Optimisation non linéaire avec contraintes inégalités

Master de Mécanique
Rafic YOUNES

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Plan

- **Introduction**
- Conditions de Khun-Trucker
- Fonction de Pénalité intérieure
- Fonction de Pénalité extérieure
- Lagrangien augmenté Pénalisé

Introduction

Problème :

$$\min f(x)$$
$$\text{s.c. } x \in X$$
$$g(x) \leq 0$$

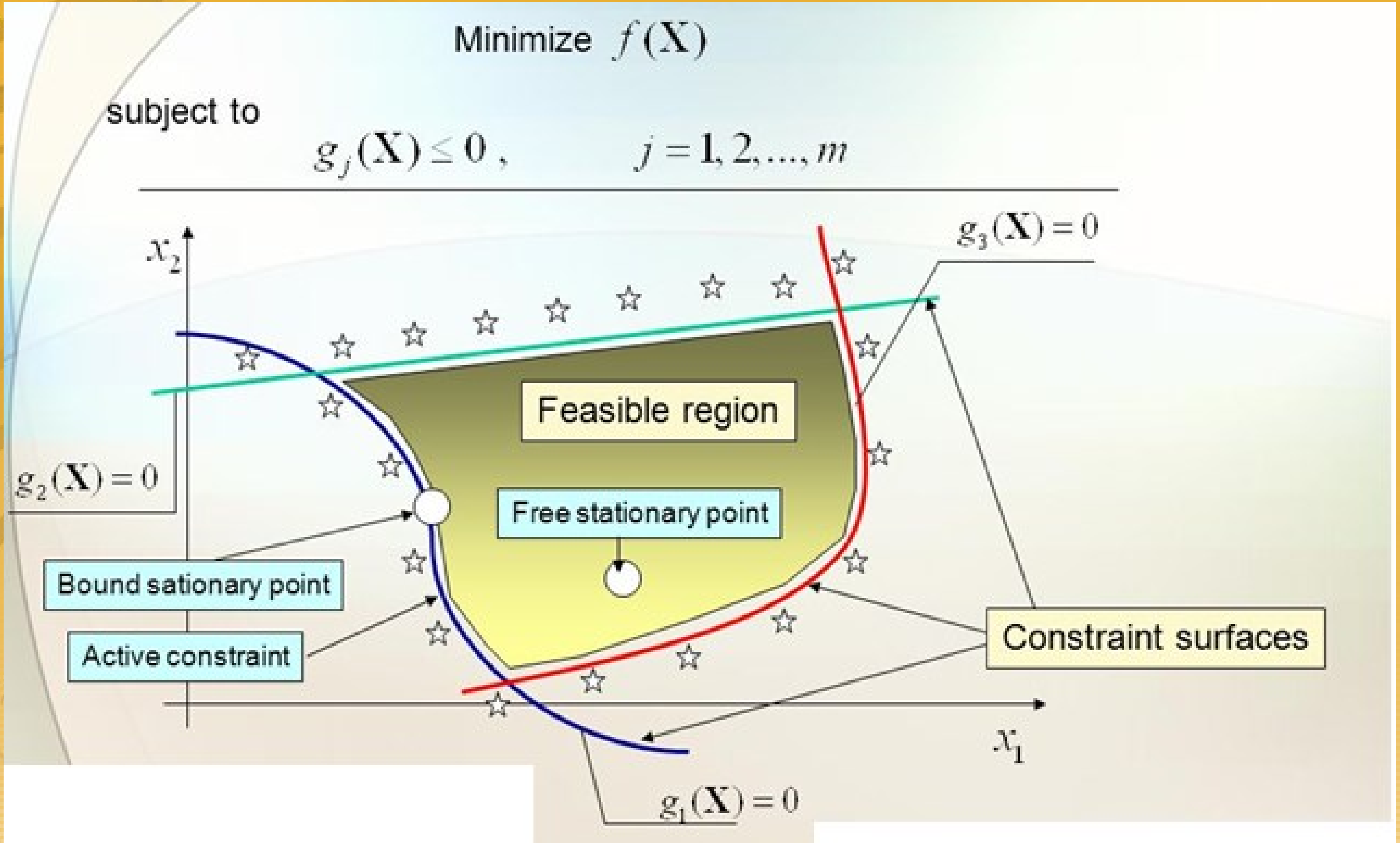
- $f:IR^n \rightarrow IR$ et $g:IR^n \rightarrow IR^r$ continues
- X ensemble fermé
- Intérieur des contraintes d'inégalité :

$$S = \{x \in X \text{ t.q. } g(x) < 0\}$$

Plan

- Introduction
- **Conditions de Khun-Trucker**
- Fonction de Pénalité intérieure
- Fonction de Pénalité extérieure
- Lagrangien Pénalisé

