

# Математическая логика весна 2017

5 июня 2017 г.

## Содержание

10 Гомоморфизмы, изоморфизмы, подмодели	2
11 Секвенциальное исчисление высказываний	8
12 Исчисление высказываний Гильбертовского типа	16
13 Секвенциальное исчисление предикатов	18
14 Теорема о существовании модели	24
15 Исчисление предикатов Гильбертовского типа	38
16 Эквивалентность классов вычислимых функций	40
17 Универсальные вычислимые функции	44
18 Рекурсивные и рекурсивно-примитивные множества	49
19 Формальная арифметика Пеано. Неразрешимые проблемы	53

## 10 Гомоморфизмы, изоморфизмы, подмодели

### 10.1 Определение (гомоморфизм)

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}(\sigma)$ ,  $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  - гомоморфизм алгебраических систем  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , если

$\forall P^n, f^n, c \in \sigma \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$  выполнено следующее:

- а)  $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)$ , то  $\mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$
- б)  $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$
- в)  $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

### 10.2 Определение (эпиморфизм)

$h$  - эпиморфизм, если  $h$  - гомоморфизм и “на”

### 10.3 Определение (изоморфизм)

$h$  - изоморфизм, если:

- 1.  $h$  - взаимно-однозначно
- 2.  $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ :
  - а)  $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) \iff \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$
  - б)  $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$
  - в)  $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

### 10.4 Определение (изоморфное вложение)

$h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  - изоморфное вложение, если:

- 1.  $h$  - разнозначно
- 2. а)  $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) \iff \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$ 
  - б)  $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$
  - в)  $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

### 10.5 Замечание

- 1.  $h$  - эпиморфизм  $\iff h$  - гомоморфизм и “на”
- 2.  $h$  - изоморфизм  $\iff h$  - эпиморфизм и изоморфное вложение

## 10.6 Определение (подмодель)

Пусть  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$  -  $\mathfrak{A}$  - подмодель  $\mathfrak{B}$ , если:

1.  $|\mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{B}|$
2.  $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n$
3. а)  $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$   
б)  $f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1 \dots a_n))$   
в)  $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

## 10.7 Пример

1.  $\langle \mathbb{N}; +, * \rangle \leq \langle \mathbb{Z}; +, * \rangle \leq \langle \mathbb{Q}; +, * \rangle \leq \langle \mathbb{R}; +, * \rangle$
2.  $\langle \mathbb{Z}; +, -, * \rangle \leq \langle \mathbb{Q}; +, -, * \rangle$

## 10.8 Определение (замкнутость множества отн-но операций)

$A$  - замкнуто относительно операций в модели  $\mathfrak{B}$ , если:

1.  $\forall f \in \sigma \forall a_1 \dots a_n \in A \ f(a_1 \dots a_n) \in A$
2.  $\forall c \in \sigma \ c^{\mathfrak{B}} \in A$

## 10.9 Предложение

Пусть  $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $A \subseteq |\mathfrak{B}|$ , тогда множество  $A$  определяет подмодель  $\mathfrak{B}$  (т.е. множество  $A$  является основным множеством некоторой подмодели модели  $\mathfrak{B} \iff A$  замкнуто в  $\mathfrak{B}$  относительно операций)

## 10.10 Предложение

Пусть  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  - гомоморфизм. Рассмотрим  $C = h(A) = \{h(a) \mid a \in \mathfrak{A}\}$ . Тогда  $C$  - замкнуто относительно операций в модели  $\mathfrak{B}$ , т.е. определена  $(\exists) \mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$ , такая что  $|\mathfrak{C}| = C$

## 10.11 Предложение

$\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $H = \{\mathfrak{A} \in K(\sigma) \mid \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}\}$ ,  $C = \bigcap_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$  ( $C \neq \emptyset$ ). Тогда  $C$  замкнуто в  $\mathfrak{B}$ ,  
 $\implies \exists \mathfrak{C} \leq \mathfrak{B} : |\mathfrak{C}| = C$

## 10.12 Теорема

Пусть  $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $X \subseteq |\mathfrak{B}|$ ,  $X \neq \emptyset$  Тогда  $\exists$  наименьшая по вложению модель  $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$ , такая что  $X \subseteq |\mathfrak{C}|$   $\mathfrak{C} = \text{Sub}_{\mathfrak{B}}(X)$

### 10.13 Предложение

- $A$ - множество и  $\sigma$ - сигнатура  $\implies \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) |\mathfrak{A}| = A$
- $K(\sigma)$  - не множество

### 10.14 Теорема

$\mathfrak{B} \in K(\sigma), X \subseteq |\mathfrak{B}|$  и  $(x \neq \emptyset \text{ или } \exists c \in \sigma) \mathfrak{C} = \text{Sub}_{\mathfrak{B}}(X)$  Тогда множество  $|\mathfrak{C}| = \{t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) | t(x_1, \dots, x_n) \in T(\sigma), a_1, \dots, a_n \in X\} = T_x$

### 10.15 Следствие

Если  $X = \emptyset$ , пусть  $\exists c \in \sigma$ , тогда  $|\mathfrak{C}| = \{t^{\mathfrak{B}} | t \in T(\sigma), t\text{-замкнуто}\} \quad F \cup (t) = \emptyset$

### 10.16 Предложение

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma) \quad a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}, \quad t(x_1, \dots, x_n) \in T(\sigma)$ . Тогда  $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$

Доказательство:

1.  $t(x) = x_1 \quad t^{\mathfrak{A}}(a_1) = a_1 = t^{\mathfrak{B}}(a_1)$
2.  $t = c \quad t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}$
3.  $t = f(t_1(\bar{x}) \dots t_k(\bar{x})) \quad t^k \in \sigma, \forall i \quad t_i^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t_i^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \quad t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) = t^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$

### 10.17 Теорема

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma), \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|, \varphi(k_1, \dots, k_n) \in F(\sigma)$  тогда  $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

Доказательство: 1) а)  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})), \forall i \quad t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \quad \mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t_2^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \iff t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) = t_2^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$

б)  $P^k \in \sigma, \quad t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x}) \in T(\sigma) \quad \forall i \quad t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \quad \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{A} \models P(t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) \iff \mathfrak{A} \models P(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) \iff \mathfrak{B} \models P(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

2) Пусть  $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma) \quad \forall i \quad \mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n) \implies \mathfrak{B} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$  и  $\mathfrak{A} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n)$  и  $\mathfrak{B} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

### 10.18 Определение

Пусть  $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in F(\sigma)$ , тогда

- а)  $\forall y_1, \dots, y_k \psi(\bar{x}, \bar{y})$  -  $\forall$  - формула (универсальная)
- б)  $\exists y_1, \dots, y_k \psi(\bar{x}, \bar{y})$  -  $\exists$  - формула (экзистенциальная)

### 10.19 Теорема

Пусть  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$   $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$   $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$  - бескванторная  $\in F(\sigma)$  тогда:

- а)  $\mathfrak{A} \models \exists y_1, \dots, \exists y_k \psi(\bar{a}, \bar{y})$ , то  $\mathfrak{B} \models \exists y_1, \dots, \exists y_k \psi(\bar{a}, \bar{y})$
- б)  $\mathfrak{B} \models \forall y_1, \dots, \forall y_k \psi(\bar{a}, \bar{y})$ , то  $\mathfrak{A} \models \forall y_1, \dots, \forall y_k \psi(\bar{a}, \bar{y})$

Доказательство: а)  $\mathfrak{A} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y}) \iff \exists c_1, \dots, c_k \in |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, \bar{c}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists c_1, \dots, c_k \in |\mathfrak{B}| : \mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, \bar{c}) \iff \mathfrak{B} \models \exists y_1, \dots, y_k \psi(\bar{a}, \bar{y})$

б) Упражнение

### 10.20 Замечание

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $|\mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{B}|$ . Тогда:  $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \iff i_A : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  - изоморфное вложение ( $i_A : A \rightarrow B, i_A(a) = a$ )

Доказательство:  $\Rightarrow$ )  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models P, f, c \in \sigma \mathfrak{A} \models P(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P(i_A(a_1), \dots, i_A(a_n))$  (упражнение)

$\Leftarrow$ )  $i_A$ - изоморфное вложение  $\mathfrak{A} \models P(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P(i_A(a_1), \dots, i_A(a_n)) \iff \mathfrak{B} \models P(a_1, \dots, a_n)$  (упражнение)

### 10.21 Определение (конгруэнтность)

$\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $\sim$  - отношение эквивалентности,  $A = |\mathfrak{A}|$ ,  $\sigma$  - без предикатов,  $\sim$  - конгруэнция (отношение конгруэнтности) на  $\mathfrak{A}$ , если:

$\forall f^k \in \sigma$  и  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$ , так, что  $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$ , выполнено  $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$

### 10.22 Определение (фактор)

$\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $\sim$  - конгруэнция на  $\mathfrak{A}$ . Для  $a \in \mathfrak{A}$   $[a]_n = \{b \in |\mathfrak{A}| | a \sim b\} = a_{/\sim}$

$A_{/\sim} = \{[a]_n | a \in A\} = \{a_{/\sim} | a \in |\mathfrak{A}|\}$   $f^n, c \in \sigma$

$f^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \dots, [a_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)]$   $c^{\mathfrak{A}/\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$

### 10.23 Предложение

Определение фактора на модели является корректным

Доказательство:  $f^n \in \sigma$ ,  $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{A}$ . Пусть  $a_1 \sim c_1, \dots, a_n \sim c_n$ . Покажем, что  $f([a_1], \dots, [a_n]) = f([c_1], \dots, [c_n])$   $[a_1] = [c_1], \dots, [a_n] = [c_n]$

$$f(a_1, \dots, a_n) \sim f(c_1, \dots, c_n) \Rightarrow [f(a_1, \dots, a_n)] = [f(c_1, \dots, c_n)]$$

$$f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)] = [f(c_1, \dots, c_n)] = f([c_1], \dots, [c_n])$$

### 10.24 Замечание

**Конгруэнция** - это в точности такая эквивалентность на алгебре, по которой корректно определяется фактор-алгебра

### 10.25 Теорема (об эпиморфизме)

$h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{A}|_{/\sim}$ , т.е.  $h(a) = [a] \Rightarrow h$  - эпиморфизм

Доказательство: 1) Покажем, что  $h$  - гомоморфизм:

$$\text{а) } f^n \in \sigma, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|. h(f(a_1, \dots, a_n)) = [f(a_1, \dots, a_n)] = f([a_1], \dots, [a_n]) = f(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

$$\text{б) } c \in \sigma, h(c^{\mathfrak{A}}) = [c^{\mathfrak{A}}] = c^{\mathfrak{A}/\sim}$$

$$\text{2) "на": } [a] \in \mathfrak{A}_{/\sim} \Rightarrow a \in |\mathfrak{A}| \quad h(a) = [a]$$

### 10.26 Предложение

$h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  - гомоморфизм  $\Rightarrow \sim_{\text{на } A} = |\mathfrak{A}| \quad a \sim c : h(a) = h(c)$ ,  $\sim$  - конгруэнция на  $\mathfrak{A}$

Доказательство: упражнение.

### 10.27 Теорема (об изоморфизме)

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  - эпиморфизм. Для  $a, c \in \mathfrak{A} \quad a \sim c : h(a) = h(c)$  тогда  $\mathfrak{A}_{/\sim} \simeq \mathfrak{B}$ , а именно  $g : |\mathfrak{A}|_{/\sim} \rightarrow |\mathfrak{B}|$ ,  $g([a]) = h(a)$  - изоморфизм,  $g : |\mathfrak{A}|_{/\sim} \rightarrow \mathfrak{B}$

Доказательство:  $g([a]) = h(a)$

$$\text{1) } g \text{ - отображение } a, c \in |\mathfrak{A}|, [a] = [c] \Rightarrow a \sim c \Rightarrow h(a) = h(c) \Rightarrow h([a]) = h([c])$$

$$\text{2) } g \text{ - взаимно-однозначное:}$$

$$\text{а) "на": } b \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists a \in \mathfrak{A}, \text{ такое что } h(a) = b \Rightarrow g([a]) = h(a) = b$$

$$\text{б) } g \text{ - различно: } g([a]) = g([c]) \Rightarrow h(a) = h(c) \Rightarrow a \sim c \Rightarrow [a] = [c] \Rightarrow g \text{ - взаимно-однозначное}$$

$$\text{3) } g \text{ - сохраняет операции и константы: Пусть } f^n, c \in \sigma$$

$$\text{а) } [a_1], \dots, [a_n] \in \mathfrak{A}_{/\sim} \quad g(f([a_1], \dots, [a_n])) = g([f(a_1, \dots, a_n)]) = h(f(a_1, \dots, a_n)) = f(h(a_1), \dots, h(a_n)) = f(g([a_1]), \dots, g([a_n]))$$

$$\text{б) } g(c^{\mathfrak{A}/\sim}) = g([c^{\mathfrak{A}}]) = h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} \Rightarrow g \text{ - изоморфизм, } g : \mathfrak{A}_{/\sim} \rightarrow \mathfrak{B}$$

## 10.28 Предложение

Любой гомоморфизм является композицией эпиморфизма и изоморфного вложения

Доказательство:  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  - гомоморфизм,  $C = h(\mathfrak{A}) = \{h(a) | a \in \mathfrak{A}\}$ ,  
 $\exists \mathfrak{C} \in K(\sigma) \ |\mathfrak{C}| = C, \mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}, g : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{C}|, g(a) = h(a) \in C$

Тогда  $g$ - эпиморфизм (упражнение).  $id_c : C \rightarrow B, id_c : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$ - изоморфное вложение (упражнение)

Тогда  $\forall a \in \mathfrak{A}$  имеем  $h(a) = g(a) = id_c(g(a)), h = g \circ id_c, g$  - эпиморфизм,  $id_c$ -изоморфное вложение

## 10.29 Теорема (основная теорема о гомоморфизмах)

Любой гомоморфизм является композицией, факторизацией изоморфного вложения.

Доказательство:  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  - гомоморфизм. Пусть  $\mathfrak{C} = h(\mathfrak{A})$ , т.е.  $|\mathfrak{C}| = C = h(\mathfrak{A}), A = |\mathfrak{A}|$ , пусть  $h = g \circ id_c, g : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$  - эпиморфизм

Для  $a, c \in \mathfrak{A}, a \sim c, h(a) = h(c)$  (или  $g(a) = g(c)$ ).  $v : \mathfrak{A}/\sim \rightarrow \mathfrak{C}, v([a]) = g(a)$ . Тогда  $v : \mathfrak{A}/\sim \rightarrow \mathfrak{C}$  - изоморфизм

Положим  $u : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\sim, u(a) = [a] \Rightarrow g = u \circ v$

$$h = u \circ v \circ id_c \quad \mathfrak{A} \xrightarrow{u} \mathfrak{A}/\sim \xrightarrow{v} \mathfrak{C}$$

$$h = g \circ id_c$$

$$q = v \circ id_c, \quad \mathfrak{A} \xrightarrow{u} \mathfrak{A}/\sim \xrightarrow{v} \mathfrak{C} \xrightarrow{id_c} \mathfrak{B}, \quad q : \mathfrak{A}/\sim \longrightarrow \mathfrak{B}$$

Композиция изоморфизма и изоморфного вложения является изоморфным вложением  $h = u \circ q$

## 11 Секвенциальное исчисление высказываний

### 11.1 Определение (Секвенции, аксиомы, правила вывода)

$\Gamma = \langle \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle$  - конечная последовательность формул. Тогда следующие выражения называются секвенциями:

1.  $\Gamma \vdash \varphi$
2.  $\vdash \varphi$
3.  $\Gamma \vdash$

Аксиома:

1.  $\varphi \vdash \varphi$

Правила вывода:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)} \quad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \phi)}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \vdash \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \vdash \psi} \quad \frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \neg \varphi}{\Gamma \vdash} \quad \frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \xi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}
 \end{array}$$

### 11.2 Определение (Доказательство, доказуемая секвенция)

$S_1 \dots S_n$  называется доказательством, если каждая секвенция  $S_i$  либо является аксиомой, либо получена из предыдущих однократным применением правил вывода.

Секвенция  $S$  называется доказуемой, если  $\exists S_1 \dots S_n$ , которая является доказательством и заканчивается на эту секвенцию.

### 11.3 Замечание

Если  $S_1 \dots S_n$  доказательство, то  $\forall k \leq n$ :

- а)  $S_1 \dots S_k$  - доказательство
- б)  $S_k$  - доказуема

### 11.4 Определение (Дерево секвенций)

1.  $S$  - дерево
2. Если  $D_1 \dots D_n$  - деревья секвенций,  $S$  - секвенция, то  $D = \frac{D_1 \dots D_n}{S}$  - дерево секвенций
3. Других деревьев нет



## 11.5 Определение (Вершины, переходы, высота)

а)  $V(D)$  - множество вершин:

1. Если  $D = S$ , то  $V(D) = \{S\}$
2. Если  $D = \frac{D_1 \dots D_n}{S}$ , то  $V(D) = V(D_1) \cup \dots \cup V(D_n)$

б)  $P(D)$  - переходы:

1. Если  $D = S$ , то  $P(D) = \emptyset$
2. Если  $D = \frac{D_1 \dots D_n}{S}$ ,  $D_i = \frac{\dots}{S_i}$ , то  $P(D) = P(D_1) \cup \dots \cup P(D_n) \cup \left\{ \frac{S_1 \dots S_n}{S} \right\}$

в)  $h(D)$  - высота дерева:

1.  $D = S$ , то  $h(D) = 1$
2.  $D = \frac{D_1 \dots D_n}{S}$ ,  $h(D) = \max(h(D_1) \dots h(D_n)) + 1$

## 11.6 Определение (Дерево вывода)

Дерево секвенций называется деревом вывода, если все его вершины являются аксиомами, а переходы - частными случаями правил вывода.

