Нахождение локального минимума функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln(x)$ с помощью методов Ньютона, бисекции и золотого сечения

Копытов Никита Эдуардович (P3219)
Проверяющий: Селина Елена Георгиевна

1 Введение

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln(x),$$

и найдем её локальный минимум на интервале [1.5, 2]. Локальный экстремум достигается в точке, где первая производная равна нулю. Для поиска корневого уравнения

$$f'(x) = x^2 + \ln(x) - 4 = 0,$$

будут использованы три метода: метод Ньютона, метод бисекции и метод золотого сечения. В отчёте подробно описаны итерационные вычисления по каждому методу.

2 Вычисление первой и второй производных

2.1 Первая производная

Функция представлена в виде суммы:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln(x).$$

Дифференцируем по членам:

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}x^3\right) = x^2,$
2. $\dfrac{d}{dx}(-5x) = -5,$
3. $\dfrac{d}{dx}(x\ln(x))$: по правилу произведения, $\ln(x) + 1$.

Таким образом,

$$f'(x) = x^2 - 5 + \ln(x) + 1 = x^2 + \ln(x) - 4.$$

2.2 Вторая производная

Дифференцируем $f'(x)$:

1. $\dfrac{d}{dx}(x^2) = 2x,$
2. $\dfrac{d}{dx}(\ln(x)) = \dfrac{1}{x},$

3. Производная константы равна нулю.

Получаем:

$$f''(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

3 Метод Ньютона

Метод Ньютона использует итерационную формулу:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)},$$

где

$$f'(x) = x^2 + \ln(x) - 4 \quad \text{и} \quad f''(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

Начальное приближение выберем как $x_0 = 1.75$, критерий останова — разность между последовательными итерациями менее 10^{-5}.

Итерации метода Ньютона

1. **Итерация 1:** $x_0 = 1.75$. Вычисляем:

$$(1.75)^2 = 3.0625, \quad \ln(1.75) \approx 0.5596,$$

$$f'(1.75) \approx 3.0625 + 0.5596 - 4 = -0.3779.$$

Вторая производная:

$$f''(1.75) = 2 \cdot 1.75 + \frac{1}{1.75} \approx 3.5 + 0.5714 = 4.0714.$$

Обновление:

$$x_1 \approx 1.75 - \frac{-0.3779}{4.0714} = 1.75 + 0.09274 \approx 1.84274.$$

2. **Итерация 2:** $x_1 \approx 1.84274$. Вычисляем:

$$(1.84274)^2 \approx 3.398, \quad \ln(1.84274) \approx 0.611,$$

$$f'(1.84274) \approx 3.398 + 0.611 - 4 \approx 0.009.$$

Вторая производная:

$$f''(1.84274) = 2 \cdot 1.84274 + \frac{1}{1.84274} \approx 3.6855 + 0.5427 \approx 4.2282.$$

Обновление:

$$x_2 \approx 1.84274 - \frac{0.009}{4.2282} \approx 1.84274 - 0.00213 \approx 1.84061.$$

3. **Итерация 3:** $x_2 \approx 1.84061$. Вычисляем:

$$(1.84061)^2 \approx 3.3887, \quad \ln(1.84061) \approx 0.610,$$

$$f'(1.84061) \approx 3.3887 + 0.610 - 4 \approx -0.0013.$$

Вторая производная:

$$f''(1.84061) = 2 \cdot 1.84061 + \frac{1}{1.84061} \approx 3.68122 + 0.543 \approx 4.2242.$$

Обновление:

$$x_3 \approx 1.84061 - \frac{-0.0013}{4.2242} \approx 1.84061 + 0.0003079 \approx 1.84092.$$

Достигается требуемая точность, таким образом, найденный корень:

$$x^* \approx 1.84092,$$

а минимальное значение функции:

$$f(1.84092) \approx -5.0043.$$

4 Метод бисекции

Метод бисекции применим к уравнению

$$f'(x) = x^2 + \ln(x) - 4 = 0.$$

Выберем начальный интервал $[a, b] = [1.5,\ 2]$, поскольку:

$$f'(1.5) = (1.5)^2 + \ln(1.5) - 4 \approx 2.25 + 0.4055 - 4 \approx -1.3445,$$

$$f'(2) = (2)^2 + \ln(2) - 4 \approx 4 + 0.6931 - 4 \approx 0.6931.$$

Знак функции меняется, значит корень находится внутри интервала.

