ОП «Политология», 2023-24
Введение в ТВиМС
Непрерывные случайные величины (разбор №3 и №2)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 1. Случайная величина X имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке от 2 до 12.

(a) Определите, чему равно значение функции плотности на данном отрезке.
(b) Найдите медиану.
(c) Найдите квантиль уровня 0.4.

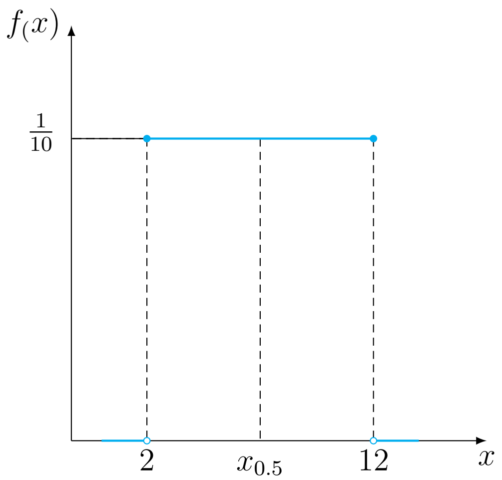
Решение. Равномерное распределение на отрезке $[a,\ b]$ имеет плотность распределения, заданную функцией

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

(a) В нашем случае величина распределена равномерно на отрезке $[2,\ 12]$. Поэтому:

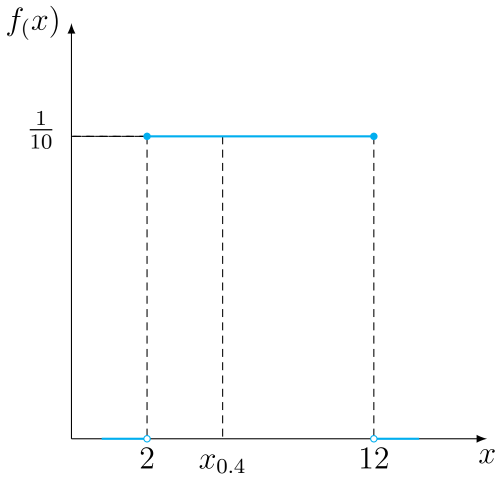
$$f(x) = \frac{1}{12-2} = \frac{1}{10}.$$

(b) Для удобства построим график плотности распределения:



Медиана – квантиль уровня 0.5, значение, которое случайная величина не превышает с вероятностью 0.5. Другими словами, медиана – значение, по которому площадь под графиком функции плотности можно поделить на две равные по площади части. В случае равномерного распределения медиана – это середина отрезка $[a,\ b]$, на котором определено распределение:

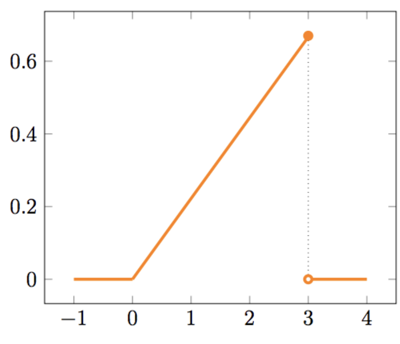
$$\text{Медиана} = x_{0.5} = \frac{2+12}{2} = 7.$$



(c) Опять обратимся к графику плотности распределения.
Квантиль уровня 0.4 – значение, которое 40% значений случайной величины не превышают, поэтому площадь под графиком функции плотности слева от этого значения равна 0.4. Обозначим нужный квантиль за $x_{0.4}$ и посмотрим на прямоугольник со стороной $[2;\ x_{0.4}]$. Длина одной стороны этого прямоугольника равна $(x_{0.4} - 2)$, длина другой стороны равна $1/10$. Перемножим длины сторон и получим площадь этого прямоугольника. А площадь нам известна, это 0.4. Запишем уравнение и найдем $x_{0.4}$:

$$(x_{0.4} - 2) \cdot \frac{1}{10} = 0.4$$
$$x_{0.4} = 6.$$

Задача 2. Функция $f(x)$ – функция плотности вероятности случайной величины X. Её график выглядит следующим образом:



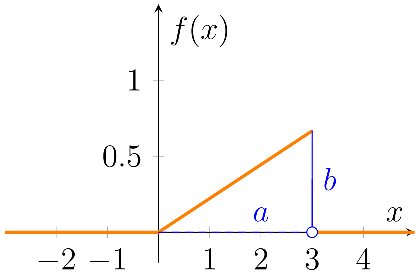
(a) Найдите $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$.
(b) Запишите уравнение функции $f(x)$.
(c) Найдите $\mathrm{P}(X = 0)$ и $\mathrm{P}(X = 2.5)$.
(d) Найдите $\mathrm{P}(0 < X < 1)$.
(e) Найдите $\mathrm{F}(1)$, $\mathrm{F}(2)$, где F – функция распределения.

Решение.

(a) С первыми двумя значениями всё просто, определяем значения по графику: $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$. С $f(3)$ всё интереснее.

Известно, что $f(x)$ – функция плотности вероятности, а значит, площадь под графиком равна 1. Полная площадь под графиком складывается из площадей на разных участках области определения функции плотности вероятности. По графику видно, что на участках при $x < 0$ и при $x > 3$ функция $f(x) = 0$. Следовательно, площадь под графиком $f(x)$ на этих участках тоже равна 0. Эти участки нас не интересуют.

Остается участок при $0 < x < 3$. На этом участке мы можем достроить график до прямоугольного треугольника.



Площадь этого треугольника равна 1. Из геометрии нам известно, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$

По графику видно, что $a = 3$. Воспользовавшись формулой площади, получаем:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot b$$

$$b = \frac{2}{3}$$

А ведь b – это и есть $f(3)$.

(b) Запишем уравнение функции $f(x)$ в общем виде, по графику видно, что она линейна:

$$f(x) = kx + b,$$

где b – это значение $f(x)$, при котором прямая пересекает ось Oy, а k – коэффициент наклона, показывающий, насколько увеличивается $f(x)$ при увеличении x на 1. Видно, что $b = 0$, так как прямая проходит через точку $(0, 0)$, поэтому

$$f(x) = kx.$$

Найдём k. Для этого поделим прирост y на прирост x, то есть катет b на катет a на графике выше:

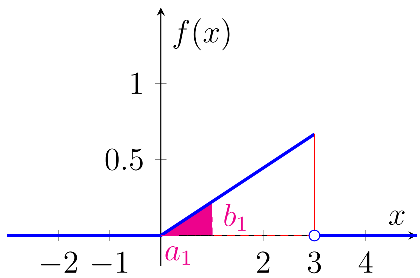
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{2}{9}.$$

Получаем уравнение прямой:

$$f(x) = \frac{2}{9}x.$$

(c) Так как X – непрерывная случайная величина (для дискретных функция плотности не определена), вероятность в точке всегда равна 0, поэтому $\mathrm{P}(X = 0) = 0$ и $\mathrm{P}(X = 2.5) = 0$.

(d) Вероятность $\mathrm{P}(0 < X < 1)$ – это площадь под графиком на отрезке от 0 до 1.



Перейдём к поиску площади закрашенного треугольника. Значение a_1 нам известно, это длина отрезка $[0, 1]$, то есть 1. Значение b_1 – это $f(1)$, можем подставить $x = 1$ в уравнение функции:

$$f(1) = \frac{2}{9} \cdot 1 = \frac{2}{9}.$$

Итого:

$$\mathrm{P}(0 < X < 1) = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

Для тех, кто любит геометрию: маленький треугольник с катетами a_1, b_1 и большой треугольник с катетами a, b подобны, причём стороны маленького треугольника в 3 раза меньше соответствующих сторон большого. А значит, площадь маленького треугольника будет в 9 раз меньше площади большого (отношение площадей подобных треугольников равно квадрату квадрату отношения сторон). Раз площадь большого равна 1, площадь маленького равна 1/9.

(e) Здесь всё аналогично, пользуемся определением функции распределения и считаем площади:

$$\mathrm{F}(1) = \mathrm{P}(X < 1) = \mathrm{P}(0 < X < 1) = \frac{1}{9}.$$

$$\mathrm{F}(2) = \mathrm{P}(X < 2) = \mathrm{P}(0 < X < 2) = \frac{4}{9}.$$