## 11.7 Предложение

Секвенция  $S$  - доказуема  $\Leftrightarrow \exists D = \frac{D_1 \dots D_n}{S}$  - дерево вывода, заканчивающееся на эту секвенцию.

Доказательство:

$(\Rightarrow) S$  - доказуема  $\Rightarrow \exists S_1 \dots S_n = S$  - доказательство. Индукция по  $n$

$n = 1$ :  $S$  - аксиома  $\Rightarrow D = S$  - дерево вывода.

$< n \rightarrow n$ :  $\forall k < n$  - верно.  $S_1 \dots S_n = S$  - доказательство,  $\frac{S_{i_1} \dots S_{i_m}}{S}$  - правило вывода,  $i_1 \dots i_m < n$

$\forall k \leq m$   $S_{i_1} \dots S_{i_k}$  - доказательство,  $i_k < n$ ,  $D_{i_1} = \frac{\dots}{S_{i_1}} \dots D_{i_m} = \frac{\dots}{S_{i_m}}$  - деревья вывода.

$(\Leftarrow) D = \frac{\dots}{S}$  - дерево,  $n = h(D)$ . Индукция по  $n$

$n = 1$ :  $D = S$  - аксиома  $\Rightarrow S$  - доказательство.

$< n \rightarrow n$ :  $\forall k < n$  верно,  $D = \frac{D_{i_1} \dots D_{i_m}}{S}$  - дерево вывода,  $h(D) = n \Rightarrow h(D_{i_k}) < n$ ,  $i_k \leq m$

$D_{i_k} = \frac{\dots}{S_{i_k}} \Rightarrow \forall i \leq m \exists S_1^1 \dots S_{i_k}^1 = S_{i_k}$  - доказательство,  $S_1^1 \dots S_k^1 = S_1 \dots S_m^1 \dots S_{k_m}^m, S$  - доказательство.

## 11.8 Определение (Производные и допустимые правила вывода)

Дерево секвенций  $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$  высоты 2 называется производным правилом вывода, если  $\exists D = \frac{\dots}{S}$ , вершины которого либо аксиомы, либо одни из секвенций  $S_1 \dots S_n$ , а все переходы являются частными случаями правил вывода

Дерево секвенций  $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$  высоты 2 называется допустимым правилом вывода, если при добавлении его в качестве нового правила вывода множество доказуемых секвенций не увеличивается.

## 11.9 Замечание

Любое производное правило вывода является допустимым.

## 11.10 Предложение (Допустимые правила вывода)

Следующие правила вывода являются допустимыми:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\psi_1 \dots \psi_n \vdash \varphi}{\xi_1 \dots \xi_k \vdash \varphi} \quad \frac{\psi_1 \dots \psi_n \vdash (\{\psi_1 \dots \psi_n\} \subseteq \{\xi_1 \dots \xi_k\})}{\xi_1 \dots \xi_k \vdash \varphi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad \frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma, (\varphi \& \psi), \Gamma_1 \vdash \xi} \quad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \neg \varphi)}{\Gamma \vdash} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \neg \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \vdash} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\neg \psi \vdash \neg \varphi)} \quad \frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash \neg \psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} \quad \frac{\varphi \vdash \psi; \psi \vdash \xi}{\varphi \vdash \xi}
 \end{array}$$

## 11.11 Определение (Семантика секвенций)

1.  $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi$  - называется истинной при данных значениях входящих в нее пропозициональных переменных, если либо  $\exists i \leq n : \varphi_i$  - ложна, либо  $\psi$  - истина.
2.  $\vdash \psi$  - истина, если  $\psi$  - истина.
3.  $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$  - истина при данных значениях входящих в нее пропозициональных переменных, если  $\exists i \leq n : \varphi_i$  - ложна.
4. Секвенция называется тождественно истинной, если она является истинной при любых значениях входящих в нее пропозициональных переменных.

## 11.12 Предложение

Правила вывода сохраняют тождественную истинность секвенций, а именно, если  $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$  - правило вывода и  $S_1 \dots S_n$  - тождественно истинна, то  $S$  - тождественно истинна.

### 11.13 Теорема (о корректности СИВ)

Если секвенция доказуема, то она тождественно истинна.

Доказательство:

Пусть секвенция  $S$  - доказуема  $\Rightarrow S_1 \dots S_n = S$  - доказательство. Индукция по  $n$ :

$n = 1$ :  $S$  - аксиома  $\Rightarrow S$  - тождественно истинна.

$< n \rightarrow n$ :  $\forall k < n$  - истина

$\exists i_1 \dots i_m < n$ :  $\frac{S_{i_1} \dots S_{i_m}}{S}$  - правило вывода.  $\forall k < m$   $S_{i_1} \dots S_{i_k}$  - доказательство  $\Rightarrow S_{i_1} \dots S_{i_m}$  - тождественно истинна  $\Rightarrow S$  - тождественно истинна.

### 11.14 Определение (подстановка)

Отображение  $\rho : F \rightarrow F$  называется подстановкой, если оно перестановочно с логическими связками:

1.  $\rho(\varphi \vee \psi) = (\rho(\varphi) \vee \rho(\psi))$
2.  $\rho(\varphi \& \psi) = (\rho(\varphi) \& \rho(\psi))$
3.  $\rho(\varphi \rightarrow \psi) = (\rho(\varphi) \rightarrow \rho(\psi))$
4.  $\rho(\neg \varphi) = \neg \rho(\varphi)$

### 11.15 Теорема (о подстановках)

Подстановка сохраняет доказуемость секвенций, если  $S$  - доказуема, то  $\rho(S)$  - доказуема.

Доказательство:

$S$  - доказуема, тогда  $\exists D = \frac{\dots\dots\dots}{S}$  - дерево вывода.  $D \rightarrow \rho(D) = \frac{\dots\dots\dots}{\rho(S)}$  - дерево вывода,  $n = h(D)$ , индукция по  $n$ :

$n = 1$ :  $D = S$  - аксиома,  $\rho(D) = \rho(S)$  - аксиома.

$\frac{S_1 \dots S_n}{S}$  - правило вывода, то  $\frac{\rho(S_1) \dots \rho(S_n)}{\rho(S)}$  - правило вывода.

### 11.16 Определение

Формула  $\varphi$  доказуема, если  $\vdash \varphi$  - доказуема.

### 11.17 Следствие

Если  $\rho$  - подстановка,  $\varphi$  - доказуема, то  $\rho(\varphi)$  - доказуема.

### 11.18 Определение (равносильность)

Формулы  $\varphi$  и  $\psi$  называются равносильными ( $\varphi \equiv \psi$ ), если  $\varphi \vdash \psi$  и  $\psi \vdash \varphi$  - доказуемы.

### 11.19 Предложение

Равносильность - отношение эквивалентности.

Доказательство:

1. Рефлексивность:  $\varphi \vdash \varphi$  - аксиома  $\Rightarrow \varphi \equiv \varphi$ .
2. Симметричность:  $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi$  - доказуемы  $\Rightarrow \psi \vdash \varphi, \varphi \vdash \psi$  - доказуемы  $\Rightarrow \psi \equiv \varphi$ .
3. Транзитивность:  $\varphi \equiv \psi, \psi \equiv \varphi. \varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi, \psi \vdash \xi, \xi \vdash \psi. \frac{\varphi \vdash \psi; \psi \vdash \xi}{\varphi \vdash \xi}, \frac{\xi \vdash \psi; \psi \vdash \varphi}{\xi \vdash \varphi} \Rightarrow \varphi \vdash \xi, \xi \vdash \varphi$  - доказуемы  $\Rightarrow \varphi \equiv \xi$ .

### 11.20 Предложение

Пусть  $\varphi$  - доказуема,  $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \psi$  - доказуема.

Доказательство:

$\vdash \varphi$  - доказуема,  $\varphi \vdash \psi. \frac{\vdash \varphi; \varphi \vdash \psi}{\vdash \psi} \Rightarrow \vdash \psi$  - доказуема  $\Rightarrow \psi$  - доказуема.

### 11.21 Предложение

Пусть  $\varphi \equiv \varphi_1, \psi \equiv \psi_1$ , тогда:

1.  $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi_1 \vee \psi_1)$
2.  $(\varphi \& \psi) \equiv (\varphi_1 \& \psi_1)$
3.  $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi_1 \rightarrow \psi_1)$
4.  $\neg \varphi \equiv \neg \varphi_1$

### 11.22 Теорема (о замене)

Пусть  $\psi \equiv \psi_1, \varphi_1$  - получена из  $\varphi$  заменой  $\psi \mapsto \psi_1$  ( $\psi$  - подформула  $\varphi$ ). Тогда  $\varphi \equiv \varphi_1$ .

Доказательство:

Индукция по длине формулы  $\varphi, \ln(\varphi) = n$ :

$n = 1$ :  $\varphi$  - пропозициональная переменная  $\Rightarrow \psi = \varphi \Rightarrow \varphi_1 = \psi_1 \Rightarrow \varphi = \psi \equiv \psi_1 = \varphi_1$ .

$< n \rightarrow n$ :  $k < n$  - доказано, докажем для  $n$ .

$\varphi = (\varphi' \vee \varphi''), \varphi = (\varphi' \& \varphi''), \varphi = (\varphi' \rightarrow \varphi''), \varphi = \neg \varphi$ .

а)  $\psi = \varphi \Rightarrow \varphi = \psi \equiv \psi_1 = \varphi_1$ .

б)  $\psi \neq \varphi \Rightarrow \psi$  - подформула  $\varphi'$  или  $\varphi''$ ,  $\ln(\varphi'), \ln(\varphi'') < n = \ln(\varphi)$ .

Пусть  $\varphi = (\varphi' \vee \varphi'') \Rightarrow \varphi_1 = (\varphi'_1 \vee \varphi''_1)$ , где  $\varphi'_1$  и  $\varphi''_1$  - либо  $\varphi'$  и  $\varphi''$ , либо получены заменой  $\psi$  на  $\psi_1 \Rightarrow$  по индукции  $\varphi'_1 \equiv \varphi', \varphi''_1 \equiv \varphi'' \Rightarrow \varphi = (\varphi' \vee \varphi'') \equiv (\varphi'_1 \vee \varphi''_1) = \varphi_1$ .

$\&, \neg, \rightarrow$  - аналогично.

### 11.23 Следствие

Пусть  $\psi \equiv \psi_1$  и  $\varphi_1$  получена из  $\varphi$  заменой нескольких вхождений  $\psi$  на  $\psi_1$ . Тогда  $\varphi \equiv \varphi_1$ .

Доказательство:

Индукция по числу вхождений - упражнение.

### 11.24 Предложение

Имеют место следующие эквивалентности формул:

1.  $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \& \neg\psi)$
2.  $\neg(\varphi \& \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
3.  $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$
4.  $(\varphi \& \psi) \equiv (\psi \& \varphi)$
5.  $((\varphi \vee \psi) \vee \xi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \xi))$
6.  $((\varphi \& \psi) \& \xi) \equiv (\varphi \& (\psi \& \xi))$
7.  $(\varphi \vee (\psi \& \xi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \xi))$
8.  $(\varphi \& (\psi \vee \xi)) \equiv ((\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \xi))$
9.  $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
10.  $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
11.  $(\varphi \vee (\psi \& \neg\psi) \vee \xi) \equiv (\varphi \vee \xi)$
12.  $(\varphi \& (\psi \vee \neg\psi) \& \xi) \equiv (\varphi \& \xi)$

### 11.25 Теорема

Для любой формулы  $\varphi$  существует равносильная ей формула  $\psi$ , находящаяся в КНФ.

Доказательство:

Алгоритм приведения формулы к КНФ(используем предложение 11.24):

1. С помощью 10 избавляемся от импликаций.
2. С помощью 1, 2, 9 вносим отрицания до пропозициональных переменных.
3. 3-7 - выносим конъюнкцию наружу.
4. Получаем КНФ, которая будет равносильна исходной формуле.

## 11.26 Теорема

КНФ тождественно истинна  $\Leftrightarrow$  в каждую ее элементарную дизъюнкцию хотя бы одна пропозициональная переменная входит как с отрицанием, так и без него.

Доказательство:

$\varphi = (\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n)$ , где  $\varphi_i$  - элементарная дизъюнкция

$(\Rightarrow)$   $\varphi$  - тождественно истинна  $\Rightarrow \forall i \varphi_i$  - тождественно истинна. Пусть  $i \leq n$  и для  $\varphi_i$  - условие нарушено.  $A_1 \dots A_k$  - пропозициональные переменные, входящие в  $\varphi_i$ :

$$A_j = \begin{cases} \text{л} & A_j \in \varphi_i \\ \text{и} & \neg A_j \in \varphi_i \end{cases} \Rightarrow \varphi_i = \text{ложь} - \text{противоречие.}$$

$(\Leftarrow)$   $\forall \varphi_i \exists A_j$ , такая что  $\varphi_i = \varphi'_i \vee A_j \vee \varphi''_i \vee \neg A_j \vee \varphi'''_i$  - тождественно истинная  $\Rightarrow \varphi = (\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n)$  - тождественно истинна.

## 11.27 Предложение

$\vdash (\neg \varphi \vee \varphi)$  - доказуема.

## 11.28 Теорема

КНФ  $\varphi$  доказуема  $\Leftrightarrow$  в каждую ее элементарную дизъюнкцию хотя бы одна пропозициональная переменная входит как с отрицанием, так и без него.

Доказательство:

$(\rightarrow)$   $\varphi$  - доказуема  $\Rightarrow \varphi$  - тождественно истинна  $\Rightarrow$  условие выполнено (по теореме о корректности)

$(\leftarrow)$   $\varphi_i, A_j$  - с отрицанием и без отрицания.

$$\varphi_i = \varphi'_i \vee A_j \vee \varphi''_i \vee \neg A_j \vee \varphi'''_i \dots$$

$\forall i \varphi_i$  - доказуема

$$\frac{\vdash (A_j \vee \neg A_j)}{\vdash (\varphi'_i \vee (A_j \vee \neg A_j) \vee \varphi''_i)} \\ \frac{\vdash (\varphi'_i \vee (A_j \vee \varphi''_i \vee \neg A_j))}{\vdash (\varphi'_i \vee A_j \vee \varphi''_i \vee \neg A_j)} \\ \vdash \varphi_i$$

$$\frac{\vdash \varphi_1; \vdash \varphi_2}{\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2); \vdash \varphi_3} \\ \frac{\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3); \vdash \varphi_4}{\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4)} \\ \vdots \\ \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \dots \wedge \varphi_n)$$

## 11.29 Следствие

КНФ доказуема  $\Leftrightarrow$  она тождественно истинна.

### 11.30 Теорема (О полноте для СИВ)

Если  $\varphi$  тождественно истинна, то  $\varphi$  - доказуема.

Доказательство:

Пусть  $\varphi$  - тождественно истинна.  $\exists \psi$  - КНФ, такая что  $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \psi$  - тождественно истинна  $\Rightarrow \psi$  - доказуема,  $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi$  - доказуема.

### 11.31 Теорема

1.  $\varphi$  тождественно истинна  $\Leftrightarrow \varphi$  - доказуема.
2. Секвенция  $S$  тождественно истинна  $\Leftrightarrow S$  доказуема.

Доказательство:

1. Следует из теоремы о корректности и теоремы о полноте.
2.  $S, \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ 
  - а) Если  $S$  доказуема, то  $S$  - тождественно истинна. Следует из теоремы о корректности.
  - б)  $S$  - тождественно истинна  $\Rightarrow ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi)$  - тождественно истинна (**Упражнение**)  
 $\Rightarrow ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi)$  - доказуема  
 $\Rightarrow \vdash ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow)$  - доказуема  
 $\vdash \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  (**Упражнение**)

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n), \vdash ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi)}{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vdash \psi} \\
 \hline
 \dots \\
 \hline
 \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi
 \end{array}$$

### 11.32 Следствие

Формулы логики высказываний эквивалентны  $\Leftrightarrow$  они тождественно истинны.

## 12 Исчисление высказываний Гильбертовского типа

### 12.1 Определение (Аксиомы, правило вывода)

Аксиомы:

1.  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
2.  $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi)))$
3.  $((\varphi \& \psi) \rightarrow \varphi)$
4.  $((\varphi \& \psi) \rightarrow \psi)$
5.  $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \xi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\phi \& \xi)))) \rightarrow \xi))$
6.  $((\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$
7.  $((\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$
8.  $((\varphi \rightarrow \xi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \xi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \xi)))$
9.  $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \varphi))$
10.  $(\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi)$

Правило вывода:

$$\frac{\varphi; \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

### 12.2 Определение (Доказательство, доказуемая формула, доказуемая из множества формул)

Последовательность  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  называется **доказательством**, если каждая  $\varphi_i$  является аксиомой, либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода.

$\varphi$  - **доказуема**, если существует доказательство  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  заканчивающееся этой формулой ( $\triangleright \varphi$ ).

$\varphi$  - **доказуема из множества формул**, если существует  $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ , в которой каждая  $\varphi_i$  является аксиомой, либо принадлежит множеству  $\Gamma$ , либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода ( $\Gamma \triangleright \varphi$ ).