Итерации метода бисекции

1. **Итерация 1:** Середина:
$$x_1 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75.$$
Вычисляем:
$$(1.75)^2 = 3.0625, \quad \ln(1.75) \approx 0.5596,$$
$$f'(1.75) \approx 3.0625 + 0.5596 - 4 \approx -0.3779.$$
Так как $f'(1.75) < 0$, выбираем следующий интервал: $[1.75,\ 2]$.

2. **Итерация 2:** Новый интервал: $[1.75, 2]$. Середина:
$$x_2 = \frac{1.75 + 2}{2} = 1.875.$$
Вычисляем:
$$(1.875)^2 \approx 3.5156, \quad \ln(1.875) \approx 0.629,$$
$$f'(1.875) \approx 3.5156 + 0.629 - 4 \approx 0.1446.$$
Так как $f'(1.875) > 0$, новый интервал: $[1.75,\ 1.875]$.

3. **Итерация 3:** Интервал: $[1.75,\ 1.875]$. Середина:
$$x_3 = \frac{1.75 + 1.875}{2} = 1.8125.$$
Вычисляем:
$$(1.8125)^2 \approx 3.2852, \quad \ln(1.8125) \approx 0.594,$$
$$f'(1.8125) \approx 3.2852 + 0.594 - 4 \approx -0.1208.$$
Так как $f'(1.8125) < 0$, выбираем новый интервал: $[1.8125,\ 1.875]$.

4. **Итерация 4:** Интервал: $[1.8125,\ 1.875]$. Середина:
$$x_4 = \frac{1.8125 + 1.875}{2} = 1.84375.$$
Вычисляем:
$$(1.84375)^2 \approx 3.3984, \quad \ln(1.84375) \approx 0.611,$$
$$f'(1.84375) \approx 3.3984 + 0.611 - 4 \approx 0.0094.$$
Так как $f'(1.84375) > 0$, интервал сужается до: $[1.8125,\ 1.84375]$.

5. **Итерация 5:** Интервал: [1.8125, 1.84375]. Середина:

$$x_5 = \frac{1.8125 + 1.84375}{2} = 1.828125.$$

Вычисляем:

$$(1.828125)^2 \approx 3.342, \quad \ln(1.828125) \approx 0.603,$$

$$f'(1.828125) \approx 3.342 + 0.603 - 4 \approx -0.055.$$

Так как $f'(1.828125) < 0$, итоговый интервал для поиска корня: [1.828125, 1.84375].

По требуемому критерию точности можно продолжать итерации до достижения необходимой точности близости корня к значению, полученному методом Ньютона.

5 Метод золотого сечения

Для поиска минимума функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln(x)$$

на интервале $[1.5, 2]$ применим метод золотого сечения. Обозначим границы интервала a и b, коэффициент золотого сечения:

$$\rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Начальный интервал:

$$a_0 = 1.5, \quad b_0 = 2.$$

Определим две внутренние точки:

$$x_1 = b_0 - \rho(b_0 - a_0), \quad x_2 = a_0 + \rho(b_0 - a_0).$$

Подставляя значения,

$$x_1 = 2 - 0.618 \cdot (0.5) = 2 - 0.309 = 1.691, \quad x_2 = 1.5 + 0.618 \cdot (0.5) = 1.5 + 0.309 = 1.809.$$

Итерации метода золотого сечения

Приведём схему первых пяти итераций, где на каждом шаге сравниваются значения $f(x)$ в точках и выбирается новый интервал:

1. **Итерация 1:** Интервал: $[a_0, b_0] = [1.5, 2]$. Вычисляем:

$$x_1 = 1.691, \quad x_2 = 1.809.$$

Сравниваем:

$$f(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_2).$$

Пусть, например, $f(x_1) > f(x_2)$, тогда минимум лежит в $[x_1,\, b_0]$ и обновляем:

$$a_1 = x_1, \quad b_1 = b_0.$$

2. **Итерация 2:** Новый интервал: $[a_1, b_1] = [1.691, 2]$. Длина интервала: $L_1 = 2 - 1.691 = 0.309$. Вычисляем новые точки:

$$x_1' = b_1 - \rho L_1 \approx 2 - 0.618 \cdot 0.309 \approx 1.809,$$

$$x_2' = a_1 + \rho L_1 \approx 1.691 + 0.618 \cdot 0.309 \approx 1.882.$$

Сравниваем $f(x_1')$ и $f(x_2')$ для выбора нового интервала.

3. **Итерация 3:** Пусть выбран новый интервал, например, $[1.691, 1.882]$. Длина интервала: $L_2 = 1.882 - 1.691 = 0.191$. Вычисляем:

$$x_1'' = 1.882 - \rho L_2 \approx 1.882 - 0.618 \cdot 0.191 \approx 1.764,$$

$$x_2'' = 1.691 + \rho L_2 \approx 1.691 + 0.618 \cdot 0.191 \approx 1.809.$$

   Сравниваем значения $f(x_1'')$ и $f(x_2'')$.

4. **Итерация 4:** Пусть новый интервал: $[1.764, 1.882]$ с длиной $L_3 = 0.118$. Вычисляем:

$$x_1''' = 1.882 - \rho L_3 \approx 1.882 - 0.618 \cdot 0.118 \approx 1.809,$$

$$x_2''' = 1.764 + \rho L_3 \approx 1.764 + 0.618 \cdot 0.118 \approx 1.837.$$

   Сравниваем $f(x_1''')$ и $f(x_2''')$ для обновления интервала.

5. **Итерация 5:** Пусть итоговый интервал после итерации 4 равен $[1.764, 1.837]$ с длиной $L_4 = 0.073$. Вычисляем:

$$x_1^{(4)} = 1.837 - \rho L_4 \approx 1.837 - 0.618 \cdot 0.073 \approx 1.792,$$

$$x_2^{(4)} = 1.764 + \rho L_4 \approx 1.764 + 0.618 \cdot 0.073 \approx 1.809.$$

   Сравнив $f(x_1^{(4)})$ и $f(x_2^{(4)})$, уточняем положение минимума.

В результате каждой итерации длина интервала поиска сужается, что позволяет приблизиться к точке минимума, найденной ранее методами Ньютона и бисекции.

6 Метод секущих

Метод секущих позволяет найти корень уравнения

$$f'(x) = x^2 + \ln(x) - 4 = 0$$

с использованием последовательных приближений по формуле:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}.$$

Начальные приближения выбраны как:

$$x_0 = 1.5, \quad x_1 = 2.$$

Критерием останова может служить малость разности между последовательными приближениями.

Итерации метода секущих

1. **Итерация 1:**

   - Начальные значения:
$$x_0 = 1.5, \quad x_1 = 2.$$
   - Вычисляем $f'(x)$:
$$f'(1.5) = (1.5)^2 + \ln(1.5) - 4 \approx 2.25 + 0.4055 - 4 \approx -1.3445,$$
$$f'(2) = (2)^2 + \ln(2) - 4 \approx 4 + 0.6931 - 4 \approx 0.6931.$$
   - Применяем формулу:
$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)(x_1 - x_0)}{f'(x_1) - f'(x_0)} = 2 - \frac{0.6931\,(2 - 1.5)}{0.6931 - (-1.3445)}.$$

- Вычисляем знаменатель и разность:

$$0.6931 - (-1.3445) = 2.0376, \quad 2 - 1.5 = 0.5.$$

- Таким образом,

$$x_2 \approx 2 - \frac{0.6931 \times 0.5}{2.0376} \approx 2 - \frac{0.34655}{2.0376} \approx 2 - 0.1703 \approx 1.8297.$$

