Rafic Younes

No Linear Programming
Principles
& Applications

CONTENU

- INTRODUCTION
- DEFINITION ET EXEMPLES SIMPLES
- OPTIMISATION EN INGENIERIE
- PRINCIPE DE MOINDRE ACTION
- FORME GENERALE
- PLAN DES CHAPITRES DU COURS

INTRODUCTION

- L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant :

  à modéliser, à analyser et à résoudre …

  analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble.

INTRODUCTION

- L'optimisation joue un rôle important en :
  - recherche opérationnelle (domaine à la frontière entre l'informatique, les mathématiques et l'économie),
  - dans les mathématiques appliquées (fondamentales pour l'industrie et l'ingénierie),
  - en analyse et en analyse numérique, en statistique (estimation du maximum de vraisemblance d'une distribution ou les paramètres du fonction),
  - pour la recherche de stratégies dans le cadre de la théorie des jeux,
  - ou encore en théorie du contrôle et de la commande.

INTRODUCTION

- Beaucoup de systèmes susceptibles d’être décrits par un modèle mathématique sont optimisés.

- La qualité des résultats et des prédictions dépend :
  - de la pertinence du modèle,
  - du bon choix des variables que l'on cherche à optimiser,
  - de l’efficacité de l’algorithme
  - et des moyens pour le traitement numérique.

CONTENU

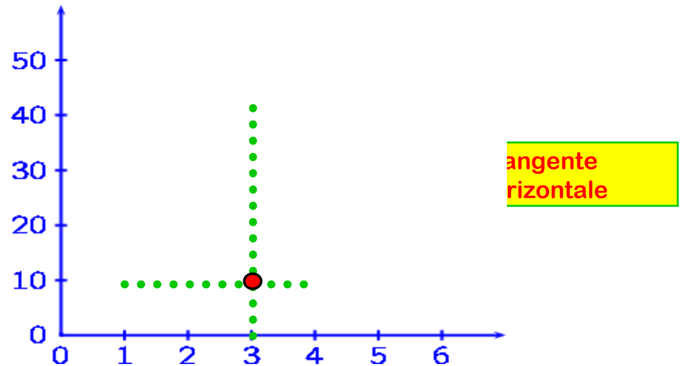
- INTRODUCTION
- DEFINITION ET EXEMPLES SIMPLES
- OPTIMISATION EN INGENIERIE
- PRINCIPE DE MOINDRE ACTION
- FORME GENERALE
- PLAN DES CHAPITRES DU COURS

DEFINITION MATHEMATIQUE

- Optimisation sans contrainte.
- Résolution du problème

$$\min f(x)$$
$$x \in IR^n$$

La tangente à la courbe est horizontale sur le minimum d'une fonction.



Avec f continûment différentiable.

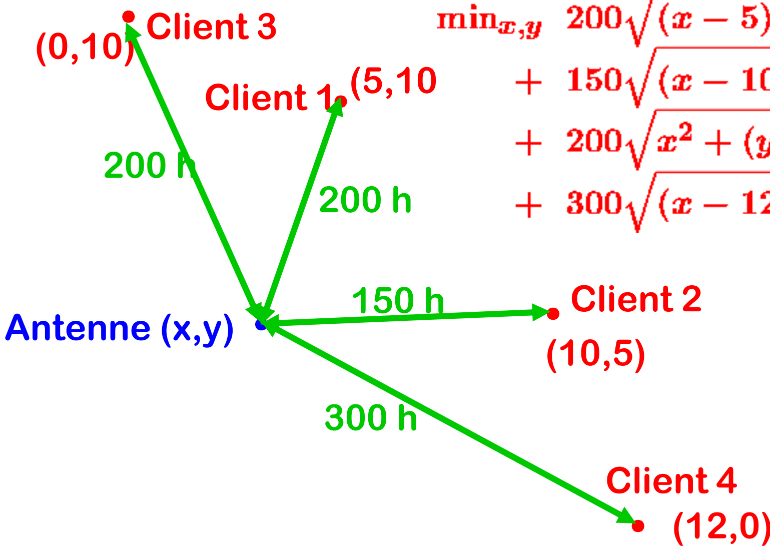
DEFINITION MATHEMATIQUE

- DiaX voudrait installer une antenne pour connecter 4 nouveaux clients importants.