### 12.3 Теорема (Об эквивалентности секвенциального и гильбертовского исчислений)

1.  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$  - доказуема  $\Leftrightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \triangleright \psi$
2.  $\varphi$  - доказуема  $\Leftrightarrow \triangleright \varphi$
3.  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$  - доказуема  $\Leftrightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \triangleright \psi, \forall \psi$



#### 12.4 Теорема (О дедукции)

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \triangleright \psi \Leftrightarrow \Gamma \triangleright (\varphi \rightarrow \psi)$$

## 13 Секвенциальное исчисление предикатов

### 13.1 Определение (Аксиомы)

Аксиомы секвенциального исчисления предикатов с равенством:

1.  $\varphi \vdash \varphi$
2.  $\vdash \forall x(x = x)$
3.  $\vdash \forall x \forall y((x = y) \rightarrow (y = x))$
4.  $\vdash \forall x \forall y \forall z((x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z))$
5.  $(t_1 = q_1), \dots, (t_n = q_n), \varphi(t_1 \dots t_n) \vdash \varphi(q_1 \dots q_n), [\varphi]_{t_1 \dots t_n}^{x_1 \dots x_n} \vdash [\varphi]_{q_1 \dots q_n}^{x_1 \dots x_n},$   
 $[\varphi]_{t_1 \dots t_n}^{x_1 \dots x_n}, \forall i \forall y \in Fv(t_i), x_i \text{ — не находится в области действия квантора по } y$

Правила вывода:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)} \quad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \phi)}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \vdash \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma \vdash \psi} \quad \frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \neg \varphi}{\Gamma \vdash} \quad \frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \xi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi} (x \in Fv(\Gamma)) \quad \frac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \psi} (\varphi(t) = [\varphi]_t^x) \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \varphi(t)}{\Gamma \vdash \exists x \varphi(x)} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} (x \notin Fv(\Gamma \bigcup \{\psi\}))
 \end{array}$$

### 13.2 Определение (Доказательство)

$S_1 \dots S_n$  называется доказательством, если каждая  $S_i$  является аксиомой, либо получена из аксиом однократным применением правил вывода.

### 13.3 Определение

Секвенция  $S$  называется доказуемой, если существует доказательство  $S_1 \dots S_n = S$  (зак. на  $S$ ).

### 13.4 Замечание

Если  $S_1 \dots S_n$ -доказательство, то  $\forall k \leq n$

- а)  $S_1 \dots S_n$ -доказательство
- б)  $S_k$ -доказуема

### 13.5 Определение (Дерево секвенций)

1.  $S$ -дерево,  $h(S) = 1$ ,  $V(S) = \{S\}$
2.  $D_1 \dots D_n$ -дерево секвенций,  $S$ -секвенция, то  $D = \frac{D_1 \dots D_n}{S}$  - дерево такое, что  $h(D) = \max(h(D_1) \dots h(D_n)) + 1$ ,  $V(D) = V(D_1) \cup \dots \cup V(D_n)$

### 13.6 Определение (Дерево вывода)

Дерево секвенций называется деревом вывода, если все его вершины являются аксиомами, а переходы- частными случаями правил вывода.

### 13.7 Предложение

$S$  - доказуема  $\Leftrightarrow \exists D$ , заканчивающееся на эту секвенцию.

### 13.8 Определение (Производное правило)

Дерево  $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$  высоты 2 называется производным, если  $\exists D$  заканчивающееся на  $S$ , у которого каждая вершина является аксиомой, либо одной из секвенций  $S_1 \dots S_n$ , а все переходы являются частными случаями правил вывода.

### 13.9 Определение (Допустимое правило вывода)

Дерево секвенций  $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$  называется допустимым правилом вывода, если при его добавлении в качестве нового правила вывода множество доказуемых секвенций не увеличится.

### 13.10 Замечание

Каждое производное правило вывода является допустимым.

### 13.11 Предложение

а) если секвенция логики предикатов получена из доказуемой секвенции логики высказывания подстановкой формулы логики предикатов вместо пропозициональных переменных, то эта секвенция доказуема в секвенциальном исчислении предикатов.

б) Допустимые (производные) правила вывода секв. исчислений высказываний являются допустимыми(производными) правилами вывода секвенций исчисления предикатов.

Доказательство:

$$\rho : R^0 - F^1 : \varphi \rightarrow [\varphi]_{y_1 \dots y_n}^{A_1 \dots A_n} = \rho(\varphi)$$

$$S \rightarrow [S]_{y_1 \dots y_n}^{A_1 \dots A_n} = \rho(S)$$

$$D \rightarrow \rho(D)$$

Тогда если  $D$  - дерево вывода в СИВ, тогда  $\rho(D)$  - дерево вывода в СИП

### 13.12 Следующие правила вывода допустимы:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \& \xi) \vdash (\psi \& \xi)} & \frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \& \varphi) \vdash (\xi \& \psi)} & \frac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)} \\ \frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \vee \varphi) \vdash (\xi \vee \psi)} & \frac{\varphi \vdash \psi}{(\psi \rightarrow \xi) \vdash (\varphi \rightarrow \xi)} & \frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \rightarrow \varphi) \vdash (\xi \rightarrow \psi)} \\ \frac{\varphi \vdash \psi}{\neg \psi \vdash \neg \varphi} & \frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi(x)} & \frac{\varphi \vdash \psi}{\forall x \varphi \vdash \forall x \psi} \\ & \frac{\varphi \vdash \psi}{\exists x \varphi \vdash \exists x \psi} \end{array}$$

### 13.13 Определение (равносильность)

$\varphi$  и  $\psi$  равносильны ( $\varphi = \psi$ ), если  $\varphi \vdash \psi$ ,  $\psi \vdash \varphi$  доказуемы.

### 13.14 Замечание

$\equiv$ - отношение эквивалентности.

### 13.15 Следствие

Если  $\varphi \equiv \varphi_1$ ,  $\psi \equiv \psi_1$ , тогда:

1.  $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi_1 \vee \psi_1)$
2.  $(\varphi \& \psi) \equiv (\varphi_1 \& \psi_1)$
3.  $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi_1 \rightarrow \psi_1)$
4.  $\neg \varphi \equiv \neg \varphi_1$

### 13.16 Теорема (О замене)

Пусть  $\psi \equiv \varphi_1$ ,  $\varphi_1 = [\varphi]_{\psi_1}^{\psi}$  получена из  $\varphi$  заменой первого вхождения  $\varphi$  на  $\psi_1$ ,  $\varphi \equiv \varphi_1$

### 13.17 Определение (Семантика СИП)

1.  $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \psi$ -т.и. , если  $\forall$  модели  $\mathfrak{A} \in k(\delta(\{\varphi_1 \dots \varphi_n, \psi\})), \forall \gamma : FV(\{\varphi_1 \dots \varphi_n, \psi\}) \rightarrow |\mathfrak{A}|$ , если  $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma], \dots, \mathfrak{A} \models \varphi_n[\gamma]$ , то  $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$
2.  $\vdash \psi$ -тождественно истинна, если  $\forall \mathfrak{A} \in k(\delta(\psi)), \forall \gamma : FV(\psi) \rightarrow |\mathfrak{A}|$  и  $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$
3.  $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \neg$ -т.и. если  $\forall \mathfrak{A} \in k(\delta(\{\varphi_1 \dots \varphi_n\})), \forall \gamma : FV(\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}) \rightarrow |\mathfrak{A}| \exists i \leq n : \mathfrak{A} \not\models \varphi_i[\gamma]$

### 13.18 Замечание

1. Секвенция  $\vdash \psi$  тождественно истинна  $\iff \psi$ -тождественно истинна
2.  $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ - т.и  $\iff (\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n)$  тождественно ложна

### 13.19 Теорема (О корректности)

Если секвенция доказуема, то она т.и.

Доказательство: упр.

### 13.20 Лемма

1. Аксиомы - т.и
2. Правила вывода сохраняют т.и, т.е если  $\frac{S_1; \dots; S_k}{S}$  правило вывода и  $S_1 \dots S_k$ -т.и, то  $S$ -т.и.

Доказательство:

Доказательство индукцией:  $S$ -доказуема  $\iff \exists D \hat{S}$  -дерево вывода,  $n = h(D)$ .

Если  $n = 1$ , то  $S$ - аксиома.

### 13.21 Предложение

Пусть  $x \notin FV(\xi)$ , тогда имеют место след. тождества.

1.  $\forall x \xi \equiv \xi$
2.  $\exists x \xi \equiv \xi$
3.  $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$
4.  $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$
5.  $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$
6.  $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$
7.  $(\forall x \varphi \& \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \& \psi)$

8.  $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$
  9.  $(\forall x\varphi \& \xi) \equiv \forall x(\varphi \& \xi)$
  10.  $(\exists x\varphi \& \xi) \equiv \exists x(\varphi \& \xi)$
  11.  $(\forall x\varphi \vee \xi) \equiv \forall x(\varphi \vee \xi)$
  12.  $(\exists x\varphi \vee \xi) \equiv \exists x(\varphi \vee \xi)$
  13.  $(\xi \& \forall x\varphi) \equiv \forall x(\xi \& \varphi)$
  14.  $(\xi \& \exists x\varphi) \equiv \exists x(\xi \& \varphi)$
  15.  $(\xi \vee \forall x\varphi) \equiv \forall x(\xi \vee \varphi)$
  16.  $(\xi \vee \exists x\varphi) \equiv \exists x(\xi \vee \varphi)$
  17.  $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$
  18.  $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$
- $$\forall x[\varphi(z)]_x^z \equiv \forall y[\varphi(z)]_y^z$$
- $$\exists x[\varphi(z)]_x^z \equiv \exists y[\varphi(z)]_y^z$$
- $z$  не находится в области действия кванторов по  $x$ , ни по  $y$ , ни по  $z$ .

### 13.22 Определение (предваренная нормальная форма)

Говорят, что функция  $\varphi$  находится в предварённой нормальной форме, если она имеет вид:

$$\varphi = Q_1x_1 \dots Q_nx_n \quad \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$$

$Q_i \in P\{\forall, \exists\}$ ,  $\varphi$ —бескванторная

### 13.23 Теорема (о ПНФ)

$\forall\varphi\exists\psi, \psi$ —В ПНФ, тогда  $\varphi \equiv \psi$ , для любой формулы существует равносильная ей формула, находится в Предварённой нормальной форме.

Доказательство:

Алгоритм приведения формулы к предварённой нормальной форме

1. Избавляемся от импликации
2. С помощью тождеств 5 и 6, законов Де Моргана и снятия двойного отрицания, вносим отрицание под знаки квантора.
3. С помощью тождеств 17 и 18 переобозначаем переменные так, чтобы :
  - а) разные кванторы действовали по разным переменным
  - б) связанные переменные не имели свободных вхождений, т.е чтобы каждая переменная имела либо связанные, либо только свободные вхождения.

4. С помощью тождеств 9-16 выносим все кванторы наружу. В силу теоремы о замене, а также в силу того, что равносильность  $\equiv$  являясь отношением эквиваленции, обладает свойством транзитивности, полученная в результате формула будет равносильна исходной.

## 14 Теорема о существовании модели

### 14.1 Определение

$\sigma$ - сигнатура  $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ ,  $\varphi \in F(\sigma)$

1.  $\Gamma \vdash \varphi$  если  $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma \mid \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$  доказуема
2.  $\Gamma \vdash (\Gamma \text{ противоречива})$  если  $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma \mid \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  доказуема
3.  $\Gamma \not\vdash (\Gamma \text{ непротиворечива})$  если  $\neg(\Gamma \vdash)$
4.  $T \subseteq S(\sigma)$  - **теория сигнатуры**  $\sigma$ , если  $T$  - дедуктивно замкнуто, то есть  $\forall \varphi \in S(\sigma)$  если  $T \vdash \varphi$ , то  $\varphi \in T$
5.  $T$  - **полно**, если  $\forall \varphi \in S(\sigma) \varphi \in T$  или  $\neg \varphi \in T$

### 14.2 Замечание

Пусть  $T$  - теория сигнатуры  $\sigma = \sigma(T)$ , тогда:

1.  $\forall \varphi \in S(\sigma)$   
 $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \varphi$
2. Если  $\sigma \subseteq \sigma_1$  и  $\sigma \neq \sigma_1$ , то  $T$  - не является теорией сигнатуры  $\sigma_1$

Доказательство:

1.  $(\Rightarrow) \varphi \in T, \varphi \vdash \varphi$  доказуема (аксиома)  $\Rightarrow T \vdash \varphi$   
 $(\Leftarrow) T \vdash \varphi, T$  - теория  $\Rightarrow \varphi \in T$
2.  $\sigma \subseteq \sigma_1, \sigma \neq \sigma_1 \Rightarrow \exists q \in \sigma \setminus \sigma_1$ ,  
 $\exists \varphi \in S(\sigma_1) \mid q \in \sigma(\varphi)$  (упр.)  
 $\vdash (\varphi \vee \neg \varphi)$  - доказуемо  $\Rightarrow$  (из предположения, что  $T$  - теория  $\sigma_1$ )  $T \vdash (\varphi \vee \neg \varphi)$   
 $\Rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi) \in T \Rightarrow q \in \sigma(T) = \sigma$  - противоречие.

### 14.3 Замечание

$T \subseteq S(\sigma)$  - теория сигнатуры  $\sigma$ , тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $T \vdash$
2.  $\forall \varphi \in S(\sigma) \varphi \in T$  (т.е.  $S(\sigma) \subseteq T$ )
3.  $\exists \varphi \in S(\sigma) \mid \varphi, \neg \varphi \in T$

Доказательство:



1. (1. $\Rightarrow$ 2.)  $T \vdash \Rightarrow \exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in T \mid \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  доказуема. Пусть  $\varphi \in S(\sigma)$

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \neg \varphi \vdash} \quad \frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \neg \varphi \vdash}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi}$$

$\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$  - доказуема  $\Rightarrow T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$

2. (2. $\Rightarrow$ 3.)  $\varphi \in S(\sigma) \Rightarrow \neg \varphi \in S(\sigma) \Rightarrow \varphi, \neg \varphi \in T$

3. (3. $\Rightarrow$ 1.)  $\varphi, \neg \varphi \in T \Rightarrow T \vdash \varphi \quad T \vdash \neg \varphi$

$$\frac{\varphi \vdash \varphi; \neg \varphi \vdash \neg \varphi}{\varphi, \neg \varphi \vdash}$$

$\varphi, \neg \varphi \in T$  и  $\varphi, \neg \varphi \vdash$  - доказуемо  $\Rightarrow T \vdash$

#### 14.4 Следствие

$T$  - теория сигнатуры  $\sigma$ , тогда  $T \vdash \Leftrightarrow T = S(\sigma)$

Доказательство: упр.

#### 14.5 Предложение

Полное непротиворечивое множество предложений является теорией. Пусть  $T \subseteq S(\sigma)$ ,  $T$  - полно в  $\sigma$  и  $T \not\vdash$ . Тогда  $T$  - теория сигнатуры  $\sigma$ .

Доказательство:

Пусть  $T$  - не теория  $\Rightarrow \exists \varphi \in S(\sigma) \mid T \vdash \varphi$  и  $\varphi \notin T \Rightarrow \neg \varphi \in T \Rightarrow \exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \mid \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  - доказуемо

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi; \neg \varphi \vdash \neg \varphi}{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg \varphi \vdash}$$

$\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg \varphi \vdash$  - доказуемо  $\Rightarrow T \vdash$ . Противоречие.

#### 14.6 Определение (Элементарная теория модели)

Пусть  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ , то есть  $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$ , тогда **элементарной теорией модели** называется множество всех предложений, истинных на этой модели:  $Th \mathfrak{A} = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \varphi \models \mathfrak{A}\}$ .

#### 14.7 Определение (элементарная эквиваленция)

Пусть  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  - модели сигнатуры  $\sigma$ . Они называются

элементарно эквивалентными ( $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ), т.е.  $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$ , т.е.  $\forall \varphi \in S(\sigma) \quad \mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ .

### 14.8 Предложение

Пусть  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ , то  $Th(\mathfrak{A})$  - полная непротиворечивая теория сигнатуры сигмы.

Доказательство:

$Th(\mathfrak{A}) \not\vdash$ . Пусть  $Th(\mathfrak{A}) \vdash \Rightarrow \exists \varphi_1 \dots \varphi_n \in Th(\mathfrak{A}) : \varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$  - док.  $\Rightarrow \varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$  - тождественно истинна  $\Rightarrow$  истинна на  $\mathfrak{A} \Rightarrow \exists k \leq n : \mathfrak{A} \not\models \varphi_k$ , но  $\varphi_k \in Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_k$   
 $Th(\mathfrak{A})$  - полна. Пусть  $\varphi \in S(\sigma)$ . Пусть  $\varphi \notin Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi \in Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow Th(\mathfrak{A})$  - полна и непротиворечива  $\Rightarrow Th(\mathfrak{A})$  - теория.

### 14.9 Теорема (б. д.)

Пусть  $A, B$  - множества,  $B$  - бесконечна и  $||A|| \leq ||B||$ , тогда  $||A \cup B|| = ||B||$

### 14.10 Теорема (б. д.)

Пусть  $A$  - бесконечна,  $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n = \{(a_1 \dots a_n) | n \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$ , тогда  $||A^*|| = ||A||$

### 14.11 Теорема (б. д.)

$\forall \alpha \exists$  кардинал  $\alpha : ||A|| = ||\alpha||$

### 14.12 Теорема

$\forall A$  и  $B$   $||A|| \leq ||B||$  или  $||B|| \leq ||A||$ .

Доказательство:

Существуют кардиналы  $\alpha, \beta : ||A|| = ||\alpha||, ||B|| = ||\beta||$

$\alpha \leq \beta$  или  $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha \subseteq \beta$  или  $\beta \subseteq \alpha \Rightarrow ||\alpha|| \leq ||\beta||$  или  $||\beta|| \leq ||\alpha|| \Rightarrow ||A|| \leq ||B||$  или  $||B|| \leq ||A||$ .