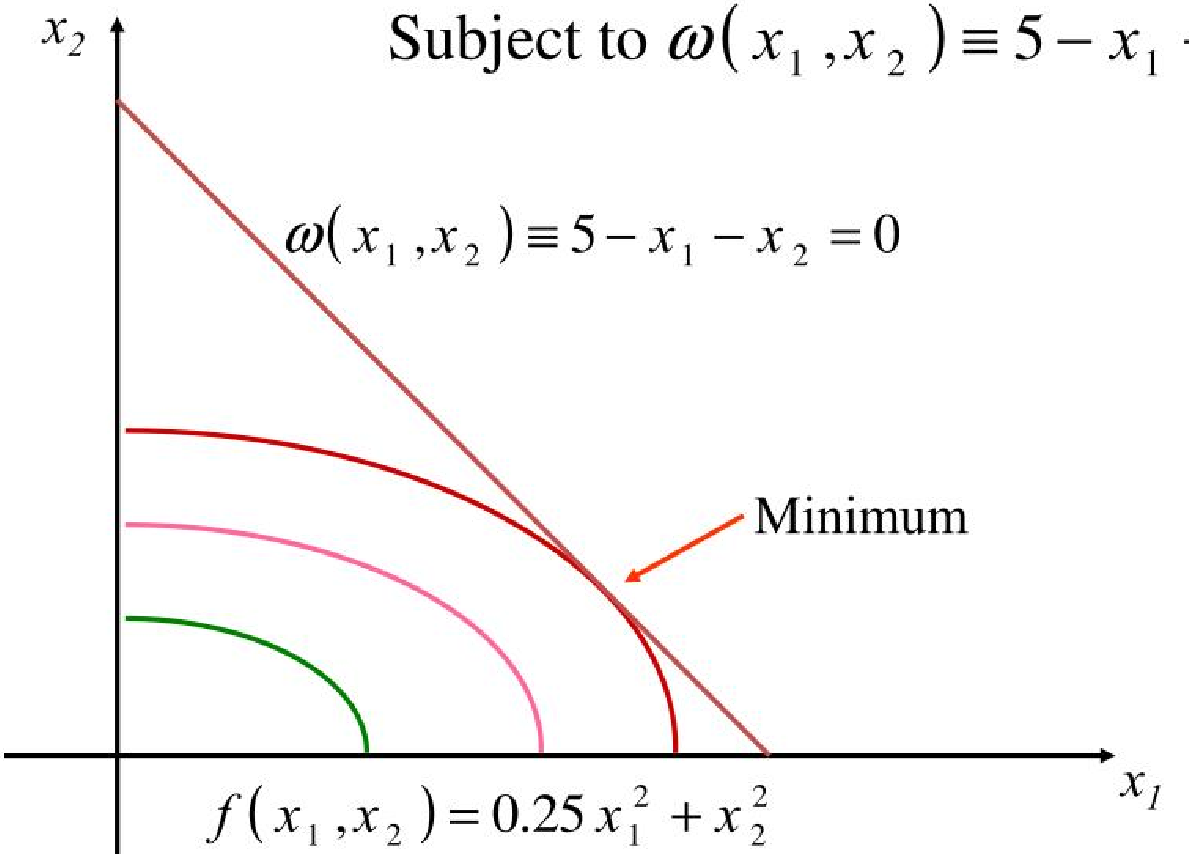
Conditions de Khun-Trucker



Conditions de Khun-Trucker

Minimise $f(x_1, x_2) = 0.25\,x_1^2 + x_2^2$

Subject to $\omega(x_1, x_2) \equiv 5 - x_1 - x_2 = 0$



Conditions de Khun-Trucker

- Théorème Karush-Kuhn-Tucker (KKT) :

Soit x un minimum local du problème $\mathrm{Min}_{x \in R^n}$ f(x) sous contraintes h(x) = 0, g(x)≤0, avec f : $R^n \rightarrow R^m$ et h : $R^n \rightarrow R^p$ continûment différentiables.

Si les contraintes sont linéairement indépendantes, alors il existe un vecteur unique $\lambda^* \in R^m$ et un vecteur unique $\mu^* \in R^p$ tels que :

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0;$$

$$\mu^* \geq 0; \; j = 1, \ldots\ldots, p;$$

$$\text{et } \mu_j^* g_j(x^*) = 0; \; j = 1, \ldots\ldots, p;$$

Conditions de Khun-Trucker

Example

$$\max_{\{x_1,x_2\}} -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$L(x) = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) - \lambda_2(x_1 + 3x_2 - 9)$$

Kuhn Tucker conditions are

$$-2(x_1 - 4) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$-2(x_2 - 4) - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$

$x_1 + x_2 \le 4$, $\lambda_1 \ge 0$, and $\lambda_1(x_1 + x_2 - 4) = 0$

$x_1 + 3x_2 \le 9$, $\lambda_2 \ge 0$, and $\lambda_2(x_1 + 3x_2 - 9) = 0$

Plan

- Introduction
- Conditions de Khun-Trucker
- **Fonction de Pénalité intérieure**
- Fonction de Pénalité extérieure
- Lagrangien Pénalisé

Fonction barrière

Idée :

