2. $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$:
   а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) \iff \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$
   б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1 \dots a_n))$
   в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

10.4 Определение (изоморфное вложение)

$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$- изоморфное вложение, если:

1. h - разнозначно
2. а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) \iff \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \dots h(a_n))$
   б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1 \dots a_n))$
   в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

10.5 Замечание

1. h - эпиморфизм $\iff h$ - гомоморфизм и "на"
2. h - изоморфизм $\iff h$ - эпимоморфизм и изоморфное вложение

10.6 Определение (подмодель)

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ - $\mathfrak{A}$ - подмодель $\mathfrak{B}$, если:

1. $|\mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{B}|$
2. $\forall P^n, f^n, c \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n$
3. а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$
   б) $f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1 \dots a_n))$
   в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

10.7 Пример

1. $< \mathbb{N}; +, * > \leq < \mathbb{Z}; +, * > \leq < \mathbb{Q}; +, * > \leq < \mathbb{R}; +, * >$
2. $< \mathbb{Z}; +, -, * > \leq < \mathbb{Q}; +, -, * >$

Рассмотрим функцию $g(x, y) = \chi_M(f(x, y))$ - орф, следовательно g представимо в A_0, значит существует формула $\varphi(v_0, v_1, v_2)$ представляющая $g(v_0, v_1)$. Тогда рассмотрим $n = \gamma(\varphi(v_0, v_1, v_2))$.
Тогда $f(n, y) = \gamma([\varphi(v_0, v_0, 0)]_{\underline{y}}^{v_0}) = \gamma(\varphi(\underline{y}, \underline{y}, 0))$ - номер формулы.
$f(n, n) = \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))$, $g(n, n) = \chi_M(f(n, n)) = 1$ - ?

1. Пусть $g(n, n) = \chi_M(f(n, n)) = 1$. Тогда $g(n, n) \neq 0 \Rightarrow A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$, $A_0 \in T \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \in T \Rightarrow T$ - непротиворечива $\Rightarrow \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T \Rightarrow \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)) \notin M \Rightarrow \chi_M(f(n, n)) = \chi_M(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0$ - противоречие.
2. Пусть $g(n, n) = \chi_M(f(n, n)) = 0 \Rightarrow \chi_M(\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))) = 0 \Rightarrow \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)) \notin M \Rightarrow \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T, A_0 \subseteq T \Rightarrow A_0 \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \Rightarrow g(n, n) \neq 0$ - противоречие.

Значит χ_M - не орф, т. е. M не рекурсивное множество, а значит T - не разрешима.

19.15 Теорема (б. д.)

Любая полная перечислимая теория является разрешимой, т. е. $T \subseteq S(\Sigma_0)$, T - перечислима, T - полная теория, тогда T - неразрешима.

19.16 Теорема (Чёрча о неразрешимости)

Множество $\prod_{\Sigma_0}$ - теорем логики предикатов сигнатуры Σ_0 неразрешимо
Доказательство:
Пусть $T = \{\varphi \in S(\Sigma_0) | \vdash \varphi\}$, $T_0 = \{\varphi \in S(\Sigma_0) | A_0 \vdash \varphi\}$, $\psi = \&\xi$, где $\xi \in A_0$.
Если T - разрешимо, то $\varphi \in T_0 \Leftrightarrow A_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash (\psi \to \varphi) \Leftrightarrow (\psi \to \varphi) \in T$,
$\chi_{\gamma(T_0)}^{(x)} = \chi_{\gamma(T)}(c(9, c(\gamma(\psi), (x))))$ - упр.

19.17 Теорема (Гёделя о неполноте)

$T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$, T - перечислима, T - непротиворечивая теория, тогда T - не полна.
Доказательство: Пусть T - полна. Следовательно T - разрешима - противоречие, значит T - не полна.

10.15 Следствие

Если $X = \oslash$, пусть $\exists c \in \sigma$, тогда $|\mathfrak{C}| = \{\mathfrak{t}^{\mathfrak{B}} | \mathfrak{t} \in T(\sigma), t\text{-замкнуто}\}$ $F \cup (t) = \oslash$

10.16 Предложение

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $t(x_1, \dots, x_n) \in T(\sigma)$. Тогда $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$
Доказательство:

1. $t(x) = x_1$ $t^{\mathfrak{A}}(a_1) = a_1 = t^{\mathfrak{B}}(a_1)$
2. $\mathrm{t} = \mathrm{c}$ $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}$
3. $t = f(t_1(\bar{x}) \dots t_k(\bar{x}))$ $t^k \in \sigma$, $\forall i$ $t_i^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t_i^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$, $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) = t^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$

10.17 Теорема

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma), \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|, \varphi(k_1, \dots, k_n) \in F(\sigma)$ тогда
$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

Доказательство: 1) а) $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})), \forall i$ $t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t_2^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \iff t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) = t_2^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$

б) $P^k \in \sigma$, $t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x}) \in T(\sigma)$ $\forall i$ $t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$ $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{A} \models P(t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) \iff \mathfrak{A} \models P(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) \iff \mathfrak{B} \models P(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathfrak{B}}(\bar{a})) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

2) Пусть $\varphi_1(x_1, \dots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ $\forall i$ $\mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n) \implies \mathfrak{B} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathfrak{A} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi_1(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathfrak{B} \models \varphi_2(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

10.18 Определение

Пусть $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in F(\sigma)$, тогда

а) $\forall y_1, \dots, y_n$ $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ - $\forall$ - формула (универсальная)

б) $\exists y_1, \dots, y_k$ $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ - $\exists$ - формула (экзистенциальная)

19.5 Замечание (упр.)

$\forall n \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} \exists x = p_0^{a_0} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$, т. е. $ex(0, x) = a_0, \dots, ex(n, x) = a_n$

19.6 Обозначение

$\prod_{\Sigma_0} = \{\varphi \in F(\Sigma_0) | \varphi\text{-т. и.}\}$

19.7 $\prod_{\Sigma_0}$ - перечислимо

Доказательство:

$$f(x, n, y) = \begin{cases} y & \text{если } ex(n, x) = y \text{ и} \\ & \gamma^{-1}(ex(0, x)) \dots \gamma^{-1}(ex(n, x)) \text{ -посл-ть формул из } F(\Sigma \\ \gamma(v_0 = v_0) & \text{иначе} \end{cases}$$

19.8 f - общ. рек. ф-ла (б. д.)

19.9 $\gamma(\prod_{\Sigma_0}) = \rho f$ (б. д.)

19.10 Определение (Формальная арифметика Пеано)

1. $\forall v_0 \neg(S(v_0) = 0)$
2. $\forall v_0 \forall v_1((S(v_0) = S(v_1)) \to (v_0 = v_1))$
3. $\forall v_0(v_0 + 0 = v_0)$
4. $\forall v_0 \forall v_1(v_0 + S(v_1) = S(v_0 + v_1)$
5. $\forall v_0(v_0 * 0 = 0)$
6. $\forall v_0 \forall v_1(v_0 * S(v_1) = (v_0 * v_1) + v_0)$
7. $\forall v_0 \neg(v_0 < 0)$
8. $\forall v_0 \forall v_1((v_0 < S(v_1)) \to ((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)))$
9. $\forall v_0 \forall v_1(((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)) \to (v_0 < S(v_1))$
10. $\forall v_0 \forall v_1(\neg(v_0 = v_1) \to ((v_0 < v_1) \vee (v_1 < v_0)))$

10.23 Предложение

Определение фактора на модели является корректным
Доказательство: $f^n \in \sigma$, $a_1, \dots, a_n$, $c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{A}$. Пусть $a_1 \sim c_1, \dots, a_n \sim c_n$. Покажем, что $f([a_1], \dots, [a_n]) = f([c_1], \dots, [c_n])$ $[a_1] = [c_1], \dots, [a_n] = [c_n]$

$f(a_1, \dots, a_n) \sim f(c_1, \dots, c_n) \Rightarrow [f(a_1, \dots, a_n)] = [f(c_1, \dots, c_n)]$

$f([a_1], \dots, [a_n] = [f(a_1, \dots, a_n)] = [f(c_1, \dots, c_n)] = f([c_1], \dots, [c_n])$

10.24 Замечание

Конгруэнция - это в точности такая эквивалентность на алгебре, по которой корректно определяется фактор-алгебра

10.25 Теорема (об эпиморфизме)

$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|_{/\sim}$, т .е. $h(a) = [a] \Rightarrow h$ - эпиморфизм

Доказательство: 1) Покажем, что h - гомоморфизм:
а) $f^n \in \sigma$, $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. $h(f(a_1, \dots, a_n)) = [f(a_1, \dots, a_n)] = f([a_1], \dots, [a_n]) = f(h(a_1), \dots, h(a_n))$
б) $c \in \sigma$, $h(c^{\mathfrak{A}}) = [c^{\mathfrak{A}}] = c^{\mathfrak{A}/\sim}$
2) "на": $[a] \in \mathfrak{A}_{/\sim} \Rightarrow \mathfrak{a} \in |\mathfrak{A}|$ $h(a) = [a]$

10.26 Предложение

$h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ - гомоморфизм $\Rightarrow \sim$на $A = |\mathfrak{A}|$ $a \sim c : h(a) = h(c)$, $\sim$ - конгруэнция на $\mathfrak{A}$

Доказательство: упражнение.

10.27 Теорема (об изоморфизме)

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ - эпиморфизм. Для $a, c \in \mathfrak{A}$ $a \sim c : h(a) = h(c)$ тогда $\mathfrak{A}_{/\sim} \simeq \mathfrak{B}$, а именно $g : |\mathfrak{A}|_{/\sim} \to |\mathfrak{B}|$, $g : ([a]) = h(a)$ - изоморфизм, $g : |\mathfrak{A}|_{/\sim} \to \mathfrak{B}$

Доказательство: $g([a]) = h(a)$
1) g - отображение $a, c \in |\mathfrak{A}|$, $[a] = [c] \Rightarrow a \sim c \Rightarrow h(a) = h(c) \Rightarrow h([a]) = h([c])$
2) g- взаимно-однозначное:

18.18 Определение (Частичная характеристическая функция)

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$. $\chi_A^*(x_1 \dots x_k) = \begin{cases} 1, & (x_1 \dots x_k) \in A \\ \text{неопр}, & (x_1 \dots x_k) \notin A \end{cases}$ - частичная характеристическая функция множества А.

18.19 Теорема

Множество является рекурсивно-перечислимым $\Leftrightarrow$ его частичая характеристическая функция является ЧРФ. т.е $A \subseteq \mathbb{N}^k$. A - РПМ$\Leftrightarrow \chi_A^*$ - ЧРФ.
Доказательство:
($\Rightarrow$) Пусть A - РПМ $\Rightarrow$ существует ЧРФ $f : A = \delta f$
Положим $h(\bar{x}) = S(o(f(\bar{x}))) \Rightarrow h$ - ЧРФ. Заметим:

1. Если $\bar{x} \in A \Rightarrow f(\bar{x})$ - определена$\Rightarrow h(\bar{x}) = 1$
2. Если $\bar{x} \notin \Rightarrow f(\bar{x})$ - не определена $\Rightarrow h(\bar{x})$ - не определена $\mapsto \chi_A^*(\bar{x}) = h(\bar{x}) \Rightarrow \chi_A^*$ - ЧРФ.

($\Leftarrow$) Пусть χ_A^* - ЧРФ. Тогда $A = \delta \chi_A^* \Rightarrow A$ - РПМ.

18.20 Теорема (О составном определении) (б. д.)

РПМ $A_1 \dots A_n \subseteq \mathbb{N}^k, A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$
$g_1(x_1 \dots x_k) \dots g_n(x_1 \dots x_k)$ - ЧРФ. Тогда функция

$$f(x_1 \dots x_k) = \begin{cases} g_1(x_1 \dots x_k) & \text{если}(x_1 \dots x_k) \in A_1 \\ \vdots & \\ g_n(x_1 \dots x_k) & \text{если}(x_1 \dots x_k) \in A_n \\ \text{неопред.} & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда f - ЧРФ.

19 Формальная арифметика Пеано. Неразрешимые проблемы

19.1 Определение (Арифметика Пеано)

$\Sigma_0 = (<^2, +^2, \times^2, S^1, 0)$ - сигнатура арифметики Пеано
$T(\Sigma_0)$ - множество термов, $F(\Sigma_0)$ - множество формул, $S(\Sigma_0)$ - множество предложений, $\{v_i| \in \mathbb{N}\}$ - переменные

11 Секвенциальное исчисление высказываний

11.1 Определение (Секвенции, аксиомы, правила вывода)

$\Gamma = <\varphi_1 \dots \varphi_n>$- конечная последовательность формул. Тогда следующие выражения называются секвенциями:

1. $\Gamma \vdash \varphi$
2. $\vdash \varphi$
3. $\Gamma \vdash$

Аксиома:

1. $\varphi \vdash \varphi$

Правила вывода:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \phi)}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \psi)}{\Gamma \vdash \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \xi; \Gamma, \psi \vdash \xi; \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \xi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \psi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash} \qquad \frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \xi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

11.2 Определение (Доказательство, доказуемая секвенция)

$S_1 \dots S_n$называется доказательством, если каждая секвенция S_i либо является аксиомой, либо получена из предыдущих однократным применением правил вывода.
Секвенция S называется доказуемой, если $\exists S_1 \dots S_n$, которая является доказательством и заканчивается на эту секвенцию.

11.3 Замечание

Если $S_1 \dots S_n$доказательство, то $\forall k \leq n$:
а) $S_1 \dots S_k$ - доказательство
б) S_k - доказуема

18.10 Предложение

Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}^k, c \subseteq \mathbb{N}^l, A, B, C$ - РПМ, тогда $A \cup B, A \cap B, A \times B$ - РПМ.
Доказательство: упр.

18.11 Теорема (Об эквивалентности определения РПМ)

$A \subseteq \mathbb{N}$, тогда эквивалентны:

1. A - РПМ.
2. $A = \varnothing$, либо $\exists$ прф $f : A = \rho f$
3. $A = \varnothing$, либо $\exists$ чрф $f : A = \rho f$
4. $\exists$ ПРМ $B \subseteq \mathbb{N}^2 : A = \{x | \exists y(x, y) \in B\}$
5. $\exists$ РМ $B \subseteq \mathbb{N}^2 : A = \{x | \exists y(x, y) \in B\}$
6. $\exists$ ЧРФ $f : A = \delta f = \{x | f(x)$ - определена$\}$

18.12 Предложение

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k, B = \{c^k(x_1 \dots x_k) | (x_1 \dots x_k) \in A\}$. Тогда A - РПМ$\Leftrightarrow$ В - РПМ.

18.13 Следствие

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$, тогда A - РПМ$\Leftrightarrow$существует ЧРФ $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$такая что $A = \delta f$, т.е $A = \{(x_1 \dots x_n) | f(x_1 \dots x_n)\text{-определена}\}$
Доказательство:
($\Rightarrow$)Пусть A - РПМ $\Rightarrow$ B - РПМ $\Rightarrow$ $\exists f$ - ЧРФ такая что $B = \delta f$, тогда рассмотрим $g(x_1 \dots x_k) = f(c^k(x_1 \dots x_k))$, тогда $(x_1 \dots x_k) \in A \Leftrightarrow c^k(x_1 \dots x_k) \in B \Leftrightarrow f(c^k(x_1 \dots x_k))$ - определена $\Leftrightarrow g(x_1 \dots x_k)$ - определена $\Rightarrow A = \delta g$
($\Leftarrow$) - упражнение

18.14 Теорема (О существовании РПМ, но не РМ)

Существет РПМ, но не РМ, а именно: $\forall k \in \mathbb{N} \exists A \subseteq \mathbb{N}^k$ такое что, A - РПМ, но не РМ.
Доказательство:
В качестве А рассмотрим : $A = \{c(x, y) | k^2(x, y)\text{−определена}\}$, $\{(x, y) | k^2(x, y)$ - определена$\}$ - РПМ $\Rightarrow A$ - РПМ.

($\Leftarrow$) $D = \frac{\dots\dots}{S}$ - дерево, $n = h(D)$. Индукция по n
$n = 1$: $D = S$ - аксиома $\Rightarrow S$ - доказательство.
$< n \to n$: $\forall k < n$ верно, $D = \frac{D_i \dots D_m}{S}$ - дерево вывода, $h(D) = n \Rightarrow h(D_i) < n$, $i \leq m$
$D_i = \frac{\dots\dots}{S_i} \Rightarrow \forall i \leq m \exists S_1^1 \dots S_{k_i}^{\mathrm{i}} = S_i$ - доказательство, $S_1^1 \dots S_k^1 = S_1 \dots S_1^m \dots S_{k_m}^m, S$ - доказательство.

11.8 Определение (Производные и допустимые правила вывода)

Дерево секвенций $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$ высоты 2 называется производным правилом вывода, если $\exists D = \frac{\dots\dots}{S}$, вершины которого либо аксиомы, либо одни из секвкнций $S_1 \dots S_n$, а все переходы являются частными случаями правил вывода
Дерево секвенций $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$ высоты 2 называется допустимым правилом вывода, если при добавлении его в качестве нового правила вывода множество доказуемых секвенций не увеличивается.

11.9 Замечание

Любое производное правило вывода является допустимым.

