ОП «Политология», 2023-24
Введение в ТВиМС
Дополнительные задачи (14 февраля)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Для непрерывной случайной величины с функцией плотности $f(x)$:

$$\mathrm{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx;$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx.$$

Логика нахождения математического ожидания та же, что и для дискретных случайных величин: мы должны перемножить значения и соответствующие им вероятности, а затем результаты для всех значений просуммировать. В случае непрерывных величин аналогом вероятности выступает функция плотности, а для суммирования бесконечного числа значений используется определённый интеграл от $-\infty$ до $+\infty$.

Формула нахождения дисперсии такая же: $\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Используя определения математического ожидания X и X^2 выше, несложно записать формулу дисперсии непрерывной величины, используя интегралы.

Для решения следующих задач не нужно уметь работать с определёнными интегралами с бесконечной областью интегрирования, так как область значения случайных величин ограничена конкретным отрезком (от 0 до 3 в первой задаче и от a до b во второй задаче).

Задача 1. Дана функция плотности распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{9}x, & 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найдите $\mathrm{E}(X)$ и $\mathrm{D}(X)$.

Задача 2. Докажите, что для непрерывной случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке от a до b:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2};$$

$$\mathrm{D}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$