- Cette antenne doit se trouver au plus proche de chaque client, en donnant priorité aux meilleurs clients.
- Pour chaque client, DiaX connaît :
  - sa localisation (coord. (x,y))
  - le nombre d'heures de communication par mois

DEFINITION MATHEMATIQUE

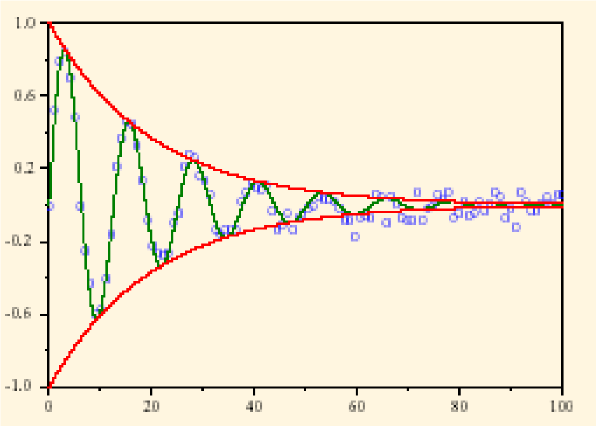
$$
\begin{aligned}
\min_{x,y}\ & 200\sqrt{(x-5)^2+(y-10)^2} \\
+\ & 150\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2} \\
+\ & 200\sqrt{x^2+(y-10)^2} \\
+\ & 300\sqrt{(x-12)^2+y^2}
\end{aligned}
$$



DEFINITION MATHEMATIQUE

On considère un problème d'identification des paramètres a, b, c et d du signal

$$y = h(t) = a \cdot e^{-b \cdot t_i} \cdot \cos\left(c \cdot t_i + d\right)$$



On dispose de m observations (yi , ti)

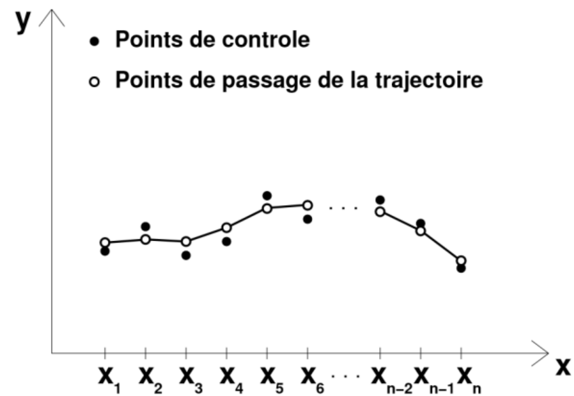
On propose de faire cette identification en minimisant la fonction :

$$J(a,b,c,d) = \min \sum_{i=1}^{m} [y_i - h(t_i)]^2$$

$$J(a,b,c,d) = \min \sum_{i=1}^{m} [y_i - a \cdot e^{-b \cdot t_i} \cdot \cos(c \cdot t_i + d)]^2$$

DEFINITION MATHEMATIQUE

- Concevoir une trajectoire qui soit la plus courte possible, tout en passant le plus possible a proximité de quelques (points de contrôle).



Points de passage successifs : $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$

Points de controle : $\begin{pmatrix} x_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix}$

Formulation de l'Objectif :

$$\min_{y_1,\ldots,y_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2 + \alpha \sum_{j=1}^{n-1} \left[(x_j - x_{j+1})^2 + (y_j - y_{j+1})^2 \right] \right\}$$

Conditions suffisantes d'optimalité

- Soit $f: IR^n \longrightarrow IR$ une fonction deux fois continûment différentiable sur un ouvert S. Si $x^* \in S$ satisfait les conditions

$$\nabla f(x^*)=0$$

et

$$\nabla^2 f(x^*) \text{ est définie positive}$$

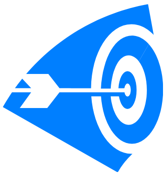
$$d^T \nabla^2 f(x^*)\, d > 0 \text{ pour tout } d \in IR^n, d \neq 0$$

Alors x^* est un **minimum local strict** de $f(x)$.

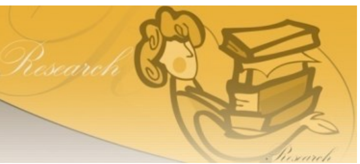
CONTENU

- INTRODUCTION
- DEFINITION ET EXEMPLES SIMPLES
- OPTIMISATION EN INGENIERIE
- PRINCIPE DE MOINDRE ACTION
- FORME GENERALE
- PLAN DES CHAPITRES DU COURS

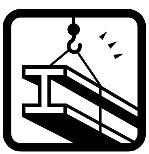
PROBLÈME D'OPTIMISATION



- **Objectif :**
  - **Minimiser un coût, un volume, une distance, des pertes, ...**



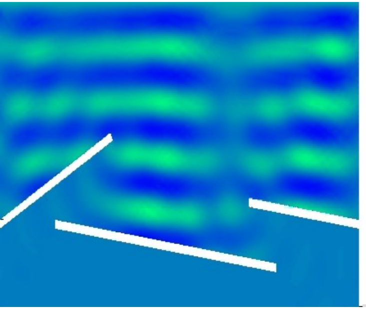
- **Contraintes égalités :**
  - **Modélisation de l'objet étudié.**



- **Contraintes inégalités :**
  - **Limitations de l'objet.**
  - **Limitations humaines.**

PROBLÈME D’OPTIMISATION

- **Objectif :**
  - **Minimiser la longueur de la digue.**
- **Contraintes égalités :**
  - **Modèle de Berkhoff de la houle**
- **Contraintes inégalités :**
  - **Hauteur de houle dans le Port**
  - **Géométrie du Port.**
  - **Passage pour les navires**