- On ajoute une fonction de coût

$$B(x): S \to IR$$

- telle que B(x) soit continue et différentiable

$$\lim_{g_j(x)\to 0} B(x) = +\infty \quad j = 1, \ldots, r$$

Fonction barrière

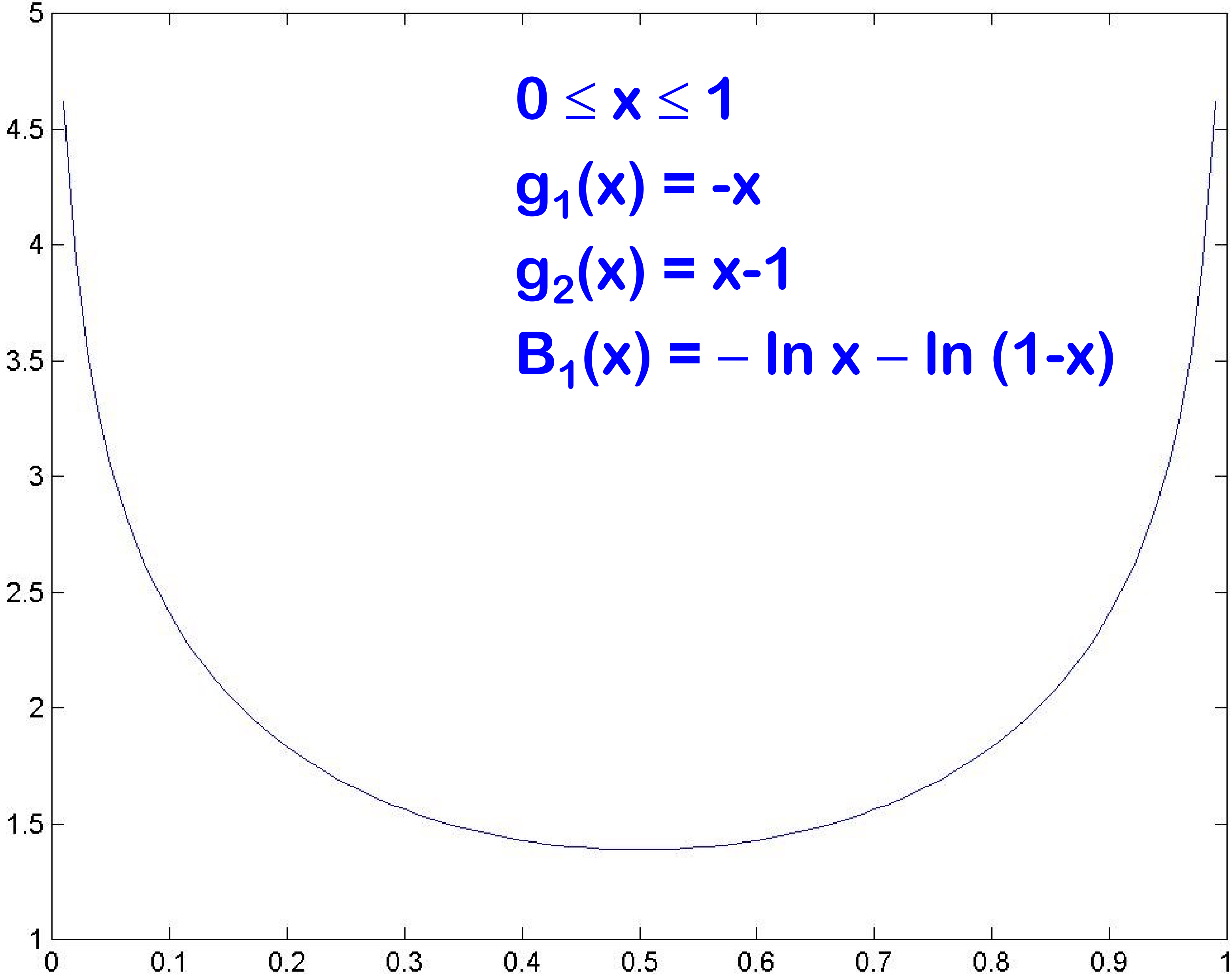
Exemples :

