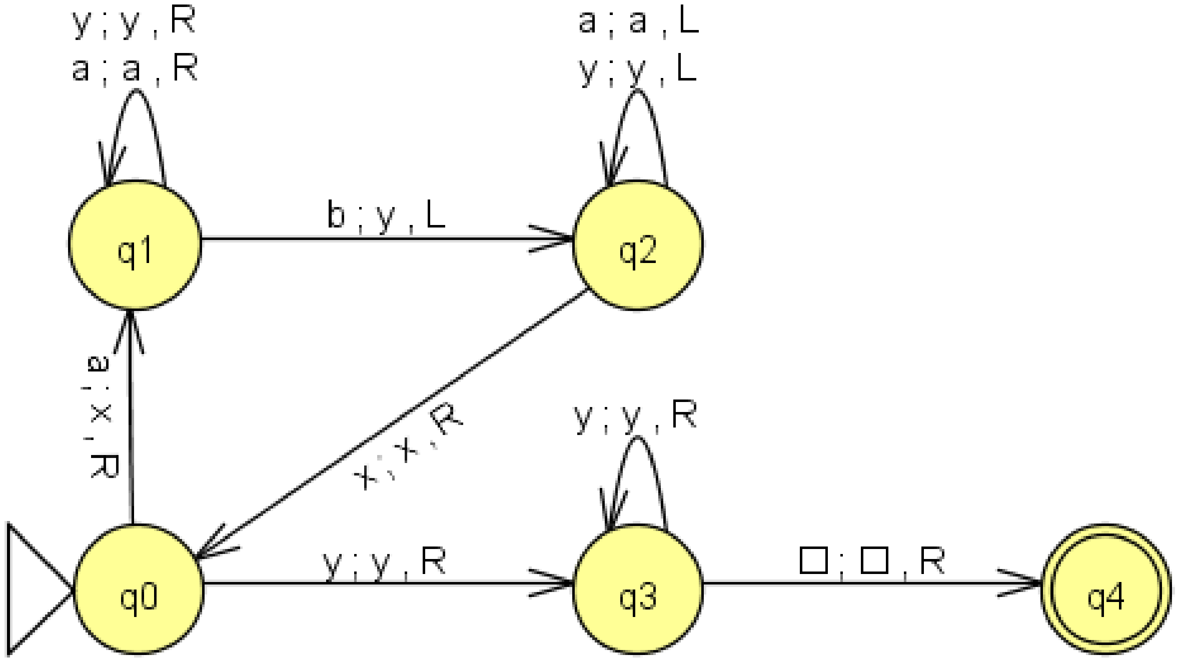
- Exemplo 4
  - Para $\Sigma = \{0\}$, uma MT que aceita a linguagem denotada pela expressão regular $ER = 0^*$ pode ser definida como:
  - $MT = < \{q_0, q_1\}, \{0\}, \{0, \square\}, \delta, q_0, \{q_1\} >$
    - $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$
    - $\delta(q_0, \square) = (q_1, \square, R)$

Reconhecedor de linguagem

- Exemplo 5
  - Para $\Sigma = \{a,b\}$, a MT que aceita $L = \{a^n b^n |\ n \geq 1\}$ pode ser definida como?

Reconhecedor de linguagem

- Exemplo 5 (cont.)
  - Para $\Sigma = \{a,b\}$, a MT que aceita $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ pode ser:
  - $MT = < \{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a,b\},\{a,b,x,y,\square\},\delta,q_0,\{q_4\} >$
    - $\delta(q_0,a) = (q_1,x,R)$
    - $\delta(q_1,a) = (q_1,a,R)$
    - $\delta(q_1,y) = (q_1,y,R)$
    - $\delta(q_1,b) = (q_2,y,L)$
    - $\delta(q_2,b) = (q_2,y,L)$
    - $\delta(q_2,a) = (q_2,a,L)$
    - $\delta(q_2,x) = (q_0,x,R)$
    - $\delta(q_0,y) = (q_3,y,R)$
    - $\delta(q_3,y) = (q_3,y,R)$
    - $\delta(q_3,\square) = (q_4,\square,R)$



Reconhecedor de linguagem

- Exemplo 5 (cont.)
  - Para $\Sigma = \{a,b\}$, a MT que aceita $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ pode ser definida como:
  - $MT = < \{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a,b\},\{a,b,x,y,\square\}, \delta, q_0, \{q_4\} >$

  - O estado q_0 ao encontrar a, escreve x (ou seja, marca a) e muda de estado (q_1)
  - O estado q_1 é responsável por encontrar um b e marcá-lo com y
  - Em seguida, no estado q_2 volta a fita até encontrar x, isto, é, o último a marcado
  - Quando q_2 encontra x, devolve o controle para q_0 que recomeça o processamento
  - Quando q_0 encontra y significa que já terminou de marcar os símbolos a
  - Então, se não houver mais b para serem marcados, a cadeia está correta
  - Para isto usa-se o estado q_3 para percorrer o restante da cadeia
  - Se for encontrado só y e em seguida branco ($\square$), então a cadeia está correta
  - Se for encontrado algum b, a MT para pois não existe transição $\delta(q_3,b) = ...$ e a cadeia não é aceita