### 14.13 Следствие

Если  $\alpha$  - бесконечный кардинал, то  $\alpha$ -предельный ординал.

Доказательство:

(от обр.) Пусть  $\alpha$  - не предельный  $\Rightarrow \exists \beta : \alpha = \beta + 1, \alpha = \beta \cup \{\beta\} \Rightarrow ||\alpha|| = ||\beta||, \beta < \alpha \Rightarrow \alpha$  - не кардинал  $\Rightarrow \alpha$  - предельный.

### 14.14 Определение

Пусть  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $X$  - множество элементов произв. мощности,  $\gamma : x \rightarrow |\mathfrak{A}|$  - означивание  $X$  на  $\mathfrak{A}$ .

$\Gamma \subseteq F(\sigma), Fv(\Gamma) = \{x | \exists \varphi \in \Gamma : x \in Fv(\varphi)\}$ .

Пусть  $Fv(\Gamma) \subseteq x$ . Говорят, что  $\Gamma$  истинно на  $\mathfrak{A}$  при означивании  $\gamma : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ , если  $\forall \varphi \in \Gamma : \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ . Множество  $\Gamma$  выполнимо на  $\mathfrak{A}$ , если  $\exists \gamma : x \rightarrow |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ ,  $\Gamma$  выполнимо (имеет модель), если оно выполнимо на некоторой модели, т.е.  $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) \exists \gamma : Fv(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$

### 14.15 Теорема (О существовании модели)

Любое непротиворечивое множество формул имеет модель (является выполнимым)

$$\forall \Gamma \subseteq F(\sigma), \text{ если } \Gamma \not\models, \text{ то } \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) \quad \exists \gamma : Fv(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|, \quad \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$$

Доказательство:

Пусть  $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ ,  $\not\models$  и  $X = Fv(\Gamma)$ ,  $D$  - множество констант:  $D \cap \sigma = \phi$ ,  $\|D\| = \|X\| \Rightarrow \exists$  биекция  $\gamma : X \rightarrow D$ . Обозначим  $\Gamma' = \Gamma[\gamma] = \{\varphi(d_1 \dots d_n) \mid \varphi \in \Gamma, Fv(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}, \gamma(x_i) = d_i\}$   
 $[\varphi]_{d_1 \dots d_n}^{x_1 \dots x_n} \Rightarrow \Gamma' \subseteq S(\sigma)$ .

### 14.16 Лемма

Множество Предложений  $\Gamma'$  непротиворечно.

Доказательство:

Пусть  $\Gamma' \vdash \Rightarrow \exists \varphi'_1 \dots \varphi'_n \in \Gamma' \quad \varphi'_1 \dots \varphi'_n \vdash$  доказательство, дерево вывода  $D' = \overline{\varphi'_1 \dots \varphi'_n \vdash}$

$$D = [D']_{\gamma^{-1}(\varphi')}^{\varphi'}: \quad \varphi' = \gamma(\varphi) = \varphi[\gamma]$$

$$\varphi = \gamma^{-1}(\varphi')$$

$$D = [D']_{\gamma^{-1}(\alpha) \in X}^{d \in D} \quad \varphi' = \varphi(d_1 \dots d_n) \rightarrow \varphi(x_1 \dots x_n)$$

$$D = \overline{\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash}, \quad \varphi_i \in \Gamma, D - \text{дерево вывода (упр).}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 \dots \varphi_n \vdash \text{ доказательство } \Gamma \vdash - \text{противоречива} \Leftrightarrow \Gamma' \not\models.$$

$$\delta = \max(\omega, \|\delta\|, \|X\|)$$

$$\text{Пусть } C\text{-множество констант } C \cap (\delta \cup D) = \phi,$$

$$\|c\| = \delta$$

$$\sigma' = \sigma \cup D \cup C$$

$$S(\sigma') \subseteq (\sigma' \cup \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\cdot), ", ", \&, \cup, \rightarrow, \neg, \exists, \forall\})^* - \text{множество всех конечных слов}$$

$$\|S(\sigma')\| \leq \delta \Rightarrow \|S(\sigma)\| = \|\delta\| = \|\{\alpha \mid \alpha < \delta\}\|$$

$\delta$ -кардинал.

$$S(\sigma') = \{\varphi_\alpha \mid \alpha < \delta\}$$

$$T' \subseteq S(\sigma')$$

$$\text{Шаг } 0 : T_0 = \Gamma', \quad T_0 \not\models$$

$$\text{Шаг } \beta: \text{Случай } 1: 0 < \beta \leq \delta$$

$\beta$  - неперд.  $\beta = \alpha + 1$ ,  $\beta \leq \delta \Rightarrow \beta < \delta \Rightarrow \alpha < \delta$ ,  $T_\alpha$  - построена, рассмотрим  $\varphi_\alpha$   
 случай 1.1: Пусть  $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \not\models$ , пусть  $\varphi_\alpha \neq \exists x \psi(x)$ , положим  $T_\beta = T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$

случай 1.2:  $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \not\models$ ,  $\varphi_\alpha = \exists x \psi_\alpha(x)$ ,  $\alpha < \delta$ ,  $\delta$  - кардинал  $\Rightarrow \|\alpha\| < \|\delta\|$ .

Если  $\alpha$  - беконечна, то  $\|C \cap \sigma(T_\alpha)\| \leq \alpha < \delta$ ;  $\alpha$  - конечна.

$$\|C \cap \sigma(T_\alpha)\| - \text{конечно, } < \delta$$

$$\Rightarrow \|C \cap \sigma(T_\alpha)\| < \delta, \quad \|c\| = \delta \Rightarrow \|c \setminus \sigma(T_\alpha)\| = \delta \Rightarrow C \setminus \sigma(T_\alpha) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists c_\alpha \in c \setminus \sigma(T_\alpha). \text{ Положим, } T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha)\}$$

$$\text{Случай } 1.3 \quad T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \vdash, \quad T_\beta = T_\alpha \cup \{\neg \varphi_\alpha\}$$

$$\text{Случай } 2: \beta - \text{предельный, тогда } T_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} T_\alpha$$

Далее индукцией:

$$\beta < \delta, \quad T' = T_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} T_\alpha$$

#### 14.17 Лемма

$\Delta \subseteq F(\sigma_0)$ ,  $x \notin Fv(\Delta)$ ,  $x$  - не входит в  $\Delta$ ,  $\varphi \in F(\sigma_0)$ ,  $c \in \sigma(\varphi)$ ,  
 $c \notin \sigma(\Delta)$ ,  $x$  - не входит в  $\varphi$ . Тогда если секвенция  $\Delta, \varphi \vdash$  - доказуема, то  $\Delta, [\varphi]_x^c \vdash$  - доказуема

Доказательство :

Пусть  $\Delta, \varphi \vdash$  - доказуема  $\implies \exists D = \frac{\bigcap}{\Delta, \varphi \vdash}$  - дерево вывода

Без ограничения общности можно считать, что  $x$  - не входит в  $D$

$D_1 = [D]_x^C$  - дерево вывода (упражнение), при этом  $D_1 = \frac{\bigcap}{\Delta, [\varphi]_x^c \vdash} \Rightarrow$  секвенция  $\Delta, [\varphi]_x^c \vdash$  доказуема

#### 14.18 Лемма (Хенкина)

1.  $T'$  - непротиворечиво
2.  $T'$  - полно
3.  $T'$  - теория
4.  $(\varphi \wedge \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T' \text{ и } \psi \in T'$
5.  $(\varphi \vee \psi) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T' \text{ и } \psi \in T'$
6.  $\neg \varphi \in T' \Leftrightarrow \varphi \notin T'$
7.  $(\varphi \rightarrow \psi) \in T' \Leftrightarrow$  если  $\varphi \in T'$ , то  $\psi \in T'$
8.  $\exists x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \exists c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow \exists t \in T(\sigma') : FV(t) = \emptyset \text{ и } \psi(t) \in T'$
9.  $\forall x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \forall c \in C : \psi(c) \in T' \Leftrightarrow \forall t \in T(\sigma') \text{ если } FV(t) = \emptyset, \text{ то } \psi(t) \in T'$

Доказательство:

1.  $T' \not\vdash$

Шаг 0:  $T_0 \not\vdash$

Шаг 1: Пусть  $\forall \alpha < \beta : T_\alpha \not\vdash$ . Покажем:  $T_\beta \not\vdash$

Случай 1:  $\beta = \alpha + 1$

Случай 1.1:  $T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ ,  $T_\alpha, \varphi_\alpha \not\vdash \Rightarrow T_\beta \not\vdash$

Случай 1.2:  $T_\beta = T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(C_\alpha)\}$

$\varphi_\alpha = \exists x \psi_\alpha(x)$

Пусть  $T_\beta \vdash \Rightarrow \exists \xi_1, \dots, \xi_n \in T_\alpha :$

$\xi_1, \dots, \xi_n, \exists x \psi_\alpha(C_\alpha) \vdash$  - доказуема.

$$C_\alpha \notin \sigma \{ \xi_1, \dots, \xi_n, \exists x \psi_\alpha(x) \}$$

$$\frac{\frac{\xi_1, \dots, \xi_n, \exists x \psi_\alpha(x), \psi_\alpha(y) \vdash}{\xi_1, \dots, \xi_n, \psi_\alpha(y) \vdash \neg \exists x \psi_\alpha(x)} \quad \frac{\exists x \psi_\alpha(x) \vdash \exists x \psi_\alpha(x)}{\xi_1, \dots, \xi_n, \exists x \psi_\alpha(y) \vdash \neg \exists x \psi_\alpha(x) ; \xi_1, \dots, \xi_n, \exists x \psi_\alpha(x) \vdash \exists x \psi_\alpha(x)}}{\xi_1, \dots, \xi_n, \exists x \psi_\alpha(x) \vdash}$$

$$\xi_1, \dots, \xi_n, \exists x \psi_\alpha(x) \vdash \exists x \psi_\alpha(x)$$

$$\Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n, \varphi_\alpha \vdash \text{доказуемо} \Rightarrow T_\alpha \cup \{ \varphi_\alpha \} \vdash \text{противоречиво} \Rightarrow \text{в Случае 1.2 } T_\beta \not\vdash$$

$$\text{Случай 1.3: } T_\beta = T_\alpha \cup \{ \neg \varphi_\alpha \}; T_\alpha \cup \{ \varphi_\alpha \} \vdash$$

$$\text{Пусть } T_\beta \vdash, \text{ то есть } T_\alpha \cup \{ \neg \varphi_\alpha \} \vdash$$

$$\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_k \in T_\alpha, \text{ такие что } \xi_1, \dots, \xi_n, \varphi_\alpha \vdash, \xi_{n+1}, \dots, \xi_k, \neg \varphi_\alpha \vdash \text{доказуемы}$$

$$\frac{\frac{\xi_1, \dots, \xi_n, \varphi_\alpha \vdash}{\xi_1, \dots, \xi_n \vdash \neg \varphi_\alpha} \quad \frac{\xi_{n+1}, \dots, \xi_k, \neg \varphi_\alpha \vdash}{\xi_{n+1}, \dots, \xi_k \vdash \varphi_\alpha}}{\xi_1, \dots, \xi_k \vdash \neg \varphi_\alpha ; \xi_1, \dots, \xi_k \vdash \varphi_\alpha} \quad \xi_1, \dots, \xi_k \vdash$$

$$\xi_1, \dots, \xi_k \vdash \text{доказуемо} \Rightarrow T_\alpha \vdash \text{противоречиво} \Rightarrow T_\beta \not\vdash$$

$$\text{Случай 2: } \beta - \text{предельный } T_\beta = \bigcup_{\alpha \in \beta} T_\alpha$$

$$\text{Пусть } T_\beta \vdash \Rightarrow \exists \xi_1, \dots, \xi_n \notin T_\beta : \xi_1, \dots, \xi_n \vdash \text{доказуемо}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n < \beta : \xi_1 \in T_{\alpha_1}, \dots, \xi_n \in T_{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha = m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \forall i \leq n : T_{\alpha_i} \subseteq T_\alpha,$$

$$\alpha < \beta \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_n \in T_\alpha \Rightarrow T_\alpha \vdash \text{противоречиво} \Rightarrow T_\beta \not\vdash \Rightarrow T_\delta \not\vdash, \text{ т.е. } T' \not\vdash$$

$$2. \text{ Пусть } \varphi \in S(\sigma) = \{ \varphi_\alpha | \alpha < \delta \} \Rightarrow \exists \alpha < \delta : \varphi_\alpha = \varphi,$$

$$\beta = \alpha + 1 \Rightarrow \varphi_\alpha \in T_\beta \text{ или } \neg \varphi_\alpha \in T_\beta; T_\beta \leq T_\delta = T'$$

$$\Rightarrow \varphi_\alpha \in T' \text{ или } \neg \varphi_\alpha \in T', \text{ т.е. } \varphi \in T' \text{ или } \neg \varphi \in T'$$

$$\Rightarrow T' - \text{полна}$$

$$3. T' - \text{полна и непротиворечива} \Rightarrow T' - \text{теория}$$

$$4. (\rightarrow) \text{ Пусть } (\varphi \wedge \psi) \in T' \frac{(\varphi \wedge \psi) \vdash (\varphi \wedge \psi)}{(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi}, \frac{(\varphi \wedge \psi) \vdash (\varphi \wedge \psi)}{(\varphi \wedge \psi) \vdash \psi} \text{ доказуемы} \Rightarrow T' \vdash \varphi, T' \vdash \psi \Rightarrow \varphi, \psi \in T'$$

$$(\leftarrow) \text{ Пусть } \varphi, \psi \in T' \frac{\varphi \vdash \varphi; \psi \vdash \psi}{\varphi, \psi \vdash (\varphi \wedge \psi)} \text{ доказуема} \Rightarrow T' \vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \in T'$$

5. ( $\rightarrow$ ) Пусть  $(\varphi \vee \psi) \in T'$ ,  $\varphi \notin T'$ ,  $\psi \notin T' \Rightarrow \neg\varphi, \neg\psi \in T' \xrightarrow[\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)]{\neg\varphi, \neg\psi \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi); \neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)}$   
- доказуема  
 $\Rightarrow T' \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \in T', (\varphi \vee \psi) \in T'$   
 $\Rightarrow T' \vdash$  противоречие  
( $\leftarrow$ ) Пусть  $\varphi \in T'$  или  $\psi \in T'$ ,  $\varphi \vdash (\varphi \vee \psi)$ ,  $\psi \vdash (\varphi \vee \psi)$  - доказуемы  
**(Упражнение)**  
 $\Rightarrow T' \vdash (\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \in T'$
6. ( $\rightarrow$ ) Пусть  $\neg\varphi \in T'$ , пусть  $\varphi \in T' \Rightarrow T' \vdash$  противоречие  $\Rightarrow \varphi \notin T'$   
( $\leftarrow$ ) Пусть  $\varphi \notin T'$ ,  $T'$  - полная  $\Rightarrow \neg\varphi \in T'$
7. ( $\rightarrow$ ) Пусть  $(\varphi \rightarrow \psi) \in T'$ , пусть  $\varphi \in T'$   
 $\frac{\varphi \vdash \varphi; (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi, (\varphi \rightarrow \psi) \vdash \psi}$  - доказуема  $\Rightarrow T' \vdash \psi \Rightarrow \psi \in T'$   
( $\leftarrow$ ) Пусть  $(\varphi \rightarrow \psi) \notin T' \Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi) \in T'$ ,  
 $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi)$  **(Упражнение)**  
 $\Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\varphi \wedge \neg\psi)$  - доказуема  
 $\Rightarrow T' \vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow T' \vdash \varphi, T' \vdash \neg\psi \Rightarrow \varphi, \neg\psi \in T'$   
 $\Rightarrow \psi \in T' \Rightarrow T' \vdash$  противоречиво  $\Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \in T'$
8. (1.  $\Rightarrow$  2.)  $\exists x\psi(x) \in T' \Rightarrow \exists x\psi(x) \in S(\sigma')$   
 $\Rightarrow \exists \alpha : \varphi_\alpha = \exists x\psi(x) \Rightarrow \varphi_\alpha \in T' \Rightarrow T' \cup \{\varphi_\alpha\} = T'$  т.е.  $T' \cup \{\varphi_\alpha\} \not\vdash$   
На шаге  $\beta$  - случай 1.2:  
 $\varphi_\alpha = \exists x\psi_\alpha(x)$ ,  $\psi_\alpha(x) = \psi(x) \Rightarrow \psi_\alpha(C_\alpha) \in T_\beta$   
 $\Rightarrow C_\alpha \in C$ ,  $\psi(C_\alpha) \in T'$   
(2.  $\Rightarrow$  3.)  $c \in C$ ,  $\psi(c) \in T'$ ,  $t = c$ ,  $FV(t) = \emptyset$ ,  $\psi(t) \in T'$   
 $t \in T(\sigma')$   
(3.  $\Rightarrow$  1.)  $t \in T(\sigma')$ ,  $FV(t) = \emptyset$ ,  $\psi(t) \in T'$
- $$\frac{\frac{\psi(t) \vdash \psi(t)}{\psi(t) \vdash [\psi]_t^x}}{\psi(t) \vdash \exists x\psi(x)}$$
- доказуема  
 $\Rightarrow T' \vdash \exists x\psi(x) \Rightarrow \exists x\psi(x) \in T'$
9. (1.  $\Leftrightarrow$  2.)  $\forall x\psi(x) \in T' \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\psi(x) \in T'$  **(Упражнение)**  
 $\Leftrightarrow \exists x\neg\psi(x) \notin T' \Leftrightarrow$  не  $\exists c \in C | \neg\psi(c) \in T'$   
 $\Leftrightarrow \forall c \in C | \neg\psi(c) \notin T' \Leftrightarrow \forall c \in C | \psi(c) \in T'$

$$\begin{aligned}
(2. \Leftrightarrow 3.) \quad & \forall x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \neg \exists x \psi(x) \in T' \Leftrightarrow \exists x \neg \psi(x) \notin T' \\
& \Leftrightarrow \neg \exists t \in T(\sigma') | FV(t) = \emptyset \text{ и } \neg \psi(t) \in T' \\
& \Leftrightarrow \forall t \in T(\sigma') \text{ (если } FV(t) = \emptyset, \text{ то } \neg \psi(t) \notin T') \\
& \Leftrightarrow \psi(t) \in T'
\end{aligned}$$

### 14.19 Определение

$\mathfrak{A}' = \langle A; \sigma' \rangle \in k(\sigma'), |\mathfrak{A}'| = A.$

1.  $A = \{t \in T(\sigma') | FV(t) = \emptyset\}$ ,  $c \subseteq A \Rightarrow A \neq \emptyset$ ;  
Когда рассматриваем модель - основное множество не пусто.
2. Поэтому:
  - а) Если  $P^n \in \sigma', t_1 \dots t_n \in A$ , то  $\mathfrak{A}' \models P(t_1 \dots t_n) : P(t_1 \dots t_n) \in T'$
  - б) Если  $f^n \in \sigma, t_1 \dots t_n \in A$ , тогда  $f^{\mathfrak{A}'}(t_1 \dots t_n) = f(t_1 \dots t_n) \in T(\sigma')$ , т.е.  $f(t_1 \dots t_n) \in A$
  - в) Если  $e \in \sigma'$ , то  $e^{\mathfrak{A}'} = e \in A$ , т.к.  $e \in T(\sigma')$  нужно показать, что  $\mathfrak{A}' \models T'$ .