- Fonction barrière logarithmique

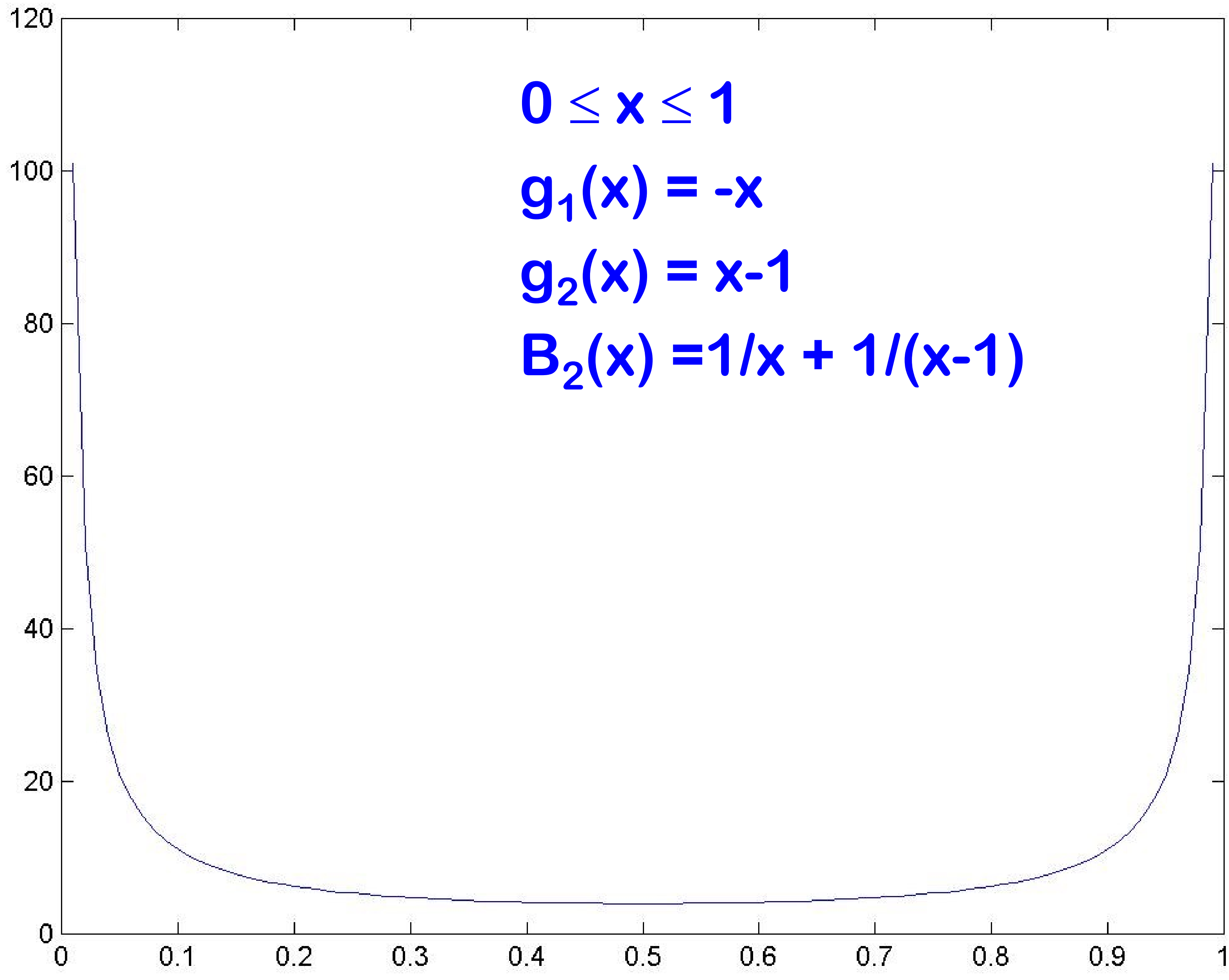
$$B_1(x) = -\sum_{j=1}^{r} \ln\left(-g_j(x)\right)$$

- Fonction barrière inverse

$$B_2(x) = -\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{g_j(x)}$$



$0 \le x \le 1$
$g_1(x) = -x$
$g_2(x) = x-1$
$B_1(x) = -\ln x - \ln(1-x)$
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



$0 \leq x \leq 1$
$g_1(x) = -x$
$g_2(x) = x-1$
$B_2(x) = 1/x + 1/(x-1)$
120
100
80
60
40
20
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Méthodes de barrière

- Soit une suite (ε_k) telle que

$$0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k \quad k=0,1,\ldots$$

$$\varepsilon_k \to 0$$

- Pour chaque k on définit

$$x_k = \operatorname{argmin}_{x \in S} (f(x)+\varepsilon_k B(x))$$

Méthodes de barrière

Notes :

- $x_k \in S$ est un point intérieur pour les contraintes d'inégalité.
- Si $X=IR^n$, chaque sous-problème est un problème sans contrainte.
- Si X est convexe, on peut utiliser les méthodes de gradient projeté (e.g. la méthode de Newton contrainte).
- $\forall x \in S$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k B(x)=0$