PROBLÈME D'OPTIMISATION

FONCTION OBJECTIF

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(x_i - x_{i+1}\right)^2 + \left(y_i - y_{i+1}\right)^2\right]}$$

EQUATION DE BERCKOFF

Conservation de la masse :

$$\boxed{\nabla\cdot\left(C\cdot Cg\cdot\nabla\Psi\right) + k^2 C\cdot Cg\cdot\Psi = 0}$$

Conditions aux Limites : Houle dans la mer

$$\Psi = k_s\cdot\Psi_0$$

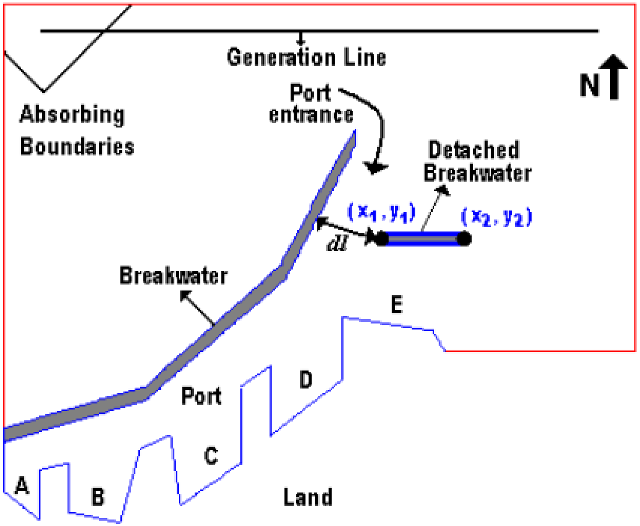
Conditions aux Limites : Réflexion

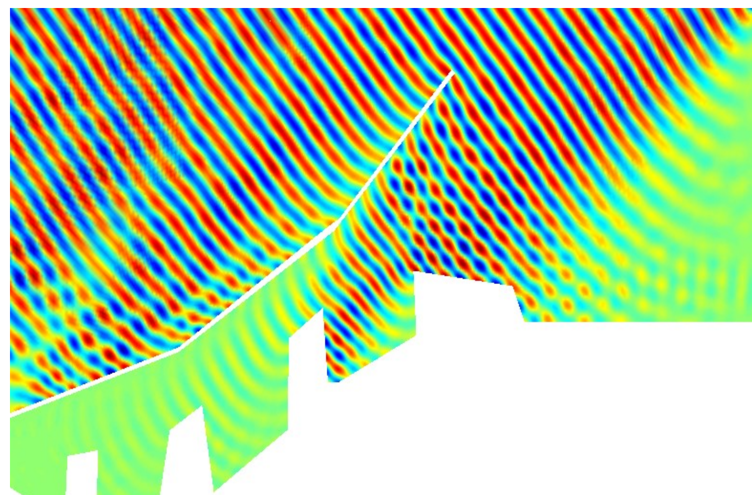
$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = i\,\frac{kr-1}{kr+1}\cdot k\cdot\Psi$$

Conditions aux Limites : Radiation

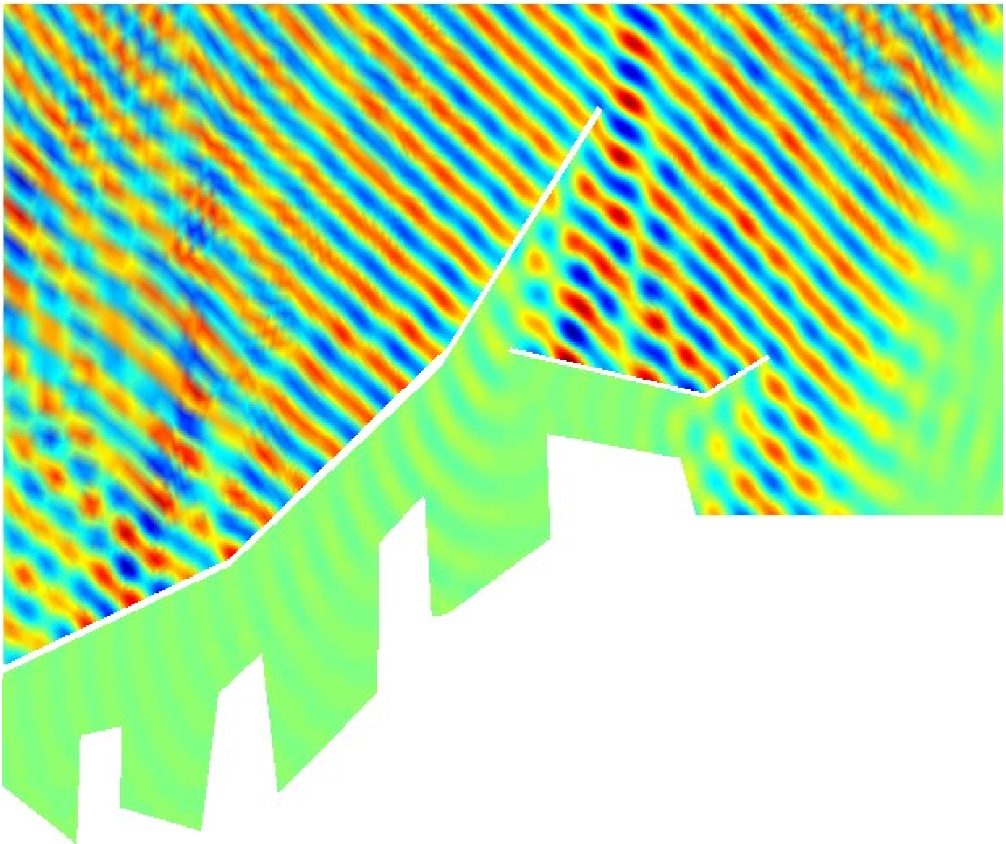
$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \pm i\cdot k\cdot\Psi = 0 \;\; for\ x \to \mp$$

