

Проверка гипотез: концепция p-value

Проверять статистические гипотезы можно не только с помощью построения критической области для значений статистики критерия и сравнивая его с наблюдаемым значением статистики, но и оценивая на основе имеющихся данных вероятность того, что нулевая гипотеза имеет право на существование. Итак, можно использовать величину, которая называется p-value.

P-value – это вероятность получить значение статистики критерия равное наблюдаемому или более нетипичное по сравнению с наблюдаемым при условии, что нулевая гипотеза верна. Более неформально, p-value – это «жизнеспособность» нулевой гипотезы, которую мы оцениваем по имеющимся данным. Рассмотрим пример. У нас есть знакомый, который вдруг почувствовал себя нехорошо. Наша нулевая гипотеза заключается в том, что знакомый не болен, а просто переутомился перед сессией. Мы собираем различные данные, например, температуру тела, давление, другие симптомы, которые можно измерить количественно. По результатам анализа этих данных мы делаем вывод о том, что знакомый просто переутомился. Насколько мы оказались правы? Вероятность того, что значения показателей о здоровье, которые мы получили, действительно объясняются тем, что наш знакомый не болен, и есть p-value.

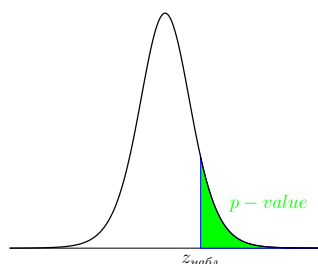
Что нам дают эти сведения? Во-первых, понимание, что p-value – это вероятность, причем не простая, а условная. Поэтому значения p-value всегда будут принадлежать интервалу $[0, 1]$. Во-вторых, так как p-value – это вероятность того, что нулевая гипотеза жизнеспособна, чем выше p-value, тем лучше, если мы хотим, чтобы нулевая гипотеза не была отвергнута. Остается два вопроса: как посчитать p-value и с чем его сравнивать, чтобы понять, нужно ли отвергать нулевую гипотезу?

Как и в случае с построением критической области, расчет p-value зависит от того, какого типа альтернативная гипотеза. Рассмотрим все случаи на примере z-статистики.

- **Правосторонняя альтернативная гипотеза**

Так как критическая область находится справа, нас интересует площадь «хвоста» справа от наблюдаемого значения:

$$p - value = P(z \geq z_{набл}) = 1 - P(z < z_{набл})$$

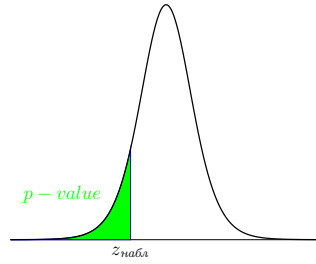


- **Левосторонняя альтернативная гипотеза**

Так как критическая область находится слева, нас интересует площадь «хвоста» слева от наблюдаемого значения:

$$p - value = P(z \leq z_{набл})$$

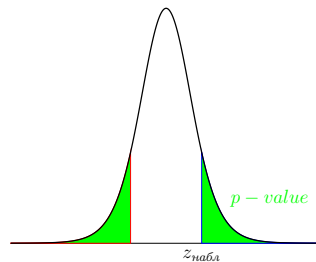
Почему это так? Левостороннюю альтернативу мы выбираем в случае, когда есть основания считать, что истинное значение параметра будет меньше значения, указанного в нулевой гипотезе. Когда такие основания появляются? Когда выборочная оценка параметра (например, доля, посчитанная по выборке) меньше значения, зафиксированного в нулевой гипотезе. Расчет наблюдаемого значения статистики устроен так, что если выборочная оценка параметра меньше значения, указанного в H_0 , то наблюдаемое значение статистики получается отрицательным, и поэтому все еще более нетипичные значения статистики находятся в левом «хвосте»:



- Двусторонняя альтернативная гипотеза

$$p - value = P(z \geq |z_{набл}|)$$

Почему это так? В случае двусторонней альтернативной гипотезы нас интересуют оба «хвоста» распределения, как правый, так и левый:



Конкретные примеры – см. в решениях к семинару 17 (там рассматриваются только случаи с правосторонней альтернативой, но с другими типами альтернатив можно действовать аналогично, просто учитывая знаки. Если нарисовали соответствующую вашему случаю картинку и под рукой есть R или таблица распределения – считайте, что почти все решили).

Как по p -value определить, есть ли основания отвергнуть нулевую гипотезу? Тут важно сначала зафиксировать уровень значимости α , а потом уже делать выводы. Уровень значимости α – это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна. P -value – это минимальный уровень значимости, на котором нулевая гипотеза может быть отвергнута. Соответственно, если $p - value$ меньше нашего фиксированного уровня значимости, на котором мы проверяем гипотезу, то нулевую гипотезу следует отвергнуть, если более – то отвергать нулевую гипотезу оснований нет. Если вдруг получилось, что p -value совпало с уровнем значимости, то в таких случаях поступают на усмотрение исследователя.

Итак, получается:

- $p - value < \alpha \Rightarrow H_0$ отвергаем на уровне значимости α , на имеющихся данных
- $p - value > \alpha \Rightarrow H_0$ не отвергаем на уровне значимости α , на имеющихся данных

Важно: в выводе относительно отвержения / не-отвержения нулевой гипотезы необходимо указывать уровень значимости, так как от этого зависит результат. Так, например, в случае, если p -value равно 0.02, у нас есть основания отвергнуть нулевую гипотезу на уровне значимости 5% ($0.02 < 0.05$), и нет оснований отвергнуть ее на уровне значимости 1% ($0.02 > 0.01$).