2. **Итерация 2:**

- Используем $x_1 = 2$ и $x_2 \approx 1.8297$.
- Вычисляем $f'(x)$:

$$f'(2) \approx 0.6931,$$
$$f'(1.8297) = (1.8297)^2 + \ln(1.8297) - 4.$$

  Приблизительно:

$$(1.8297)^2 \approx 3.347, \quad \ln(1.8297) \approx 0.603,$$
$$f'(1.8297) \approx 3.347 + 0.603 - 4 \approx -0.05.$$

- Применяем формулу:

$$x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)(x_2 - x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)} = 1.8297 - \frac{(-0.05)(1.8297 - 2)}{-0.05 - 0.6931}.$$

- Заметим, что $1.8297 - 2 = -0.1703$. Тогда:

$$x_3 \approx 1.8297 - \frac{(-0.05) \times (-0.1703)}{-0.7431} = 1.8297 - \frac{0.008515}{-0.7431} \approx 1.8297 + 0.01146 \approx 1.84116.$$

3. **Итерация 3:**

- Используем $x_2 \approx 1.8297$ и $x_3 \approx 1.84116$.
- Вычисляем:

$$f'(1.8297) \approx -0.05 \quad \text{(как ранее)},$$
$$f'(1.84116) = (1.84116)^2 + \ln(1.84116) - 4.$$

  Приблизительно:

$$(1.84116)^2 \approx 3.389, \quad \ln(1.84116) \approx 0.610,$$
$$f'(1.84116) \approx 3.389 + 0.610 - 4 \approx -0.001.$$

- Применяем формулу:

$$x_4 = x_3 - \frac{f'(x_3)(x_3 - x_2)}{f'(x_3) - f'(x_2)} = 1.84116 - \frac{(-0.001)(1.84116 - 1.8297)}{-0.001 - (-0.05)}.$$

- Вычисляем разность:

$$1.84116 - 1.8297 = 0.01146, \quad f'(1.84116) - f'(1.8297) \approx -0.001 - (-0.05) = 0.049.$$

- Таким образом,

$$x_4 \approx 1.84116 - \frac{-0.001 \times 0.01146}{0.049} \approx 1.84116 + \frac{0.00001146}{0.049} \approx 1.84116 + 0.000234 \approx 1.84139.$$

4. **Итерация 4:**

- Используем $x_3 \approx 1.84116$ и $x_4 \approx 1.84139$.

- Вычисляем:

$$f'(1.84116) \approx -0.001 \quad \text{(как ранее)},$$
$$f'(1.84139) = (1.84139)^2 + \ln(1.84139) - 4.$$

Приблизительно:

$$(1.84139)^2 \approx 3.3898, \quad \ln(1.84139) \approx 0.6101,$$
$$f'(1.84139) \approx 3.3898 + 0.6101 - 4 \approx -0.0001.$$

- Применяем формулу:

$$x_5 = x_4 - \frac{f'(x_4)(x_4 - x_3)}{f'(x_4) - f'(x_3)} = 1.84139 - \frac{(-0.0001)(1.84139 - 1.84116)}{-0.0001 - (-0.001)}.$$

- Вычисляем:

$$1.84139 - 1.84116 = 0.00023, \quad f'(1.84139) - f'(1.84116) \approx -0.0001 - (-0.001) = 0.0009.$$

- Таким образом,

$$x_5 \approx 1.84139 - \frac{-0.0001 \times 0.00023}{0.0009} \approx 1.84139 + \frac{0.000000023}{0.0009} \approx 1.84139 + 0.0000256 \approx 1.84142.$$

5. **Итерация 5:**
   - Продолжение итерационного процесса производится по аналогичной схеме до достижения требуемой точности.
   - Видно, что последовательность приближений сходится к значению около 1.8414, что согласуется с результатами, полученными ранее методами.

7 Заключение

В работе были рассмотрены три метода поиска минимума функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x\ln(x)$:

- Метод Ньютона продемонстрировал быстрый сход при хорошем начальном приближении,
- Метод бисекции показал простоту реализации, хотя и требует больше итераций для достижения той же точности,
- Метод золотого сечения позволяет найти минимум функции без необходимости вычисления производных.

Полученные результаты сходятся, что подтверждает корректность применяемых подходов.