11.10 Предложение (Допустимые правила вывода)

Следующие правила вывода являются допустимыми:

$$\frac{\psi_1 \dots \psi_n \vdash \varphi}{\xi_1 \dots \xi_k \vdash \varphi} \qquad \frac{\psi_1 \dots \psi_n \vdash}{\xi_1 \dots \xi_k \vdash} (\{\psi_1 \dots \psi_n\} \subseteq \{\xi_1 \dots \xi_k\})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma_1 \vdash \xi}{\Gamma, (\varphi \& \psi), \Gamma_1 \vdash \xi} \qquad \frac{\Gamma \vdash (\varphi \& \neg\varphi)}{\Gamma \vdash}$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\neg\psi \vdash \neg\varphi)} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} \qquad \frac{\varphi \vdash \psi; \psi \vdash \xi}{\varphi \vdash \xi}$$

2. $\mathfrak{A}(m) \notin K \Rightarrow f(m) = a \in M \Rightarrow \mathfrak{A}(a) = \mathfrak{A}(f(m)) = \mathfrak{A}(m) \in K$. Противоречие

18 Рекурсивные и рекурсивно-примитивные множества

18.1 Определение (Разрешимое множеств)

Множество разрешимо если существует алгоритм, на входе которого объект, а на выходе ответ, принадлежит объект этому множеству или нет и перечислимым, если существует алгоритм перечисления элементов:

1. Перечисляются только элементы множества
2. Каждый элемент будет перечислен

18.2 Определение (Рекурсивное множество)

$A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется рекурсивным (примитивно-рекурсивным), если:
$\chi_A(x_1 \dots x_k) = \begin{cases} 1, & (x_1 \dots x_k) \in A \\ 0, & (x_1 \dots x_k) \notin A \end{cases}$ - ОРФ(ПРФ)

18.3 Определение (Рекурсивно-перечислимое множество)

$A \subseteq \mathbb{N}^{\mathrm{k}}$−рекурсивно-перечислимое, если $A = \varnothing$, либо существует ОРФ $f_1 \dots f_k$ $A = \{(f_1(n), \dots, f_k(n)) | n \in \mathbb{N}\}$
$A \subseteq \mathbb{N}$−рекурсивно-перечислимое, если существует ОРФ f, такое что $A = \rho f = \{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$

18.4 Замечание

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$, $\chi_A(\bar{x})$ - ОРФ $\Leftrightarrow \chi_A(\bar{x})$ - ЧРФ.

18.5 Предложение

$A, B \subseteq \mathbb{N}^k, C \subseteq \mathbb{N}^l$, A, B, C - рекурсивные множества (примитивно-рекурсивные множества), тогда $A \cup B$,$A \cap B$,$\bar{A}$,$A \backslash B$,$A \times B$ - рекурсивно-примитивные.

18.6 Замечание

ПРМ $\subseteq$ РМ

11.15 Теорема (о подстановках)

Подстановка сохраняет доказуемость секвенций, если S - доказуема, то $\rho(S)$ - доказуема.
Доказательство:
S - доказуема, тогда $\exists D = \frac{\dots\dots}{S}$ - дерево вывода. $D \to \rho(D) = \frac{\dots\dots}{\rho(S)}$ - дерево вывода, $n = h(D)$, индукция по n:
$n = 1$: $D = S$ - аксиома, $\rho(D) = \rho(S)$ - аксиома.
$\frac{S_1 \dots S_n}{S}$ - правило вывода, то $\frac{\rho(S_1) \dots \rho(S_n)}{\rho(S)}$ - правило вывода.

11.16 Определение

Формула φ доказуема, если $\vdash \varphi$ - доказуема.

11.17 Следствие

Если ρ - подстановка, φ - доказуема, то $\rho(\varphi)$ - доказуема.

11.18 Определение (равносильность)

Формулы φ и ψ называются равносильными($\varphi \equiv \psi$), если $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$ - доказуемы.

11.19 Предложение

Равносильность - отношение эквивалентности.
Доказательство:

1. Рефлексивность: $\varphi \vdash \varphi$ - аксиома $\Rightarrow \varphi \equiv \varphi$.
2. Симметричность: $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi \vdash \psi$, $\psi \vdash \varphi$ - доказуемы $\Rightarrow \psi \vdash \varphi$, $\varphi \vdash \psi$ - доказуемы $\Rightarrow \psi \equiv \varphi$.
3. Транзитивность: $\varphi \equiv \psi$, $\psi \equiv \xi$. $\varphi \vdash \psi$, $\psi \vdash \varphi$, $\psi \vdash \xi$, $\xi \vdash \psi$. $\frac{\varphi \vdash \psi; \psi \vdash \xi}{\varphi \vdash \xi}$, $\frac{\xi \vdash \psi; \psi \vdash \varphi}{\xi \vdash \varphi} \Rightarrow \varphi \vdash \xi$, $\xi \vdash \varphi$ - доказуемы $\Rightarrow \varphi \equiv \xi$.

11.20 Предложение

Пусть φ - доказуема, $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \psi$ - доказуема.
Доказательство:
$\vdash \varphi$ - доказуема, $\varphi \vdash \psi$. $\frac{\vdash \varphi; \varphi \vdash \psi}{\vdash \psi} \Rightarrow \vdash \psi$ - доказуема $\Rightarrow \psi$ - доказуема.

17.17 Предложение

1. $[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2))$
2. $c^n(c(x_1, x_2), x_3 \dots x_{n+1}) = c^{n+1}(x_1 .. x_{n+1})$
3. $[x_1 \dots x_n] = [[x_1 \dots x_m], x_{m+1} \dots x_n]$

Доказательство:
а),б) - упражнение
в) Берем $[x_1 .. x_n] = [[x_1 .. x_{n-1}], x_n] = \dots = [[[[[x_1 x_2], x_3], x_4] \dots x_{n-1}], x_n] = [[[[x_1 \dots x_m] x_{m+1}] \dots] x_n] = [[x_1 \dots x_m], x_{m+1} \dots x_n]$

17.18 Определение Клиенивские универсальные функции

$\mathrm{K}^2(x_0, x_1) = \varphi^2(l(x_0), c(r(x_0), x_1))$
$K^{n+1}(x_0 \dots x_n) = K^n([x_o, x_1], x_2 \dots x_n)$

17.19 Предложение

$\mathrm{K}^n(c(x_0, x_1), x_2 \dots x_n) = \varphi^{n+1}(x_0 \dots x_n)$
Доказательство: (упражнение)

17.20 Теорема

K^{n+1}− универсальное для ЧРФ$^{\mathrm{n}}$
Доказательство:
а) K^{n+1} - ЧРФ $\implies \forall m$ $K^{n+1}(m, x_1 \dots x_n) \in$ ЧФР^n
б) Пусть $g(x_1 .. x_n) \in$ ЧРФ^n. Рассмотрим $f(y, x_1 \dots x_n) = o \cdot y + g(x_1 .. x_n) = g(x_1 \dots x_n) \implies f(y, x_1 \dots x_n) \in$ ЧРФ$^{n+1} \implies$
$\exists a \in \mathbb{N} : f(y, x_1 .. x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1 .. x_n)$
Тогда $K^{n+1}(c(a, y), x_1 \dots x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1 \dots x_n) = f(y, x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)$.
$\forall k : m_k = c(a, k)$
Если рассмотрим $m_0 = c(a, 0)$, то $g(x_1 .. x_n) = K^{n+1}(m_0, x_1 \dots x_n) \implies K^{n+1}$−универсальное для ЧРФ$^{\mathrm{n}}$

17.21 Следствие

Любая ЧРФ$^{\mathrm{n}}$имеет бесконечно много клиниевших номеров , т.е $\forall g \in$ ЧРФ$^n \exists$ бесконечно много $m_k : g(x_1 \dots x_n) = K^{n+1}(m_k, x_1 \dots x_n)$
Доказательство: (упражнение)

3. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$
4. $(\varphi \& \psi) \equiv (\psi \& \varphi)$
5. $((\varphi \vee \psi) \vee \xi) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \xi))$
6. $((\varphi \& \psi) \& \xi) \equiv (\varphi \& (\psi \& \xi))$
7. $(\varphi \vee (\psi \& \xi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \xi))$
8. $(\varphi \& (\psi \vee \xi)) \equiv ((\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \xi))$
9. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
10. $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
11. $(\varphi \vee (\psi \& \neg\psi) \vee \xi) \equiv (\varphi \vee \xi)$
12. $(\varphi \& (\psi \vee \neg\psi) \& \xi) \equiv (\varphi \& \xi)$

11.25 Теорема

Для любой формулы φ существует равносильная ей формула ψ, находящаяся в КНФ.
Доказательство:
Алгоритм приведения формулы к КНФ(используем предложение 11.24):

1. С помощью 10 избавляемся от импликаций.
2. С помощью 1, 2, 9 вносим отрицания до пропозициональных переменных.
3. 3-7 - выносим конъюнкцию наружу.
4. Получаем КНФ, которая будет равносильна исходной формуле.

11.26 Теорема

КНФ тождественно истинна $\Leftrightarrow$ в каждую ее элементарную дизъюнкцию хотя бы одна пропозициональная переменная входит как с отрицанием, так и без него.
Доказательство:
$\varphi = (\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n)$, где φ_i - элементарная дизъюнкция

все такие $f(h(x_0), x_1, \dots, x_n)$ будут являтся универсальными для K, и, т. к. мощность множества такихh континуум, то таких функций тоже континуум, даже если предположить, что $\exists h_1$, $h_2 | f(h_1(x_0), x_1, \dots, x_n) = f(h_2(x_0), x_1, \dots, x_n)$, то таких h не более, чем счетно, потому что не более чем счетно количество $m_1, \dots | f(m_i, x_1, \dots, x_n) = f(m_j, x_1, \dots, x_n)$, т.к. $m \in \mathbb{N}$.
б) ПРФ$\subseteq$ОРФ $\subseteq$ЧРФ $=$ ПВТ имеют счетную мощность. Переходим к п. (а)

17.8 Теорема(ПРФ^n, ОРФ^n, ЧРФ^n- n-местные)

а) $\nexists$ ПРФ, универсальной для ПРФ^n
б) Класс ОРФ^n не имеет универсальной ОРФ
в) Класс ОРФ^n не имеет универсальной ЧРФ
Доказательство
а) От противного . Пусть $\exists$ПРФ$f(x_o \dots x_n)$ - универсальная для ПРФ^n
$g(x_1 \dots x_n) = f(x_1, x_1, x_2 .. x_n) + 1 -$ПРФ ,так как $f -$ ПРФ.
$g(x_1 .. x_n) \in$ ПРФ$^n \Longrightarrow \exists m : g(x_1 \dots x_n) = f(m, x_1 \dots x_n)$
Тогда $f(m .. m) = g(m \dots m) = f(m \dots m) + 1$ противоречие
б) Аналогично (упр) (ПРФ заменить на ОРФ)
в) От противного . Пусть $f(x_0 \dots x_n)-$универсальная для ОРФ"
$f-$ЧРФ. Рассмотрим произвольный кортеж $m_o \dots m_n \in \mathbb{N}$.
Тогда $f(m_0, x_1 \dots x_n) \in$ ОРФ$^n \Longrightarrow$всюду определен $\Longrightarrow f(m_0, m_1 \dots m_n)-$определена $\Longrightarrow f$ - ОРФ, универсальная для ОРФ^n - противоречие

17.9 Теорема (Класс ЧРФ^n имеет универсальную ЧРФ)

Доказательство:
Рассмотрим $f(x_0 \dots x_n) = l(\mu y\,[T^n | x_0 \dots x_n, l(y), r(y) - 1| = 0] \Longrightarrow f$ - ЧРФ $\Longrightarrow$
а) $\forall m$ $f(m, x_1 \dots x_n)$ − ЧРФ$\Rightarrow$ $f(m, x_1 .. x_n) \in$ ЧРФ^n
б) $g(x_1 .. x_n) \in$ ЧРФ $\Longrightarrow g-$ПВТ $\Longrightarrow \exists$программа Π | вычесляет g .
Тогда $m = \gamma(\Pi) \Longrightarrow g(x_1 .. x_n) = f(m, x_1 \dots x_n)$

17.10 Определение

$\varphi^2(x_0, x_1) = l(\mu y[|T^1(x_0, x_1, l(y), r(y) - 1| = 0]$

11.30 Теорема (О полноте для СИВ)

Если φ тождественно истинна, то φ - доказуема.
Доказательство:
Пусть φ - тождественно истинна. $\exists \psi$ - КНФ, такая что $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \psi$ - тождественно истинна $\Rightarrow \psi$ - доказуема, $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi$ - доказуема.

11.31 Теорема

1. φ тождественно истинна $\Leftrightarrow \varphi$ - доказуема.
2. Секвенция S тождественно истинна $\Leftrightarrow S$ доказуема.

Доказательство:

1. Следует из теоремы о корректности и теоремы о полноте.
2. S, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$
   а) Если S доказуема, то S - тождественно истинна. Следует из теоремы о корректности.
   б) S - тождественно истинна $\Rightarrow ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ - тождественно истинна (**Упражнение**)
   $\Rightarrow ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ - доказуема
   $\Rightarrow \vdash ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to)$ - доказуема
   $\vdash \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ (**Упражнение**)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n), \vdash ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi)}{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \vdash \psi}}{\dots}}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}$$

11.32 Следствие

Формулы логики высказываний эквивалентны $\Leftrightarrow$ они тождественно истинны.

16.20 Следствие

Пусть $f(x_1 \dots x_n)$- ЧРФ, тогда $\exists$ ПРФ $g(x_1 \dots x_n, y)$ так что выполнено : $f(x_1 \dots x_n) = l(\mu y[g(x_1 \dots x_n, y) = 0])$
Доказательство:
Пусть f-ЧРФ $\Rightarrow f$ правильно вычислима на машине Тьюринга $\Rightarrow f$ вычислима на машине Тьюринга, $\Rightarrow$по теореме о нормальной форме Клини $\exists g | f(x) = l(\mu y[g(x, y) = 0])$.

16.21 Основная теорема о вычислимых функциях

ЧРФ $=$ Выч. на машине Тьюренга (ВТ) $=$ ПВТ
Доказательство:
ПРФ $\subseteq$ ПВТ $\subseteq$ ВТ $\subseteq$ ЧРФ $\Rightarrow$все классы совпадают

16.22 Следствие

Любая ОРФ может быть получена из простейших функций применением операторов примитивной рекурсии, суперпозиции и минимизации таким образом, чтобы на каждом шаге получались только ОРФ.
Доказательство:УПР.

16.23 Следствие

Класс ОРФ совпадает с классом всюду определённых функций , вычислимых на машине Тьюринга, а также совпадает с классом всюду определённых функций, Правильно вычислимых на машине Тьюринга.
Доказательство:УПР.

17 Универсальные вычислимые функции

17.1 Определение (Универсальная функция)

Пусть K - некоторое множество частичных функций $f : \mathbb{N}^{\varkappa} \to \mathbb{N}$
Функция $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ называется универсальной функцией для класса K , если:
а) $\forall m \in \mathbb{N}$ $f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$
б) $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K$ $\exists m \in \mathbb{N}$: $\forall x_1 .. x_n$ $g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$, то есть $K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) | m \in \mathbb{N}\}$

19.11 Определение (Термы)

1. $\underline{0} = 0$
2. $\underline{1} = S(0)$
3. $n+1 = S(n)$, т. е. $\underline{n} = S(S(\ldots S(0)\ldots))$, где S применяется n раз.

19.12 Определение (Представимость в арифметике)

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ - **представима в арифметике** A_0(A_0 - набор аксиом), если $\exists\varphi(v_0, \ldots, v_k | \forall n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$:

1. если $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) = n_k$, то $A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$
2. если $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) \neq n_k$, то $A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$

19.13 Каждая орф представима в A_0

Доказательство:

1. $0(v_0)$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1) = (v_1 = 0)$
2. $S(v_0)$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1) = (v_1 = S(v_0))$
3. $I^n_m(v_0, \ldots, v_{n-1})$ представима формулой $\varphi(v_0, \ldots, v_n) = (v_n = v_{m-1})$
4. Суперпозиция - упражнение
5. Остальное - б. д.

19.14 Теорема (Гёделя о неразрешимости)

Любая непротиворечивая теория, содержащая арифметику Пеано, является неразрешимой. Или система аксиом A_0 является наслдественное неразрешимой. А именно: пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$, T - непротиворечива, тогда T - неразрешима.

Доказательство:

От противного: пустьT - разрешима, тогда $M = \gamma(T)$ - рекурсивное множество, а значит χ_M - орф. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \gamma([\gamma^{-1}(x)]^{v_0}_{\underline{y}}) & \text{если } x \in \gamma(F(\Sigma_0)) \\ 0 & \text{если } x \notin \gamma(F(\Sigma_0)) \end{cases}$$

$\gamma(F(\Sigma_0))$ - прм, следовательно $f(x,y)$ - прф (б. д.)

