

ОП «Политология», 2023-24

Введение в ТВиМС

Математическое ожидание и дисперсия (24 января)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 1. Случайная величина X описывает индекс качества сладкого новогоднего подарка, который считается как разность между числом шоколадных конфет и числом карамелек в подарке. Её ряд распределения задан следующим образом:

X	-6	-2	0	2	8
p	0.2	?	0.1	0.1	0.2

- (a) Найдите пропущенную вероятность и математическое ожидание X .
 (b) Найдите дисперсию случайной величины X .

Решение.

- (a) Пропущенная вероятность: $1 - (0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.2) = 0.4$.

X	-6	-2	0	2	8
p	0.2	0.4	0.1	0.1	0.2

$$E(X) = -6 \cdot 0.2 - 2 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.2 = -0.2.$$

- (b) Найдите дисперсию случайной величины X .

Воспользуемся более удобной формулой дисперсии: $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Построим ряд распределения X^2 :

X^2	0	4	36	64
p	0.1	0.5	0.2	0.2

$$\text{Вычисляем } E(X^2) = 0 + 4 \cdot 0.5 + 36 \cdot 0.2 + 64 \cdot 0.2 = 22.$$

$$\text{Вычисляем } E(X)^2 = (-0.2)^2 = 0.04.$$

$$\text{Подставляем всё в формулу: } D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 22 - 0.04 = 21.96.$$

Дополнительно. Так как возникали вопросы, как вычисляется дисперсия по определению, то есть по формуле $D(X) = E(X - E(X))^2$, вот пример вычислений. $E(X)$ у нас уже посчитано, поэтому можем вычесть его из каждого значения X и получить соответствующие разности, а затем возвести их в квадрат – нам нужны квадраты разностей:

X	-6	-2	0	2	8
$X - E(X)$	$-6 - (-0.2)$	$-2 - (-0.2)$	$0 - (-0.2)$	$2 - (-0.2)$	$8 - (-0.2)$
$X - E(X)$	-5.8	-1.8	0.2	2.2	8.2
$(X - E(X))^2$	33.64	3.24	0.04	4.84	67.24

Вероятности у нас остаются те же (значения X не меняются, мы просто перешли к квадратам разностей на их основе):

$(X - E(X))^2$	33.64	3.24	0.04	4.84	67.24
p	0.2	0.4	0.1	0.1	0.2

Осталось вычислить математическое ожидание по обычной схеме:

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = 33.64 \cdot 0.2 + 3.24 \cdot 0.4 + 0.04 \cdot 0.1 + 4.84 \cdot 0.1 + 67.24 \cdot 0.2 = 21.96.$$

Расчёты не самые приятные, но теперь должно стать понятнее, что к чему в определении дисперсии.