Reconhecedor de linguagem

- Exemplo 5 (cont.)
  - Para $\Sigma = \{a,b\}$, a MT que aceita $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ pode ser definida como:
  - $MT = < \{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a,b\},\{a,b,x,y,\square\}, \delta, q_0, \{q_4\} >$

  - Os estados têm funções bem definidas a serem executadas

  - q_0 é responsável em marcar o símbolo a e acionar q_1 ou se encontrar y, acionar q_3
  - q_1 é responsável por encontrar b, marcá-lo com y e acionar q_2, porém, se em q_1 for encontrado branco ($\square$), significa que falta b na cadeia e não será aceita
  - q_2 é responsável por voltar a fita até encontrar o último a marcado (x) e, ao encontrar, aciona q_0
  - q_3 é responsável pela verificação final da cadeia, se encontrar só y seguido de branco ($\square$), a cadeia está correta e aciona o q_4, caso contrário, a cadeia não é aceita
  - q_4 é o estado final, indicando que a cadeia está correta

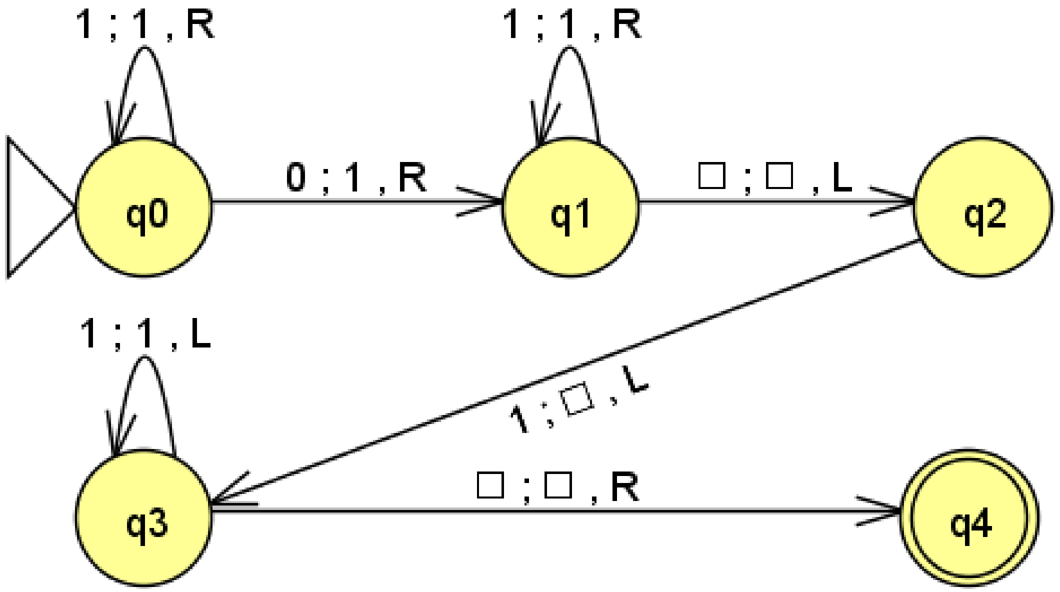
Calcular funções

- Funções Turing-computável
  - Uma função f é Turing-Computável ou simplesmente computável se existir alguma máquina de Turing $MT = < Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F >$ tal que:
    - $q_0w \vdash^*_{MT} q_f f(w)$, onde $q_f \in F$

- Exemplo 6
  - Dados dois números positivos x e y, como construir uma Máquina de Turing que calcule $x + y$?
  - Seja $x = |f(x)|$ com $f(x) \in \{1\}^*$, o número será representado pela quantidade de dígitos 1 (exemplo: $3 = 111$)
  - Se $5 + 3$, então $w = 111110111$ o resultado é $f(11111111) = 8$

Calcular funções

- Exemplo 6 (cont.)
  - Dados dois números positivos x e y, como construir uma Máquina de Turing que calcule x + y?
  - $MT = < \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1\}, \{1, 0, \square\}, \delta, q_0, \{q_4\} >$ com:
    - $\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$
    - $\delta(q_0, 0) = (q_1, 1, R)$
    - $\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, R)$
    - $\delta(q_1, \square) = (q_2, \square, L)$
    - $\delta(q_2, 1) = (q_3, 0, L)$
    - $\delta(q_3, 1) = (q_3, 1, L)$
    - $\delta(q_3, \square) = (q_4, \square, R)$