10.8 Определение (замкнутость множества отн-но операций)

A - замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$, если:

1. $\forall f \in \sigma\ \forall a_1 \ldots a_n \in A\ f(a_1 \ldots a_n) \in A$
2. $\forall c \in \sigma\ c^{\mathfrak{B}} \in A$

10.9 Предложение

Пусть$\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A \subseteq |\mathfrak{B}|$, тогда множество A определяет подмодель $\mathfrak{B}$(т.е. множество A является основным множеством некоторой подмодели модели $\mathfrak{B} \iff A$ замкнуто в $\mathfrak{B}$относительно операций)

10.10 Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ - гомоморфизм. Рассмотрим $C = h(A) = \{h(a) \mid a \in \mathfrak{A}\}$. Тогда C - замкнуто относительно операций в модели $\mathfrak{B}$, т.е. определена ($\exists$) $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$, такая что $|\mathfrak{C}| = C$

10.11 Предложение

$\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $H = \{\mathfrak{A} \in K(\sigma) | \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}\}$, C$= \bigcap\limits_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$ $(C \neq \oslash)$. Тогда C замкнуто в $\mathfrak{B}$, $\implies \exists\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B} : |\mathfrak{C}| = C$

10.12 Теорема

Пусть $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{B}|, X \neq \oslash$ Тогда $\exists$наименьшая по вложению модель $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$,такая что $X \subseteq |\mathfrak{C}|$ $\mathfrak{C} = Sub_{\mathfrak{B}}(X)$

10.13 Предложение

- A- множество и σ- сигнатура $\Longrightarrow \exists\mathfrak{A} \in K(\sigma) |\mathfrak{A}| = A$
- $K(\sigma)$ - не множество

10.14 Теорема

$\mathfrak{B} \in K(\sigma), X \subseteq |\mathfrak{B}|$ и ($x \neq \oslash$или $\exists$c $\in \sigma$) $\mathfrak{C} = Sub_{\mathfrak{B}}(X)$ Тогда множество $|\mathfrak{C}| = \{t^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) | t(x_1, \ldots, x_n) \in T(\sigma), a_1, \ldots, a_n \in X\} = T_x$

Содержание

10 Гомоморфизмы, изоморфизмы, подмодели

10.1 Определение (гомоморфизм)

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\epsilon\kappa(\sigma)$, $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ - гомоморфизм алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, если

$\forall P^n$, f^n, $c \in \sigma\ \forall a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполнено следующее:
а) $\mathfrak{A} \vDash P^{\mathfrak{A}}(a_1 \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(h(a_1) \ldots h(a_n))$
б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1 \ldots a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1 \ldots a_n))$
в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

10.2 Определение (эпиморфизм)

h - эпиморфизм, если h - гомоморфизм и "на"

10.3 Определение (изоморфизм)

h - изоморфизм, если:

1. h - взаимно-однозначно

Покажем, что A - не РМ. От противного:
Пусть A - РМ$\Rightarrow$ χ_A - ОРФ. т.к. $k^2(x,y)$- универсальное $\Rightarrow$ $\exists a$: $k^2(a,x) = o(x)$
Рассмотрим $g(x,y) = k^2(x * \chi_A(c(x,y) + a * \bar{s}g\chi_A(c(x,y))), y)$ - ЧРФ
Покажем, что $g(x,y)$ - ОРФ всюду определена: $(x,y) \in \mathbb{N}^2$.
а) $k^2(x,y)-$определена$\Rightarrow$ $c(x,y) \in A \Rightarrow \chi_A(c(x,y)) = 0 \Rightarrow g(x,y) = k^2(x,y)$ - определена.
б) $k^2(x,y)$- не определена $\Rightarrow c(x,y) \notin A \Rightarrow \chi_A(c(x,y)) = 0 \Rightarrow g(x,y) = k^2(a,y) = o(y) = 0 \Rightarrow$определена.
$\Rightarrow g(x,y) -$ОРФ.
Покажем, что $g(x,y)$ - универсальна для ОРФ:
а) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow g(n,y)$ - ОРФ
б) $h(x)$ - ОРФ $\Rightarrow h(x)$ - ЧРФ$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : h(x) = k^2(n,x)$
Заметим, что $\forall x\, k^2(n,x)$ - определена $\Rightarrow k^2(n,x) = g(n,x) \Rightarrow \forall x\, h(x) = g(n,x) \Rightarrow g(x_0, x_1)$ - ОРФ универсальная для ОРФ (противоречие).
Пусть $k > 1$, тогда рассмотрим $Ak = \{(c^k_1(n) \ldots c^k_k(n)) | \quad n \in A\} \Rightarrow A_k$ - РПМ, но не РМ.

18.15 Замечание

Множество $A = \delta k^n(x_1 \ldots x_n)$ - РПМ, но не РМ.
Доказательство: упр

18.16 Предложение

$A \subseteq \mathbb{N}^k$, тогда эквивалентны:

1. A - РПМ
2. $A = \delta f, f$ - ЧРФ
3. $\exists$ РМ $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ такое что $A = \{(x_1 \ldots x_k) | (x_1 \ldots x_k, y) \in B\}$
4. $\exists$ ПРМ $B \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ такое что $A = \{(x_1 \ldots x_k) | (x_1 \ldots x_k, y) \in B\}$

18.17 Теорема(о графике) (б. д.)

f - ЧРФ $\Leftrightarrow G_f = \{(x_1 \ldots x_n, y) | f(x_1 \ldots x_n) = y\}$ - РПМ (G - график)

а) "на": $b \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists a \in \mathfrak{A}$, такое что $h(a) = b \Rightarrow g([a]) = h(a) = b$
б) g - разнозначно: $g([a]) = g([c]) \Rightarrow h(a) = h(c) \Rightarrow a \sim c \Rightarrow [a] = [c] \Rightarrow$ g- взаимно-однозначное
3) g - сохраняет операции и константы: Пусть $f^n, c \in \sigma$
а) $[a_1], \ldots, [a_n] \in \mathfrak{A}_{/\sim}$ $g(f([a_1], \ldots, [a_n])) = g([f(a_1, \ldots, a_n)]) = h(f(a_1, \ldots, a_n)) = f(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = f(g([a_1]), \ldots, g([a_n]))$
б) $g(c^{\mathfrak{A}/\sim}) = g([c^{\mathfrak{A}}]) = h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} \Rightarrow g$ - изоморфизм, $g : \mathfrak{A}_{/\sim} \to \mathfrak{B}$

10.28 Предложение

Любой гомоморфизм является композицией эпиморфизма и изоморфного вложения

Доказательство: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ - гомоморфизм, $C = h(a) = \{h(a) | a \in \mathfrak{A}\}$, $\exists\mathfrak{C} \in K(\sigma)$ $|\mathfrak{C}| = C, \mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}, g : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{C}|, g(a) = h(a) \in C$

Тогда g- эпиморфизм (упражнение). $id_c : C \to B$, $id_c : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$- изоморфное вложение (упражнение)

Тогда $\forall a \in \mathfrak{A}$ имеем $h(a) = g(a) = id_c(g(a))$, $h = g \circ id_c$, g - эпиморфизм, id_c- изоморфное вложение

10.29 Теорема (основная теорема о гомоморфизмах)

Любой гомоморфизм является композицией, факторизацией изоморфного вложения.

Доказательство: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ - гомоморфизм. Пусть $\mathfrak{C} = h(\mathfrak{A})$, т.е. $|\mathfrak{C}| = C = h(A)$, $A = |\mathfrak{A}|$, пусть $h = g \circ id_c$, $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ - эпиморфизм

Для $a, c \in \mathfrak{A}$, $a \sim c$, $h(a) = h(c)$ (или $g(a) = g(c)$). $v : \mathfrak{A}_{/\sim} \to \mathfrak{C}$, $v([a]) = g(a)$. Тогда $v : \mathfrak{A}_{/\sim} \to \mathfrak{C}$ - изоморфизм

Положим $u : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_{/\sim}$, $u(a) = [a] \Rightarrow g = u \circ v$

$h = u \circ v \circ id_c$ $\mathfrak{A} \underset{\mathfrak{u}}{\longrightarrow} \mathfrak{A}_{/\sim} \underset{v}{\longrightarrow} \mathfrak{C}$

$h = g \circ id_c$

$q = v \circ id_c$, $\mathfrak{A} \underset{u}{\longrightarrow} \mathfrak{A}_{/\sim} \underset{\mathfrak{v}}{\longrightarrow} \mathfrak{C} \underset{id_c}{\longrightarrow} \mathfrak{B}$, $q : \mathfrak{A}_{/\sim} \longrightarrow \mathfrak{B}$

Композиция изоморфизма и изоморфного вложения является изоморфным вложением $h = u \circ q$

19.2 Определение (Гёделевская нумерация)

Гёделевской нумерацией термов и формул сигнатуры Σ_0 называется:

1. $\gamma(0) = c(0,1)$, $\gamma(v_i) = c(1,i)$
2. $\gamma(S(t)) = c(2, \gamma(t))$
3. $\gamma(t+q) = c(3, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
4. $\gamma(t \times q) = c(4, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
5. $\gamma(t = q) = c(5, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
6. $\gamma(t < q) = c(6, c(\gamma(t), \gamma(q)))$
7. $\gamma(\varphi \& \psi) = c(7, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
8. $\gamma(\varphi \vee \psi) = c(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
9. $\gamma(\varphi \to \psi) = c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$
10. $\gamma(\neg\varphi) = c(10, c(\gamma(\varphi)))$
11. $\gamma(\exists v_i \varphi) = c(11, c(i, \gamma(\varphi))$
12. $\gamma(\forall v_i \varphi) = c(12, c(i, \gamma(\varphi))$

19.3 Предложение

Следующие множества - прим. рек. мн-ва:

1. $\gamma(T(\Sigma_0)) = \{\gamma(t) | t \in T(\Sigma_0)\}$
2. $\gamma(F(\Sigma_0)) = \{\gamma(t) | t \in F(\Sigma_0)\}$
3. $\gamma(S(\Sigma_0)) = \{\gamma(t) | t \in S(\Sigma_0)\}$

19.4 Определение (Разрешимое множество, перечислимое множество)

$X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$.
X - **разрешимо**, если $\gamma(X) = \{\gamma(a) | a \in X\}$- рекурсивное множество.
X - **перечислимо**, если $\gamma(X) = \{\gamma(a) | a \in X\}$- рекурсивно-перечислимое множество.

10.19 Теорема

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ $a_1, \ldots a_n \in |\mathfrak{A}|$ $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ - бескванторная $\in F(\sigma)$ тогда:

а) $\mathfrak{A} \models \exists y_1, \ldots, \exists y_k\ \psi(\bar{a}, \bar{y})$, то $\mathfrak{B} \models \exists y_1, \ldots, \exists y_k\ \psi(\bar{a}, \bar{y})$

б) $\mathfrak{B} \models \forall y_1, \ldots, \forall y_k\ \psi(\bar{a}, \bar{y})$, то $\mathfrak{A} \models \forall y_1, \ldots, \forall y_k\ \psi(\bar{a}, \bar{y})$

Доказательство: а) $\mathfrak{A} \models \exists\bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y}) \iff \exists c_1, \ldots, c_k \in |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, \bar{c}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists c_1, \ldots, c_k \in |\mathfrak{B}| : \mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, \bar{c}) \iff \mathfrak{B} \models \exists y_1, \ldots, y_k\ \psi(\bar{a}, \bar{y})$

б) Упражнение

10.20 Замечание

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $|\mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{B}|$. Тогда: $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \iff i_A : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ - изоморфное вложение ($i_A : A \to B$, $i_A(a) = a$)

Доказательство: $\Rightarrow$) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ P, f, $c \in \sigma$ $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P(i_A(a_1), \ldots, i_A(a_n))$ (упражнение)

$\Leftarrow$) i_A- изоморфное вложение $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models P(i_A(a_1), \ldots, i_A(a_n)) \iff \mathfrak{B} \models P(a_1, \ldots, a_n)$ (упражнение)

10.21 Определение (конгруэнтность)

$\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\sim$ - отношение эквивалетности, $A = |\mathfrak{A}|$, σ - без предикатов, $\sim$ - конгруэнция (отношение конгруэнтности) на $\mathfrak{A}$, если:

$\forall f^k \in \sigma$ и $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{A}|$, так, что $a_1 \sim b_1, \ldots, a_n \sim b_n$, выполнено $f(a_1, \ldots, a_n) \sim f(b_1, \ldots, b_n)$

10.22 Определение (фактор)

$\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\sim$ - конгруэнция на $\mathfrak{A}$. Для $a \in \mathfrak{A}$ $[a]_n = \{b \in |\mathfrak{A}| | a \sim b\} = a_{/\sim}$

$A_{/\sim} = \{[a]_n | a \in A\} = \{a_{/\sim} | a \in |\mathfrak{A}|\}$ $f^n, c \in \sigma$

$f^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \ldots, [a_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)]$ $c^{\mathfrak{A}/\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$

17.22 Теорема (S-m-n)

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ существует ПРФ $S^n_m(x_0...x_n)$: $K^{n+m+1}(x_0...x_{m+n}) = K^{m+1}(S^n_m(x_0..x_m), x_{n+1}...x_{n+m})$
Доказательство:
Положим $S^n_m(x_0..x_n) = [x_0..x_n]$, тогда $K^{n+m+1}(x_0...x_{n+m}) = K^{n+m}([x_0, x_1]), x_2...x_{n+m}) = K^{n+m-1}([[x_0, x_1], x_2]...x_{n+m}) = ... = K^{m+1}([[x_0, x_1], x_2], x_n]x_{n+1}, ...x_{n+m}) = K^{m+1}([x_0...x_n], x_{n+1}, x_{n+m})$

17.23 Теорема (О неподвижной точке)

Для любой ЧРФ $h(x_1...x_{n+1})$ существует ПРФ $g(x_1...x_n)$ так что $K^2(h(x_1..x_n, g(x_1...x_n), y)$
Доказательство:
Рассмотрим $K^2(h(x_1..x_n, [z, z, x_1....x_n], y) -$ЧРФ $\Longrightarrow \exists a \in \mathbb{N}$ такая что $K^2(h(x_1...x_n, [z, z, x_1...x_n]), y) = K^{n+3}(a, z, x_1...x_n, y)$
$g(x_1..x_n) = [a, a, x_1..x_n]$ - ПРФ. Тогда $K^2(h(x_1....x_n, [a, a, x_1...x_n], y) = K^{n+3}(a, a, x_1...x_n, g) = K^2([a, a, x_1...x_n], y) = K^2(g(x_1...x_n), y) = K^2(h(x_1...x_n, g(x_1...x_n)), y)$

17.24 Определение

Обозначим $\mathfrak{A}(n) = K^2(n,x)$ $\mathfrak{A} : \mathbb{N} \to$ ЧРФ

17.25 Следствие

$\forall$ЧРФ $h(x) \exists m \in \mathbb{N} : \mathfrak{A}(h(m)) = \mathfrak{A}(m)$

17.26 Теорема (Райса)

Рассмотрим $K \subseteq$ ЧРФ' ,$K \neq \emptyset, K \neq$ ЧРФ^{n}Тогда множество $M = \{n | \mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \in K\}$ не рекурсивно , т.е $\chi_{\text{M}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$

$\chi_m -$не ЧРФ (не ОРФ)
Доказательство:
От противного .Пусть χ_m(x)$-$ЧРФ$\Longrightarrow$ ОРФ. Т. к. $K \neq \emptyset \Rightarrow M \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in M$. Т. к. $K \neq$ ЧРФ$^n \Rightarrow \exists b \notin M$. Рассмотрим функцию $f(x) = b\chi_M(x) + a\bar{s}g\chi_M(x)$ Из п. 17.25 $\exists m \,|\, \mathfrak{A}(f(m)) = \mathfrak{A}(m)$
1. $\mathfrak{A}(m) \in K \Rightarrow f(m) = b \notin M \Rightarrow \mathfrak{A}(b) = \mathfrak{A}(f(m)) = \mathfrak{A}(m) \notin K$. Противоречие

11.11 Определение (Семантика секвенций)

1. $\varphi_1 \ldots \varphi_n \vdash \psi$ - называется истинной при данных значениях входящих в нее пропозициональных переменных, если либо $\exists i \leq n : \varphi_i$ - ложна, либо ψ - истина.
2. $\vdash \psi$ - истина, если ψ - истина.
3. $\varphi_1 \ldots \varphi_n \vdash$ - истина при данных значениях входящих в нее пропозициональных переменных, если $\exists i \leq n : \varphi_i$ - ложна.
4. Секвенция называется тождественно истинной, если она является истинной при любых значениях входящих в нее пропозициональных переменных.

11.12 Предложение

Правила вывода сохраняют тождественную истинность секвенций, а именно, если $\frac{S_1 \ldots S_n}{S}$ - правило вывода и $S_1 \ldots S_n$ - тождественно истинна, то S - тождественно истинна.

11.13 Теорема (о корректности СИВ)

Если секвенция доказуема, то она тождественно истинна.
Доказательство:
Пусть секвенция S - доказуема $\Rightarrow S_1 \ldots S_n = S$ - доказательство. Индукция по n:
$n = 1$: S - аксиома $\Rightarrow S$ - тождественно истинна.
$< n \to n$: $\forall k < n$ - истина
$\exists i_1 \ldots i_m < n$: $\frac{S_{i_1} \ldots S_{i_m}}{S}$ - правило вывода. $\forall k < m$ $S_{i_1} \ldots S_{i_k}$ - доказательство $\Rightarrow S_{i_1} \ldots S_{i_m}$ - тождественно истинна $\Rightarrow S$ - тождественно истинна.