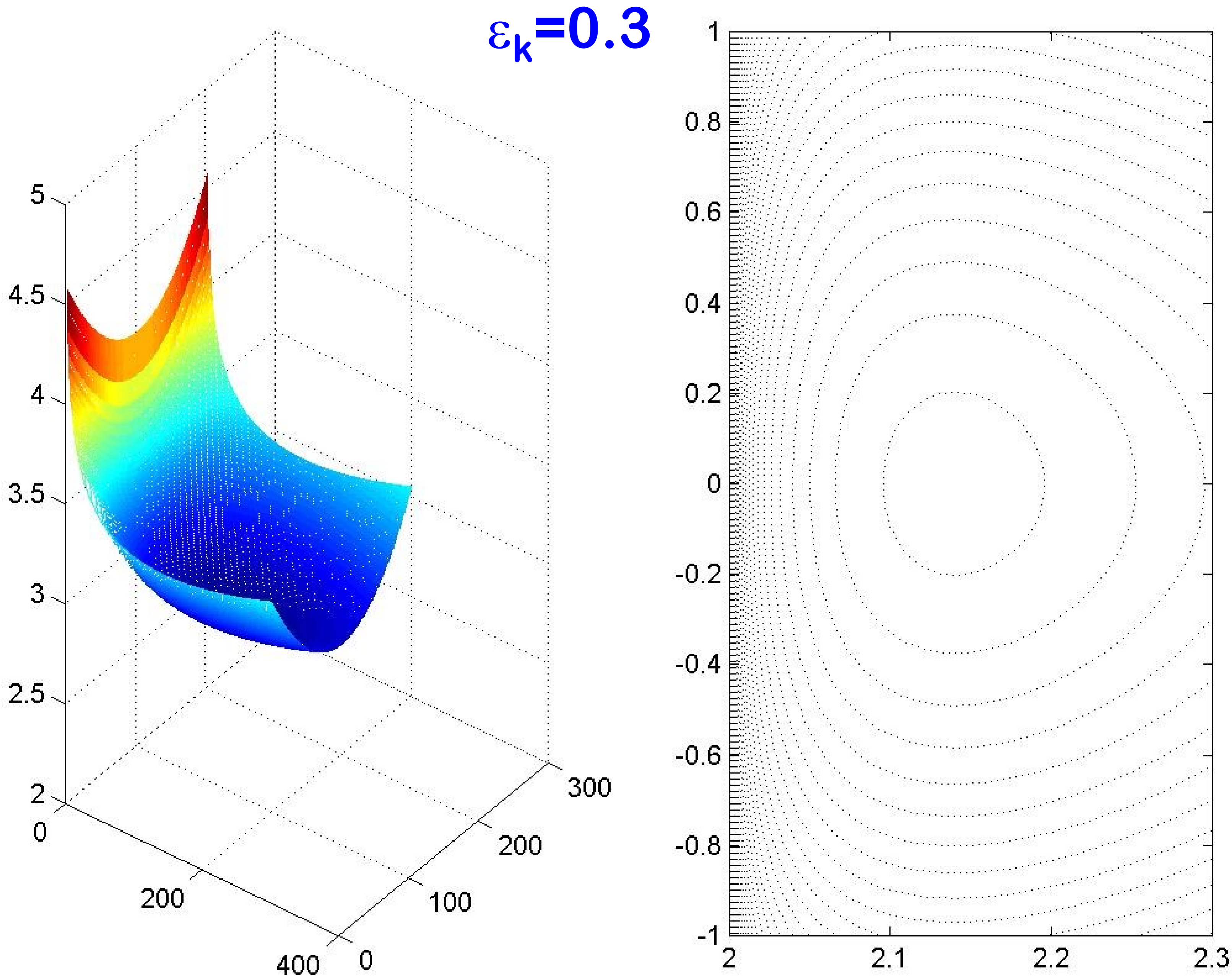
Méthodes de barrière

Exemple :

