ОП «Политология», 2022-23
Введение в ТВиМС
Непрерывные случайные величины. (разбор задач)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 2. Известно, что непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке от 2 до 10.

(a) Определите, чему равно значение функции плотности на данном отрезке.
(b) Рассчитайте медиану распределения.
(c) Рассчитайте квантиль уровня 0.4.
(d) Рассчитайте верхний и нижний квартили распределения.

Решение.

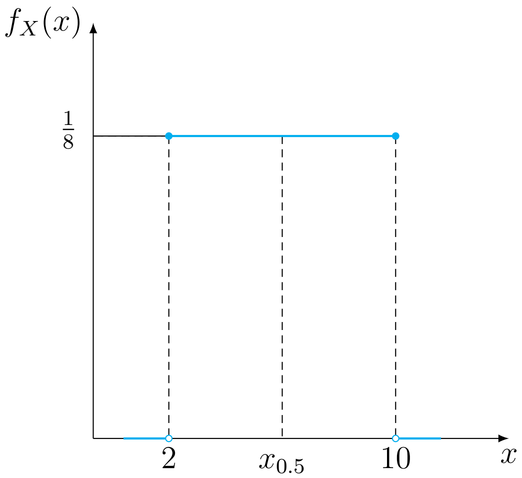
(a) Равномерное распределение на отрезке $[a,\ b]$ имеет плотность распределения, заданную функцией

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

В нашем случае величина распределена равномерно на отрезке $[2,\ 10]$. Поэтому получаем:

$$f(x) = \frac{1}{10-2} = \frac{1}{8}.$$

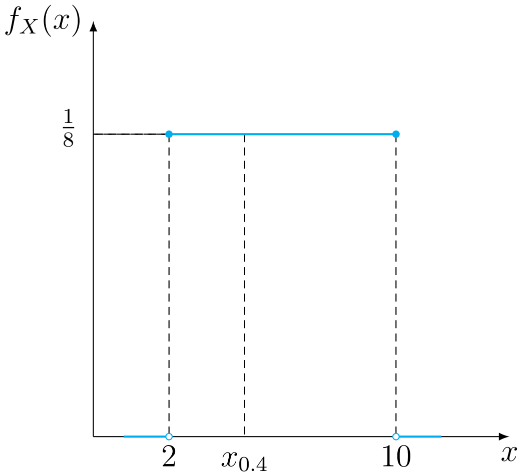
(b) Для удобства построим график плотности распределения:



Медиана – квантиль уровня 0.5, значение, которое делит распределение на две равные части. В случае равномерного распределения все просто, медиана – это середина отрезка $[a,\ b]$, на котором определено распределение. Найдем середину нашего отрезка:

$$\text{Медиана} = x_{0.5} = \frac{2+10}{2} = 6.$$

(c) Опять обратимся к графику плотности распределения:



Квантиль уровня 0.4 – значение, которое 40% значений случайной величины не превышают, поэтому площадь под графиком функции плотности слева от этого значения равна 0.4. Обозначим нужный квантиль за $x_{0.4}$ и посмотрим на прямоугольник со стороной $[2;\ x_{0.4}]$. Длина одной стороны этого прямоугольника равна $(x_{0.4} - 2)$, длина другой стороны равна 1/8. Перемножим длины сторон и получим площадь этого прямоугольника. А площадь нам известна, это 0.4. Запишем уравнение и найдем $x_{0.4}$:

$$(x_{0.4} - 2) \cdot \frac{1}{8} = 0.4$$
$$x_{0.4} = 5.2.$$

(d) Верхний квантиль – квантиль уровня 0.75. Обозначим его за $x_{0.75}$ и найдем по аналогии с предыдущим пунктом:

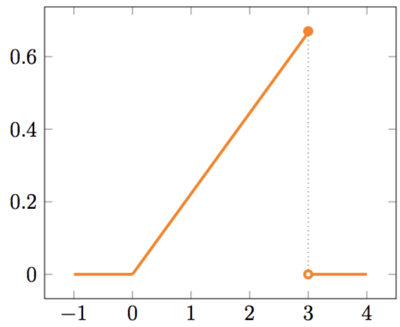
$$(x_{0.75} - 2) \cdot \frac{1}{8} = 0.75$$
$$x_{0.75} = 8.$$

Нижний квантиль – квантиль уровня 0.25. Находим:

$$(x_{0.25} - 2) \cdot \frac{1}{8} = 0.25$$
$$x_{0.25} = 4.$$

Хотя, в данном случае квартили можно было найти проще. Нижний квартиль – медиана «левой половины» распределения, а верхний квартиль – медиана «правой половины» распределения. Поэтому можно было просто найти середины отрезков $[2; 6]$ и $[6; 10]$ и получить те же ответы 4 и 8.