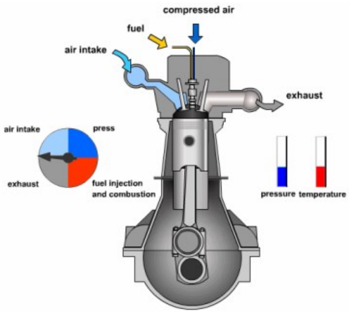
PROBLÈME D'OPTIMISATION



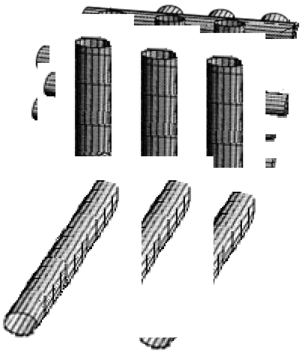


PROBLÈME D'OPTIMISATION

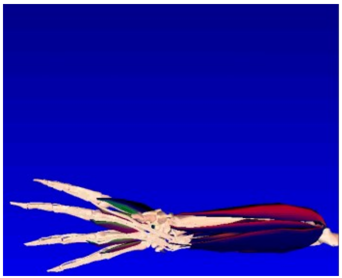




- **Objectif :**
  - **Limiter la pollution sur un cycle d'essai.**
- **Contraintes égalités :**
  - **Modèle dynamique du Diesel.**
- **Contraintes inégalités :**
  - **Limitations des actionneurs,**
  - **Bonne combustion**

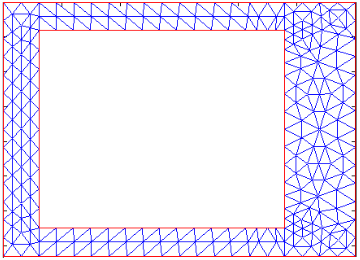


- **Objectif :**
  - Minimiser le volume du tissage.
- **Contraintes égalités :**
  - Modèle de comportement élastique.
  - Modèle de Fatigue des matériaux.
- **Contraintes inégalités :**
  - Limites de rupture des matériaux.
  - Limitations des machines

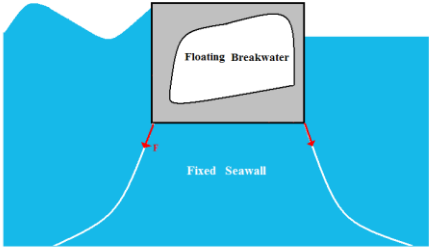


- **Objectif :**
  - Effectuer le geste avec minimum d’efforts sur les muscles.
- **Contraintes égalités :**
  - Modèle cinématique et dynamique du bras.
- **Contraintes inégalités :**
  - Limitations des efforts, déformations et activations des muscles.

21



- **Objectif :**
  - Minimiser le poids de la digue.
- **Contraintes égalités :**
  - Flottaison de la digue
  - Stabilité dynamique de la digue
  - Résistance de la structure.
- **Contraintes inégalités :**
  - Hauteur de houle dans le Port
  - Résistance des matériaux.
  - Dimensions positives



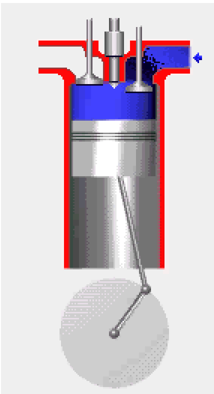
OPTIMISATION EN INGENIERIE

- **Objectif :**
  - **Maximiser l’ énergie de l’éolien.**

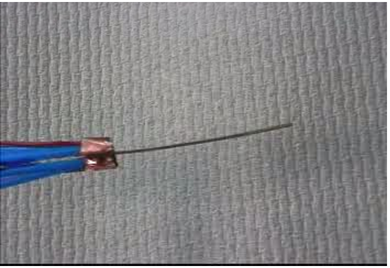
- **Contraintes égalités :**
  - **Modèle dynamique de l’éolien**
  - **Modèle aléatoire du Vent**