11.14 Определние (подстановка)

Отображение $\rho : F \to F$ называется подстановкой, если оно перестановачно с логическими связками:

1. $\rho(\varphi \vee \psi) = (\rho(\varphi) \vee \rho(\psi))$
2. $\rho(\varphi \& \psi) = (\rho(\varphi) \& (\rho(\psi))$
3. $\rho(\varphi \to \psi) = (\rho(\varphi) \to \rho(\psi))$
4. $\rho(\neg\varphi) = \neg\rho(\varphi)$

18.7 Предложение

$A \subseteq \mathbb{N}^k, B = \{c^k(\bar{x}) | \bar{x} \in A\}$, тогда A - РМ (ПРМ) $\Leftrightarrow B$ - РМ (ПРМ)
Доказательство:
($\Rightarrow$) А - РМ$\Rightarrow \chi_A$ - ОРФ, $\chi_B(n) = \chi_A(c^k_1(n) \ldots c^k_r(n)) \Rightarrow \chi_B$ - ОРФ $\Rightarrow B$ - РМ.
($\Leftarrow$) χ_B - ОРФ, $\chi_A\{x_1 \ldots x_k) = \chi_B(c^k(x_1 \ldots x_k))$ - ОРФ $\Rightarrow$ A - рекурсивное множество.
ПРМ - упр.

18.8 Предложение

РМ $\subseteq$ РПМ, т.е $\forall A \subseteq \mathbb{N}^k$, если A - РМ, то A - РПМ.
Доказательство:
Пусть $k = 1$, χ_A - ОРФ.

1. Если $A = \varnothing$, то А - РПМ (по определению).
2. Пусть $A \neq \varnothing \Rightarrow \exists a \in A$. Рассмотрим функцию $f(x) = x * \chi_A(x) + a * \bar{s}g\chi_A(x)$
   a) Пусть $f(n) = m$. Если $n \in A \Rightarrow f(n) = n$, т.е $m = n \Rightarrow m \in A$ если $n \notin A$, то $f(n) = a \in A \Rightarrow m = a \in A \Rightarrow m \in A \Rightarrow \rho f \subseteq A$
   b) Пусть $n \in A \Rightarrow f(n) = n$, тогда $A \subseteq \rho f \mapsto A = \rho f$, $f -$ ОРФ $\Rightarrow A$ - РПМ.

для случая $k > 1$ без доказательства.

18.9 Теорема Поста

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$, тогда А - РМ$\Leftrightarrow$ $A, \bar{A}$ - РПМ, т.е множество рекурсивно$\Leftrightarrow$оно и его дополнение рекурсивно.
($\Rightarrow$)A - РМ, $\bar{A}$ - РМ$\Rightarrow A, \bar{A}$ - РПМ.
($\Leftarrow$)$k = 1$. $A, \bar{A}$ - РПМ. Если $A = \emptyset \Rightarrow A$ РМ(упр), если $\bar{A} = \emptyset$, то $A = \mathbb{N} \Rightarrow A$ - РМ(упр).
Пусть $A \neq \varnothing, \bar{A} \neq \varnothing(A \neq \mathbb{N})$. Тогда существует ОРФ $f, g : A = \rho f$, $\bar{A} = \rho g$. Тогда заметим, что $\chi_A(x) = \bar{s}g | f(\mu y [|f(y) - x| * |g(y) - x| = 0]) - x|$ - ЧРФ. Если $x \in A \Rightarrow \exists y : f(y) = x, x \notin \bar{A} \Rightarrow \nexists y : g(y) = x \Rightarrow$ существует наименьший y_0 такой что $f(y) = x \Rightarrow \chi_A(x) = 1$.
Если $x \notin A \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow \exists y : g(y) = x, \nexists y : f(y) = x \Rightarrow$ существует наименьший y_0 такой что $g(y_0) = x \Rightarrow f(y_0) \neq x \Rightarrow |f(\ldots) - x| \neq 0 \Rightarrow \bar{s}g = 0 \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \Rightarrow \chi_A(x)$ - ЧРФ$\Rightarrow \chi_A(x)$ - ОРФ$\Rightarrow A$ - РМ.

11.4 Определение (Дерево секвенций)

1. S - дерево
2. Если $D_1 \ldots D_n$ - деревья секвенций, S - секвенция, то $D = \frac{D_1 \ldots D_n}{S}$ - дерево секвенций
3. Других деревьев нет

11.5 Определение (Вершины, переходы, высота)

а) $V(D)$ - множество вершин:

1. Если $D = S$, то $V(D) = \{S\}$
2. Если $D = \frac{D_1 \ldots D_n}{S}$, то $V(D) = V(D_1) \cup \ldots \cup V(D_n)$

б) $P(D)$ - переходы:

1. Если $D = S$, то $P(D) = \emptyset$
2. Если $D = \frac{D_1 \ldots D_n}{S}$, $D_i = \frac{\cdots\cdots}{S_i}$, то $P(D) = P(D_1) \cup \ldots P(D_n) \cup \{\frac{S_1 \ldots S_n}{S}\}$

в) $h(D)$ - высота дерева:

1. $D = S$, то $h(D) = 1$
2. $D = \frac{D_1 \ldots D_n}{S}$, $h(D) = max(h(D_1) \ldots h(D_n)) + 1$

11.6 Определение (Дерево вывода)

Дерево секвенций называется деревом вывода, если все его вершины являются аксиомами, а переходы - частными случаями правил вывода.

11.7 Предложение

Секвенция S - доказуема $\Leftrightarrow$ $\exists D = \frac{D_1 \ldots D_n}{S}$ - дерево вывода, заканчивающееся на эту секвенцию.
Доказательство:
($\Rightarrow$) S - доказуема $\Rightarrow\exists$ $S_1 \ldots S_n = S$ - доказательство. Индукция по n
$n = 1$: S - аксиома $\Rightarrow D = S$ - дерево вывода.
$< n \to n$: $\forall$ $k < n$ - верно. $S_1 \ldots S_n = S$ - доказательство, $\frac{S_{i_1} \ldots S_{i_m}}{S}$ - правило вывода, $i_1 \ldots i_m < n$
$\forall k \leq m$ $S_{i_1} \ldots S_{i_k}$ - доказательство, $i_k < N$, $D_{i_1} = \frac{\cdots\cdots}{S_{i_1}} \ldots D_{i_m} = \frac{\cdots\cdots}{S_{i_m}}$ - деревья вывода.

17.2 Замечание (О конечности класса функции)

Класс K имеет универсальную функцию $\Longleftrightarrow K$ счетен либо конечен
Док-во (упр)

17.3 Следствие (Континуальность класса)

Если класс K континулален , то он не имеет универсальной функции
Доказательство: (упр)

17.4 Следствие

$\forall n$ класс всех частичных n - местных функций не имеет универсальных функций
Доказательство: (упр)

17.5 Следствие (ПРФ , ОРФ , ЧРФ)

ПРФ,ОРФ,ЧРФ имеют универсальные функции
Доказательство:
ПРФ$\subseteq$ОРФ $\subseteq$ЧРФ = ПВТ
А - алфавит (счетный). Любая программа $\Pi \in A^* = \bigcup\limits_{\text{n}} A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) | n \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$
A^* - счетно , то количество программ счётно
количество функций ПВТ - счётно $\Longrightarrow$ПРФ ,ОРФ,ЧРФ - счётны.

17.6 Замечание (О универсальности)

Пусть $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$-взаимно однозначно, $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) -$универсальная для K, тогда $f(h(x_0), x_1, \ldots, x_n)$ - универсальная для K
Доказательство: (упражнение)

17.7 Следствие

а) если K счётен , то он имеет континуум универсальных функций
б) Классы ПРФ,ОРФ, ЧРФ имеют континуум универсальных функций
Доказательство: (Упр.)
а) Возьмем множество отображений $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$таких, что в $\mathbb{N}$ выбирается не конечное и не коконечное подмножество, в нем меняем четные и нечетные элементы местами сдвигом. Количество таких подмножеств континуально, значит, таких отображений h тоже. По 17.6

($\Rightarrow$) φ - тождественно истинна $\Rightarrow \forall i\, \varphi_i$ - тождественно истинна. Пусть $i \leq n$ и для φ_i - условие наршено. $A_1 \ldots A_k$ - пропозициональные переменные, входящие в φ_i:

$$A_j = \begin{cases} \text{л} & A_j \in \varphi_i \\ \text{и} & \neg A_j \in \varphi_i \end{cases} \Rightarrow \varphi_i = \text{ложь - противоречие.}$$

($\Leftarrow$) $\forall\varphi_i \exists A_j$, такая что $\varphi_i = \varphi_i' \vee A_j \vee \varphi_i'' \vee \neg A_j \vee \varphi_i'''$ - тождественно истинная $\Rightarrow \varphi = (\varphi_1 \& \ldots \varphi_n)$ - тождественно истинна.

11.27 Предложение

$\vdash (\neg\varphi \vee \varphi)$ - доказуема.

11.28 Теорема

КНФ φ доказуема $\Leftrightarrow$ в каждую ее элементарную дизъюнкцию хотя бы одна пропозициональная переменная входит как с отрицанием, так и без него.
Доказательство:
($\rightarrow$) φ - доказуема $\Rightarrow\varphi$ - тождественно истинна $\Rightarrow$условие выполнено (по теореме о корректности)
($\leftarrow$) φ_i, A_j - с отрицанием и без отрицания.
$\varphi_i = \varphi_i' \vee A_j \vee \varphi_i'' \vee \neg A_j \vee \varphi_i''' \ldots$
$\forall i\ \varphi_i$ - доказуема

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash (A_j \vee \neg A_j)}{\vdash (\varphi_i' \vee (A_j \vee \neg A_j) \vee \varphi_i'')}}{\vdash (\varphi_i' \vee (A_j \vee \varphi_i'' \vee \neg A_j))}}{\vdash (\varphi_i' \vee A_j \vee \varphi_i'' \vee \neg A_j)}}{\vdash \varphi_i}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash \varphi_1; \vdash \varphi_2}{\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2); \vdash \varphi_3}}{\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3); \vdash \varphi_4}}{\cdots}}{\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \cdots \wedge \varphi_n)}$$

11.29 Следствие

КНФ доказуема $\Leftrightarrow$ она тождественно истинна.

17.11 Следствие

$\varphi^2(x_0, x_1)$ - ЧРФ, универсально для ЧРФ^n(упр)

17.12 Определение

$\varphi^{n+1}(x_0...x_n) = \varphi^2(x_0, c^n(x_1...x_n))$

17.13 Предложение

φ^{n+1} - ЧРФ, универасальное для ОРФ^n
Доказательство:
Очевидно, что $\varphi^{n+1} -$ЧРФ (упр) $\Longrightarrow$
а) Пусть $m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \varphi^{n+1}(m, x_1...x_n) -$ЧРФ $\Longrightarrow \in$ ЧРФ$^{\text{n}}$
б) Пусть $g(x_1..x_n) \in$ ЧРФ^n.Тогда рассмотрим $h(x) = g(c^n_1(x)...c^n_n(x))$
$\Longrightarrow g(x_1...x_n) = h(c(x_1...x_n)) -$упр $\Longrightarrow h$ - ЧРФ$\in$ЧРФ^1 $\Longrightarrow \exists m$: $h(x) = \varphi^2(\text{m}, \text{x}) \Longrightarrow g(x_1..x_n) = h(c(x_1..x_n)) = \varphi^2(m_1 c(x_1..x_n) = \varphi^{n+1}(m, x_1, \ldots, x_n) \Longmapsto \varphi^{n+1}$ - универсальная для ЧРФ$^{\text{n}}$

17.14 Определение (Клиниевские скобки)

$[x, y] = c(l(x), c(r(x), y))$
$[x_1...x_{n+1}] = [[x_1...x_n], x_{n+1}]$
$[K]_{21} = c(l(k), l(r(k))$
$[K]_{22} = r(r(k))$
$[K]_{n+1,i} = [[K]_{21}]_{n,i}$, $i \leq n$
$[K]_{n+1,n+1} = [K]_{22}$

17.15 Предложение

Все функции из определения 17.14 являются ПРФ
Доказательство: (упражнение)

17.16 Предложение

1. $[[x_1...x_n]]_{ne} = x_e$
2. $[[\text{K}]_{n1} ... [K]_{nn}] = K$
3. $[\,] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}-$взаимно однозначно

Доказательство: (упражнение)

11.21 Предложение

Пусть $\varphi \equiv \varphi_1$, $\psi \equiv \psi_1$, тогда:

1. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi_1 \vee \psi_1)$
2. $(\varphi \& \psi) \equiv (\varphi_1 \& \psi_1)$
3. $(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi_1 \to \psi_1)$
4. $\neg\varphi \equiv \neg\varphi_1$

11.22 Теорема (о замене)

Пусть $\psi \equiv \psi_1$, φ_1 - получена из φ заменой $\psi \mapsto \psi_1$ (ψ - подформула φ). Тогда $\varphi \equiv \varphi_1$.
Доказательство:
Индукция по длине формулы φ, $ln(\varphi) = n$:
$n = 1$: φ - пропозициональная переменная $\Rightarrow \psi = \varphi \Rightarrow \varphi_1 = \psi_1 \Rightarrow \varphi = \psi \equiv \psi_1 = \varphi_1$.
$< n \to n$: $k < n$ - доказано, докажем для n.
$\varphi = (\varphi' \vee \varphi'')$, $\varphi = (\varphi' \& \varphi'')$, $\varphi = (\varphi' \to \varphi'')$, $\varphi = \neg\varphi$.
а) $\psi = \varphi \Rightarrow \varphi = \psi \equiv \psi_1 = \varphi_1$.
б) $\psi \neq \varphi \Rightarrow \psi$ - подформула φ' или φ'', $ln(\varphi')$, $ln(\varphi'') < n = ln(\varphi)$.
Пусть $\varphi = (\varphi' \vee \varphi'') \Rightarrow \varphi_1 = (\varphi_1' \vee \varphi_1'')$, где φ_1' и φ_1'' - либо φ' и φ'', либо получены заменой ψ на $\psi_1 \Rightarrow$ по индукции $\varphi_1' \equiv \varphi'$, $\varphi_1'' \equiv \varphi'' \Rightarrow \varphi = (\varphi' \vee \varphi'') \equiv (\varphi_1' \vee \varphi_1'') = \varphi_1$.
$\&, \neg, \to$ - аналогично.

11.23 Следствие

Пусть $\psi \equiv \psi_1$ и φ_1 получена из φ заменой нескольких вхождений ψ на ψ_1. Тогда $\varphi \equiv \varphi_1$.
Доказательство:
Индукция по числу вхождений - упражнение.

11.24 Предложение

Имеют место следующие эквивалентности формул:

1. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \& \neg\psi)$
2. $\neg(\varphi \& \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

12.3 Теорема (Об эквивалентности секвенциального и гильбертовского исчислений)

1. $\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash \psi$ - доказуема $\Leftrightarrow \varphi_1,\dots,\varphi_n \rhd \psi$
2. φ - доказуема $\Leftrightarrow \rhd \psi$
3. $\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash \psi$ - доказуема $\Leftrightarrow \varphi_1,\dots,\varphi_n \rhd \psi, \forall\psi$

12.4 Теорема (О дедукции)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \rhd \psi \Leftrightarrow \Gamma \rhd (\varphi \to \psi)$

13 Секвенциальное исчисление предикатов

13.1 Определение (Аксиомы)

Аксиомы секвенциального исчисления предикатов с равенством:

1. $\varphi \vdash \varphi$
2. $\vdash \forall x(x=x)$
3. $\vdash \forall x \forall y((x=y) \to (y=x))$
4. $\vdash \forall x \forall y \forall z((x=y)\&(y=z) \to (x=z))$
5. $(t_1=q_1),..,(t_n=q_n), \varphi(t_1...t_n) \vdash \varphi(q_1...q_n)$, $[\varphi]^{x_1\dots x_n}_{t_1\dots t_n} \vdash [\varphi]^{x_1\dots x_n}_{q_1\dots q_n}$, $[\varphi]^{x_1\dots x_n}_{t_1\dots t_n}$, $\forall i \forall y \in Fv(t_i)$, x_i−не находится в области действия квантора по y

Правила вывода:

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi;\Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\varphi\&\psi)} \qquad \frac{\Gamma\vdash(\varphi\&\phi)}{\Gamma\vdash\varphi} \qquad \frac{\Gamma\vdash(\varphi\&\psi)}{\Gamma\vdash\psi}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi}{\Gamma\vdash(\varphi\vee\psi)} \qquad \frac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash(\varphi\vee\psi)} \qquad \frac{\Gamma,\varphi\vdash\xi;\Gamma,\psi\vdash(\varphi\vee\psi)}{\Gamma\vdash\xi}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi;\Gamma\vdash(\varphi\to\psi)}{\Gamma\vdash\psi} \qquad \frac{\Gamma\vdash\varphi;\Gamma\vdash(\varphi\to\psi)}{\Gamma\vdash\psi} \qquad \frac{\Gamma,\neg\varphi\vdash}{\Gamma\vdash\varphi}$$

16.9 Предложение

χ_{A_1}−ПРФ.