### 14.20 Лемма

Пусть  $t \in T(\sigma'), FV(t) = \emptyset$ , тогда  $t^{\mathfrak{A}'} = t$

Доказательство:

Индукция по построению

- 1) Пусть  $t = c \in \sigma' \Rightarrow t^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}'} = c = t$
- 2) Пусть  $t = f(t_1 \dots t_n), f^n \in \sigma', t_1 \in A$ , тогда  $t_i^{\mathfrak{A}'} = t_i \Rightarrow t^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}'} \dots t_n^{\mathfrak{A}'}) = f^{\mathfrak{A}'}(t_1 \dots t_n) = f(t_1 \dots t_n) = t$

### 14.21 Следствие

Пусть  $t(x_1 \dots x_n) \in T(\sigma'), q_1 \dots q_n \in A$ , тогда  $t^{\mathfrak{A}'}(q_1 \dots q_n) = t(q_1 \dots q_n) \in A$

Доказательство: (индукцией по построению)упр.

### 14.22 Лемма

$\forall \varphi \in S(\sigma') : \mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T'$

Доказательство:

Индукцией по построению  $\varphi$

- 1)  $\varphi = P(t_1 \dots t_n), t_i \in T(\sigma'), FV(t_i) = \emptyset$ , тогда  
 $\mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models P(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models P^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}'} \dots t_n^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models P^{\mathfrak{A}'}(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow$   
 $P(t_1 \dots t_n) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$
- 2) а)  $\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)$   
 $\mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi_1 \text{ и } \mathfrak{A}' \models \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \in T' \text{ и } \varphi_2 \in T' \Leftrightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2) \in T', \text{ т.е. } \varphi \in T'$
- б)  $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$
- в)  $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$

г)  $\varphi = \neg\varphi$

(а-г)-доказательство упражнение.

д)  $\varphi = \exists x\psi(x)$

$\mathfrak{A}' \models \exists x\psi(x) \Leftrightarrow \exists a \in A : \mathfrak{A}' \models \psi(a) \Leftrightarrow \exists t \in T(\gamma') \text{ такое что } Fv(t) = \emptyset$   
и  $\mathfrak{A}' \models \psi(t) \Leftrightarrow \exists t \in A \text{ такое что } \psi(t) \in T' \Leftrightarrow \exists x\psi(x) \in T' \text{ т.е. } \varphi \in T'$

е)  $\varphi = \forall x\psi(x)$  - упражнение.

### 14.23 Следствие

$\mathfrak{A}' \models T' (\forall \varphi \in T' : \mathfrak{A}' \models \varphi)$

Доказательство:

$\Gamma' = T_0 \subseteq T' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma'$

$\Gamma' = \Gamma[\gamma] = [\Gamma]_{\gamma(x) \in D}^{x \in Fv(\Gamma)} \quad \gamma : Fv(\Gamma) \rightarrow D \subseteq \sigma' \text{ - биекция}$

$\Rightarrow D \subseteq A$ . Рассмотрим  $\gamma : Fv(\Gamma) \rightarrow A$ , т.е.  $\gamma : Fv(\Gamma) \rightarrow (\mathfrak{A}')$

$\Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma[\gamma]$

$\varphi(x_1 \dots x_n) \in \Gamma \quad \mathfrak{A}' \models \varphi(d_1 \dots d_n), \gamma(x_i) = d_i; \quad d_i \in A$

$\parallel$   
 $\mathfrak{A}' \models \varphi(\gamma(x_1) \dots \gamma(x_n))$

$\Gamma \subseteq F(\sigma)$

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \wedge \sigma \in k(\sigma) \Rightarrow \mathfrak{A} \in k(\sigma), \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ - упражнение.

$S(\sigma') = \{\varphi_\alpha \mid \alpha < \delta\}$

### 14.24 Лемма

Пусть  $t \in T(\sigma'), Fv(t) = \emptyset$ , тогда

$\exists c \in C$ , такое что  $(t = c) \in T'$

Доказательство: (упражнение)

$\vdash \exists x(x = t)$  - док(Хенк)  $\Rightarrow \exists x(x = t) \in T' \Rightarrow \exists c \in C : \dots$

### 14.25 Определение

Пусть  $c, e \in C$ . Будем говорить, что  $c \sim e \Leftrightarrow (c = e) \in T'$

### 14.26 Лемма

$\sim$  - отношение эквивалентности.

Доказательство: упражнение

### 14.27 Определение

$\mathfrak{A}' = \langle A; \sigma' \rangle$ . В качестве  $A$  возьмём:

$A = C/\sim = \{[c]_\sim \mid c \in C\}$

1. Если  $P^n \in \sigma', c_1 \dots c_n \in C$ , тогда  $\mathfrak{A}' \models P([c_1]_\sim \dots [c_n]_\sim)$ , если  $P(c_1 \dots c_n) \in T'$



2. Если  $f^n \in \sigma', c_1 \dots c_n \in C$ , тогда  $f([c_1] \dots [c_n]) = [e]$ ,  $e \in C$ , когда  $(f(c_1 \dots c_n) = e) \in T'$
3. Если  $d \in \sigma$ , тогда  $d^{\mathfrak{A}'} = [e]$ ,  $e \in C$ , если выполнено  $(d = e) \in T'$

#### 14.28 Лемма (Опр.14.27 - корректно)

Доказательство:

$$6) f^n \in \sigma', c_1 \dots c_n \in C$$

$$f(c_1 \dots c_n) \in T(\sigma'), Fv(f(c_1 \dots c_n)) = \emptyset$$

$$\implies \exists e \in C \text{ т.ч. } f(c_1 \dots c_n) = e \in T'$$

$$\text{Пусть } d_1 \dots d_n \in C, e, b \in C, [c_1] = [d_1] \dots [c_n] = [d_n], f(c_1 \dots c_n) = e,$$

$$f(d_1 \dots d_n) = b \in T'. \text{ Покажем, что } [e] = [b]$$

$$\implies c_1 \sim d_1 \dots c_n \sim d_n \implies c_1 = d_1 \dots c_n = d_n \in T'$$

$$c_1 = d_1 \dots c_n = d_n, f(c_1 \dots c_n) = f(c_1 \dots c_n) + f(c_1 \dots c_n) = f(d_1 \dots d_n) -$$

доказательство(упр)

$$\varphi(x_1 \dots x_n) = (f(c_1 \dots c_n) \vdash \varphi(d_1 \dots d_n)) - \text{аксиома}$$

$$f(c_1 \dots c_n) = f(c_1 \dots c_n) \in T' \text{ (упр)}$$

$$\implies f(c_1 \dots c_n) = f(d_1 \dots d_n) \in T'$$

$$e = f(c_1 \dots c_n) \in T', e = f(c_1 \dots c_n), f(c_1 \dots c_n) = f(d_1 \dots d_n) \vdash e = (d_1 \dots d_n)$$

$$e = f(d_1 \dots d_n), f(d_1 \dots d_n) = b \vdash e = b \Rightarrow e = b \in T' \Rightarrow e \sim b,$$

$$\text{т.е. } [e] = [b]$$

$$a) P^n \in \sigma', c_1 \dots c_n, d_1 \dots d_n \in C, [c_1] = [d_1] \dots [c_n] = [d_n],$$

$$P(c_1 \dots c_n) \in T' \text{ Покажем что } P(d_1 \dots d_n) \in T'$$

$$\Rightarrow c_1 \sim d_1 \dots c_n \sim d_n \Rightarrow c_1 = d_1 \dots c_n = d_n \in T'$$

$$\varphi(x_1 \dots x_n) = P(x_1 \dots x_n)$$

$$c_1 = d_1 \dots c_n = d_n, P(c_1 \dots c_n) \vdash P(d_1 \dots d_n) \Rightarrow P(d_1 \dots d_n) \in T'$$

$$b) d \in \sigma', c, e \in C, (d = c), (d = e) \in T'$$

$$d^{\mathfrak{A}'} = [c], d^{\mathfrak{A}'} = [e] \text{ Покажем, что } [c] = [e]$$

$$d = c \vdash c = d, c = d, d = e \vdash c = e \text{ (упр)}$$

$$T' \vdash c = d \Rightarrow T' \vdash c = e \Rightarrow c = e \in T' \Rightarrow$$

$$c \sim e \Rightarrow [c] = [e]$$

#### 14.29 Лемма

Пусть  $t \in T(\sigma'), Fv(t) = Fv(q) = \emptyset$ , тогда

$$\mathfrak{A}' \models (t = q) \iff t = q \in T'$$

#### 14.30 Лемма

Пусть  $P^n \in \sigma', t_1 \dots t_n \in T(\sigma'), Fv(t) = \emptyset$ ,

$$\text{тогда } \mathfrak{A}' \models P(t_1 \dots t_n) \iff P(t_1 \dots t_n) \in T'$$

### 14.31 Лемма

$P^n \in \sigma', t_1 \dots t_n \in T(\sigma'), FV(t_i) = \emptyset$   
 $\mathfrak{A}' \models P(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow P(t_1 \dots t_n) \in T'$

### 14.32 Лемма

$\varphi \in S(\sigma')$ , тогда  $\mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T'$

Доказательство:

1.  $\varphi = (t = q), \varphi = P(t_1, \dots, t_n)$
2.  $ln\varphi = n, \forall \psi: ln\varphi < n$  - выполнено
  - a)  $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$   
 $\mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi_1$  или  $\mathfrak{A}' \models \varphi_2 \Leftrightarrow$  (по индукции)  
 $\Leftrightarrow \varphi_1 \in T'$  или  $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow$  (по л. Хенкина)  $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in T'$ , т.е.  $\varphi \in T'$
  - b)  $(\varphi_1 \& \varphi_2)$  - упр
  - c)  $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$  - упр
  - d)  $\neg \varphi_1$  - упр
  - e)  $\varphi = \exists x \varphi_1(x)$   
 $\mathfrak{A}' \models \exists x \varphi_1(x) \Leftrightarrow \exists a(const) \in \mathfrak{A}' : \mathfrak{A}' \models \varphi_1(a) \Leftrightarrow \exists c \in C : \mathfrak{A}' \models \varphi_1[c] \Leftrightarrow (c =$   
 $c) \in T'\text{-упр} \Rightarrow c^{\mathfrak{A}'} = [c]$   
 $\exists c \in C : \mathfrak{A}' \models \varphi_1(c^{\mathfrak{A}'}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi_1(c) \Leftrightarrow$  (по инд.)  $\exists c \in C : \varphi_1(c) \in T' \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow$  (по л. Хенкина)  $\exists x \varphi_1(x) \in T'$  т.е.  $\varphi \in T'$
  - f)  $\varphi = \forall x \varphi_1(x)$  - упр

### 14.33 Следствие

$\mathfrak{A}' \models T'$

Доказательство:

$\forall \varphi \in T' \mathfrak{A}' \models \varphi$

$T_0 \subseteq T' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models T_0, T_0 = \Gamma' = \Gamma[\gamma] = [\Gamma]_{\gamma(x) \in D}^{x \in FV(x)}$

Если  $d \in D \rightarrow c \in C : d \sim c \rightarrow [c] = d^{\mathfrak{A}'}$

Рассмотрим  $\gamma_0 : FV(\Gamma) \rightarrow c/\sim = \{[c] | c \in C\}$

$\gamma_0(x) = \gamma(x)^{\mathfrak{A}'}$ , если  $\gamma(x) = d$ , то  $\gamma_0(x) = d^{\mathfrak{A}'} = [c]$

Если рассмотрим  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ , то  $\gamma(x_i) = d_i \in D$ , тогда

$\varphi(d_1, \dots, d_n) \in \Gamma' = T_0 \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi(d_1, \dots, d_n) \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi(d_1^{\mathfrak{A}'}, \dots, d_n^{\mathfrak{A}'}) \Rightarrow$

$\mathfrak{A}' \models \varphi(\gamma_0(x_1), \dots, \gamma_0(x_n))$ , т.е.  $\mathfrak{A}' \models \varphi[\gamma_0]$ ,  $\gamma_0 : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}'|$

$\Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma[\gamma_0]$ ,  $\Gamma \subseteq F(\sigma), \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\Gamma[\gamma_0]$

### 14.34 Определение

$\Gamma \subseteq F(\gamma)$  ,  $\Gamma$  - совместна, если  $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$  ,  $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}|$  , в т.ч.  $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$

$\Gamma$  - локально совместима, если:

$\forall$  конечного  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  ,  $\Gamma_0$ - совместима

### 14.35 Теорема (Мальцева о компактности)

Множество формул совместно  $\Leftrightarrow$  когда оно локально совместно

Доказательство:

$(\Rightarrow)$   $\Gamma$  - совместно  $\Rightarrow \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$  ,  $\exists \gamma : FV(\Gamma) \rightarrow |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  ,  $\Gamma_0$  - конечная  $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0[\gamma]$  - упражнение  $\Rightarrow \Gamma_0$  - совместна  $\mid \Rightarrow \Gamma$  - локально совместна

$(\Leftarrow)$   $\Gamma$  - локально совместна, пусть  $\Gamma$  - не совместна  $\Rightarrow \Gamma \vdash$

$\Rightarrow \exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma : \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  - доказуемо

$\Gamma_0 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  - конечно,  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow \Gamma_0$  - совместна  $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma)$  ,  $\exists \gamma : FV(\Gamma_0) \rightarrow |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \Gamma_0[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma] \dots \mathfrak{A} \models \varphi_n[\gamma]$

С другой стороны:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  - доказуемо  $\Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$  т.и.  $\Rightarrow$

на  $\mathfrak{A}$  при  $\gamma$  - ист.  $\Rightarrow \exists i \leq n : \mathfrak{A} \not\models \varphi_i[\gamma]$  - противоречие  $\Rightarrow \Gamma$  - совместно

### 14.36 Теорема (Геделя о полноте)

Любая тождественно истинная формула доказуема

Доказательство:

Пусть  $\varphi$  - т.и. ,  $\varphi$  - не доказуема

$\frac{\neg \varphi \vdash}{\vdash \varphi} \Rightarrow$  если  $\neg \varphi \vdash$  - доказуемо, то  $\vdash \varphi$  - доказуемо , т.е.  $\varphi$  - доказуемо

$\mid \Rightarrow \neg \varphi$  - не доказуемо  $\Rightarrow \{\neg \varphi\} \not\vdash \Rightarrow \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$  ,  $\exists \gamma : FV(\varphi) \rightarrow |\mathfrak{A}| :$

$\mathfrak{A} \models \neg \varphi[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\gamma]$  - противоречие.