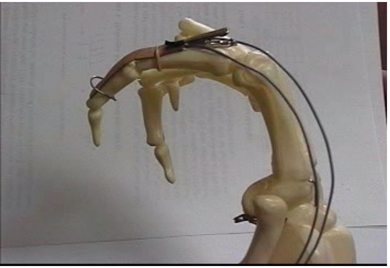
- **Contraintes inégalités :**
  - **Limites sur les valeurs du Pitch.**

OPTIMISATION EN INGENIERIE



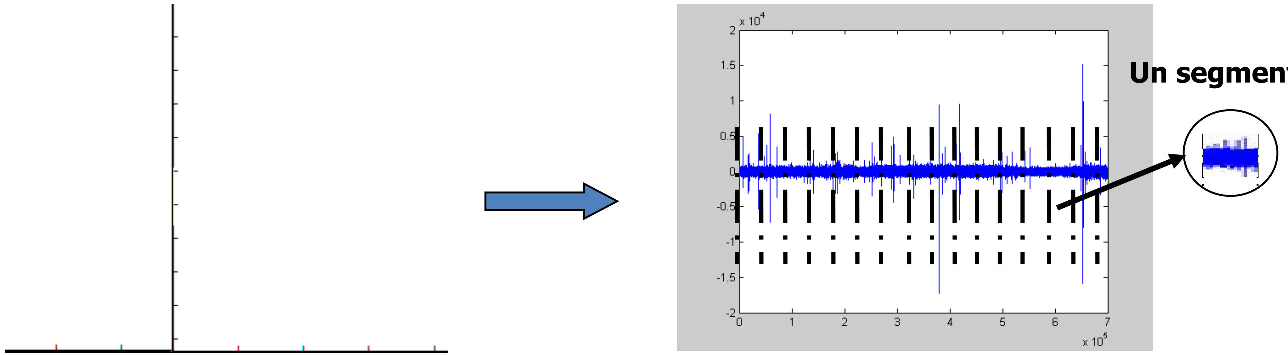
- **Objectif :**
  - **Conception optimale du Jumelage.**
- **Contraintes égalités :**
  - **Modèle dynamique du Diesel**
  - **Modèle aléatoire du Vent**
  - **Modèle dynamique de l'éolien**
  - **Modèle dynamique du stockage**
- **Contraintes inégalités :**
  - **Limitations sur le remplissage du Diesel et la résistance des matériaux.**





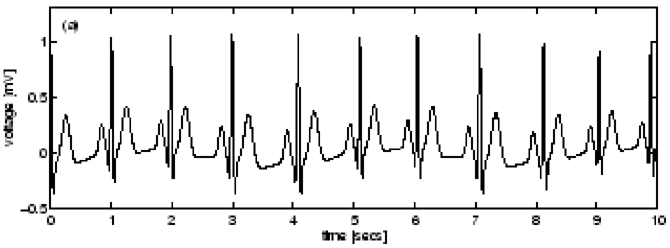
- **Objectif :**
  - **Contrôle optimale du muscle IPMC.**
- **Contraintes égalités :**
  - **Modèle dynamique du muscle IPMC.**
  - **Modèle série et parallèle des muscles.**
- **Contraintes inégalités :**
  - **Intégration dans les mains myo électriques.**

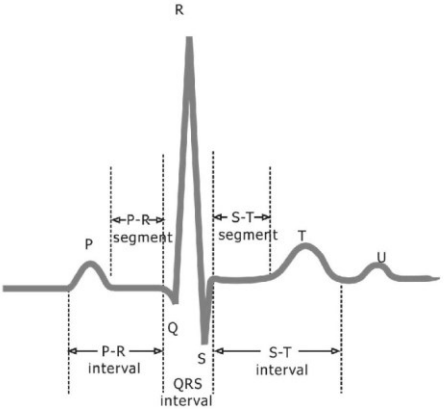
25



- Objectif : Détecter les variations des énergies relatifs par bande sur les segments.
- Modèle : Paramètres fréquentiels du signal.
- Méthode : Centres Mobiles Floues.