16.10 Определение (номер машинного слова)

Рассмотрим машинное слово $\alpha q : j\beta$, тогда
$\gamma(\alpha q_1 j\beta) = 2^i * 3^i * 5^j * 7^{\gamma(\alpha)} * 11^{\gamma(\beta)}$

16.11 Определение (множество номеров машинных слов)

$A_2 = \{\gamma(S)|S-$машинное слово$\}$

16.12 Предложение

χ_{A_2}−ПРФ.

16.13 Определение

Рассмотрим команды $k_{ij}, q_i j \to q_s l\Delta, \Delta = \begin{cases} L \\ R \\ \emptyset \end{cases}$

$$\gamma(k_{ij}) = p^{\delta}_{c(i,j)},\ \delta = 2^s 3^L 5^{\xi}, \xi = \begin{cases} 1 & \Delta=\emptyset \\ 2 & \Delta=R \\ 3 & \Delta=L \end{cases}$$

16.14 Определение (номер программы МТ)

Пусть Π - программа машины Тьюринга, $\gamma(\Pi) = 2^3 3^n \Pi\gamma(k_{ij})$
$n = max\{i\,|\,q_i$встречается в $\Pi\}$ $k_{ij} \in \Pi$

16.15 Предложение (множество номеров программ МТ)

Пусть $A_3 = \{\gamma(\Pi)|\Pi-$программа машины Тьюринга$\}$,тогда χ_{A_3}−ПРФ
Без Доказательства.

16.16 Определение

$$1)t(x,y) = \begin{cases} \gamma(\alpha' q_i \alpha\beta'), & \text{если } x=\gamma(\Pi), y=\gamma(\alpha q_i j\beta) \\ & \Pi : \alpha q_i j\beta \xrightarrow[\text{1 шаг}]{} \alpha' q_e \alpha\beta' \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

13.8 Определение (Производное правило)

Дерево $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$ высоты 2 называется производным, если $\exists D$ заканчивающееся на S, у которого каждая вершина является аксиомой, либо одной из секвенций $S_1 \dots S_n$, а все переходы являются частными случаями правил вывода.

13.9 Определение (Допустимое правило вывода)

Дерево секвенций $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$ называется допустимым правилом вывода, если при его добавлении в качестве нового правила вывода множество доказуемых секвенций не увеличится.

13.10 Замечание

Каждое производное правило вывода является допустимым.

13.11 Предложение

а) если секвенция логики предикатов получена из доказуемой секвенции логики высказывания подстановкой формулы логики предикатов вместо пропозициональных переменных, то эта секвенция доказуема в секьентальном исчислении предикатов.

б)Допустимые (производные) правила вывода секв. исчислений высказываний являются допустимыми(производными) правилами вывода секвенций исчисления предикатов.

Доказательство:
$\rho : R^0 - F^1 : \varphi \to [\varphi]^{A_1 \dots A_n}_{y_1 \dots y_n} = \rho(\varphi)$
$S \to [S]^{A_1 \dots A_n}_{y_1 \dots y_n} = \rho(S)$
$D \to \rho(D)$
Тогда если D - дерево вывода в СИВ, тогда $\rho(D)$ - дерево вывода в СИП

13.12 Следующие правила вывода допустимы:

$$\frac{\varphi\vdash\psi}{(\varphi\&\xi)\vdash(\psi\&\xi)} \qquad \frac{\varphi\vdash\psi}{(\xi\&\varphi)\vdash(\xi\&\psi)} \qquad \frac{\varphi\vdash\psi}{(\varphi\vee\xi)\vdash(\psi\vee\xi)}$$

$$\frac{\varphi\vdash\psi}{(\xi\vee\varphi)\vdash(\xi\vee\psi)} \qquad \frac{\varphi\vdash\psi}{(\psi\to\xi)\vdash(\varphi\to\xi)} \qquad \frac{\varphi\vdash\psi}{(\xi\to\varphi)\vdash(\xi\to\psi)}$$

15.3 Определение (Вывод)

Выводом φ из Γ называется последовательность $\varphi_1,\dots,\varphi_n = \varphi$, в которой каждая φ_i является аксиомой, либо принадлежит множеству Γ, либо получена из предыдущих однократным применением правил вывода. Если существует вывод φ из Γ, то говорят, что φ выводима из Γ и обозначают $\Gamma \rhd \varphi$.

15.4 Теорема (о дедукции) (б. д.)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \rhd \psi \Leftrightarrow \Gamma \rhd (\varphi \to \psi)$

15.5 Следствие

$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\} \rhd \psi \Leftrightarrow \rhd (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \varphi)\dots))$

15.6 Теорема (б. д.)

1. $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\} \rhd \psi \Leftrightarrow \varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash \psi$ - доказуема в секв. исч. предикатов
2. $\rhd \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi$- доказуема в секв. исч. предикатов

16 Эквивалентность классов вычислимых функций

16.1 Предложение (Вычислимые на машине Тьюринга функции)

Следующие функции являются правильно вычислимыми на машине Тьюринга:

1. $0(x) = 0$
2. $S(x) = x+1$
3. $I^m_n(x_1,\dots,x_n) = x_m$

13.18 Замечание

1. Секвенция $\vdash \psi$ тождественно истинна $\iff$ ψ-тождественно истинна
2. $\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$- т.и $\iff (\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n)$ тождественно ложна

13.19 Теорема (О корректности)

Если секвенция доказуема, то она т.и.
Доказательство: упр.

13.20 Лемма

1. Аксиомы - т.и
2. Правила вывода сохраняют т.и, т.е если $\frac{S_1;\dots;S_k}{S}$ правило вывода и $S_1 \dots S_k$-т.и , то S-т.и.

Доказательство:
Доказательство индукцией: S-доказуема $\Mapsto \exists D^{\frown}_{S}$ -дерево вывода, $n = h(D)$.
Если $n=1$, то S- аксиома.

13.21 Предложение

Пусть $x \notin FV(\xi)$,тогда имеют место след. тождества.

1. $\forall x\xi \equiv \xi$
2. $\exists x\xi \equiv \xi$
3. $\forall x \forall y\varphi \equiv \forall y \forall x\varphi$
4. $\exists x \exists y\varphi \equiv \exists y \exists x\phi$
5. $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x \neg\varphi$
6. $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x \neg\varphi$
7. $(\forall x\varphi \& \forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi\&\psi)$
8. $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \equiv \exists x(\varphi\vee\psi)$
9. $(\forall x\varphi \& \xi) \equiv \forall x(\varphi\&\xi)$

14.41 Замечание

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A}$ – конечна, тогда $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$
Доказательство: (упражнение)

14.42 Предложение (О нестандартной модели $\mathbb{N}$)

$\mathfrak{N} =< \mathbb{N}; \leq, +, \bullet, 0, 1 >$, тогда $\exists \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ и найдется $c \in \mathfrak{M}$, такие что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n} \leq c$

Доказательство:
$\Gamma = Th(\mathfrak{N})$, $\sigma = \sigma(\mathfrak{N}) =<\leq, +, \cdot, 0, 1>$
$\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, при $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n = (\underbrace{1+1+\dots+1}_{n} \leq c)$, $\Gamma' = \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$, $\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$.
Покажем, что Γ'' - локально совместна.
Рассмотрим $\Gamma''_0 \subseteq \Gamma'$, Γ''_0 - конечно, $\Gamma_0 = \Gamma''_0 \cap \Gamma$, $\Gamma'_0 = \Gamma''_0 \cap \Gamma'$, Γ_0, Γ'_0 - конечны, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma''_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma'_0$.
$m = max\{n|\varphi_n \in \Gamma'_0\} \Rightarrow \Gamma'_0 \subseteq \{\varphi_1 \dots \varphi_m\}$, $\mathfrak{N}' \in K(\sigma')$ такая, что $\mathfrak{N} \upharpoonright \sigma = \mathfrak{N}$.
Положим $c^{\mathfrak{N}'} = m \Rightarrow \forall n \leq m$ $\mathfrak{N}' \models \varphi_n \Rightarrow \mathfrak{N}' \models \Gamma'_0$; $\mathfrak{N}' \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{N}' \models \Gamma_0 \Rightarrow \mathfrak{N}' \models \mathfrak{N}''$
$\Mapsto \Gamma''$ - локально совместна $\Rightarrow \Gamma''$ - совместна $\Rightarrow \exists \mathfrak{M}' \in K(\sigma')$, такая что $\mathfrak{M}' \models \Gamma'' \Rightarrow \mathfrak{M}' \models \Gamma'$, $\mathfrak{M}' \models \Gamma$.
Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \upharpoonright \sigma \Rightarrow \mathfrak{M} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.
$c = c^{\mathfrak{M}'} \Rightarrow \forall n\, \mathfrak{M}' \models \varphi_n \Rightarrow \forall n\, \underbrace{1+1+\dots+1}_{n} \leq c$.

14.43 Замечание

$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, поэтому в $\mathfrak{M}$ нет наибольшего элемента: $\mathfrak{N} \not\models \exists x \forall y\ (x \leq y) \Rightarrow \mathfrak{M} \not\models \exists y \forall x\ (x \leq y)$

14.44 Определение (Аксиоматизруемый класс)

Пусть$K \subseteq K(\sigma)$. Класс K – аксиоматизируем, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma) :\ K = K(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K(\sigma)\}|\mathfrak{A} \models \Gamma\} = \{\mathfrak{A} \in K(\sigma)|\forall\varphi \in \Gamma\, \mathfrak{A} \models \varphi\}$

b) связанные переменные не имели свободные вхождений, т.е чтобы каждая переменная имела либо связанные, либо только свободные вхождения.

4. С помощью тождеств 9-16 выносим все кванторы наружу. В силу теоремы о замене, а также в силу того, что равномильностьЮ являясь отношением эквиваленции, обладает свойством транзитивности, полученная в результате формула будет равносильна исходной.

14 Теорема о существовании модели

14.1 Определение

σ- сигнатура $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\varphi \in F(\sigma)$

1. $\Gamma \vdash \varphi$ если $\exists \varphi_1,\dots,\varphi_n \in \Gamma|\ \varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash \varphi$ доказуема
2. $\Gamma \vdash$ (Γ **противоречива**) если $\exists \varphi_1,\dots,\varphi_n \in \Gamma\ |\ \varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash$ доказуема
3. $\Gamma \nvdash$ (Γ **непротиворечива**) если $\neg(\Gamma\vdash)$
4. $T \subseteq S(\sigma)$ - **теория сигнатуры** σ, если T - дедуктивно замкнуто, то есть $\forall\varphi \in S(\sigma)$если $T \vdash \varphi$, то $\varphi \in T$
5. T - **полно**, если $\forall\varphi \in S(\sigma)$ $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$

14.2 Замечание

Пусть T - теория сигнатуры $\sigma = \sigma(T)$, тогда:

1. $\forall\varphi \in S(\sigma)$
   $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \varphi$
2. Если $\sigma \subseteq \sigma_1$ и $\sigma \neq \sigma_1$, то T - не является теорией сигнатуры σ_1

Доказательство:

1. $(\Rightarrow)$ $\varphi \in T$, $\varphi \vdash \varphi$ доказуема (аксиома) $\Rightarrow T \vdash \varphi$
   $(\Leftarrow)$ $T \vdash \varphi$, T - теория $\Rightarrow \varphi \in T$

$\mathfrak{A}' \models \varphi(\gamma_0(x_1),...,\gamma_0(x_n))$, т.е. $\mathfrak{A}' \models \varphi[\gamma_0]$, $\gamma_0 : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}'|$
$| \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma[\gamma_0]$, $\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\Gamma[\gamma_0]$

14.34 Определение

$\Gamma \subseteq F(\gamma)$, Γ - совместна, если $\exists\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\exists\gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$, в т.ч. $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$
Γ - локально совместима, если:
$\forall$ конечного $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0- совместима

14.35 Теорема (Мальцева о компактности)

Множество формул совместно $\Leftrightarrow$ когда оно локально совместно
Доказательство:
$(\Rightarrow)$ Γ - совместно $\Rightarrow \exists\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\exists\gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$
$\Gamma_0 \subseteq F$, Γ_0 - конечная $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0[\gamma]$ - упражение $\Rightarrow \Gamma_0$ - совместна $| \Rightarrow \Gamma$ - локально совместна
$(\Leftarrow)$ Γ - локально совместна, пусть Γ - не совместна $\Rightarrow \Gamma\vdash$
$\Rightarrow \exists\varphi_1,...,\varphi_n \in \Gamma : \varphi_1,...,\varphi_n \vdash$- доказуемо
$\Gamma_0 = \{\varphi_1,..,\varphi_n\}$ - конечно, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$
$\Rightarrow \Gamma_0$ - совместна $\exists\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\exists\gamma : FV(\Gamma_0) \to |\mathfrak{A}| : \mathfrak{A} \models \Gamma_0[\gamma]$ $\Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma] ... \mathfrak{A} \models \varphi_n[\gamma]$
С другой стороны: $\varphi_1,...,\varphi_n \vdash$- доказуемо $\Rightarrow \varphi_1,...,\varphi_n \vdash$- т.и. $\Rightarrow$
на $\mathfrak{A}$ при γ - ист. $\Rightarrow \exists i \leq n : \mathfrak{A} \not\models \varphi_i[\gamma]$ - противоречие $\Rightarrow \Gamma$ - совместно

14.36 Теорема (Геделя о полноте)

Любая тождественно истинная формула доказуема
Доказательство:
Пусть φ - т.и. , φ - не доказума
$\frac{\neg\varphi\vdash}{\vdash\varphi} \Rightarrow$ если $\neg\varphi\vdash$ - доказуемо, то $\vdash\varphi$ - доказуемо , т.е. φ - доказуемо
$| \Rightarrow \neg\varphi$ - не доказуемо $\Rightarrow \{\neg\varphi\} \nvdash \Rightarrow \exists\mathfrak{A} \in K(\sigma(\varphi))$, $\exists\gamma : FV(\varphi) \to |\mathfrak{A}|$: $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\gamma] \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\gamma]$ - противоречие.

14.37 Следствие

Формула доказуема $\Leftrightarrow$ она тождественно-истинна
Доказательство:
$(\Rightarrow)$ теорема о корректности
$(\Leftarrow)$ теорема Геделя

14.5 Предложение

Полное непротиворечивое множество предложений является теорией. Пусть $T \subseteq S(\sigma)$, T - полно в σ и $T \nvdash$. Тогда Т - теория сигнатуры σ .

Доказательство:
Пусть Т - не теория $\Rightarrow \exists\varphi \in S(\sigma)\ |\ T \vdash \varphi$ и $\varphi \notin T \Rightarrow \neg\varphi \in T \Rightarrow \exists\varphi_1,\dots,\varphi_n\,|\,\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash$ - доказуемо

$$\frac{\varphi_1,\dots,\varphi_n \vdash \varphi; \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi_1,\dots,\varphi_n,\neg\varphi \vdash}$$

$\Rightarrow \varphi_1,\dots,\varphi_n,\neg\varphi \vdash$ - доказуемо $\Rightarrow T\vdash$. Противоречие.

14.6 Определение (Элементарная теория модели)

Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, то есть $\mathfrak{A} =< A, \sigma >$, тогда **элементарной теорией модели** называется множество всех предложений, истинных на этой модели: $Th\,\mathfrak{A} = \{\varphi \in S(\sigma)\,|\,\varphi \models \mathfrak{A}\}$.

14.7 Определение (элементарная эквиваленция)

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ - мождели сигнатуры сигма. Они называются
лементарно ээквивалентными ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), tckb $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$, т.е $\forall\varphi \in S(\sigma)$ $\quad \mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.

14.8 Предложение

Пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, то $Th(\mathfrak{A})$ - полная непротиворечивая теория сигнатуры сигмы.
Доказательство:
$Th(\mathfrak{A}) \nvdash$. Пусть $Th(\mathfrak{A}) \vdash \Rightarrow \exists\varphi_1 \dots \varphi_n \in Th(\mathfrak{A}) : \varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ - док. $\Rightarrow \varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ - тождественно истинна $\Rightarrow$истинна на $\mathfrak{A} \Rightarrow \exists k \leq n :\ \mathfrak{A} \not\models \varphi_k$, но $\varphi_k \in Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_k$
$Th(\mathfrak{A})$ - полна. Пусть $\varphi \in S(\sigma)$. Пусть $\varphi \notin Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi \in Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow Th(\mathfrak{A})$ - полна и непротиворечива$\Rightarrow Th(\mathfrak{A})$ - теория.

14.9 Теорема (б. д.)