$$\min f(x) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

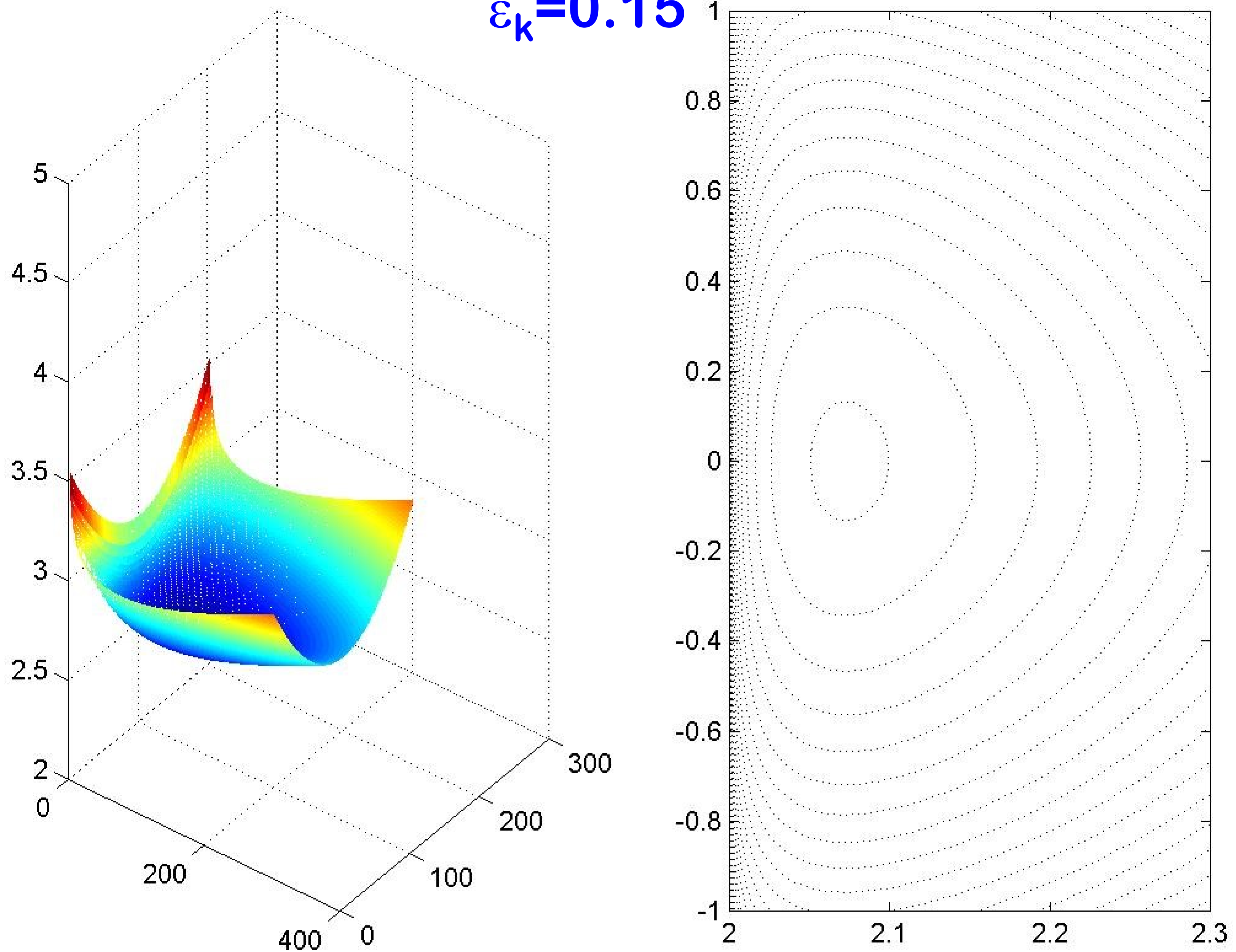
$$\text{s.c. } 2 \le x_1$$

- Solution optimale : $x^* = (2,0)$
- $x_k = \operatorname{argmin}_{x_1 > 2} \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \varepsilon_k \ln(x_1 - 2)$
- $x_k = (1 + (1+\varepsilon_k)^{½}, 0)$