OPTIMISATION EN INGENIERIE





- Application en Télémédecine
- Minimiser la fonctionnelle :

$$\left[Signal(i) - \sum_{k} \alpha_k \cdot G(\mu_k, \sigma_k) \right]^2$$

CONTENU

- INTRODUCTION
- DEFINITION ET EXEMPLES SIMPLES
- OPTIMISATION EN INGENIERIE
- PRINCIPE DE MOINDRE ACTION
- FORME GENERALE
- PLAN DES CHAPITRES DU COURS

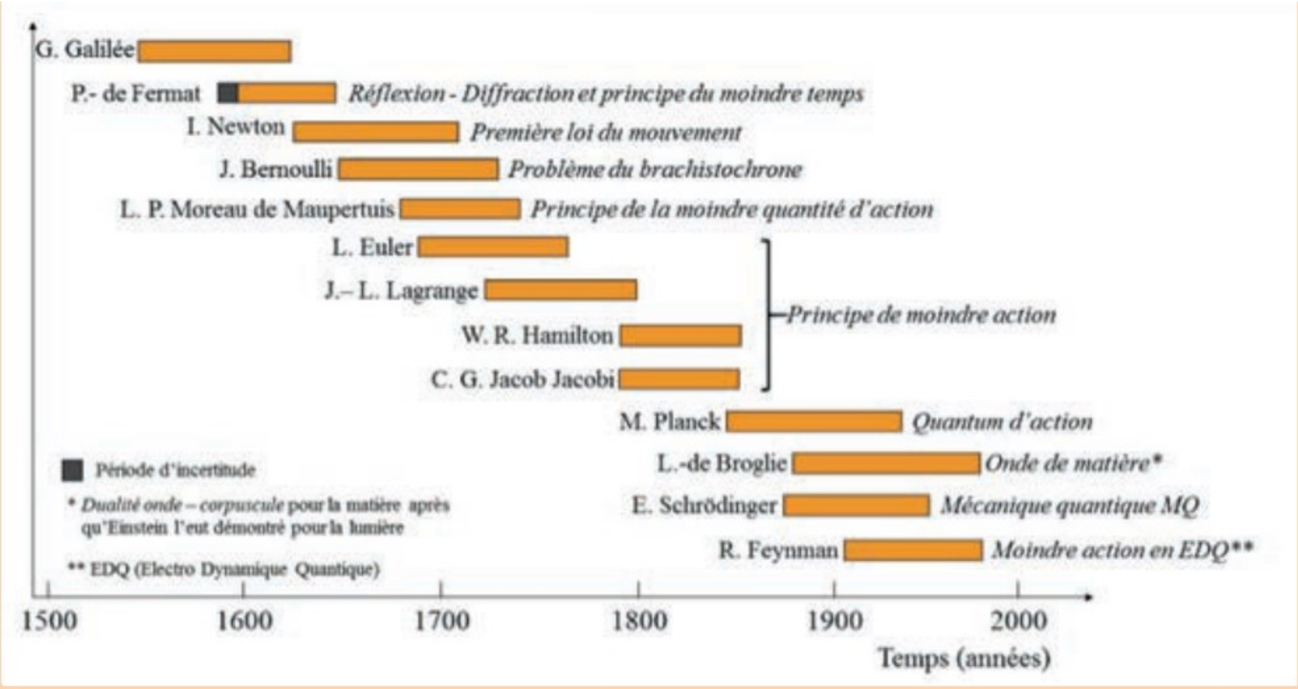
PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Principe de moindre action :

- Hypothèse selon laquelle la dynamique d'une quantité entre deux instants se déduit d'une unique grandeur appelée action dont on suppose qu'elle atteint son minimum.

- Le principe de moindre action n'a jamais été démontré, ni remis en cause car il est toujours vérifié expérimentalement. Il s'applique aujourd'hui dans le cadre scientifique moderne, en mathématiques, en physique, en économie...

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION



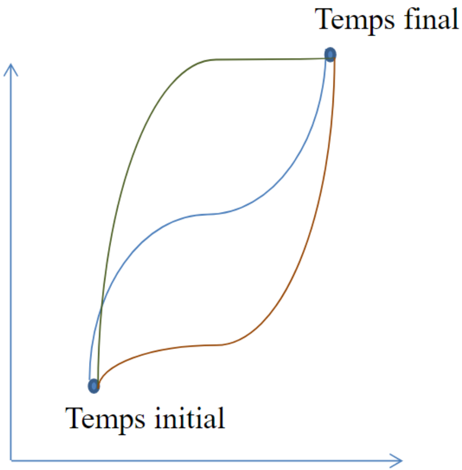
PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

$$S = \int_{t_1}^{t_2} A\,dt = \int_{t_1}^{t_2} A\left[q(t), q(\dot{t}), t\right] dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta A\,dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial A}{\partial q}\delta q + \frac{\partial A}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right] dt = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial A}{\partial \dot{q}} = 0$$



PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

- Plus Court Chemin entre deux point A et B :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V.dt = \int_{X_1}^{X_2} ds = \int_{X_1}^{X_2} \sqrt{dX^2 + dY^2} = \int_{X_1}^{X_2} dX.\sqrt{1+\dot{Y}^2}$$

Action

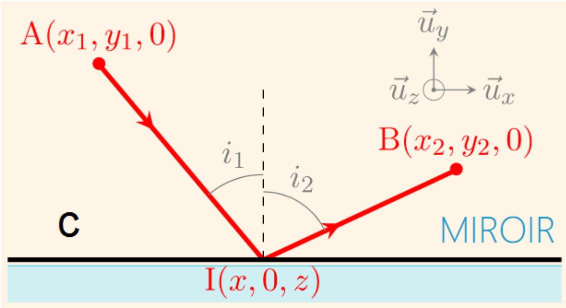
Soit : $F(X, Y, \dot{Y}) = \sqrt{1+\dot{Y}^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dX}\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\dot{Y}}{\sqrt{1+\dot{Y}^2}} \Rightarrow Y = a.X + b$$

Ainsi, le chemin qui rend optimal la longueur $\widehat{AB}$ est la ligne droite. Ce chemin est de longueur minimale.