Пусть A, B - множества, B - бесконечна и $||A|| \leq ||B||$, тогда $||A \cup B|| = ||B||$

14.28 Лемма (Опр.14.27 - корректно)

Доказательство:
б)$f^n \in \sigma'$, $c_1...c_n \in C$
$f(c_1...c_n) \in T(\sigma')$, $Fv(f(c_1...c_n)) = \varnothing$
$\Longrightarrow \exists e \in C$ т.ч $f(c_1...c_n) = e \in T'$
Пусть $d_1...d_n \in C$, $e, b \in C$, $[c_1] = [d_1] ... [c_n] = [d_n]$,$f(e_1...e_n) = e$,
$f(d_1...d_n) = b \in T'$. Покажем , что $[e] = [b]$
$\Longrightarrow c_1 \sim d_1...c_n \sim d_n \Longrightarrow c_1 = d_1...c_n = d_n \in T'$
$c_1 = d_1...c_n = d_n, f(c_1...c_n) = f(c_1...c_n) + f(c_1...c_n) = f(d_1...d_n)$ - доказательство(упр)
$\varphi(x_p...x_n) = (f(c_1...c_n) \vdash \varphi(d_1...d_n)$ - аксиома
$f(c_1...c_n) = f(c_1...c_n) \in T'$ (упр)
$\Longrightarrow f(c_1...c_n) = f(d_1...d_n) \in T'$
$e = f(c_1...c_n) \in T'$, $e = f(c_1...c_n), f(c_1...c_n) = f(d_1...d_n) \vdash e = (d_1...d_n)$
$e = f(d_1...d_n), f(d_1...d_n) = b \vdash e = b \Rightarrow e = b \in T' \Rightarrow e \sim b$,
т.е $[e] = [b]$
а) $P^n \in \sigma', c_1..c_n, d_1...d_n \in C, [c_1] = [d_1] ... [c_n] = [d_n]$,
$P(c_1...c_n) \in T'$ Покажем что $P(d_1...d_n) \in T'$
$\Rightarrow c_1 \sim d_1...c_n \sim d_n \Rightarrow c_1 = d_1...c_n = d_n \in T'$
$\varphi(x_1...x_n) = P(x_1...x_n)$
$c_1 = d_1...c_n = d_n, P(c_1...c_n) \vdash P(d_1...d_n) \Rightarrow P(d_1...d_n) \in T'$
в)$d \in \sigma', c, e \in C, (d=c), (d=e) \in T'$
$d^{\mathfrak{A}'} = [c]$, $d^{\mathfrak{A}'} = [e]$ Покажем,что $[c] = [e]$
$d = c \vdash c = d, c = d, d = e \vdash c = e$ (упр)
$T' \vdash c = d \Rightarrow T' \vdash c = e \Rightarrow c = e \in T' \Rightarrow$
$c \sim e \Rightarrow [c] = [e]$

14.29 Лемма

Пусть $t \in T(\sigma'), Fv(t) = Fv(q) = \emptyset$, тогда
$\mathfrak{A}' \models (t = q) \iff t = q \in T'$

14.30 Лемма

Пусть $P^n \in \sigma'$, $t_1...t_n \in T(\sigma'), Fv(t:) = \emptyset$,
тогда$\mathfrak{A}' \models P(t_1...t_n) \iff P(t_1...t_n) \in T'$

Пусть $\Gamma \subseteq F(\sigma), \nvdash$ и $X - Fv(\Gamma)$, D - множество констант: $D \cap \sigma = \phi$, $\quad ||D|| = ||X|| \Rightarrow \exists$ биекция $\gamma : X \to D$. Обозначим $\Gamma' = \Gamma[\gamma] = \{\varphi(d_1 \dots d_n)|\varphi \in \Gamma, \quad Fv(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}, \quad \gamma(x_i) = d_i\}$
$[\varphi]^{x_1 \dots x_n}_{d_1 \dots d_n} \quad \Rightarrow \Gamma' \subseteq S(\sigma)$.

14.16 Лемма

Множество Предложений Γ' непротиворечиво.
Доказательство:
Пусть $\Gamma' \vdash \ \Rightarrow \exists\varphi'_1 \dots \varphi'_n \in \Gamma' \qquad \varphi'_1 \dots \varphi'_n \vdash$доказательство, дерево вывода $D' = \overset{\frown}{\varphi'_1 \dots \varphi'_n \vdash}$
$D = [D']^{\varphi'}_{\gamma^{-1}(\varphi')}$: $\qquad \varphi' = \gamma(\varphi) = \varphi[\gamma]$
$\qquad \varphi = \gamma^{-1}(\varphi')$
$D = [D']^{d \in D}_{\gamma^{-1}(\alpha) \in X} \qquad \varphi' = \varphi(d_1 \dots d_n) \to \varphi(x_1 \dots x_n)$
$D = \overset{\frown}{\varphi_1 \dots \varphi_n \vdash}$, $\quad \varphi_i \in \Gamma, D$ - дерево вывода (упр).
$\Rightarrow \varphi_1 \dots \varphi_n \vdash$ доказательство $\Gamma\vdash$ - противоречива $\Mapsto \Gamma' \nvdash$.
$\delta = max(\omega, ||\delta||, ||X||)$
Пусть С-множество констант $C \cap (\delta \cup D) = \phi$,
$||c|| = \delta$
$\sigma' = \sigma \cup D \cup C$
$S(\sigma') \subseteq (\sigma' \cup \{x_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(.), ",", \&, \cup, \to, \neg.\exists, \forall\})^*$ - множество всех конечных слов
$||S(\sigma')|| \leq \delta \Rightarrow ||S(\sigma)|| = ||\delta|| = ||\{\alpha|\alpha < \delta\}||$
δ- кардинал.
$S(\sigma') = \{\varphi_\alpha | \alpha < \delta|$
$T' \subseteq S(\sigma')$
Шаг 0 : $T_0 = \Gamma', \quad T_0 \nvdash$
Шаг β: Случай 1: $0 < \beta \leq \delta$
β - непред. $\beta = \alpha + 1, \quad \beta \leq \delta \Rightarrow \beta < \delta \Rightarrow \alpha < \delta$, T_α - построена, рассмотрим φ_α
случай 1.1: Пусть $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash$, пусть $\varphi_\alpha \neq \exists x\psi(x)$, положим $T_\beta = T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$
случай 1.2: $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash, \quad \varphi_\alpha = \exists x\psi_\alpha(x), \quad \alpha < \delta, \quad \delta$ - кардинал $\Rightarrow ||\alpha|| < ||\delta||$.
Если α - беконечна, то $||C \cap \sigma(T_\alpha)|| \leq \alpha < \delta; \quad \alpha$ - конечна.
$||C \cap \sigma(T_\alpha))||$ - конечно, $<\delta$
$\Mapsto ||C \cap \sigma(T_\alpha)|| < \delta, \qquad ||c|| = \delta \Rightarrow ||c \smallsetminus \sigma(T_\alpha)|| = \delta \Rightarrow C \smallsetminus \sigma(T_\alpha) \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists c_\alpha \in c \smallsetminus \sigma(T_\alpha)$. Положим, $T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(c_\alpha)\}$
Случай 1.3 $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \vdash, \quad T_\beta = T_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$

14.20 Лемма

Пусть $t \in T(\sigma'), FV(t) = \emptyset$, тогда $t^{\mathfrak{A}'} = t$
Доказательство:
Индукция по построению
1)Пусть $t = c \in \sigma' \Rightarrow t^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}'} = c = t$
2)Пусть $t = f(t_1 \dots t_n), f^n \in \sigma', t_1 \in A$, тогда $t_i^{\mathfrak{A}'} = t_i \Rightarrow t^{\mathfrak{A}'} = f^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}'} \dots t_n^{\mathfrak{A}'}) = f^{\mathfrak{A}'}(t_1 \dots t_n) = f(t_1 \dots t_n) = t$

14.21 Следствие

Пусть $t(x_1 \dots x_n) \in T(\sigma'), q_1 \dots q_n \in A$, тогда $t^{\mathfrak{A}'}(q_1 \dots q_n) = t(q_1 \dots q_n) \in A$
Доказательство: (индукцией по построению)упр.

14.22 Лемма

$\forall\varphi \in S(\sigma') : \mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T'$
Доказательство:
Индукцией по построению φ
1)$\varphi = P(t_1 \dots t_n), t_i \in T(\sigma'), Fv(t_i) = \emptyset$, тогда
$\mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models P(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models P^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}} \dots t_n^{\mathfrak{A}}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models P^{\mathfrak{A}}(t_1 \dots t_n) \Leftrightarrow P(t_1 \dots t_n) \in T' \Leftrightarrow \varphi \in T'$
2)а)$\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)$
$\mathfrak{A}' \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi_1$ и $\mathfrak{A}' \models \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \in T'$ и $\varphi_2 \in T' \Leftrightarrow (\varphi_1 \& \varphi_2) \in T'$, т.е. $\varphi \in T'$
б)$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$
в)$\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$
г)$\varphi = \neg\varphi$
(а-г)-доказательство упражнение.
д)$\varphi = \exists x\psi(x)$
$\mathfrak{A}' \models \exists x\psi(x) \Leftrightarrow \exists a \in A : \mathfrak{A} \models \psi(a) \Leftrightarrow \exists t \in T(\gamma')$ такое что $Fv(t) = \emptyset$ и $\mathfrak{A} \models \psi(t) \Leftrightarrow \exists t \in A$ такое что $\psi(t) \in T' \Leftrightarrow \exists x\psi(x) \in T'$ т.е. $\varphi \in T'$
е)$\varphi = \forall x\psi(x)$ - упражнение.

14.23 Следствие

$\mathfrak{A}' \models T'$ $(\forall\varphi \in T' : \mathfrak{A}' \models \varphi)$
Доказательство:
$\Gamma' = T_0 \subseteq T' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma'$
$\Gamma' = \Gamma[\gamma] = [\Gamma]^{x \in Fv(\Gamma)}_{\gamma(x) \in D} \qquad \gamma : Fv(\Gamma) \to D \subseteq \sigma'$ - биекция

Случай 1: $\beta = \alpha + 1$

Случай 1.1: $T_\beta = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$, $T_\alpha, \varphi_\alpha \nvdash \Rightarrow T_\beta \nvdash$

Случай 1.2: $T_\beta = T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \psi_\alpha(C_\alpha)\}$

$\varphi_{\alpha = \exists x\psi_\alpha(x)}$

Пусть $T_\beta \vdash \Rightarrow \exists\xi_1,\dots,\xi_n \in T_\alpha$:

$\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(C_\alpha) \vdash$- доказуема.

$C_\alpha \notin \sigma\,\{\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(x)\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(x), \psi_\alpha(y) \vdash}{\xi_1,\dots,\xi_n, \psi_\alpha(y) \vdash \neg\exists x\psi_\alpha(x)}}{\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(y) \vdash \neg\exists x\psi_\alpha(x)}\ ;\ \dfrac{\exists x\psi_\alpha(x) \vdash \exists x\psi_\alpha(x)}{\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(x) \vdash \exists x\psi_\alpha(x)}}{\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(x) \vdash}$$

$\xi_1,\dots,\xi_n, \exists x\psi_\alpha(x) \vdash \exists x\psi_\alpha(x)$

$\Rightarrow \xi_1,\dots,\xi_n, \varphi_\alpha \vdash$доказуемо $\Rightarrow T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \vdash$противоречиво $\Mapsto$в Случае 1.2 $T_\beta \nvdash$

Случай 1.3: $T_\beta = T_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$; $T_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \vdash$

Пусть $T_\beta \vdash$, то есть $T_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\} \vdash$

$\xi_1,\dots,\xi_n, \xi_{n+1},\dots,\xi_k \in T_\alpha$, такие что $\xi_1,\dots,\xi_n, \varphi_\alpha \vdash$, $\xi_{n+1},\dots,\xi_k, \neg\varphi_\alpha \vdash$- доказуемы

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi_1,\dots,\xi_n, \varphi_\alpha \vdash}{\xi_1,\dots,\xi_n \vdash \neg\varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k \vdash \neg\varphi_\alpha}\ ;\ \dfrac{\dfrac{\xi_{n+1},\dots,\xi_k, \neg\varphi_\alpha \vdash}{\xi_{n+1},\dots,\xi_k \vdash \varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k \vdash \varphi_\alpha}}{\xi_1,\dots,\xi_k \vdash}$$

$\xi_1,\dots,\xi_k \vdash$доказуемо $\Rightarrow T_\alpha \vdash$- противоречиво $\Mapsto T_\beta \nvdash$

Случай 2: β - предельный $T_\beta = \bigcup\limits_{\alpha \in \beta} T_\alpha$

Пусть $T_\beta \vdash \Rightarrow \exists\xi_1,\dots,\xi_n \notin T_\beta : \xi_1,\dots,\xi_n \vdash$ доказуемо

$\Rightarrow \exists\alpha_1,\dots,\alpha_n < \beta : \xi_1 \in T_{\alpha_1},\dots,\xi_n \in T_{\alpha_n}$

$\Rightarrow \exists\alpha = m(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \Rightarrow \forall i \leq n : T_{\alpha_i} \subseteq T_\alpha$,

$\alpha < \beta \Rightarrow \xi_1,\dots,\xi_n \in T_\alpha \Rightarrow T_\alpha \vdash$противоречиво $\Mapsto T_\beta \nvdash \Mapsto T_\delta \nvdash$, т.е. $T' \nvdash$

2. Пусть $\varphi \in S(\sigma) = \{\varphi_\alpha | \alpha < \delta\} \Rightarrow \exists\alpha < \delta : \varphi_\alpha = \varphi$,
   $\beta = \alpha + 1 \Rightarrow \varphi_\alpha \in T_\beta$ или $\neg\varphi_\alpha \in T_\beta$; $T_\beta \leq T_\delta = T'$
   $\Rightarrow \varphi_\alpha \in T'$или $\neg\varphi_\alpha \in T'$, т.е. $\varphi \in T'$или $\neg\varphi \in T'$
   $\Rightarrow T'$- полна
3. T'- полна и непротиворечива $\Rightarrow T'$- теория
4. $(\to)$ Пусть $(\varphi \wedge \psi) \in T'$ $\frac{(\varphi\wedge\psi)\vdash(\varphi\wedge\psi)}{(\varphi\wedge\psi)\vdash\varphi}$, $\frac{(\varphi\wedge\psi)\vdash(\varphi\wedge\psi)}{(\varphi\wedge\psi)\vdash\psi}$ доказуемы $\Rightarrow T' \vdash \varphi, T' \vdash \psi \Rightarrow \varphi, \psi \in T'$
   $(\leftarrow)$ Пусть $\varphi, \psi \in T'$ $\frac{\varphi\vdash\varphi;\psi\vdash\psi}{\varphi,\psi\vdash(\varphi\wedge\psi)}$- доказуема $\Rightarrow T' \vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \in T'$
5. $(\to)$ Пусть $(\varphi \vee \psi) \in T'$, $\varphi \notin T'$, $\psi \notin T' \Rightarrow \neg\varphi, \neg\psi \in T'$ $\frac{\neg\varphi,\neg\psi\vdash(\neg\varphi\wedge\neg\psi);\neg\varphi,\neg\psi\vdash\neg(\varphi\vee\psi)}{\neg\varphi,\neg\psi\vdash\neg(\varphi\vee\psi)}$ - доказуема
   $\Rightarrow T' \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \in T', (\varphi \vee \psi) \in T'$
   $\Mapsto T' \vdash$- противоречие
   $(\leftarrow)$ Пусть $\varphi \in T'$ или $\psi \in T'$, $\varphi \vdash (\varphi \vee \psi)$, $\psi \vdash (\varphi \vee \psi)$ - доказуемы (**Упражнение**)
   $\Rightarrow T' \vdash (\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \in T'$
6. $(\to)$ Пусть $\neg\varphi \in T'$, пусть $\varphi \in T' \Rightarrow T' \vdash$- противоречие $\Mapsto \varphi \notin T'$
   $(\leftarrow)$ Пусть $\varphi \notin T'$, T' - полная $\Rightarrow \neg\varphi \in T'$
7. $(\to)$ Пусть $(\varphi \to \psi) \in T'$, пусть $\varphi \in T'$
   $\frac{\varphi\vdash\varphi;(\varphi\to\psi)\vdash(\varphi\to\psi)}{\varphi,(\varphi\to\psi)\vdash\psi}$ - доказуема $\Rightarrow T' \vdash \psi \Rightarrow \psi \vdash T'$
   $(\leftarrow)$ Пусть $(\varphi \to \psi) \notin T' \Rightarrow \neg(\varphi \to \psi) \in T'$,
   $\neg(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi)$ (**Упражение**)
   $\Rightarrow \neg(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \wedge \neg\psi)$ - доказуема
   $\Rightarrow T' \vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow T' \vdash \varphi, T' \vdash \neg\psi \Rightarrow \varphi, \neg\psi \in T'$
   $\Rightarrow \psi \in T' \Rightarrow T' \vdash$- противоричиво $\Mapsto (\varphi \to \psi) \in T'$
8. $(1. \Rightarrow 2.)$ $\exists x\psi(x) \in T' \Rightarrow \exists x\psi(x) \in S(\sigma')$
   $\Rightarrow \exists\alpha : \varphi_\alpha = \exists x\psi(x) \Rightarrow \varphi_\alpha \in T' \Rightarrow T' \cup \{\varphi_\alpha\} = T'$ т.е. $T' \cup \{\varphi_\alpha\} \nvdash \Rightarrow$
   На шаге β - случай 1.2:
   $\varphi_\alpha = \exists x\psi_\alpha(x)$, $\psi_\alpha(x) = \psi(x) \Rightarrow \psi_\alpha(C_\alpha) \in T_\beta$

16.2 Предложение

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$, $g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m)$ - правильно вычислимы на машине Тьюринга. Тогда $h(x_1,\dots,x_m) = f(g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m))$ - ПВТ.
Доказательство:
Пусть F вычисляет f, $G_1,\dots,G_n$ вычисляет $g_1,\dots,g_n$. Тогда рассмотрим

16.3 Предложение (б. д.)