### 14.37 Следствие

Формула доказуема  $\Leftrightarrow$  она тождественно-истинна

Доказательство:

$(\Rightarrow)$  теорема о корректности

$(\Leftarrow)$  теорема Геделя

### 14.38 Теорема

$f$  - доказуема  $\Leftrightarrow S$  - тождественно истинна

Доказательство:

$(\Rightarrow)$  теорема о корректности

$(\Leftarrow)$  Теорема о полноте (аналогично логике высказываний)

### 14.39 Теорема (Мальцева о расширении)

$\Gamma \subseteq S(\sigma)$ ,  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $\mathfrak{A}$  - бесконечна,  $\mathfrak{A} \models \Gamma$  Тогда  $\forall$ кардинала  $\alpha \exists \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ , такая что  $\mathfrak{B} \models \Gamma$ ,  $\|\mathfrak{B}\| \geq \alpha$

Доказательство:  $C$  - множество констант,  $C \cap \sigma = \emptyset$ ,  $\|C\| = \alpha$

$$\Gamma' = \{\neg(c = d) | c, d \in C, c \neq d\}, \Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$$

Покажем  $\Gamma''$  - локально-совместна.  $\Gamma_0'' \subseteq \Gamma''$ ,  $\Gamma_0''$  - конечна.  $\Gamma_0 = \Gamma_0'' \cap \Gamma$ ,  $\Gamma_0' = \Gamma_0'' \cap \Gamma'$ .  $\Gamma_0'' = \Gamma_0 \cup \Gamma_0'$ ,  $\Gamma_0, \Gamma_0'$  - конечны,  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ,  $\Gamma_0' \subseteq \Gamma'$

$$C_0 = C \cap \sigma(\Gamma_0') - \text{конечно}, C_0 = \{d_1, \dots, d_n\}, \Gamma_0' = \{\neg(d_i = d_j) | i \neq j\}$$

$$\sigma' = \sigma \cup C, \mathfrak{A}' \in K(\sigma') : \mathfrak{A}' \upharpoonright \sigma = \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} - \text{бесконечна} \Rightarrow \exists b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{A}' : b_i \neq b_j \text{ при } i \neq j$$

$$d_i^{\mathfrak{A}'} = b_i \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma_0 : \mathfrak{A}' \models \Gamma_0' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma_0'' \Rightarrow \Gamma_0'' - \text{совместна}$$

$$\Rightarrow \Gamma'' - \text{локально-совместна} \Rightarrow \Gamma'' - \text{совместна} \exists \mathfrak{B}' \in K(\sigma') : \mathfrak{B}' \models \Gamma'' \Rightarrow \mathfrak{B}' \models \Gamma, \mathfrak{B}' \models \Gamma'$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \upharpoonright \sigma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Gamma. C' = \{d^{\mathfrak{A}'} | d \in C\} \subseteq |\mathfrak{B}'| = |\mathfrak{B}|$$

$$\mathfrak{B}' \models \Gamma' \Rightarrow \forall c, d \in C, \text{ если } c \neq d, \Rightarrow c^{\mathfrak{B}'} \neq d^{\mathfrak{B}'} \Rightarrow \|c'\| = \alpha$$

$$C' \subseteq |\mathfrak{B}| \Rightarrow \|\mathfrak{B}'\| \geq \alpha \Rightarrow \|\mathfrak{B}\| \geq \alpha$$

### 14.40 Следствие

Пусть  $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ ,  $\mathfrak{A}$  - бесконечна,  $\alpha$  - кардинал, тогда  $\exists \mathfrak{B} \in K(\Gamma)$  т. ч.  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ,  $\|\mathfrak{B}\| \leq \alpha$

Доказательство:

$\Gamma \models Th \mathfrak{A}$ , тогда  $\mathfrak{A} \models Th \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}$  - бесконечна  $\Rightarrow \exists \mathfrak{B} : \mathfrak{B} \models Th \mathfrak{A}$  и  $\|\mathfrak{B}\| \geq \alpha \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

### 14.41 Замечание

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ ,  $\mathfrak{A}$  - конечна, тогда  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$

Доказательство: (упражнение)

### 14.42 Предложение (О нестандартной модели $\mathbb{N}$ )

$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; \leq, +, \bullet, 0, 1 \rangle$ , тогда  $\exists \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$  и найдется  $c \in \mathfrak{M}$ , такие что  $\forall n \in \mathbb{N} \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n \leq c$

Доказательство:

$$\Gamma = Th(\mathfrak{N}), \sigma = \sigma(\mathfrak{N}) = \langle \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$$

$\sigma' = \sigma \cup \{c\}$ , при  $n \in \mathbb{N}$   $\varphi_n = (\underbrace{1+1+\dots+1}_n \leq c)$ ,  $\Gamma' = \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$ .

Покажем, что  $\Gamma''$  - локально совместна.

Рассмотрим  $\Gamma_0'' \subseteq \Gamma'$ ,  $\Gamma_0''$  - конечно,  $\Gamma_0 = \Gamma_0'' \cap \Gamma$ ,  $\Gamma_0' = \Gamma_0'' \cap \Gamma'$ ,  $\Gamma_0, \Gamma_0'$  - конечны,  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ,  $\Gamma_0' \subseteq \Gamma$ ,  $\Gamma_0'' = \Gamma_0 \cup \Gamma_0'$ .

$m = \max\{n | \varphi_n \in \Gamma_0'\} \Rightarrow \Gamma_0' \subseteq \{\varphi_1 \dots \varphi_m\}$ ,  $\mathfrak{N}' \in K(\sigma')$  такая, что  $\mathfrak{N} \upharpoonright \sigma = \mathfrak{N}$ .

Положим  $c^{\mathfrak{M}'} = m \Rightarrow \forall n \leq m \mathfrak{N}' \models \varphi_n \Rightarrow \mathfrak{N}' \models \Gamma_0'$ ;  $\mathfrak{N}' \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{N}' \models \Gamma_0 \Rightarrow \mathfrak{N}' \models \mathfrak{N}''$   
 $\Rightarrow \Gamma''$  - локально совместна  $\Rightarrow \Gamma''$  - совместна  $\Rightarrow \exists \mathfrak{M}' \in K(\sigma')$ , такая что  $\mathfrak{M}' \models \Gamma''$   
 $\Rightarrow \mathfrak{M}' \models \Gamma'$ ,  $\mathfrak{M}' \models \Gamma$ .

Положим  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \upharpoonright \sigma \Rightarrow \mathfrak{M} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ .

$c = c^{\mathfrak{M}'} \Rightarrow \forall n \mathfrak{M}' \models \varphi_n \Rightarrow \forall n \underbrace{1+1+\dots+1}_n \leq c$ .

#### 14.43 Замечание

$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ , поэтому в  $\mathfrak{M}$  нет наибольшего элемента:  $\mathfrak{N} \not\models \exists x \forall y (x \leq y) \Rightarrow \mathfrak{M} \not\models \exists y \forall x (x \leq y)$

#### 14.44 Определение (Аксиоматизируемый класс)

Пусть  $K \subseteq K(\sigma)$ . Класс  $K$  - аксиоматизируем, если  $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma) : K = K(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K(\sigma) | \mathfrak{A} \models \Gamma\} = \{\mathfrak{A} \in K(\sigma) | \forall \varphi \in \Gamma \mathfrak{A} \models \varphi\}$

## 15 Исчисление предикатов Гильбертовского типа

### 15.1 Определение (Аксиомы, правила вывода)

Аксиомы:

1.  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
2.  $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi)))$
3.  $((\varphi \& \psi) \rightarrow \varphi)$
4.  $((\varphi \& \psi) \rightarrow \psi)$
5.  $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \xi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\phi \& \xi)))) \rightarrow \xi))))$
6.  $((\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$
7.  $((\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$
8.  $((\varphi \rightarrow \xi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \xi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \xi)))$
9.  $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \varphi))$
10.  $(\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi)$
11.  $(\forall x \varphi \rightarrow [\varphi]_t^x)$
12.  $([\varphi]_t^x \rightarrow \exists x \varphi)$
13.  $(x = x)$
14.  $((x = y) \rightarrow ([\varphi]_x^z \rightarrow [\varphi]_y^z))$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi; \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x \psi} \quad \frac{\psi \rightarrow \varphi}{\exists x \psi \rightarrow \varphi} \quad x \notin FV(\varphi)$$

### 15.2 Определение (Доказательство, доказуемая формула)

Последовательность  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  называется **доказательством**, если каждая  $\varphi_i$  является аксиомой, либо получена из предыдущих однократным применением правил вывода.

$\varphi$  - **доказуема**, если существует доказательство  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  заканчивающееся этой формулой.

### 15.3 Определение (Вывод)

**Выводом**  $\varphi$  из  $\Gamma$  называется последовательность  $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ , в которой каждая  $\varphi_i$  является аксиомой, либо принадлежит множеству  $\Gamma$ , либо получена из предыдущих однократным применением правил вывода. Если существует вывод  $\varphi$  из  $\Gamma$ , то говорят, что  $\varphi$  выводима из  $\Gamma$  и обозначают  $\Gamma \triangleright \varphi$ .

#### 15.4 Теорема (о дедукции) (б. д.)

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \triangleright \psi \Leftrightarrow \Gamma \triangleright (\varphi \rightarrow \psi)$$

#### 15.5 Следствие

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \triangleright \psi \Leftrightarrow \triangleright (\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \dots (\varphi_n \rightarrow \psi) \dots))$$

#### 15.6 Теорема (б. д.)

1.  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \triangleright \psi \Leftrightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$  - доказуема в секв. исч. предикатов
2.  $\triangleright \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi$  - доказуема в секв. исч. предикатов

## 16 Эквивалентность классов вычислимых функций

### 16.1 Предложение (Вычислимые на машине Тьюринга функции)

Следующие функции являются правильно вычислимыми на машине Тьюринга:

1.  $0(x) = 0$
2.  $S(x) = x + 1$
3.  $I_n^m(x_1, \dots, x_n) = x_m$

### 16.2 Предложение

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)$  - правильно вычислимы на машине Тьюринга. Тогда  $h(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$  - ПВТ.

Доказательство:

Пусть  $F$  вычисляет  $f$ ,  $G_1, \dots, G_n$  вычисляет  $g_1, \dots, g_n$ . Тогда рассмотрим

### 16.3 Предложение (б. д.)

Пусть  $f$  получена из  $g$  и  $h$  при помощи оператора примитивной рекурсии. Пусть  $g$  и  $h$  - ПВТ. Тогда  $f$  - ПВТ.

### 16.4 Предложение (б. д.)

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) = \mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ ,  $g$  - ПВТ. Тогда  $f$  - ПВТ.

### 16.5 Теорема (Вычислимость ЧРФ)

ЧРФ  $\subseteq$  ПВТ, т. е. каждая ЧРФ является правильно вычислимой на машине Тьюринга.

Доказательство: индукция по построению ЧРФ (упр.)

### 16.6 Основная теорема арифметики

$\forall n \in \mathbb{N} \exists!$  разложение  $n = q_1^{k_1} x \dots q_m^{k_m}$  такое, что  $q_1, \dots, q_m$  - простые,  $q_1 < \dots < q_m$ ,  $\forall i \leq m, K_i \neq 0$

### 16.7 Определение

Пусть  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\gamma(a_1, \dots, a_n) = 2 \cdot p_1^{a_1+1} \dots p_n^{a_n+1}$ , где  $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5 \dots$



### 16.8 Определение (характеристическая функция)

Пусть  $B \subseteq \mathbb{N}$ ,  $\chi_B : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\chi_B$  — примитивное множество

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases} \text{— характеристическая функция множества } B.$$
$$A_1 = \{\gamma(S) \mid S \in \{0, 1\}^*\}$$

### 16.9 Предложение

$\chi_{A_1}$  — ПРФ.

### 16.10 Определение (номер машинного слова)

Рассмотрим машинное слово  $\alpha q : j\beta$ , тогда

$$\gamma(\alpha q_1 j \beta) = 2^i * 3^i * 5^j * 7^{\gamma(\alpha)} * 11^{\gamma(\beta)}$$

### 16.11 Определение (множество номеров машинных слов)

$$A_2 = \{\gamma(S) \mid S \text{— машинное слово}\}$$

### 16.12 Предложение

$\chi_{A_2}$  — ПРФ.

### 16.13 Определение

Рассмотрим команды  $k_{ij}, q_i j \rightarrow q_s l \Delta, \Delta = \begin{cases} L \\ R \\ \emptyset \end{cases}$

$$\gamma(k_{ij}) = p_{c(i,j)}^\delta, \delta = 2^s 3^L 5^\xi, \xi = \begin{cases} 1 & \Delta = \emptyset \\ 2 & \Delta = R \\ 3 & \Delta = L \end{cases}$$

### 16.14 Определение (номер программы МТ)

Пусть  $\Pi$  — программа машины Тьюринга,  $\gamma(\Pi) = 2^3 3^n \Pi \gamma(k_{ij})$

$$n = \max\{i \mid q_i \text{ встречается в } \Pi\} \quad k_{ij} \in \Pi$$

### 16.15 Предложение (множество номеров программ МТ)

Пусть  $A_3 = \{\gamma(\Pi) \mid \Pi \text{— программа машины Тьюринга}\}$ , тогда  $\chi_{A_3}$  — ПРФ

Без Доказательства.

### 16.16 Определение

$$\begin{aligned}
 1) t(x, y) &= \begin{cases} \gamma(\alpha' q_i \alpha \beta'), & \text{если } x = \gamma(\Pi), y = \gamma(\alpha q_i j \beta) \\ & \Pi : \alpha q_i j \beta \xrightarrow{1 \text{ шаг}} \alpha' q_e \alpha \beta' \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\
 2) T(x, y, z, t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x = \gamma(\Pi), y = \gamma(\alpha q_i j \beta) \\ & \Pi : \alpha q_i j \beta \xrightarrow{\leq t \text{ шагов}} \alpha' q_0 01^{z+1} 0 \beta' \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\
 3) T^n(a, x_1 \dots x_n, z, t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \gamma(\Pi) \\ & \Pi : q_1 01^{x_1+1} 0 \dots 01^{x_n+1} 0 \xrightarrow{\leq t \text{ шагов}} \alpha q_0 01^{z+1} 0 \beta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}
 \end{aligned}$$

### 16.17 Предложение

функции  $t, T, T^n$  — ПРФ

Без доказательства.

### 16.18 Теорема ( О нормальной форме Клини)

Пусть  $f(x_1 \dots x_n)$  — вычислима на машине Тьюринга. Тогда  $\exists$  ПРФ  $g(x_1 \dots x_n, y)$  такая что

$$f(x_1 \dots x_n) = l(\mu y [g(x_1 \dots x_n, y) = 0]).$$

Доказательство:

Пусть  $f(x_1 \dots x_n)$  вычислима на машине Тьюринга с программой  $\Pi, \alpha = \gamma(\Pi)$ . Тогда  $g(x_1 \dots x_n, y) = |T^n(\alpha, x_1 \dots x_n, l(y), r(y)) - 1|$  — ПРФ (упр).

Покажем, что  $f(x_1 \dots x_n) = l(\mu y [g(x_1 \dots x_n, y) = 0])$ . Рассмотрим кортеж  $x_1 \dots x_n$ :  
 1)  $f(x_1 \dots x_n)$  — не определена, тогда  $\forall y \ T^n(\alpha, x_1 \dots x_n, l(y), r(y)) \neq 1 \Rightarrow g(x_1 \dots x_n, y) \neq 0 \Rightarrow l(\mu y [g(x_1 \dots x_n, y) = 0])$  — не определена  $\Rightarrow f(x) = l(\mu y [g(\dots)])$

2)  $f(x_1 \dots x_n) = z \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}$  такое что

$$\Pi : q_1 01^{x_1+1} 0 \dots 01^{x_n+1} 0 \xrightarrow{t \text{ шагов}} \alpha q_0 01^{z+1} 0 \beta$$

Положим:

$$y_0 = c(z, t) \Rightarrow T^n(\alpha, x_1 \dots x_n, l(y_0), r(y_0)) = 1 \text{ т.к. } l(y_0) = z, r(y_0) = t \Rightarrow g(x_1 \dots x_n, y_0) = 0$$

Пусть для  $y_1 : g(x_1 \dots x_n, y_1) = 0 \Rightarrow T^n(\alpha, x_1 \dots x_n, l(y_1), r(y_1)) = 1 \Rightarrow l(y_1) = z, \Gamma(y_1) \geq t \Rightarrow y_1 \geq y_0$  (упр)  $\Rightarrow g_0 = \mu y [g(x_1 \dots x_n, y) = 0] = 0$

$$\Rightarrow l(\mu y [g(x_1 \dots x_n, y) = 0]) = l(y_0) = z$$

### 16.19 Следствие

Любая функция вычисляемая на машине Тьюринга является ЧРФ.

Доказательство: Упражнение

### 16.20 Следствие

Пусть  $f(x_1 \dots x_n)$  - ЧРФ, тогда  $\exists$  ПРФ  $g(x_1 \dots x_n, y)$  так что выполнено :  
 $f(x_1 \dots x_n) = l(\mu y[g(x_1 \dots x_n, y) = 0])$

Доказательство:

Пусть  $f$ -ЧРФ  $\Rightarrow f$  правильно вычислима на машине Тьюринга  $\Rightarrow f$  вычислима на машине Тьюринга,  $\Rightarrow$  по теореме о нормальной форме Клини  $\exists g[f(x) = l(\mu y[g(x, y) = 0])$ .

### 16.21 Основная теорема о вычислимых функциях

ЧРФ = Выч. на машине Тьюринга (ВТ) = ПВТ

Доказательство:

$\text{ПРФ} \subseteq \text{ПВТ} \subseteq \text{ВТ} \subseteq \text{ЧРФ} \Rightarrow$  все классы совпадают

### 16.22 Следствие

Любая ОРФ может быть получена из простейших функций применением операторов примитивной рекурсии, суперпозиции и минимизации таким образом, чтобы на каждом шаге получались только ОРФ.

Доказательство:УПР.

### 16.23 Следствие

Класс ОРФ совпадает с классом всюду определённых функций , вычислимых на машине Тьюринга, а также совпадает с классом всюду определённых функций, Правильно вычислимых на машине Тьюринга.

Доказательство:УПР.