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

- Reflexion :



$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt = T$$

$$T = \frac{AI + IB}{c} = \frac{1}{c}\left(\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2 + z^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2 + z^2}\right)$$

La fonction présente un minimum si $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{cases} \dfrac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2+z^2}} + \dfrac{(x-x_2)}{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2+z^2}} & = & 0 \\ & \text{et} & \\ \dfrac{z}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2+z^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2+z^2}} & = & 0 \end{cases}$$

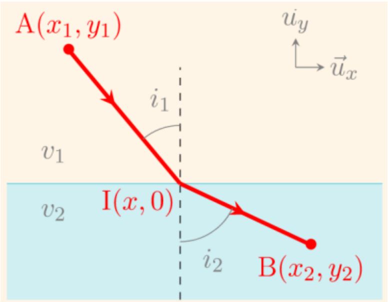
$\Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow \frac{(x-x_1)}{\mathrm{AI}} = \frac{(x_2-x)}{\mathrm{IB}}$

$\Rightarrow \boxed{i_1 = i_2}$

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

- Refraction :



$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt = T_{AB}$$

$$T_{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AI}}{v_1} + \frac{\mathrm{IB}}{v_2} = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + {y_1}^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + {y_2}^2}}{v_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{AB}}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v_1}\frac{(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + {y_1}^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{(x_2 - x)}{\sqrt{(x - x_2)^2 + {y_2}^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} \Rightarrow \boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \text{avec} \quad n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}}$$

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

- Mecanique Classique :

Le Lagrangien au temps t d'une particule classique de masse m, position $x(t)$ et vitesse $v = \dot{x}(t)$ est défini par

$$\mathcal{L}(t, x, v) = E_c - E_p = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$$

et l'action pour aller de la position x_1 au temps t_1 à la position x_2 au temps t_2 est donnée par

$$\mathcal{A}(x(t); t_1, x_1, t_2, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, x(t), v(t))dt.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0 \quad \text{qui s'écrit ici} \quad m\vec{a} = m\frac{d}{dt}v = -\frac{\partial V}{\partial_x} = \vec{F}$$

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

- Mecanique Classique :

Considérons une trajectoire $x(t)$ satisfaisant l'équation d'Euler-Lagrange (pour un Lagrangien homogène) On a alors

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(x,v) = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \dot{v}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = v\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{d}{dt}\left(v\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right)$$

où on a utilisé l'équation d'Euler-Lagrange et la dérivée d'un produit. On a donc obtenu

$$\frac{d}{dt}\left(v\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L}\right) = 0. \quad \Longrightarrow \quad v\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L} = Cst$$

La quantité

$$E(x,v) = v\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L} = vmv - (\frac{1}{2}mv^2 - V(x)) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

UN PRINCIPE FECOND :

- 1827 Hamilton : développement de la mécanique hamiltonnienne (suivi par Jacobi 1840).
- 1916 : réecriture des équations de la relativité générale par Hilbert.
- 1920 : le principe guide De Broglie dans sa théorie des quanta.
- 1942 : Feynmann propose une nouvelle formulation du principe en mécanique quantique et retrouve l’équation de Schrödinger.

CONTENU

- INTRODUCTION
- DEFINITION ET EXEMPLES SIMPLES
- OPTIMISATION EN INGENIERIE
- PRINCIPE DE MOINDRE ACTION
- FORME GENERALE
- PLAN DES CHAPITRES DU COURS

FORME GENERALE

Problème :