Пусть f получена из g и h при помощи оператора примитивной рекурсии. Пусть g и h - ПВТ. Тогда f - ПВТ.

16.4 Предложение (б. д.)

Пусть $f(x_1,...,x_n) = \mu y[g(x_1,\dots,x_n,y)=0]$, g - ПВТ. Тогда f - ПВТ.

16.5 Теорема (Вычислимость ЧРФ)

ЧРФ $\subseteq$ ПВТ, т. е. каждая ЧРФ является правильно вычислимой на машине Тьюринга.
Доказательство: индукция по построению ЧРФ (упр.)

16.6 Основная теорема арифметики

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!$ разложение $n = q_1^{k_1}x\dots q_m^{k_m}$такое, что $q_1,\dots,q_m$ - простые, $q_1<\dots<q_m$, $\forall i \le n, K_i \ne 0$

16.7 Определение

Пусть $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}$. Тогда $\gamma(a_1,\dots,a_n) = 2\cdot p_1^{a_1+1}\cdot\dots\cdot p_n^{a_n+1}$, где $P_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5\dots$

16.8 Определение (характеристическая функция)

Пусть $B\subseteq\mathbb{N}, \chi_B:\mathbb{N}\to\{0,1\}, \chi_B-$примитивное множество
$\chi_B(x) = \begin{cases}1, & x\in B\\ 0, & x\notin B\end{cases}$-характеристическая функция множества B.
$A_1 = \{\gamma(S)|S\in\{0,1\}^*\}$

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi;\Gamma\vdash\neg\varphi}{\Gamma\vdash} \qquad \frac{\Gamma_1,\varphi,\psi,\Gamma_2\vdash\xi}{\Gamma_1,\psi,\varphi,\Gamma_2\vdash\xi} \qquad \frac{\Gamma\vdash\varphi}{\Gamma,\psi\vdash\varphi}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi}{\Gamma\vdash\forall x\varphi}\,(x\in Fv(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma,\varphi(t)\vdash\psi}{\Gamma,\forall x\varphi(x)\vdash\psi}\,(\varphi(t)=[\varphi]^x_t)$$

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi(t)}{\Gamma\vdash\exists x\varphi(x)} \qquad \frac{\Gamma,\varphi\vdash\psi}{\Gamma,\exists x\varphi\vdash\psi}\,(x\notin Fv(\Gamma\bigcup\{\psi\})$$

13.2 Определение (Доказательство)

$S_1\dots S_n$называется доказательством, если каждая S_i является аксиомой, либо получена из аксиом однократным применением правил вывода.

13.3 Определение

Секвенция S называется доказуемой, если существует доказательство $S_1\dots S_n = S$ (зак. на S).

13.4 Замечание

Если $S_1\dots S_n$доказательство, то $\forall k\le n$
а)$S_1\dots S_n$-доказательство
б)S_k-доказуема

13.5 Определение (Дерево секвенций)

1. S-дерево, $h(S)=1$, $V(S)=\{S\}$
2. $D_1\dots D_n-$дерево секвенций, $S-$секвенция, то $D = \frac{D_1\dots D_n}{S}$ - дерево такое, что $h(D) = max(h(D_1)\dots h(D_n))+1$, $V(D) = V(D_1)\cup\dots\cup V(D_n)$

13.6 Определение (Дерево вывода)

Дерево секвенций называется деревом вывода, если все его вершины являются аксиомами, а переходы- частными случаями правил вывода.

13.7 Предложение

S - доказуема $\Leftrightarrow \exists D$, заканчивающееся на эту секвенцию.

$$2)T(x,y,z,t) = \begin{cases}1, & \text{если } x=\gamma(\Pi), y=\gamma(\alpha q_i j\beta)\\ & \Pi:\alpha q_i j\beta \xrightarrow[\le t \text{ шагов}]{} \alpha' q_0 01^{z+1}0\beta'\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

$$3)T^n(a,x_1\dots x_n,z,t) = \begin{cases}1, & \text{если } \alpha{=}\gamma(\Pi)\\ & \Pi: q_1 01^{x_1+1}0\dots01^{x_n+1}0 \xrightarrow[\le t \text{ шагов}]{} \alpha q_0 01^{z+1}0\beta\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

16.17 Предложение

функции t, T, T^n-ПРФ
Без доказательства.

16.18 Теорема (О нормальной форме Клини)

Пусть $f(x_1\dots x_n)-$вычислима на машине Тьюринга. Тогда $\exists$ПРФ $g(x_1\dots x_n,y)$ такая что
$f(x_1\dots x_n) = l(\mu y[g(x_1\dots x_n,y)=0])$.
Доказательство:
Пусть $f(x_1\dots x_n)$ вычислима на машине Тьюринга с программой $\Pi,\alpha = \gamma(\Pi)$. Тогда $g(x_1\dots x_n,y) = |T^n(\alpha,x_1\dots x_n,l(y),r(y))-1|-$ПРФ(упр).
Покажем, что $f(x_1\dots x_n) = l(\mu y[g(x_1\dots x_n,y)=0])$. Рассмотрим кортеж $x_1\dots x_n$:
1)$f(x_1...x_n)-$не определена, тогда $\forall y\ T^n(\alpha,x_1\dots x_n,l(y),r(y)) \ne 1 \Rightarrow g(x_1\dots x_n,y)\ne 0 \Rightarrow l(\mu y[g(x_1\dots x_n,y)])$ - не определена $\Rightarrow f(x) = l[\mu y[g(\dots)]$
2)$f(x_1\dots x_n) = z \Rightarrow \exists t\in\mathbb{N}$ такое что
Π:$q_1 01^{x_1+1}0\dots01^{x_n+1} \xrightarrow[t \text{ шагов}]{} \alpha q_0 01^{z+1}0\beta$
Положим:
$y_0 = c(z,t)\Rightarrow T^n(\alpha,x_1\dots x_n,l(y_0),r(y_0)) = 1$ т.к $l(y_0)=z, r(y_0)=t \Rightarrow g(x_1\dots x_n,y_0)=0$
Пусть для $y_1: g(x_1\dots x_n,y_1) = 0\Rightarrow T^n(\alpha,x_1\dots x_n,l(g_1),r(y_1)) = 1 \Rightarrow l(y_1)=z, \Gamma(y_1)\ge t\Rightarrow y_1\ge y_0$(упр)$\Rightarrow g_0 = \mu y[g(x_1\dots x_n,y)] = 0$
$\Rightarrow l(\mu y[g(x_1\dots x_n,y)=0]) = l(y_0) = z$

16.19 Следствие

Любая функция вычислиммая на машине Тьюринге является ЧРФ.
Доказательство: Упражнение

12 Исчисление высказываний Гильбертовского типа

12.1 Определение (Аксиомы, правило вывода)

Аксиомы:

1. $(\varphi\to(\psi\to\varphi))$
2. $((\varphi\to\psi)\to((\varphi\to(\psi\to\xi))\to(\varphi\to\xi\ )$
3. $((\varphi\&\psi)\to\varphi)$
4. $((\varphi\&\psi)\to\psi)$
5. $((\varphi\to\psi)\to((\varphi\to\xi)\to(\varphi\to(\phi\&\xi))))\to\xi))))$
6. $((\varphi\to(\varphi\vee\varphi))$
7. $((\varphi\to(\varphi\vee\psi))$
8. $((\varphi\to\xi)\to((\psi\to\xi)\to((\varphi\vee\psi)\to\xi)))$
9. $((\varphi\to\psi)\to((\psi\to\neg\psi)\to\neg\varphi))$
10. $(\neg\neg\varphi\to\varphi)$

Правило вывода:

$$\frac{\varphi;\varphi\to\psi}{\psi}$$

12.2 Определение (Доказательство, доказуемая формула, доказуемая из множества формула)

Последовательность $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ называется **доказательством**, если каждая φ_i является аксиомой, либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода.
φ - **доказуема**, если существует доказательство $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ заканчивающееся этой формулой $(\rhd\varphi)$.
φ - **доказуема из множества формул**, если существует$\varphi_1,\dots,\varphi_n=\varphi$, в которой каждая φ_i является аксиомой, либо принадлежит множеству Γ, либо получена из предыдущих однократным применением правила вывода $(\Gamma\rhd\varphi)$.

14.38 Теорема

f – доказуема $\Leftrightarrow S$ – тождественное истинна
Доказательство:
$(\Rightarrow)$ теорема о корректности
$(\Leftarrow)$ Теорема о полноте (аналогично логике высказываний)

14.39 Теорема (Мальцева о расширении)

$\Gamma\subseteq S(\sigma)$**,** $\mathfrak{A}\in$**K**(σ)**,** $\mathfrak{A}$- бесконечна, $\mathfrak{A}\models\Gamma$Тогда $\forall$кардинала $\alpha\exists\mathfrak{B}\in K(\sigma)$, такая что $\mathfrak{B}\models\Gamma$, $||\mathfrak{B}||\ge\alpha$

Доказательство: C - множество констант, $C\cap\sigma=\oslash$, $||C||=\alpha$

$\Gamma' = \{\neg(c=d)|c,d\in C, c\ne d\}$,$\Gamma''=\Gamma\cup\Gamma'$

Покажем $\Gamma''-$локально-совместна. $\Gamma_0''\subseteq\Gamma''$,$\Gamma_0''-$конечна. $\Gamma_0 = \Gamma_0''\cap\Gamma$, $\Gamma_0' = \Gamma_0''\cap\Gamma'$. $\Gamma_0'' = \Gamma_0\cup\Gamma_0'$, Γ_0,$\Gamma_0'-$конечны, $\Gamma_0\subseteq\Gamma, \Gamma_0'\subseteq\Gamma'$

$C_0 = C\cap\sigma(\Gamma_0')$- конечно, $C_0 = \{d_1,\dots,d_n\}$, $\Gamma_0' = \{\neg(d_i=d_j)|i\ne j\}$

$\sigma' = \sigma\cup C$, $\mathfrak{A}'\in K(\sigma'):\mathfrak{A}'\restriction\sigma=\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}$ - бесконечна $\Rightarrow\exists b_1,\dots,b_n\in\mathfrak{A}': b_i\ne b_j$при $i\ne j$

$d_i^{\mathfrak{A}'} = b_i\Rightarrow\mathfrak{A}'\models\Gamma\Rightarrow\mathfrak{A}'\models\Gamma_0:\mathfrak{A}'\models\Gamma_0'\Rightarrow\mathfrak{A}'\models\Gamma_0''\Rightarrow\Gamma_0''$- совместна

$\mapsto\Gamma''$- локально-совместна $\Rightarrow\Gamma''$- совместна $\exists\mathfrak{B}'\in K(\sigma'):\mathfrak{B}'\models\Gamma''\Rightarrow\mathfrak{B}'\models\Gamma$, $\mathfrak{B}'\models\Gamma'$

$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'\restriction\sigma\Rightarrow\mathfrak{B}\models\Gamma$. $C' = \{d^{\mathfrak{A}'}|d\in C\}\subseteq|\mathfrak{B}|' = |\mathfrak{B}|$

$\mathfrak{B}'\models\Gamma'\Rightarrow\forall c,d\in C$, если $c\ne d,\Rightarrow c^{\mathfrak{B}'}\ne d^{\mathfrak{B}'}\Rightarrow||c'||=\alpha$

$C'\subseteq|\mathfrak{B}|\Rightarrow||\mathfrak{B}''||\ge\alpha\Rightarrow||\mathfrak{B}||\ge\alpha$

14.40 Следствие

Пусть $\mathfrak{A}\in K(\sigma)$, $\mathfrak{A}$ – бесконечна, α– кардинал, тогда $\exists\mathfrak{B}\in K(\Gamma)$ т. ч. $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, $\|\mathfrak{B}\|\le\alpha$
Доказательство:
$\Gamma\models Th\,\mathfrak{A}$, тогда $\mathfrak{A}\models Th\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ – бесконечна $\Rightarrow\exists\mathfrak{B}:\ \mathfrak{B}\models Th\,\mathfrak{A}$ и $\|\mathfrak{B}\|\ge\alpha\Rightarrow\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$

10. $(\exists x\varphi\&\xi)\equiv\exists x(\varphi\&\xi)$
11. $(\forall x\varphi\vee\xi)\equiv\forall x(\varphi\vee\xi)$
12. $(\exists x\varphi\vee\xi)\equiv\exists x(\varphi\vee\xi)$
13. $(\xi\&\forall x\varphi)\equiv\forall x(\xi\&\varphi)$
14. $(\xi\&\exists x\varphi)\equiv\exists x(\xi\&\varphi)$
15. $(\xi\vee\forall x\varphi)\equiv\forall x(\xi\vee\varphi)$
16. $(\xi\vee\exists x\varphi)\equiv\exists x(\xi\vee\varphi)$
17. $\forall x\varphi(x)\equiv\forall y\varphi(y)$
18. $\exists x\varphi(x)\equiv\exists y\varphi(y)$

$\forall x[\varphi(z)]^z_x\equiv\forall y[\varphi(z)]^z_y$
$\exists x[\varphi(z)]^z_x\equiv\exists y[\varphi(z)]^z_y$
z не находится в области действия кванторов по x, ни по y, ни по z.

13.22 Определение (предваренная нормальная форма)

Говорят, что функция φ находится в предварённой нормальной форме, если она имеет вид:
$\varphi = Q_1x_1\dots Q_nx_n \qquad \psi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)$
$Q_i\in P\{\forall,\exists\}$, $\varphi-$бескванторная

13.23 Теорема (о ПНФ)

$\forall\varphi\exists\psi,\psi-$В ПНФ, тогда $\varphi\equiv\psi$, для любой формулы существует равносильная ей форула, находится в Предварённой нормальной форме.
Доказательство:
Алгоритм приведения формулы к предварённой нормальной формме

1. Избавляемся от импликации
2. С помощью тождеств 5 и 6, законов Де Моргана и снятия двойного отрицания, вносим отрицание под знаки квантора.
3. С помощью тождеств 17 и 18 переобозначаем переменные так, чтобы :
   a) разные кванторы действовали по разным переменнымж

15 Исчисление предикатов Гильбертовского типа

15.1 Определение (Аксиомы, правила вывода)

Аксиомы:

1. $(\varphi\to(\psi\to\varphi))$
2. $((\varphi\to\psi)\to((\varphi\to(\psi\to\xi))\to(\varphi\to\xi\ )$
3. $((\varphi\&\psi)\to\varphi)$
4. $((\varphi\&\psi)\to\psi)$
5. $((\varphi\to\psi)\to((\varphi\to\xi)\to(\varphi\to(\phi\&\xi))))\to\xi))))$
6. $((\varphi\to(\varphi\vee\varphi))$
7. $((\varphi\to(\varphi\vee\psi))$
8. $((\varphi\to\xi)\to((\psi\to\xi)\to((\varphi\vee\psi)\to\xi)))$
9. $((\varphi\to\psi)\to((\psi\to\neg\psi)\to\neg\varphi))$
10. $(\neg\neg\varphi\to\varphi)$
11. $(\forall x\varphi\to[\varphi]^x_t)$
12. $([\varphi]^x_t)\to\exists x\varphi$
13. $(x=x)$
14. $((x=y)\to([\varphi]^z_x\to[\varphi]^z_y))$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi;\varphi\to\psi}{\psi} \qquad \frac{\varphi\to\psi}{\varphi\to\forall x\psi} \qquad \frac{\psi\to\varphi}{\exists x\psi\to\varphi} \qquad x\notin FV(\varphi)$$

15.2 Определение (Доказательство, доказуемая формула)

Последовательность $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ называется **доказательством**, если каждая φ_i является аксиомой, либо получена из предыдущих однократным применением правил вывода.
φ - **доказуема**, если существует доказательство $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ заканчивающееся этой формулой.

$$\frac{\varphi\vdash\psi}{\neg\psi\vdash\neg\varphi} \qquad \frac{\Gamma\vdash\forall x\varphi}{\Gamma\vdash\varphi(x)} \qquad \frac{\varphi\vdash\psi}{\forall x\varphi\vdash\forall x\psi}$$

$$\frac{\varphi\vdash\psi}{\exists x\varphi\vdash\exists x\varphi}$$

13.13 Определение (равносильность)

φ и ψ равносильны $(\varphi=\psi)$, если $\varphi\vdash\psi$, $\psi\vdash\varphi$ доказуемы.

13.14 Замечание

$\equiv$- отношение эквивалентности.