Задача 4. Функция $f(x)$ – функция плотности вероятности случайной величины X. Её график выглядит следующим образом:



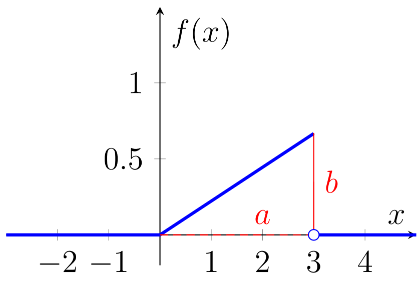
(a) Найдите $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$.
(b) Найдите $\mathrm{P}(X = 0)$, $\mathrm{P}(X = 2.552)$.
(c) Найдите $\mathrm{F}(1)$, где F – функция распределения.

Решение.

(a) С первыми двумя значениями всё просто, определяем значения по графику: $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$. С $f(3)$ всё интереснее.

Из условия задачи известно, что $f(x)$ – функция плотности вероятности. Из свойств функции плотности следует, что площадь под графиком функции плотности равна 1. Полная площадь под графиком складывается из площадей под графиком на разных участках области определения функции плотности вероятности. Мы видим по графику, что на участках при $x < 0$ и при $x > 3$ функция $f(x) = 0$. Следовательно, площадь под графиком $f(x)$ на этих участках тоже равна 0. Эти участки нас не интересуют.

Остается участок при $0 < x < 3$. График $f(x)$ образует с осью Ox угол, и на этом участке мы можем достроить график до треугольника.



Получаем прямоугольный треугольник. Его площадь равна 1 (следует из свойств функции плотности). Из геометрии нам известно, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$

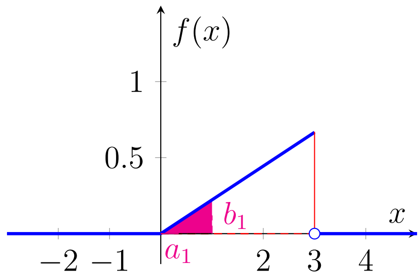
По графику видно, что $a = 3$. Воспользовавшись формулой площади, получаем:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot b.$$

Отсюда $b = 2/3$. А ведь b – это и есть значение функции плотности в точке 3. Получаем $f(3) = 2/3$.

(b) Так как X – непрерывная случайная величина, вероятности в точке всегда равны 0, поэтому $\mathrm{P}(X = 0) = 0$ и $\mathrm{P}(X = 2.552) = 0$.

(c) По определению $\mathrm{F}(1) = \mathrm{P}(X < 1) = \mathrm{P}(0 < X < 1)$. Это площадь под графиком на отрезке от 0 до 1.



Перейдем к поиску площади закрашенного треугольника.

Первый способ: подобие треугольников

В данном случае у нас есть два треугольника: большой с катетами a, b и площадью $S = 1$ и маленький фиолетовый с катетами a_1, b_1 и неизвестной площадью. Эти два треугольника подобны по двум углам. Следовательно, соотношение их сторон, которые лежат напротив равных углов, одинаково:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{1}{3}.$$

У подобных треугольников есть полезное свойство:

$$\frac{S_1}{S} = (\frac{a_1}{a})^2 = (\frac{b_1}{b})^2.$$

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, квадрату отношения сторон. Отсюда:

$$\frac{S_1}{S} = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}.$$

Следовательно, площадь маленького треугольника в 9 раз меньше площади большого, и равна она $1/9$. Получаем:

$$\mathrm{F}(1) = \mathrm{P}(0 < X < 1) = \frac{1}{9}.$$

Второй способ: уравнение прямой

Запишем общее выражение для функции $f(x)$. По графику видно, что функция $f(x)$ линейна. Поэтому можем записать уравнение прямой:

$$f(x) = kx + b,$$

где b – это значение $f(x)$, при котором прямая пересекает ось Oy, а k – коэффициент наклона, показывающий, насколько увеличивается $f(x)$ при увеличении x на 1. Видно, что $b = 0$, так как прямая проходит через точку $(0, 0)$. Найдем k. Для этого поделим прирост y на прирост x, то есть катет b на катет a на графике выше:

$$2/3 : 3 = \frac{2}{9}.$$

Получили уравнение прямой, то есть $f(x) = \frac{2}{9}x$.

Теперь можем узнать, что $f(1) = 2/9$, поэтому $b_1 = 2/9$. Находим площадь закрашенного треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

Поэтому $\mathrm{F}(1) = \mathrm{P}(0 < X < 1) = 1/9$.