$$\mathbf{\min f(x)}$$

$$\mathbf{s.c.\ x \in X}$$

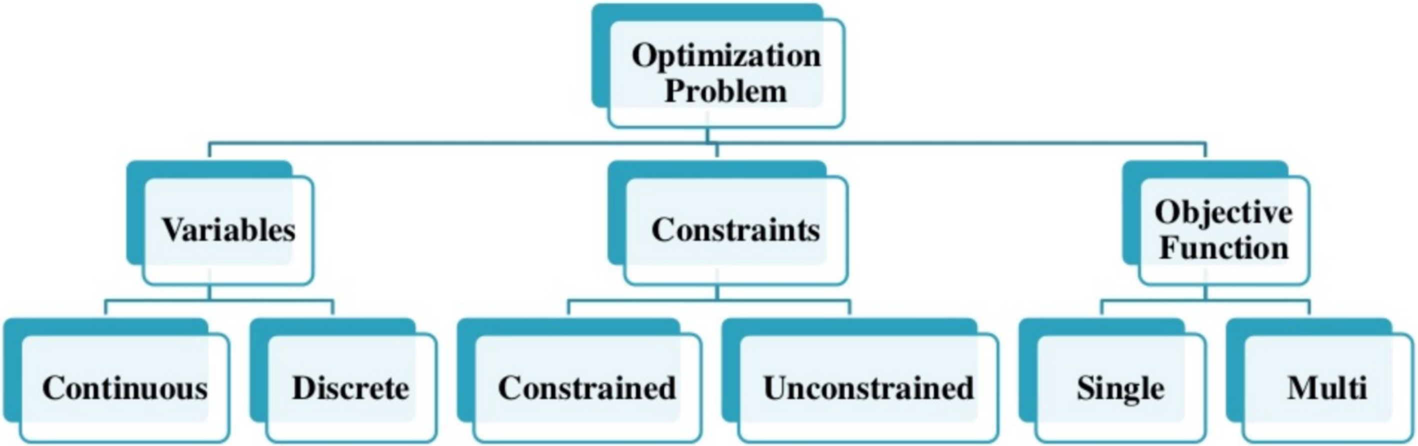
$$\mathbf{h(x) = 0}$$

$$\mathbf{g(x) \leq 0}$$

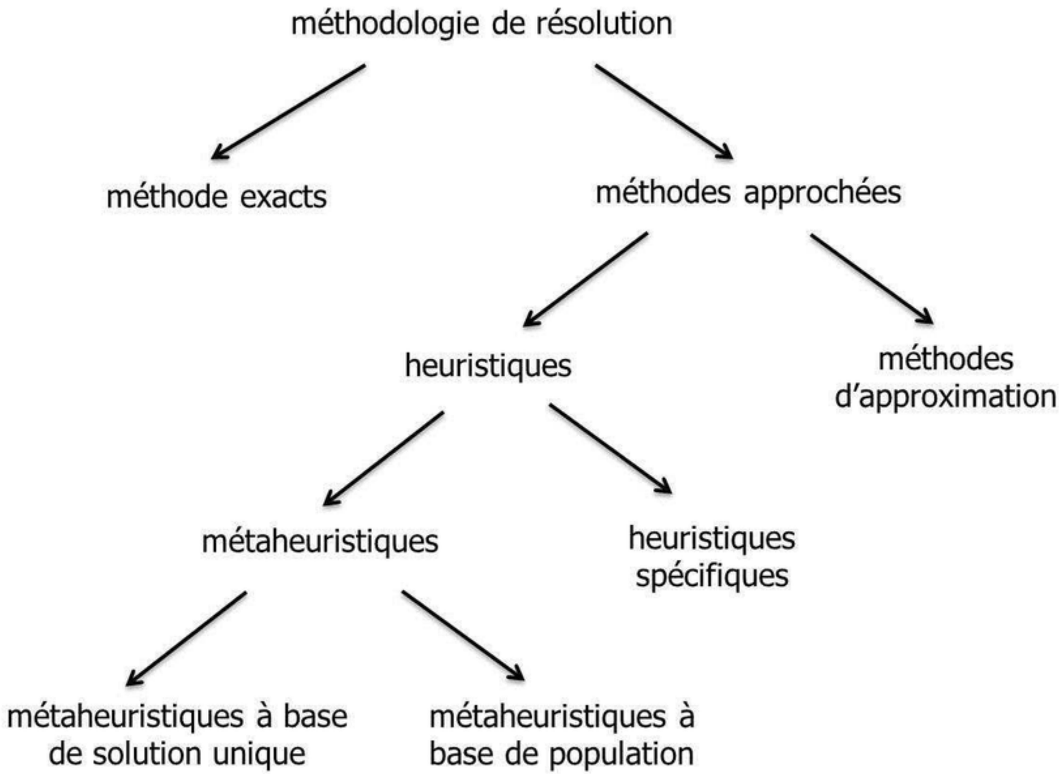
- $f: IR^n \rightarrow IR$ -- $g: IR^n \rightarrow Ir^r$ et h_i: $IR^n \rightarrow IR$ continues
- X ensemble fermé
- Intérieur des contraintes d’inégalité :

$$S = \{x \in X \text{ t.q. } g(x) < 0\}$$

FORME GENERALE



FORME GENERALE



CONTENU

- INTRODUCTION
- DEFINITION ET EXEMPLES SIMPLES
- OPTIMISATION EN INGENIERIE
- PRINCIPE DE MOINDRE ACTION
- FORME GENERALE
- PLAN DES CHAPITRES DU COURS

PLAN DES CHAPITRES

- Principes de l’Optimisation
- Optimisation Graphique
- Optimisation Linéaire
- Optimisation analytique non linéaire
- Optimisation analytique avec Contraintes
- Schémas Numériques pour l’Optimisation
- Méthodes méta-heuristiques
- Optimisation Multi-Objectifs
- Optimisation sous MatLab