

1 Определения

1. Абсолютная величина:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

2. Инъекция: $f : X \rightarrow Y$ называется инъективным (однозначным), если $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
3. Сюръекция: $f : X \rightarrow Y$ называется сюръективным (накрывающим), если $\forall y \in Y \exists x \in X \mid f(x) = y$.
4. Биекция: отображение называют биективным, если он инъективно и сюръективно.
5. Счетное множество — это множество, равномощное \mathbb{N} , т. е. элементы которого можно пронумеровать.
6. Континуальное множество — это множество, равномощное \mathbb{R} .
7. Область определения функции — множество, на котором задается функция.
8. Область значений функции — множество, состоящее из всех значений, которые принимает функция.
9. Принцип Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \mid n > x$.
10. Последовательность: Числовой последовательностью называется любое отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
11. Возрастающая последовательность (строго монотонно возрастающая): $\forall n \in \mathbb{N} x_n < x_{n+1}$.
12. Убывающая последовательность (строго монотонно убывающая): $\forall n \in \mathbb{N} x_n > x_{n+1}$.
13. Строго монотонная последовательность либо возрастающая, либо убывающая.
14. Невозрастающая последовательность (монотонно убывающая): $\forall n \in \mathbb{N} x_n \geq x_{n+1}$.
15. Неубывающая последовательность (монотонно возрастающая): $\forall n \in \mathbb{N} x_n \leq x_{n+1}$.
16. Монотонная последовательность либо невозрастающая, либо неубывающая.
17. Существует нижняя граница (посл. огр. снизу): $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq \varepsilon$.
18. Нижней границы не существует (посл. не огр. снизу): $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} a_n < \varepsilon$.
19. Точная нижняя грань (наибольшая нижняя граница):

$$\inf \{a_n\} = A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \exists A \mid \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq A \\ 2) & \forall A' > A \exists a_n \in \mathbb{N} \mid a_n < A' \end{cases}$$

20. Существует верхняя граница (посл. огр. сверху): $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq \varepsilon$.
21. Верхней границы не сущ. (посл. не огр. сверху): $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} a_n > \varepsilon$.
22. Точная верхняя грань (наименьшая верхняя граница):

$$\sup \{a_n\} = A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \exists A \mid \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq A \\ 2) & \forall A' < A \exists a_n \mid a_n > A' \end{cases}$$

23. Последовательность ограничена: $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N} |a_n| < M$.
24. Последовательность неограничена: $\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N} \mid |a_n| \geq M$.
25. Предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 |a_n - A| < \varepsilon$.
26. Сходимость: последовательность сходится, если она имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 |a_n - A| < \varepsilon, A \in \mathbb{R}$$

27. Расходимость: последовательность расходится, если у нее либо бесконечный предел, либо предел не существует.
28. Бесконечно малая ($a_n \rightarrow 0$): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 |a_n| < \varepsilon$.
29. Не является бесконечно малой: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \mid |a_n| \geq \varepsilon$.
30. Бесконечно большая ($a_n \rightarrow \infty$): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 |a_n| > \varepsilon$.

31. Не является бесконечно большой: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \mid |a_n| \leq \varepsilon$.
32. Стремится к $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid a_n > \varepsilon$.
33. Не стремится к $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq +\infty \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \mid a_n \leq \varepsilon$.
34. Стремится к $-\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid a_n < -\varepsilon$.
35. Не стремится к $-\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -\infty \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \mid a_n \geq -\varepsilon$.
36. Теорема о зажатой последовательности: Если $\forall n \mid b_n \leq a_n \leq c_n$, то при $n \rightarrow \infty$: $\lim b_n = \lim c_n = A \Rightarrow \lim a_n = A$.
37. Теорема Вейерштрасса: Любая монотонно возр. (убывающая) и огр. сверху (снизу) посл. имеет предел.
38. Последовательность фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$.
39. Последовательность не фундаментальна, если $\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \mid \exists m, n > n_0 \mid (|a_m - a_n| \geq \varepsilon)$.
40. Критерий Коши: $\{a_n\}$ — фундаментальна $\Leftrightarrow \{a_n\}$ — имеет конечный предел (сходится).
41. Отрицание критерия Коши: $\{a_n\}$ — не фундаментальна $\Leftrightarrow \{a_n\}$ — не имеет конечного предела (расходится).
42. Подпоследовательность: $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{a_n\}$, если $\{n_k\}$ — строго возр. посл.
43. Частичный предел: Если $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$, то A — частичный предел последовательности $\{a_n\}$.
44. Нижний предел последовательности есть наименьший частичный предел:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k > n} a_k$$

45. Верхний предел последовательности есть наибольший частичный предел:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} a_k$$

46. Необходимое и достаточное условие существования предела: $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.
47. Теорема Больцано-Вейерштрасса: Из ограниченной посл. вещ. чисел можно выделить сходящуюся подпосл.
48. Число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
49. Окрестностью точки x_0 на числовой прямой называется множество точек, удаленных от x_0 менее чем на ε , т. е. $O_\varepsilon(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$.