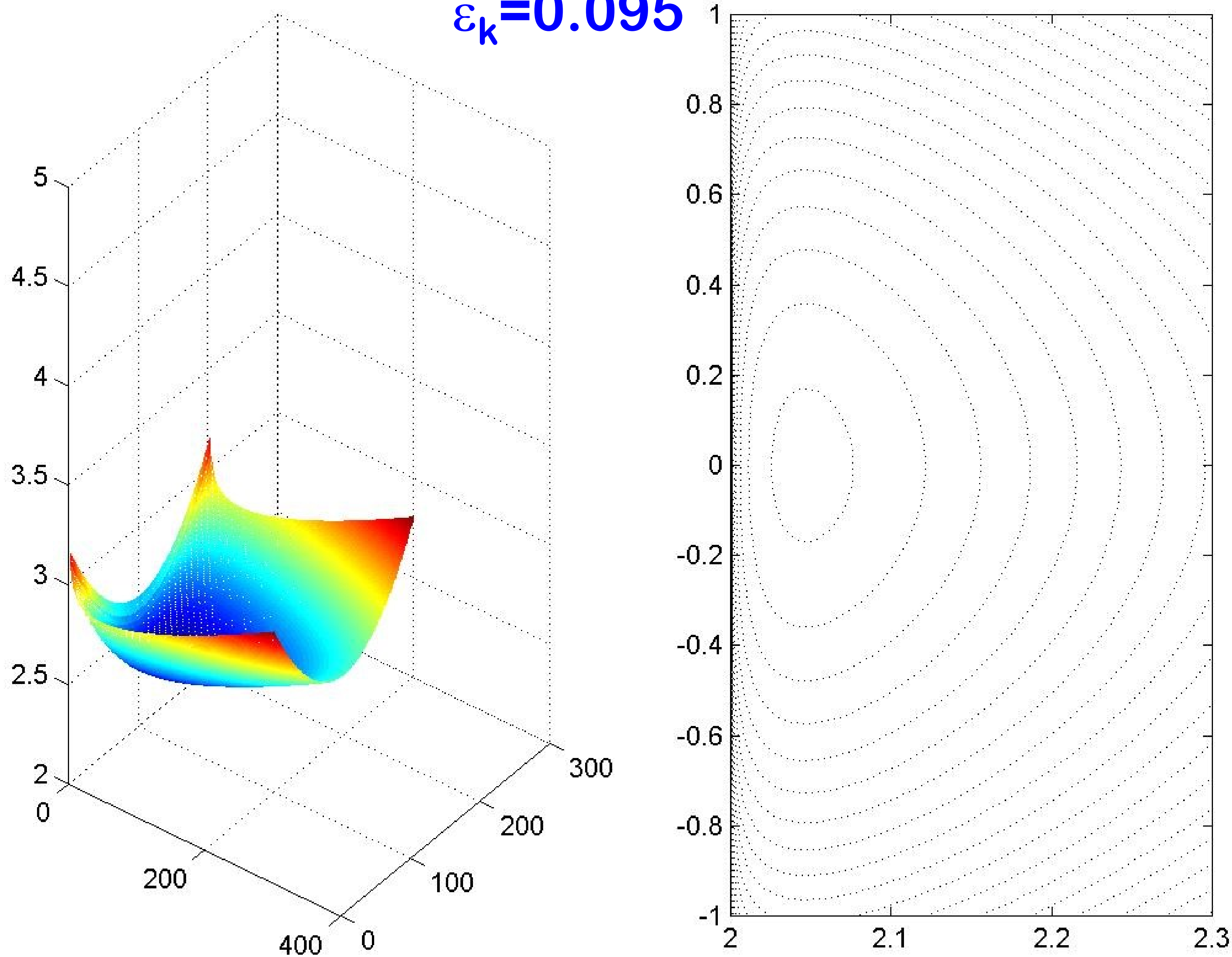


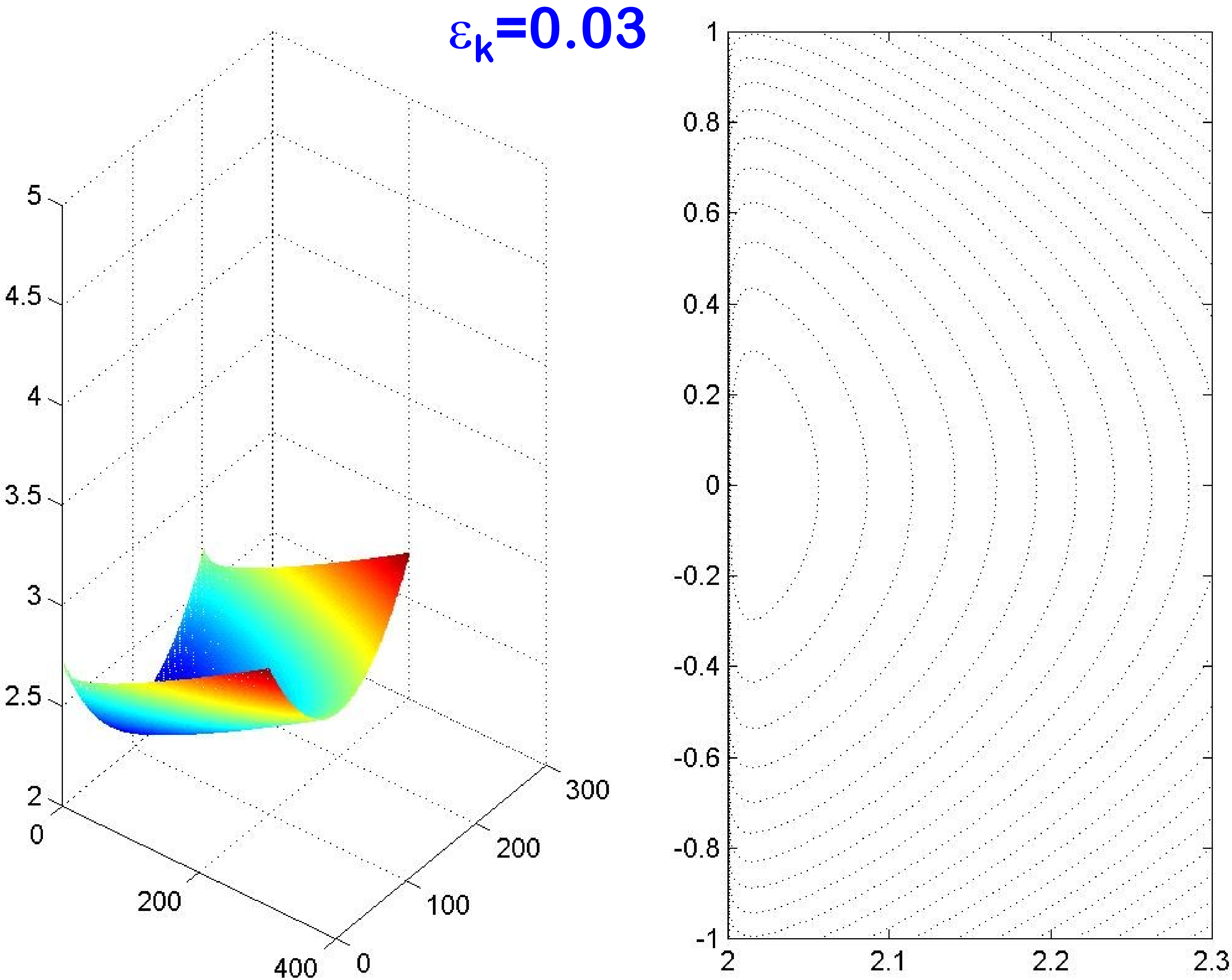
εk=0.3
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
0
200
400
0
100
200
300
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
2
2.1
2.2
2.3