13.15 Следствие

Если $\varphi\equiv\varphi_1$, $\psi\equiv\psi_1$, тогда:

1. $(\varphi\vee\psi)\equiv(\phi_1\vee\psi)$
2. $(\varphi\&\psi)\equiv(\varphi_1\&\psi_1)$
3. $(\varphi\to\psi)\equiv(\varphi_1\to\psi_1)$
4. $\neg\varphi\equiv\neg\varphi_1$

13.16 Теорема (О замене)

Пусть $\psi\equiv\varphi_1,\varphi_1 = [\varphi]^{\psi}_{\psi_1}$получена из φ заменой первого вхождения φ на ψ_1, $\varphi\equiv\varphi_1$

13.17 Определение (Семантика СИП)

1. $\varphi_1...\varphi\ \vdash\ \psi-$т.и , если $\forall$ модели $\mathfrak{A}\in k(\delta(\{\varphi_1\dots\varphi_n,\psi\})),\forall\gamma: FV(\{\varphi_1\dots\varphi_n,\psi\})\to|\mathfrak{A}|$, если $\mathfrak{A}\vDash\varphi_1[\gamma],\dots,\mathfrak{A}\vDash\varphi_n[\gamma]$, то $\mathfrak{A}\vDash\psi[\gamma]$
2. $\vdash\psi-$тождественно истинна, если $\forall\mathfrak{A}\in k(\delta(\psi)),\forall\gamma: FV(\psi)\to|\mathfrak{A}|$ и $\mathfrak{A}\vDash\psi[\gamma]$
3. $\varphi_1\dots\varphi_n\vdash-$т.и. если $\forall\mathfrak{A}\in k(\delta(\{\varphi_1\dots\varphi_n\})),\forall\gamma: FV(\{\varphi_1\dots\varphi_n\})\to|\mathfrak{A}|\exists i\le n:\mathfrak{A}\nvDash\varphi_i[\gamma]$

$\Rightarrow D\subseteq A$. Рассмотрим $\gamma: Fv(\Gamma)\to A$, т.е. $\gamma: Fv(\Gamma)\to(\mathfrak{A}')$
$\Rightarrow\mathfrak{A}'\models\Gamma[\gamma]$
$\varphi(x_1\dots x_n)\in\Gamma\ \mathfrak{A}'\models\varphi(d_1\dots d_n),\gamma(x_i)=d_i; \qquad d_i\in A$
$||$
$\mathfrak{A}'\models\varphi(\gamma(x_1)\dots\gamma(x_n))$
$\Gamma\subseteq F(\sigma)$
$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'\wedge\sigma\in k(\sigma)\Rightarrow\mathfrak{A}\in k(\sigma),\mathfrak{A}\models\Gamma[\gamma]$- упражнение.
$S(\sigma') = \{\varphi_\alpha|\alpha<\delta\}$

14.24 Лемма

Пусть $t\in T(\sigma'), Fv(t)=\emptyset$, тогда
$\exists c\in C$, такое что $(t=c)\in T'$
Доказательство: (упражнение)
$\vdash\exists x(x=t)$ - док(Хенк) $\Rightarrow\exists x(x=t)\in T'\Rightarrow\exists c\in C:\dots$

14.25 Определение

Пусть $c,e\in C$. Будем говорить, что $c\sim e\Leftrightarrow(c=e)\in T'$

14.26 Лемма

$\sim$ - отношение эквивалентности.
Доказательство: упражнение

14.27 Определение

$\mathfrak{A}' =< A;\sigma' >$. В качестве A возьмём:
$A = C/_\sim = \{[c]_\sim|c\in C\}$

1. Если $P^n\in\sigma'$, $c_1\dots c_n\in C$, тогда $\mathfrak{A}'\models P([c_1]\dots[c_n])$, если $P(c_1\dots c_n)\in T'$
2. Если $f^n\in\sigma', c_1\dots c_n\in C$, тогда $f([c_1]\dots[c_n]) = [e]$, $\quad e\in C$, когда $(f(c_1\dots c_n)=e)\in T'$
3. Если $d\in\sigma$, тогда $d^{\mathfrak{A}'} = [e]$, $e\in C$, если выполнено $(d=e)\in T'$

14.10 Теорема (б. д.)

Пусть A - бесконечна, $A^* = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}A^n = \{(a_1\dots a_n)|n\in\mathbb{N}, a_i\in A\}$, тогда $||A^*|| = ||A||$

14.11 Теорема (б. д.)

$\forall A\exists$ кардинал $\alpha: ||A|| = ||\alpha||$

14.12 Теорема

$\forall A$ и B $||A||\le||B||$ или $||B||\le||A||$.
Доказательство:
Существуют кардиналы $\alpha,\beta:\ ||A||=||\alpha||$, $||B||=||\beta||$
$\alpha\le\beta$ или с$\beta\le A\Rightarrow\alpha\subseteq\beta$ или $\beta\subseteq\alpha\Rightarrow||\alpha||\le||\beta||$ или $||\beta||\le||\alpha||\Rightarrow||A||\le||B||$ или $||B||\le||A||$.

14.13 Следствие

Если α - бесконечный кардинал, то α-предельный ординал.
Доказательство:
(от обр.)Пусть α - не предельный $\Rightarrow\exists\beta:\alpha=\beta+1$, $\quad\alpha=\beta\cup\{\beta\}\Rightarrow||\alpha|| = ||\beta||$, $\quad\beta<\alpha\Rightarrow\alpha$ - не кардинал$\Rightarrow\alpha$ - предельный.

14.14 Определение

Пусть $\mathfrak{A}\in K(\sigma)$, X - множество элементов произв. мощности, $\gamma:\ x\to|\mathfrak{A}|$ - означивание X на $\mathfrak{A}$.
$\Gamma\subseteq F(\sigma)$, $\quad Fv(\Gamma) = \{x|\exists\varphi\in\Gamma: x\in Fv(\varphi)\}$.
Пусть $Fv(\Gamma)\subseteq x$. Говорят, что Γ истинно на $\mathfrak{A}$ при означивании $\gamma:\mathfrak{A}\models\Gamma[\gamma]$, если $\forall\varphi\in\Gamma:\mathfrak{A}\models\varphi[\gamma]$. Множество Γ выполнимо на $\mathfrak{A}$, если $\exists\gamma: x\to|\mathfrak{A}|\ :\ \mathfrak{A}\models\Gamma[\gamma]$, Γ выполнимо (имеет модель), если оно выполнимно на некоторой модели, т.е $\exists\mathfrak{A}\in K(\sigma)\quad\exists\gamma:\quad Fv(\Gamma)\to|\mathfrak{A}|:\mathfrak{A}\models\Gamma[\gamma]$

14.15 Теорема (О существовании модели)

Любое непротиворечивое множество формул имеет модель(является выполнимым)
$\forall\Gamma\subseteq F(\sigma)$, если $\Gamma\nvdash$, то $\exists\mathfrak{A}\in K(\sigma)\quad\exists\gamma: Fv(\Gamma)\to|\mathfrak{A}|,\qquad\mathfrak{A}\models\Gamma[\gamma]$
Доказательство:

14.31 Лемма

$P^n\in\sigma'$, $t_1\dots t_n\in T(\sigma')$, $FV(t_i)=\emptyset$
$\mathfrak{A}'\models P(t_1\dots t_n)\Leftrightarrow P(t_1\dots t_n)\in T'$

14.32 Лемма

$\varphi\in S(\sigma')$, тогда $\mathfrak{A}'\vDash\varphi\Leftrightarrow\varphi\in T'$
Доказательство:

1. $\varphi=(t=q)$, $\varphi=P(t_1,...,t_n)$
2. $ln\varphi=n$, $\forall\psi$:$ln\varphi<n$ - выполено
   a) $\varphi=(\varphi_1\vee\varphi_2)$
   $\mathfrak{A}'\vDash\Leftrightarrow\mathfrak{A}'\vDash\varphi_1$ или $\mathfrak{A}'\vDash\varphi_2\Leftrightarrow$ (по индукции)
   $\Leftrightarrow\varphi_1\in T'$ или $\varphi_2\in T'\Leftrightarrow$ (по л. Хенкина) $(\varphi_1\vee\varphi_2)\in T'$,т.е. $\varphi\in T'$
   b) $(\varphi_1\&\varphi_2)$ - упр
   c) $(\varphi_1\to\varphi_2)$ - упр
   d) $\neg\varphi_1$ - упр
   e) $\varphi=\exists\varphi_1(x)$
   $\mathfrak{A}'\vDash\exists x\varphi_1(x)\Leftrightarrow\exists a(const)\in\mathfrak{A}':\mathfrak{A}'\vDash\varphi_1(a)\Leftrightarrow\exists c\in C:\mathfrak{A}'\vDash\varphi_1[c]\Leftrightarrow(c=c)\in T'$-упр$\Rightarrow c^{\mathfrak{A}'}=[c]$
   $\exists c\in C:\mathfrak{A}'\vDash\varphi_1(c^{\mathfrak{A}'})\Leftrightarrow\mathfrak{A}'\vDash\varphi_1(c)\Leftrightarrow$ (по инд.)$\exists c\in C:\varphi_1(c)\in T'\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow$(по л. Хенкина) $\exists x\varphi_1(x)\in T'$ т.е. $\varphi\in T'$
   f) $\varphi=\forall x\varphi_1(x)$ - упр

14.33 Следствие

$\mathfrak{A}'\vDash T'$
Доказательство:
$\forall\varphi\in T'\ \mathfrak{A}'\vDash\varphi$
$T_0\subseteq T'\Rightarrow\mathfrak{A}'\vDash T_0$, $T_0=\Gamma'=\Gamma[\gamma]=[\Gamma]^{x\in FV(x)}_{\gamma(x)\in D}$
Если $d\in D\to c\in C: d\sim c\to[c]=d^{\mathfrak{A}'}$
Рассмотрим $\gamma_0: FV(\Gamma)\to c_{/\sim} = \{[c]|c\in C\}$
$\gamma_0(x)=\gamma(x)^{\mathfrak{A}'}$, если $\gamma(x)=d$, то $\gamma_0(x)=d^{\mathfrak{A}'}=[c]$
Если рассмотрим $\varphi(x_1,...,x_n)\in\Gamma$, то $\gamma(x_i)=d_i\in D$, тогда $\varphi(d_1,...,d_n)\in\Gamma'=T_0\Rightarrow\mathfrak{A}'\vDash\varphi(d_1,..,d_n)\Rightarrow\mathfrak{A}'\vDash\varphi(d_1^{\mathfrak{A}'},...,d_n^{\mathfrak{A}'})\Rightarrow$

2. $\sigma\subseteq\sigma_1$, $\sigma\ne\sigma_1\Rightarrow\exists q\in\sigma\setminus\sigma_1$,
   $\exists\varphi\in S(\sigma_1)\mid q\in\sigma(\varphi)$ (упр.)
   $\vdash(\varphi\vee\neg\varphi)$ - доказуемо $\Rightarrow$ (из предположения, что T - теория σ_1) $T\vdash(\varphi\vee\neg\varphi)\Rightarrow(\varphi\vee\neg\varphi)\in T\Rightarrow q\in\sigma(T)=\sigma$ - противоречие.

14.3 Замечание

$T\subseteq S(\sigma)$ - теория сигнатуры σ, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $T\vdash$
2. $\forall\varphi\in S(\sigma)\ \varphi\in T$ (т.е. $S(\sigma)\subseteq T$)
3. $\exists\varphi\in S(\sigma)\mid\varphi,\neg\varphi\in T$

Доказательство:

1. (1.$\Rightarrow$2.) $T\vdash\ \Rightarrow\exists\varphi_1,\dots,\varphi_n\in T\mid\varphi_1,\dots,\varphi_n\vdash$ доказуема. Пусть $\varphi\in S(\sigma)$
$$\frac{\varphi_1,\dots,\varphi_n\vdash}{\varphi_1,\dots,\varphi_n\neg\varphi\vdash} \qquad \frac{\varphi_1,\dots,\varphi_n\neg\varphi\vdash}{\varphi_1,\dots,\varphi_n\vdash\varphi}$$
   $\Rightarrow\varphi_1,\dots,\varphi_n\vdash\varphi$ - доказуема $\Rightarrow T\vdash\varphi\Rightarrow\varphi\in T$
2. (2.$\Rightarrow$3.) $\varphi\in S(\sigma)\Rightarrow\neg\varphi\in S(\sigma)\Rightarrow\varphi,\neg\varphi\in T$
3. (3.$\Rightarrow$1.) $\varphi,\neg\varphi\in T\Rightarrow T\vdash\varphi\quad T\vdash\neg\varphi$
$$\frac{\varphi\vdash\varphi;\neg\varphi\vdash\neg\varphi}{\varphi,\neg\varphi\vdash}$$
   $\varphi,\neg\varphi\in T$ и $\varphi,\neg\varphi\vdash$ - доказуемо $\Rightarrow T\vdash$

14.4 Следствие

T - теория сигнатуры σ, тогда $T\vdash\Leftrightarrow\ T=S(\sigma)$
Доказательство: упр.

$\Rightarrow C_\alpha\in C$, $\psi(C_\alpha)\in T'$
$(2.\Rightarrow3.)$ $c\in C$, $\psi(c)\in T'$, $t=c$, $FV(t)=\emptyset$, $\psi(t)\in T'$
$t\in T(\sigma')$
$(3.\Rightarrow1.)$ $t\in T(\sigma')$, $FV(t)=\emptyset$, $\psi(t)\in T'$

$$\cfrac{\cfrac{\psi(t)\vdash\psi(t)}{\psi(t)\vdash[\psi]^x_t}}{\psi(t)\vdash\exists x\psi(x)}$$

- доказуема
$\Rightarrow T'\vdash\exists x\psi(x)\Rightarrow\exists x\psi(x)\in T'$

9. $(1.\Leftrightarrow2.)$ $\forall x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\neg\exists x\psi(x)\in T'$ (**Упражнение**)
   $\Leftrightarrow\exists x\neg\psi(x)\notin T'\Leftrightarrow$ не $\exists c\in C|\neg\psi(c)\in T'$
   $\Leftrightarrow\forall c\in C\neg\psi(c)\notin T'\Leftrightarrow\forall c\in C|\psi(c)\in T'$
   $(2.\Leftrightarrow3.)$ $\forall x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\neg\exists x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\exists x\neg\psi(x)\notin T'$
   $\Leftrightarrow\neg\exists t\in T(\sigma')|FV(t)=\emptyset$ и $\neg\psi(t)\in T'$
   $\Leftrightarrow\forall t\in T(\sigma')$ (если $FV(t)=\emptyset$, то $\neg\psi(t)\notin T'$)
   $\Leftrightarrow\psi(t)\in T'$

14.19 Определение

$\mathfrak{A}' =< A;\sigma' >\in k(\sigma')$, $|\mathfrak{A}'| = A$.

1. $A = \{t\in T(\sigma')|\ Fv(t)=\emptyset\}$, $c\subseteq A\Rightarrow A\ne\emptyset$;
   Когда рассматриваем модель - основное множество не пусто.
2. Поэтому:
   a) Если $P^n\in\sigma', t_1\dots t_n\in A$, то $\mathfrak{A}'\models P(t_1\dots t_n): P(t_1\dots t_n)\in T'$
   b) Если $f^n\in\sigma, t_1\dots t_n\in A$, тогда $f^{\mathfrak{A}'}(t_1\dots t_n) = f(t_1\dots t_n)\in T(\sigma')$, т.е. $f(t_1\dots t_n)\in A$
   c) Если $e\in\sigma'$, то $e^{\mathfrak{A}'} = e\in A$, т.к. $e\in T(\sigma')$ нужно показать, что $\mathfrak{A}'\models T'$.

Случай 2: β - предельный, тогда $T_\beta = \underset{\alpha<\beta}{\cup}T_\alpha$
Далее индукцией:
$\beta<\delta, \qquad T' = T_\delta = \underset{\alpha<\delta}{\cup}T_\alpha$

14.17 Лемма

$\Delta\subseteq F(\sigma_0)$, $x\notin Fv(\Delta)$, x - не входит в Δ , $\varphi\in F(\sigma_0)$, $c\in\sigma(\varphi)$,
$c\notin\sigma(\Delta)$,x - не входит вφ .Тогда если секвенция $\Delta,\varphi\vdash$ - доказуема ,то $\Delta,[\varphi]^c_x\vdash$ - доказуема
Доказательство :
Пусть $\Delta,\varphi\vdash$ - доказуема $\Longrightarrow\exists D = \frac{\cap}{\Delta,\varphi\vdash}$ - дерево вывода
Без ограничения общности можно считать , что x - не входит в D
$D_1 = [D]^C_x$ - дерево вывода (упражнение), при этом $D_1 = \frac{\cap}{\Delta,[\varphi]^c_x\vdash}\Rightarrow$ секвенция Δ, $[\varphi]^c_x\vdash$ доказуема

14.18 Лемма (Хенкина)

1. T' - непротиворечиво
2. T' - полно
3. T' - теория
4. $(\varphi\wedge\psi)\in T'\Leftrightarrow\varphi\in T'$и $\psi\in T'$
5. $(\varphi\vee\psi)\in T'\Leftrightarrow\varphi\in T'$ и $\psi\in T'$
6. $\neg\varphi\in T'\Leftrightarrow\varphi\notin T'$
7. $(\varphi\to\psi)\in T'\Leftrightarrow$если $\varphi\in T'$, то $\psi\in T'$
8. $\exists x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\exists c\in C:\psi(c)\in T'\Leftrightarrow\exists t\in T(\sigma'): FV(t)=\emptyset$ и $\psi(t)\in T'$
9. $\forall x\psi(x)\in T'\Leftrightarrow\forall c\in C:\psi(c)\in T'\Leftrightarrow\forall t\in T(\sigma')$ если $FV(t)=\emptyset$, то $\psi(t)\in T'$

Доказательство:

1. $T'\nvdash$
   Шаг 0: $T_0\nvdash$
   Шаг 1: Пусть $\forall\alpha<\beta: T_\alpha\nvdash$. Покажем: $T_\beta\nvdash$