

## ОП «Политология», 2023-24

## Введение в ТВиМС

## Биномиальное распределение (разбор №3)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

**Задача 1.** Известно, что муми-тролли составляют 20% жителей Муми-дола<sup>1</sup>. Фрекен Снорк решила пригласить на чай 6 случайно выбранных жителей этой страны. Найдите вероятность того, что среди них будет:

- (а) ровно 3 муми-тролля;
- (б) менее 2 муми-троллей;
- (с) хотя бы 4 муми-тролля;
- (д) более 1 муми-тролля;
- (е) не более 5 муми-троллей.

**Решение.** В данной задаче одно испытание Бернулли – это присутствие одного гостя на чаепитии. Всего гостей шестеро, они выбираются случайно, поэтому вряд ли договариваются между собой, как приходить, другими словами, действуют независимо. Поэтому всего получаем шесть испытаний Бернулли,  $n = 6$ . Так как в вопросах о вероятностях нас интересуют Муми-тролли, событие «Муми-тролль пришёл в гости на чай» – это успех. Всего Муми-троллей в долине 20%, вероятность успеха  $p = 0.2$ , а вероятность неудачи равна  $q = 1 - p = 0.8$ . Формула для вычисления вероятности получения  $k$  успехов в серии из  $n$  испытаний у нас есть:

$$P(S = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

(а)  $P(S = 3) = C_6^3 \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^3 \approx 0.08$ .

(б)  $P(S < 2) = P(S = 0) + P(S = 1) = C_6^0 \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^6 + C_6^1 \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^5 \approx 0.65$ .

(с)  $P(S \geq 4) = P(S = 4) + P(S = 5) + P(S = 6) = C_6^4 \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^2 + C_6^5 \cdot 0.2^5 \cdot 0.8^1 + C_6^6 \cdot 0.2^6 \cdot 0.8^0 \approx 0.017$ .

(д)  $P(S > 1) = 1 - P(S \leq 1) = 1 - P(S = 0) + P(S = 1) = 1 - 0.65 = 0.35$ .

(е)  $P(S \leq 5) = 1 - P(S > 5) = 1 - P(S = 6) = 1 - C_6^6 \cdot 0.2^6 \cdot 0.8^0 \approx 0.999$ .

Число муми-троллей, приглашённых на чай – биномиальная случайная величина  $X$ . Тогда:

$$E(X) = np = 6 \cdot 0.2 = 1.2$$

$$D(X) = npq = 6 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.96$$

$$sd(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0.96} \approx 0.98.$$

Интерпретация: в среднем, если приглашать в гости 6 случайно выбранных жителей Муми-дола, среди гостей можно встретить примерно одного муми-тролля (округлили математическое ожидание). При этом число муми-троллей среди гостей может отклоняться от ожидаемого среднего значения примерно на 1 (округлили стандартное отклонение). Итого, в среднем, в гостях можно встретить  $1 \pm 1$  муми-троллей, то есть от 0 до 2 (но может быть и больше, просто вероятность небольшая).

<sup>1</sup>Согласно мемуарам Муми-папы, его семья – не единственные муми-тролли в долине.