

## ОП «Политология», 2023-24

## Введение в ТВиМС

## Предельные теоремы (6 марта)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

**Центральная предельная теорема.** Пусть есть случайная величина с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Если из этой величины независимым образом много-много раз извлекать выборки достаточно большого<sup>1</sup> объёма  $N$ , то среднее арифметическое таких выборок будет иметь нормальное распределение с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\frac{\sigma^2}{N}$ .

**Задача 1.** Известно, что время, затраченное на выполнение первого домашнего задания имеет нормальное распределение со средним 100 минут и стандартным отклонением 20 минут. В рамках мини-исследования мы случайным образом извлекаем выборки объёма  $N = 6$ , то есть имитируем опрос шести студентов<sup>2</sup>.

- (а) Запишите параметры распределения среднего арифметического выборки.
- (б) Вычислите вероятность того, что среднее выборки будет менее 90 минут.
- (с) Вычислите вероятность того, что среднее выборки превысит 120 минут.
- (д) Вычислите вероятность того, что среднее выборки отклонится от среднего генеральной совокупности не более, чем на 5 минут.
- (е) Вычислите вероятность того, что среднее выборки отклонится от среднего генеральной совокупности не более, чем на 2%.

**Решение.**

- (а) Параметры нормального распределения – математическое ожидание и дисперсия (или стандартное отклонение). Согласно теореме, математическое ожидание равно  $a$ , дисперсия равна  $\frac{\sigma^2}{N}$ . В нашем случае  $a = 100$ ,  $\sigma = 20$ ,  $N = 6$ . Итого, среднее арифметическое имеет нормальное распределение со средним 100 и дисперсией примерно 67 (стандартным отклонением примерно 8):

$$\bar{x} \sim N(100, \sigma = 8).$$

Далее, зная эти параметры, можем найти любые вероятности по обычной схеме.

- (б) Вычислите вероятность того, что среднее выборки будет менее 90 минут.

$$\begin{aligned} P(\bar{x} < 90) &= P(Z < \frac{90 - 100}{8}) = P(Z < -1.25) = \Phi(-1.25) = \\ &= 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Много-много раз – в идеале все возможные выборки, хотя в реальности мы всё равно работаем с какой-то одной. Достаточно большого объёма – хотя бы с  $N = 30$ .

<sup>2</sup>Важно: центральная предельная теорема начинает действовать на выборках хотя бы из 30 наблюдений, но здесь мы продолжаем работать с выборкой из шести человек в продолжение интерактивного примера на семинаре, просто пока отметим, что наши результаты будут неточными!

- (с) Вычислите вероятность того, что среднее выборки отклонится от среднего генеральной совокупности не более, чем на 5 минут.

$$\begin{aligned} P(|\bar{x}-a| \leq 5) &= P(|\bar{x}-100| \leq 5) = P(95 \leq \bar{x} \leq 105) = P\left(\frac{95-100}{8} \leq Z \leq \frac{105-100}{8}\right) = \\ &= P(-0.63 \leq Z \leq 0.63) = \Phi(0.63) - \Phi(-0.63) = 0.7357 - (1 - 0.7357) = 0.471. \end{aligned}$$