Введение в многомерный статистический анализ
2021-2022 учебный год

Автор лекции: Тамбовцева А.А.

Вычисление собственных значений матрицы

Собственный вектор квадратной матрицы A – ненулевой вектор v, который при умножении на матрицу A не меняет своего направления (остается параллельным самому себе). Такой вектор при умножении на матрицу умножается на некоторое число λ, которое называется *собственным значением* матрицы A:

$$Av = \lambda v.$$

Чтобы найти собственные значения матрицы A, необходимо решить характеристическое уравнение матрицы A, которое записывается следующим образом[1]:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Пример 1. Найдём собственные значения следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Запишем характеристическое уравнение.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\det(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Посчитаем определитель матрицы и решим полученное квадратное уравнение.

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Можем решить через теорему Виета, здесь это возможно и удобно:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

А можем и через дискриминант, но это подольше:

[1] Так как обозначения могут отличаться, на всякий случай: det – определитель матрицы, I – единичная матрица.

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$$
$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$$
$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$$

Про собственные вектора поговорим на занятии.

Пример 2. Для фанатов R аналогичная операция в R (но это не отменяет обязательства уметь считать собственные значения для матриц 2×2 руками).

Код (разбиваем вектор на 2 строки и получаем матрицу):

```
A <- matrix(c(2, 2, 1, 3), nrow = 2,  byrow = TRUE)
eigen(A)
```

Результат (сразу и собственные значения, и собственные вектора):

```
eigen() decomposition
$values
[1] 4 1

$vectors
           [,1]       [,2]
[1,] -0.7071068 -0.8944272
[2,] -0.7071068  0.4472136
```