ε_k=0.15



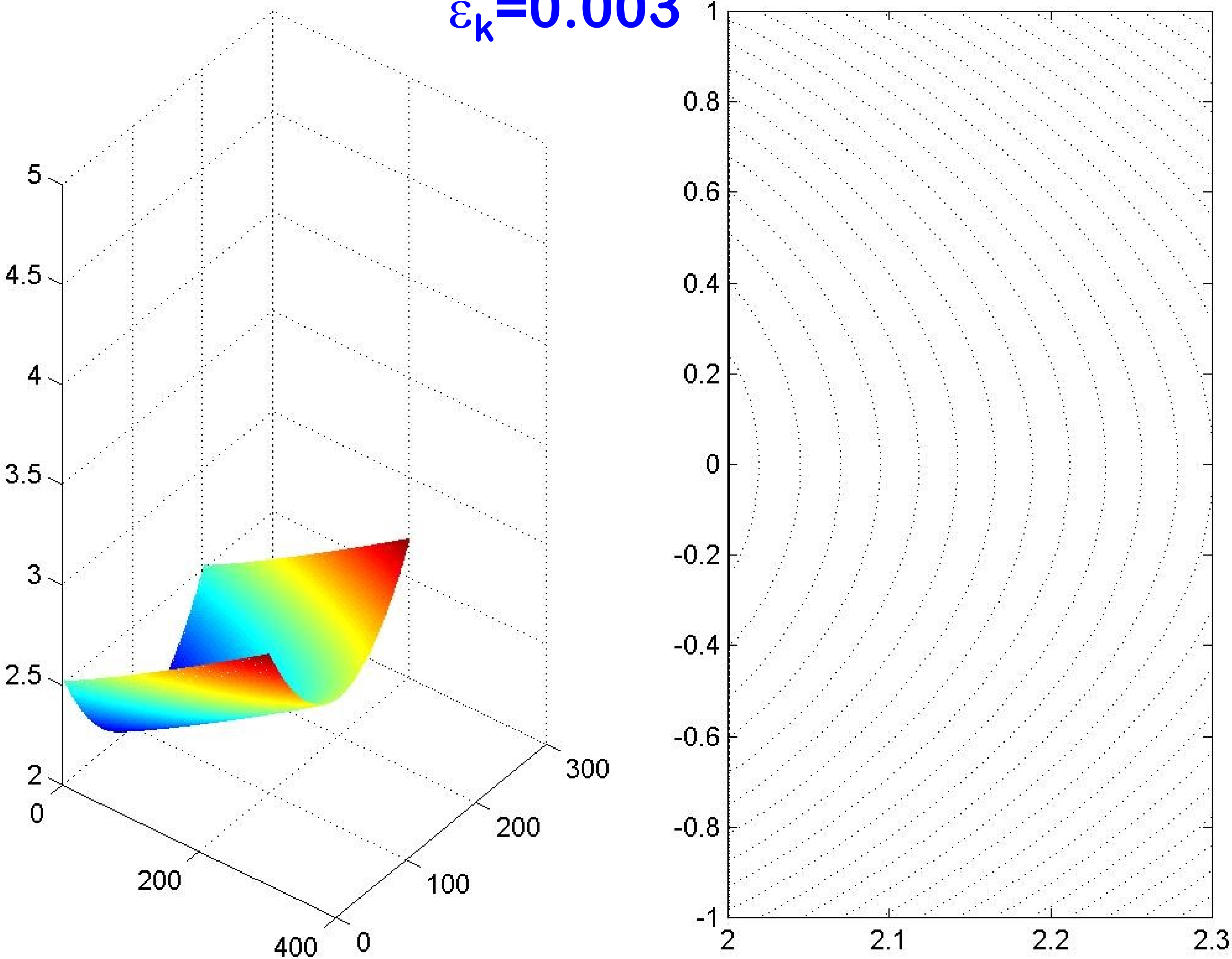
ε_k=0.095





ε_k=0.03
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
0
200
400
0
100
200
300
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
2
2.1
2.2
2.3

ε_k=0.003



Méthodes de barrière

Propriété :

- Tout point limite d'une suite (x_k) générée par une méthode de barrière est un minimum global du problème original.

Plan

- Introduction
- Conditions de Khun-Trucker
- Fonction de Pénalité intérieure
- **Fonction de Pénalité extérieure**
- Lagrangien Pénalisé

Méthode de Pénalité Extérieure

$$\Phi(x,k) = f(x) + \frac{k}{2} \cdot \sum_{j=1}^{p} Max\left[0, g_j(x)\right]^2$$

Solve the following problem using

a) Exterior Penalty Method.

b) Interior Penalty Method.

$$\min\{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 + 10\}$$

$$\begin{aligned} &subject\ \ to \\ 4x_1^2 + x_2^2 &\leq 16 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Plan

- Introduction
- Conditions de Khun-Trucker
- Fonction de Pénalité intérieure
- Fonction de Pénalité extérieure
- **Lagrangien Pénalisé**

Lagrangien Pénalisé

$$L_k(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot h_i(x) + \frac{k}{2} \cdot \sum_{i=1}^{p} \left[h_i(x)\right]^2 \begin{array}{l} + \dfrac{k}{2} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{p} Max\left[0, g_j(x)\right]^2 \\ - \varepsilon \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{p} Log\left[-g_j(x)\right] \end{array}$$

RESUME

Fonction des pénalités :

$$\Phi(x,k) = f(x) + \frac{k}{2}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left[h_i(x)\right]^2 \begin{array}{l} + \frac{k}{2}\cdot\sum_{j=1}^{p} Max\left[0, g_j(x)\right]^2 \\ - \varepsilon\cdot\sum_{j=1}^{p} Log\left[-g_j(x)\right] \end{array}$$

Lagrangien Augmenté :

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot h_i(x) + \sum_{j=1}^{p}\mu_j\cdot g_j(x) \quad \mu_j\cdot g_j(x) = 0 \quad \mu_j \geq 0$$

Lagrangien Pénalisé :

$$L_k(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot h_i(x) + \frac{k}{2}\cdot\sum_{i=1}^{p}\left[h_i(x)\right]^2 \begin{array}{l} + \frac{k}{2}\cdot\sum_{j=1}^{p} Max\left[0, g_j(x)\right]^2 \\ - \varepsilon\cdot\sum_{j=1}^{p} Log\left[-g_j(x)\right] \end{array}$$