Problemas de decisão

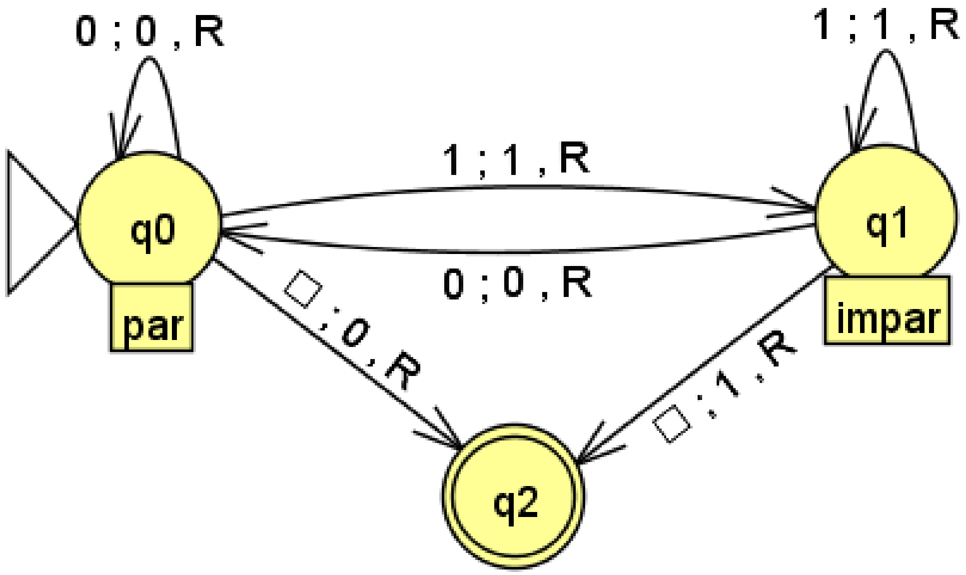
- São representados como uma questão sobre um sistema formal
  - Descreve problemas cuja resposta é sim ou não

- Linguagem formal constitui um problema de decisão
  - Quando formalizado como um problema para verificar se uma determinada cadeia de caracteres pertence ou não a um conjunto de cadeias de caracteres

- Exemplo 6
  - Como construir uma Máquina de Turing para decidir se um número representado em base binária é par ou ímpar?

Problemas de decisão

- Exemplo 6 (cont.)
  - Como construir uma Máquina de Turing para decidir se um número representado em base binária é par ou ímpar?
  - $MT = < \{q_0,q_1,q_2\},\{1,0\},\{1,0,\square\},\delta,q_0,\{q_2\} >$ com:
    - $\delta(q_0,0) = (q_0,0,R)$
    - $\delta(q_0,1) = (q_1,1,R)$
    - $\delta(q_1,0) = (q_0,0,R)$
    - $\delta(q_1,1) = (q_1,1,R)$
    - $\delta(q_0,\square) = (q_2,0,R)$
    - $\delta(q_1,\square) = (q_2,1,R)$



Variações da Máquina de Turing

- Máquina de Turing com opção de parada
  - Acrescenta à função de transição a possibilidade de não mover a cabeça da fita a cada movimento
  - Possui a mesma definição da Máquina de Turing original e só altera a definição da função de transição para:
    - $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,R,S\}$
    - Além dos símbolos L e R, também aparece o símbolo S (Stay, ficar)
  - É equivalente à Máquinas de Turing original

Variações da Máquina de Turing

- Máquina de Turing com fita semi-infinita
  - Originalmente a Máquina de Turing possui uma fita ilimitada tanto à esquerda quanto à direita
  - Se houver limite uma das direções é chamada de Máquina de Turing com fita semi-infinita
    - Em outras palavras, em uma direção da fita os movimentos são restritos pois não se pode mover para fora da fita
  - Se nas duas direções houver restrições de movimento então se trata de uma Máquina de Turing com fita limitada
    - Denominado autômato limitado linearmente ou autômato de fita limitada

Variações da Máquina de Turing

- Máquina de Turing com múltiplas fitas
  - Possui mais que uma fita
  - Para cada fita existe uma cabeça de leitura e escrita
  - A definição da função de transição é redefinida conforme:
    - $\delta: Q \times \Gamma^n \rightarrow Q \times \Gamma^n \times \{L, R\}^n$
    - onde n é a quantidade de fitas na Máquina de Turing
  - Exemplo
    - Suponha $n = 2$ e a função de transição: $\delta(q_0,a,b) = (q_1,x,y,L,R)$
    - No estado q_0, ao ler na `Fita1` o símbolo a e na `Fita2` o símbolo b, então vai para o estado q_1, escreve x na `Fita1`, y na `Fita2` e move-se para a esquerda na `Fita1` e para a direita na `Fita2`

Variações da Máquina de Turing

- Máquina de Turing com múltiplas cabeças
  - Possui uma única fita e k ($k > 1$) cabeças de leitura e gravação sobre a mesma fita
  - O processamento dependerá do estado corrente e do símbolo lido em cada uma das cabeças
    - Em outras palavras, dependendo do estado ou do símbolo, é determinado qual cabeça de leitura e gravação será utilizada para aplicar as funções de transição