

1 Определения

1. Абсолютная величина:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. Счетное множество — это множество, равномощное \mathbb{N} , т. е. элементы которого можно пронумеровать.
3. Континуальное множество — это множество, равномощное \mathbb{R} .
4. Образ отображения — это область значений функции.
5. Прообраз отображения — это область определения функции.
6. Последовательность: Числовой последовательностью называется любое отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
7. Возрастающая последовательность (строго монотонно возрастающая): $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n < x_{n+1}$.
8. Убывающая последовательность (строго монотонно убывающая): $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n > x_{n+1}$.
9. Строго монотонная последовательность либо возрастающая, либо убывающая.
10. Невозрастающая последовательность (монотонно убывающая): $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geq x_{n+1}$.
11. Неубывающая последовательность (монотонно возрастающая): Надо добавить $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq x_{n+1}$.
12. Монотонная последовательность либо невозрастающая, либо неубывающая.
13. Существует нижняя граница (посл. огр. снизу): $\exists \varepsilon \in \{a_n\} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq \varepsilon$. Отр.: $\forall \varepsilon \in \{a_n\} \mid \exists n \in \mathbb{N} \ a_n < \varepsilon$.
14. Точная нижняя грань (наибольшая нижняя граница):

$$\inf \{a_n\} = A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \exists A \mid \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq A \\ 2) \ \forall A' > A \ \exists a_n \in \mathbb{N} \mid a_n < A' \end{cases}$$

15. Существует верхняя граница (посл. огр. сверху): $\exists \varepsilon \in \{a_n\} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq \varepsilon$. Отр.: $\forall \varepsilon \in \{a_n\} \mid \exists n \in \mathbb{N} \ a_n > \varepsilon$.
16. Точная верхняя грань (наименьшая верхняя граница):

$$\sup \{a_n\} = A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \exists A \mid \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq A \\ 2) \ \forall A' < A \ \exists a_n \in \mathbb{N} \mid a_n > A' \end{cases}$$

17. Последовательность ограничена: $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| < M$.
18. Последовательность неограничена: $\forall M > 0 \mid \exists n \in \mathbb{N} \ |a_n| \geq M$.
19. Предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \ |a_n - A| < \varepsilon$.
20. Сходимость: последовательность сходится, если она имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ n > n_0 \ |a_n - A| < \varepsilon, \ A \in \mathbb{R}$$

21. Расходимость: последовательность расходится, если у нее либо бесконечный предел, либо предел не существует.
22. Бесконечно малая ($a_n \rightarrow 0$): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ n > n_0 \ |a_n| < \varepsilon$.
23. Не является бесконечно малой: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \mid \exists n > n_0 \ |a_n| \geq \varepsilon$.
24. Бесконечно большая ($a_n \rightarrow \infty$): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \ |a_n| > \varepsilon$.
25. Не является бесконечно большой: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \mid \exists n > n_0 \ |a_n| \leq \varepsilon$.
26. Теорема о зажатой последовательности: Если $\forall n \ b_n \leq a_n \leq c_n$, то при $n \rightarrow \infty$: $\lim b_n = \lim c_n = A \Rightarrow \lim a_n = A$.
27. Теорема Вейерштрасса: Любая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.
28. Последовательность фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m, n > n_0 \ |a_m - a_n| < \varepsilon$.
29. Последовательность не фундаментальна, если $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \mid \exists m, n > n_0 \ |a_m - a_n| \geq \varepsilon$.
30. Критерий Коши: $\{a_n\}$ — фундаментальна $\Leftrightarrow \{a_n\}$ — имеет предел (сходится).

31. Отрицание критерия Коши: $\{a_n\}$ — не фундаментальна $\Leftrightarrow \{a_n\}$ — не имеет предела (расходится).
32. Подпоследовательность: $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{a_n\}$, если $\{n_k\}$ — строго возр. посл. и $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$.
33. Частичный предел: Если $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$, то A — частичный предел последовательности $\{a_n\}$.
34. Нижний предел последовательности есть наименьший частичный предел.
35. Верхний предел последовательности есть наибольший частичный предел.
36. Необходимое и достаточное условие существования предела: $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$
37. Теорема Больцано-Вейерштрасса: Из ограниченной посл. можно выделить сходящуюся подпосл.
38. Число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
39. Окрестностью точки x_0 на числовой прямой называется множество точек, удаленных от x_0 менее чем на ε , т. е.
 $O_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$.