## 17 Универсальные вычислимые функции

### 17.1 Определение (Универсальная функция)

Пусть  $K$  - некоторое множество частичных функций  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$

Функция  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  называется универсальной функцией для класса  $K$ , если:

- а)  $\forall m \in \mathbb{N} \ f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$
- б)  $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K \exists m \in \mathbb{N}: \forall x_1 \dots x_n \ g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$ , то есть  $K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) | m \in \mathbb{N}\}$

### 17.2 Замечание (О конечности класса функции)

Класс  $K$  имеет универсальную функцию  $\iff K$  счетен либо конечен

Док-во (упр)

### 17.3 Следствие (Континуальность класса)

Если класс  $K$  континуален, то он не имеет универсальной функции

Доказательство: (упр)

### 17.4 Следствие

$\forall n$  класс всех частичных  $n$ -местных функций не имеет универсальных функций

Доказательство: (упр)

### 17.5 Следствие (ПРФ, ОРФ, ЧРФ)

ПРФ, ОРФ, ЧРФ имеют универсальные функции

Доказательство:

$\text{ПРФ} \subseteq \text{ОРФ} \subseteq \text{ЧРФ} = \text{ПВТ}$

$A$  - алфавит (счетный). Любая программа  $\Pi \in A^* = \bigcup_n A^n = \{(a_1, \dots, a_n) | n \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$

$A^*$  - счетно, то количество программ счётно

количество функций ПВТ - счётно  $\implies$  ПРФ, ОРФ, ЧРФ - счётны.

### 17.6 Замечание (О универсальности)

Пусть  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ -взаимно однозначно,  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ -универсальная для  $K$ , тогда  $f(h(x_0), x_1, \dots, x_n)$  - универсальная для  $K$

Доказательство: (упражнение)

## 17.7 Следствие

- а) если  $K$  счётен, то он имеет континуум универсальных функций  
 б) Классы ПРФ, ОРФ, ЧРФ имеют континуум универсальных функций

Доказательство: (Упр.)

а) Возьмем множество отображений  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  таких, что в  $\mathbb{N}$  выбирается не конечное и не коконечное подмножество, в нем меняем четные и нечетные элементы местами сдвигом. Количество таких подмножеств континуально, значит, таких отображений  $h$  тоже. По 17.6 все такие  $f(h(x_0), x_1, \dots, x_n)$  будут являться универсальными для  $K$ , и, т. к. мощность множества таких  $h$  континуум, то таких функций тоже континуум, даже если предположить, что  $\exists h_1, h_2 | f(h_1(x_0), x_1, \dots, x_n) = f(h_2(x_0), x_1, \dots, x_n)$ , то таких  $h$  не более, чем счетно, потому что не более чем счетно количество  $m_1, \dots | f(m_i, x_1, \dots, x_n) = f(m_j, x_1, \dots, x_n)$ , т.к.  $m \in \mathbb{N}$ .

б) ПРФ  $\subseteq$  ОРФ  $\subseteq$  ЧРФ = ПВТ имеют счетную мощность. Переходим к п. (а)

## 17.8 Теорема(ПРФ<sup>n</sup>, ОРФ<sup>n</sup>, ЧРФ<sup>n</sup>- n-местные)

- а)  $\nexists$  ПРФ, универсальной для ПРФ<sup>n</sup>  
 б) Класс ОРФ<sup>n</sup> не имеет универсальной ОРФ  
 в) Класс ОРФ<sup>n</sup> не имеет универсальной ЧРФ

Доказательство

а) От противного. Пусть  $\exists$  ПРФ  $f(x_0 \dots x_n)$  - универсальная для ПРФ<sup>n</sup>

$g(x_1 \dots x_n) = f(x_1, x_1, x_2 \dots x_n) + 1$  - ПРФ, так как  $f$  - ПРФ.

$g(x_1 \dots x_n) \in \text{ПРФ}^n \Rightarrow \exists m : g(x_1 \dots x_n) = f(m, x_1 \dots x_n)$

Тогда  $f(m \dots m) = g(m \dots m) = f(m \dots m) + 1$  противоречие

б) Аналогично (упр) (ПРФ заменить на ОРФ)

в) От противного. Пусть  $f(x_0 \dots x_n)$  - универсальная для ОРФ<sup>n</sup>

$f$  - ЧРФ. Рассмотрим произвольный кортеж  $m_0 \dots m_n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $f(m_0, x_1 \dots x_n) \in \text{ОРФ}^n \Rightarrow$  всюду определен  $\Rightarrow f(m_0, m_1 \dots m_n)$  - определена  
 $\Rightarrow f$  - ОРФ, универсальная для ОРФ<sup>n</sup> - противоречие

## 17.9 Теорема (Класс ЧРФ<sup>n</sup> имеет универсальную ЧРФ)

Доказательство:

Рассмотрим  $f(x_0 \dots x_n) = l(\mu y [T^n | x_0 \dots x_n, l(y), r(y) - 1] = 0) \Rightarrow f$  - ЧРФ  $\Rightarrow$

а)  $\forall m f(m, x_1 \dots x_n) - \text{ЧРФ} \Rightarrow f(m, x_1 \dots x_n) \in \text{ЧРФ}^n$

б)  $g(x_1 \dots x_n) \in \text{ЧРФ} \Rightarrow g$  - ПВТ  $\Rightarrow \exists$  программа  $\Pi$  | вычисляет  $g$ .

Тогда  $m = \gamma(\Pi) \Rightarrow g(x_1 \dots x_n) = f(m, x_1 \dots x_n)$

## 17.10 Определение

$$\varphi^2(x_0, x_1) = l(\mu y [T^1(x_0, x_1, l(y), r(y) - 1) = 0])$$

### 17.11 Следствие

$\varphi^2(x_0, x_1)$  - ЧРФ, универсально для ЧРФ<sup>n</sup>(упр)

### 17.12 Определение

$$\varphi^{n+1}(x_0 \dots x_n) = \varphi^2(x_0, c^n(x_1 \dots x_n))$$

### 17.13 Предложение

$\varphi^{n+1}$  - ЧРФ, универсальное для ОРФ<sup>n</sup>

Доказательство:

Очевидно, что  $\varphi^{n+1}$  - ЧРФ (упр)  $\implies$

а) Пусть  $m \in \mathbb{N} \implies \varphi^{n+1}(m, x_1 \dots x_n) - \text{ЧРФ} \implies \in \text{ЧРФ}^n$

б) Пусть  $g(x_1 \dots x_n) \in \text{ЧРФ}^n$ . Тогда рассмотрим  $h(x) = g(c_1^n(x) \dots c_n^n(x))$

$\implies g(x_1 \dots x_n) = h(c(x_1 \dots x_n)) - \text{упр} \implies h - \text{ЧРФ} \in \text{ЧРФ}^1 \implies \exists m : h(x) = \varphi^2(m, x) \implies g(x_1 \dots x_n) = h(c(x_1 \dots x_n)) = \varphi^2(m, c(x_1 \dots x_n)) = \varphi^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) \implies \varphi^{n+1} - \text{универсальная для ЧРФ}^n$

### 17.14 Определение (Клиниевские скобки)

$$[x, y] = c(l(x), c(r(x), y))$$

$$[x_1 \dots x_{n+1}] = [[x_1 \dots x_n], x_{n+1}]$$

$$[K]_{21} = c(l(k), l(r(k)))$$

$$[K]_{22} = r(r(k))$$

$$[K]_{n+1,i} = [[K]_{21}]_{n,i}, i \leq n$$

$$[K]_{n+1,n+1} = [K]_{22}$$

### 17.15 Предложение

Все функции из определения 17.14 являются ПРФ

Доказательство: (упражнение)

### 17.16 Предложение

$$1. [[x_1 \dots x_n]]_{ne} = x_e$$

$$2. [[K]_{n1} \dots [K]_{nn}] = K$$

$$3. [] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} - \text{взаимно однозначно}$$

Доказательство: (упражнение)

### 17.17 Предложение

1.  $[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2))$
2.  $c^n(c(x_1, x_2), x_3 \dots x_{n+1}) = c^{n+1}(x_1 \dots x_{n+1})$
3.  $[x_1 \dots x_n] = [[x_1 \dots x_m], x_{m+1} \dots x_n]$

Доказательство:

а), б) - упражнение

в) Берем  $[x_1 \dots x_n] = [[x_1 \dots x_{n-1}], x_n] = \dots = [[[[[x_1 x_2], x_3], x_4] \dots x_{n-1}], x_n] = [[[[[x_1 \dots x_m] x_{m+1}] \dots] x_n] = [[x_1 \dots x_m], x_{m+1} \dots x_n]$

### 17.18 Определение Клиенивские универсальные функции

$$K^2(x_0, x_1) = \varphi^2(l(x_0), c(r(x_0), x_1))$$

$$K^{n+1}(x_0 \dots x_n) = K^n([x_0, x_1], x_2 \dots x_n)$$

### 17.19 Предложение

$$K^n(c(x_0, x_1), x_2 \dots x_n) = \varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n)$$

Доказательство: (упражнение)

### 17.20 Теорема

$K^{n+1}$  – универсальное для ЧРФ<sup>n</sup>

Доказательство:

а)  $K^{n+1}$  - ЧРФ  $\implies \forall m K^{n+1}(m, x_1 \dots x_n) \in \text{ЧРФ}^n$

б) Пусть  $g(x_1 \dots x_n) \in \text{ЧРФ}^n$ . Рассмотрим  $f(y, x_1 \dots x_n) = o \cdot y + g(x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n) \implies f(y, x_1 \dots x_n) \in \text{ЧРФ}^{n+1} \implies$

$\exists a \in \mathbb{N} : f(y, x_1 \dots x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1 \dots x_n)$

Тогда  $K^{n+1}(c(a, y), x_1 \dots x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1 \dots x_n) = f(y, x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)$ .

$\forall k : m_k = c(a, k)$

Если рассмотрим  $m_0 = c(a, 0)$ , то  $g(x_1 \dots x_n) = K^{n+1}(m_0, x_1 \dots x_n) \implies K^{n+1}$  – универсальное для ЧРФ<sup>n</sup>

### 17.21 Следствие

Любая ЧРФ<sup>n</sup> имеет бесконечно много клиниевских номеров, т.е.  $\forall g \in \text{ЧРФ}^n \exists$  бесконечно много  $m_k : g(x_1 \dots x_n) = K^{n+1}(m_k, x_1 \dots x_n)$

Доказательство: (упражнение)

## 17.22 Теорема (S-m-n)

$\forall m, n \in \mathbb{N}$  существует ПРФ  $S_m^n(x_0 \dots x_n) : K^{n+m+1}(x_0 \dots x_{n+m}) = K^{m+1}(S_m^n(x_0 \dots x_m), x_{n+1} \dots x_{n+m})$

Доказательство:

Положим  $S_m^n(x_0 \dots x_n) = [x_0 \dots x_n]$ , тогда  $K^{n+m+1}(x_0 \dots x_{n+m}) = K^{n+m}([x_0, x_1], x_2 \dots x_{n+m}) = K^{n+m-1}([x_0, x_1], x_2] \dots x_{n+m}) = \dots = K^{m+1}([x_0, x_1], x_2, x_n] x_{n+1}, \dots x_{n+m}) = K^{m+1}([x_0 \dots x_n], x_{n+1}, x_{n+m})$

## 17.23 Теорема (О неподвижной точке)

Для любой ЧРФ  $h(x_1 \dots x_{n+1})$  существует ПРФ  $g(x_1 \dots x_n)$  так что  $K^2(h(x_1 \dots x_n, g(x_1 \dots x_n)), y)$

Доказательство:

Рассмотрим  $K^2(h(x_1 \dots x_n, [z, z, x_1 \dots x_n]), y)$  — ЧРФ  $\implies \exists a \in \mathbb{N}$  такая что  $K^2(h(x_1 \dots x_n, [z, z, x_1 \dots x_n]), y) = K^{n+3}(a, z, x_1 \dots x_n, y)$

$g(x_1 \dots x_n) = [a, a, x_1 \dots x_n]$  — ПРФ. Тогда  $K^2(h(x_1 \dots x_n, [a, a, x_1 \dots x_n]), y) = K^{n+3}(a, a, x_1 \dots x_n, y) = K^2([a, a, x_1 \dots x_n], y) = K^2(g(x_1 \dots x_n), y) = K^2(h(x_1 \dots x_n, g(x_1 \dots x_n)), y)$

## 17.24 Определение

Обозначим  $\mathfrak{A}(n) = K^2(n, x)$   $\mathfrak{A} : \mathbb{N} \rightarrow \text{ЧРФ}$

## 17.25 Следствие

$\forall \text{ЧРФ } h(x) \exists m \in \mathbb{N} : \mathfrak{A}(h(m)) = \mathfrak{A}(m)$

## 17.26 Теорема (Райса)

Рассмотрим  $K \subseteq \text{ЧРФ}$ ,  $K \neq \emptyset$ ,  $K \neq \text{ЧРФ}^n$  Тогда множество  $M = \{n | \mathfrak{A}(n) \in K\}$  не

рекурсивно, т.е.  $\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$

$\chi_m$  — не ЧРФ (не ОРФ)

Доказательство:

От противного. Пусть  $\chi_m(x)$  — ЧРФ  $\implies$  ОРФ. Т. к.  $K \neq \emptyset \implies M \neq \emptyset \implies \exists a \in M$ . Т. к.  $K \neq \text{ЧРФ}^n \implies \exists b \notin M$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = b\chi_M(x) + \text{asg}\chi_M(x)$  Из п.

17.25  $\exists m | \mathfrak{A}(f(m)) = \mathfrak{A}(m)$

1.  $\mathfrak{A}(m) \in K \implies f(m) = b \notin M \implies \mathfrak{A}(b) = \mathfrak{A}(f(m)) = \mathfrak{A}(m) \notin K$ . Противоречие

2.  $\mathfrak{A}(m) \notin K \implies f(m) = a \in M \implies \mathfrak{A}(a) = \mathfrak{A}(f(m)) = \mathfrak{A}(m) \in K$ . Противоречие



## 18 Рекурсивные и рекурсивно-примитивные множества

### 18.1 Определение (Разрешимое множество)

Множество разрешимо если существует алгоритм, на входе которого объект, а на выходе ответ, принадлежит объекту этому множеству или нет и перечислимое, если существует алгоритм перечисления элементов:

1. Перечисляются только элементы множества
2. Каждый элемент будет перечислен

### 18.2 Определение (Рекурсивное множество)

$A \subseteq \mathbb{N}^k$  называется рекурсивным (примитивно-рекурсивным), если:

$$\chi_A(x_1 \dots x_k) = \begin{cases} 1, & (x_1 \dots x_k) \in A \\ 0, & (x_1 \dots x_k) \notin A \end{cases} \text{ - ОРФ(ПРФ)}$$

### 18.3 Определение (Рекурсивно-перечислимое множество)

$A \subseteq \mathbb{N}^k$ —рекурсивно-перечислимое, если  $A = \emptyset$ , либо существует ОРФ  $f_1 \dots f_k$   
 $A = \{(f_1(n), \dots, f_k(n)) | n \in \mathbb{N}\}$

$A \subseteq \mathbb{N}$ —рекурсивно-перечислимое, если существует ОРФ  $f$ , такое что  $A = \rho f = \{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$

### 18.4 Замечание

Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ ,  $\chi_A(\bar{x})$  - ОРФ  $\Leftrightarrow \chi_A(\bar{x})$  - ЧРФ.

### 18.5 Предложение

$A, B \subseteq \mathbb{N}^k, C \subseteq \mathbb{N}^l$ ,  $A, B, C$  - рекурсивные множества (примитивно-рекурсивные множества), тогда  $A \cup B, A \cap B, \bar{A}, A \setminus B, A \times B$  - рекурсивно-примитивные.

### 18.6 Замечание

$\text{ПРМ} \subseteq \text{РМ}$

### 18.7 Предложение

$A \subseteq \mathbb{N}^k, B = \{c^k(\bar{x}) | \bar{x} \in A\}$ , тогда  $A$  - РМ (ПРМ)  $\Leftrightarrow B$  - РМ (ПРМ)

Доказательство:

$(\Rightarrow) A$  - РМ  $\Rightarrow \chi_A$  - ОРФ,  $\chi_B(n) = \chi_A(c_1^k(n) \dots c_r^k(n)) \Rightarrow \chi_B$  - ОРФ  $\Rightarrow B$  - РМ.

$(\Leftarrow) \chi_B$  - ОРФ,  $\chi_A\{x_1 \dots x_k\} = \chi_B(c^k(x_1 \dots x_k))$  - ОРФ  $\Rightarrow A$  - рекурсивное множество.

ПРМ - упр.

### 18.8 Предложение

$PM \subseteq RPM$ , т.е.  $\forall A \subseteq \mathbb{N}^k$ , если  $A$  - РМ, то  $A$  - РПМ.

Доказательство:

Пусть  $k = 1$ ,  $\chi_A$  - ОРФ.

1. Если  $A = \emptyset$ , то  $A$  - РПМ (по определению).
2. Пусть  $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = x * \chi_A(x) + a * \bar{s}g\chi_A(x)$ 
  - а) Пусть  $f(n) = m$ . Если  $n \in A \Rightarrow f(n) = n$ , т.е.  $m = n \Rightarrow m \in A$   
если  $n \notin A$ , то  $f(n) = a \in A \Rightarrow m = a \in A \Rightarrow m \in A \Rightarrow \rho f \subseteq A$
  - б) Пусть  $n \in A \Rightarrow f(n) = n$ , тогда  $A \subseteq \rho f \Rightarrow A = \rho f$ ,  $f$  - ОРФ  $\Rightarrow A$  - РПМ.

для случая  $k > 1$  без доказательства.

### 18.9 Теорема Поста

Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ , тогда  $A$  - РМ  $\Leftrightarrow A, \bar{A}$  - РПМ, т.е. множество рекурсивно  $\Leftrightarrow$  оно и его дополнение рекурсивно.

$(\Rightarrow) A$  - РМ,  $\bar{A}$  - РМ  $\Rightarrow A, \bar{A}$  - РПМ.

$(\Leftarrow) k = 1$ .  $A, \bar{A}$  - РПМ. Если  $A = \emptyset \Rightarrow A$  РМ(упр), если  $\bar{A} = \emptyset$ , то  $A = \mathbb{N} \Rightarrow A$  - РМ(упр).

Пусть  $A \neq \emptyset, \bar{A} \neq \emptyset (A \neq \mathbb{N})$ . Тогда существует ОРФ  $f, g : A = \rho f, \bar{A} = \rho g$ . Тогда заметим, что  $\chi_A(x) = \bar{s}g[\mu y[|f(y) - x| * |g(y) - x| = 0]] - x|$  - ЧРФ. Если  $x \in A \Rightarrow \exists y : f(y) = x, x \notin \bar{A} \Rightarrow \nexists y : g(y) = x \Rightarrow$  существует наименьший  $y_0$  такой что  $f(y) = x \Rightarrow \chi_A(x) = 1$ .

Если  $x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow \exists y : g(y) = x, \nexists y : f(y) = x \Rightarrow$  существует наименьший  $y_0$  такой что  $g(y_0) = x \Rightarrow f(y_0) \neq x \Rightarrow |f(\dots) - x| \neq 0 \Rightarrow \bar{s}g = 0 \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \Rightarrow \chi_A(x)$  - ЧРФ  $\Rightarrow \chi_A(x)$  - ОРФ  $\Rightarrow A$  - РМ.

### 18.10 Предложение

Пусть  $A, B \subseteq \mathbb{N}^k, c \in \mathbb{N}^l, A, B, C$  - РПМ, тогда  $A \cup B, A \cap B, A \times B$  - РПМ.

Доказательство: упр.

### 18.11 Теорема (Об эквивалентности определения РПМ)

$A \subseteq \mathbb{N}$ , тогда эквивалентны:

1.  $A$  - РПМ.
2.  $A = \emptyset$ , либо  $\exists$  прф  $f : A = \rho f$
3.  $A = \emptyset$ , либо  $\exists$  чрф  $f : A = \rho f$
4.  $\exists$  РПМ  $B \subseteq \mathbb{N}^2 : A = \{x | \exists y(x, y) \in B\}$
5.  $\exists$  РМ  $B \subseteq \mathbb{N}^2 : A = \{x | \exists y(x, y) \in B\}$
6.  $\exists$  ЧРФ  $f : A = \delta f = \{x | f(x) \text{ - определена}\}$

### 18.12 Предложение

Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ ,  $B = \{c^k(x_1 \dots x_k) | (x_1 \dots x_k) \in A\}$ . Тогда  $A$  - РПМ  $\Leftrightarrow B$  - РПМ.

### 18.13 Следствие

Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ , тогда  $A$  - РПМ  $\Leftrightarrow$  существует ЧРФ  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  такая что  $A = \delta f$ , т.е.  $A = \{(x_1 \dots x_n) | f(x_1 \dots x_n) \text{ определена}\}$

Доказательство:

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $A$  - РПМ  $\Rightarrow B$  - РПМ  $\Rightarrow \exists f$  - ЧРФ такая что  $B = \delta f$ , тогда рассмотрим  $g(x_1 \dots x_k) = f(c^k(x_1 \dots x_k))$ , тогда  $(x_1 \dots x_k) \in A \Leftrightarrow c^k(x_1 \dots x_k) \in B \Leftrightarrow f(c^k(x_1 \dots x_k))$  - определена  $\Leftrightarrow g(x_1 \dots x_k)$  - определена  $\Rightarrow A = \delta g$

( $\Leftarrow$ ) - упражнение

### 18.14 Теорема (О существовании РПМ, но не РМ)

Существует РПМ, но не РМ, а именно:  $\forall k \in \mathbb{N} \exists A \subseteq \mathbb{N}^k$  такое что,  $A$  - РПМ, но не РМ.

Доказательство:

В качестве  $A$  рассмотрим :  $A = \{c(x, y) | k^2(x, y) \text{ определена}\}$ ,  $\{(x, y) | k^2(x, y) \text{ определена}\}$  - РПМ  $\Rightarrow A$  - РПМ.

Покажем, что  $A$  - не РМ. От противного:

Пусть  $A$  - РМ  $\Rightarrow \chi_A$  - ОРФ. т.к.  $k^2(x, y)$ - универсальное  $\Rightarrow \exists a : k^2(a, x) = o(x)$

Рассмотрим  $g(x, y) = k^2(x * \chi_A(c(x, y) + a * \bar{s}g\chi_A(c(x, y))), y)$  - ЧРФ

Покажем, что  $g(x, y)$  - ОРФ всюду определена:  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ .

а)  $k^2(x, y)$ -определена  $\Rightarrow c(x, y) \in A \Rightarrow \chi_A(c(x, y)) = 0 \Rightarrow g(x, y) = k^2(x, y)$  - определена.

б)  $k^2(x, y)$ - не определена  $\Rightarrow c(x, y) \notin A \Rightarrow \chi_A(c(x, y)) = 0 \Rightarrow g(x, y) = k^2(a, y) = o(y) = 0 \Rightarrow$  определена.

$\Rightarrow g(x, y)$ -ОРФ.

Покажем, что  $g(x, y)$  - универсальна для ОРФ:

а)  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow g(n, y)$  - ОРФ

б)  $h(x)$  - ОРФ  $\Rightarrow h(x)$  - ЧРФ  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : h(x) = k^2(n, x)$

Заметим, что  $\forall x k^2(n, x)$  - определена  $\Rightarrow k^2(n, x) = g(n, x) \Rightarrow \forall x h(x) = g(n, x) \Rightarrow g(x_0, x_1)$  - ОРФ универсальная для ОРФ (противоречие).

Пусть  $k > 1$ , тогда рассмотрим  $A_k = \{(c_1^k(n) \dots c_k^k(n)) | n \in A\} \Rightarrow A_k$  - РПМ, но не РМ.

### 18.15 Замечание

Множество  $A = \delta k^n(x_1 \dots x_n)$  - РПМ, но не РМ.

Доказательство: упр

### 18.16 Предложение

$A \subseteq \mathbb{N}^k$ , тогда эквивалентны:

1.  $A$  - РПМ
2.  $A = \delta f, f$  - ЧРФ
3.  $\exists$  РМ  $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$  такое что  $A = \{(x_1 \dots x_k) | (x_1 \dots x_k, y) \in B\}$
4.  $\exists$  ПРМ  $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$  такое что  $A = \{(x_1 \dots x_k) | (x_1 \dots x_k, y) \in B\}$

### 18.17 Теорема(о графике) (б. д.)

$f$  - ЧРФ  $\Leftrightarrow G_f = \{(x_1 \dots x_n, y) | f(x_1 \dots x_n) = y\}$  - РПМ ( $G$  - график)

### 18.18 Определение (Частичная характеристическая функция)

Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ .  $\chi_A^*(x_1 \dots x_k) = \begin{cases} 1, & (x_1 \dots x_k) \in A \\ \text{неопр}, & (x_1 \dots x_k) \notin A \end{cases}$  - частичная характеристическая функция множества  $A$ .

### 18.19 Теорема

Множество является рекурсивно-перечислимым  $\Leftrightarrow$  его частичная характеристическая функция является ЧРФ. т.е  $A \subseteq \mathbb{N}^k$ .  $A$  - РПМ  $\Leftrightarrow \chi_A^*$  - ЧРФ.

Доказательство:

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $A$  - РПМ  $\Rightarrow$  существует ЧРФ  $f : A = \delta f$

Положим  $h(\bar{x}) = S(o(f(\bar{x}))) \Rightarrow h$  - ЧРФ. Заметим:

1. Если  $\bar{x} \in A \Rightarrow f(\bar{x})$  - определена  $\Rightarrow h(\bar{x}) = 1$
2. Если  $\bar{x} \notin A \Rightarrow f(\bar{x})$  - не определена  $\Rightarrow h(\bar{x})$  - не определена  $\Rightarrow \chi_A^*(\bar{x}) = h(\bar{x}) \Rightarrow \chi_A^*$  - ЧРФ.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\chi_A^*$  - ЧРФ. Тогда  $A = \delta \chi_A^* \Rightarrow A$  - РПМ.

### 18.20 Теорема (О составном определении) (б. д.)

РПМ  $A_1 \dots A_n \subseteq \mathbb{N}^k, A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$

$g_1(x_1 \dots x_k) \dots g_n(x_1 \dots x_k)$  - ЧРФ. Тогда функция

$$f(x_1 \dots x_k) = \begin{cases} g_1(x_1 \dots x_k) & \text{если } (x_1 \dots x_k) \in A_1 \\ \vdots \\ g_n(x_1 \dots x_k) & \text{если } (x_1 \dots x_k) \in A_n \\ \text{неопред.} & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда  $f$  - ЧРФ.

## 19 Формальная арифметика Пеано. Неразрешимые проблемы

### 19.1 Определение (Арифметика Пеано)

$\Sigma_0 = (<^2, +^2, \times^2, S^1, 0)$  - сигнатура арифметики Пеано

$T(\Sigma_0)$  - множество термов,  $F(\Sigma_0)$  - множество формул,  $S(\Sigma_0)$  - множество предложений,  $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  - переменные

### 19.2 Определение (Гёделевская нумерация)

Гёделевской нумерацией термов и формул сигнатуры  $\Sigma_0$  называется:

1.  $\gamma(0) = c(0, 1), \gamma(v_i) = c(1, i)$
2.  $\gamma(S(t)) = c(2, \gamma(t))$
3.  $\gamma(t + q) = c(3, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
4.  $\gamma(t \times q) = c(4, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
5.  $\gamma(t = q) = c(5, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
6.  $\gamma(t < q) = c(6, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
7.  $\gamma(\varphi \& \psi) = c(7, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
8.  $\gamma(\varphi \vee \psi) = c(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
9.  $\gamma(\varphi \rightarrow \psi) = c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
10.  $\gamma(\neg \varphi) = c(10, c(\gamma(\varphi)))$
11.  $\gamma(\exists v_i \varphi) = c(11, c(i, \gamma(\varphi)))$
12.  $\gamma(\forall v_i \varphi) = c(12, c(i, \gamma(\varphi)))$

### 19.3 Предложение

Следующие множества - прим. рек. мн-ва:

1.  $\gamma(T(\Sigma_0)) = \{\gamma(t) \mid t \in T(\Sigma_0)\}$
2.  $\gamma(F(\Sigma_0)) = \{\gamma(t) \mid t \in F(\Sigma_0)\}$
3.  $\gamma(S(\Sigma_0)) = \{\gamma(t) \mid t \in S(\Sigma_0)\}$

#### 19.4 Определение (Разрешимое множество, перечислимое множество)

$X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$ .

$X$  - **разрешимо**, если  $\gamma(X) = \{\gamma(a) | a \in X\}$ - рекурсивное множество.

$X$  - **перечисливо**, если  $\gamma(X) = \{\gamma(a) | a \in X\}$ - рекурсивно-перечислимое множество.

#### 19.5 Замечание (упр.)

$\forall n \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} \exists x = p_0^{a_0} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$ , т. е.  $ex(0, x) = a_0, \dots, ex(n, x) = a_n$

#### 19.6 Обозначение

$\Pi_{\Sigma_0} = \{\varphi \in F(\Sigma_0) | \varphi\text{-т. и.}\}$

#### 19.7 $\Pi_{\Sigma_0}$ - перечисливо

Доказательство:

$$f(x, n, y) = \begin{cases} y & \text{если } ex(n, x) = y \text{ и} \\ & \gamma^{-1}(ex(0, x)) \dots \gamma^{-1}(ex(n, x)) \text{ - посл-ть формул из } F(\Sigma_0) \text{ - док-во} \\ \gamma(v_0 = v_0) & \text{иначе} \end{cases}$$

#### 19.8 $f$ - общ. рек. ф-ла (б. д.)

#### 19.9 $\gamma(\Pi_{\Sigma_0}) = \rho f$ (б. д.)

#### 19.10 Определение (Формальная арифметика Пеано)

1.  $\forall v_0 \neg(S(v_0) = 0)$
2.  $\forall v_0 \forall v_1 ((S(v_0) = S(v_1)) \rightarrow (v_0 = v_1))$
3.  $\forall v_0 (v_0 + 0 = v_0)$
4.  $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 + S(v_1) = S(v_0 + v_1))$
5.  $\forall v_0 (v_0 * 0 = 0)$
6.  $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 * S(v_1) = (v_0 * v_1) + v_0)$
7.  $\forall v_0 \neg(v_0 < 0)$
8.  $\forall v_0 \forall v_1 ((v_0 < S(v_1)) \rightarrow ((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)))$
9.  $\forall v_0 \forall v_1 (((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)) \rightarrow (v_0 < S(v_1)))$
10.  $\forall v_0 \forall v_1 (\neg(v_0 = v_1) \rightarrow ((v_0 < v_1) \vee (v_1 < v_0)))$

### 19.11 Определение (Термы)

1.  $\underline{0} = 0$
2.  $\underline{1} = S(0)$
3.  $n + 1 = S(n)$ , т. е.  $\underline{n} = S(S(\dots S(0) \dots))$ , где  $S$  применяется  $n$  раз.

### 19.12 Определение (Представимость в арифметике)

$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  - **представима в арифметике**  $A_0$  ( $A_0$  - набор аксиом), если  $\exists \varphi(v_0, \dots, v_k) \forall n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ :

1. если  $f(n_0, \dots, n_{k-1}) = n_k$ , то  $A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k})$
2. если  $f(n_0, \dots, n_{k-1}) \neq n_k$ , то  $A_0 \vdash \neg \varphi(\underline{n_0}, \dots, \underline{n_k})$

### 19.13 Каждая орф представима в $A_0$

Доказательство:

1.  $0(v_0)$  представима формулой  $\varphi(v_0, v_1) = (v_1 = 0)$
2.  $S(v_0)$  представима формулой  $\varphi(v_0, v_1) = (v_1 = S(v_0))$
3.  $I_m^n(v_0, \dots, v_{n-1})$  представима формулой  $\varphi(v_0, \dots, v_n) = (v_n = v_{m-1})$
4. Суперпозиция - упражнение
5. Остальное - б. д.

### 19.14 Теорема (Гёделя о неразрешимости)

Любая непротиворечивая теория, содержащая арифметику Пеано, является неразрешимой. Или система аксиом  $A_0$  является наследственное неразрешимой. А именно: пусть  $T \subseteq S(\Sigma_0)$ ,  $A_0 \subseteq T$ ,  $T$  - непротиворечива, тогда  $T$  - неразрешима.

Доказательство:

От противного: пусть  $T$  - разрешима, тогда  $M = \gamma(T)$  - рекурсивное множество, а значит  $\chi_M$  - орф. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \gamma([\gamma^{-1}(x)]_{\underline{y}}^{v_0}) & \text{если } x \in \gamma(F(\Sigma_0)) \\ 0 & \text{если } x \notin \gamma(F(\Sigma_0)) \end{cases}$$

$\gamma(F(\Sigma_0))$  - прм, следовательно  $f(x, y)$  - прф (б. д.)

Рассмотрим функцию  $g(x, y) = \chi_M(f(x, y))$  - орф, следовательно  $g$  представимо в  $A_0$ , значит существует формула  $\varphi(v_0, v_1, v_2)$  представляющая  $g(v_0, v_1)$ . Тогда рассмотрим  $n = \gamma(\varphi(v_0, v_1, v_2))$ .

Тогда  $f(n, y) = \gamma([\varphi(v_0, v_1, 0)]_{\underline{y}}^{v_0}) = \gamma(\varphi(\underline{y}, \underline{y}, 0))$  - номер формулы.

$f(n, n) = \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))$ ,  $g(n, n) = \chi_M(f(n, n)) = 1 - ?$

1. Пусть  $g(n, n) = \chi_M(f(n, n)) = 1$ . Тогда  $g(n, n) \neq 0 \Rightarrow A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$ ,  $A_0 \in T \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \in T \Rightarrow T$  - непротиворечива  $\Rightarrow \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T \Rightarrow \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)) \notin M \Rightarrow \chi_M(f(n, n)) = \chi_M(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0$  - противоречие.
2. Пусть  $g(n, n) = \chi_M(f(n, n)) = 0 \Rightarrow \chi_M(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0 \Rightarrow \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)) \notin M \Rightarrow \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T, A_0 \subseteq T \Rightarrow A_0 \not\vdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow g(n, n) \neq 0$  - противоречие.

Значит  $\chi_M$  - не орф, т. е.  $M$  не рекурсивное множество, а значит  $T$  - не разрешима.

### 19.15 Теорема (б. д.)

Любая полная перечислимая теория является разрешимой, т. е.  $T \subseteq S(\Sigma_0)$ ,  $T$  - перечислима,  $T$  - полная теория, тогда  $T$  - разрешима.

### 19.16 Теорема (Чёрча о неразрешимости)

Множество  $\Pi_{\Sigma_0}$  - теорем логики предикатов сигнатуры  $\Sigma_0$  неразрешимо

Доказательство:

Пусть  $T = \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid \vdash \varphi\}$ ,  $T_0 = \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A_0 \vdash \varphi\}$ ,  $\psi = \&\xi$ , где  $\xi \in A_0$ .

Если  $T$  - разрешимо, то  $\varphi \in T_0 \Leftrightarrow A_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \in T$ ,

$\chi_{\gamma(T_0)}^{(x)} = \chi_{\gamma(T)}(c(9, c(\gamma(\psi), (x))))$  - упр.

### 19.17 Теорема (Гёделя о неполноте)

$T \subseteq S(\Sigma_0)$ ,  $A_0 \subseteq T$ ,  $T$  - перечислима,  $T$  - непротиворечивая теория, тогда  $T$  - не полна.

Доказательство: Пусть  $T$  - полна. Следовательно  $T$  - разрешима - противоречие, значит  $T$  - не полна.