1. **Множества, операции над множествами**

   Строгого определения множества нет, т. к. это понятие из которого выводятся многие понятия математики, в то время как оно само невыводится из других понятий и не определяется ими. Понятие множества стольже первично, как понятие точки или числа. Синонимами слова "множество" можно считать такие слова, как "совокупность", "набор", "коллекция", "семейство".

   $x \in A$ обозначает **принадлежность элемента** x **к множеству** A. В таком случае говорят, что элемент x **принадлежит множеству** A или x является элементом множества A .

   Множество A является подмножество множества B ($A \subseteq B$), если все элементы множества A являются элементами множества B, т. е. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

   (Принцип равнообъемности) Множества A и B называются **равными** ($A = B$), если они содержат одни и те же элементы, т. е. для каждого элемента x имеем $x \in A \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

   Замечание. Два множества равны $\Leftrightarrow$каждое из них является подмножеством другого $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

   Доказательство: По определению $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \\ \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subseteq A \end{cases}$

   Предложение. Отношение включения является **отношением частичного порядка**, т. е. обладает следующими свойствами:

   1.$\forall A(A \subseteq A)$ — рефлексивность 2.$\forall A, B((A \subseteq B$ и $B \subseteq A) \Rightarrow A = B)$— антисимметричность

   3. $\forall A, B, C((A \subseteq B$ и $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C)$ — транзитивность

   Доказательство. 1. По определению отношения включения, утверждение $A \subseteq A$ равносильно $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A)$, с другой стороны утверждение $x \in A \Rightarrow x \in A$ всегда истинно, поэтому верно и $A \subseteq A$.

   2. Очевидно из замечания

   3. Пусть $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$. Допустим, что $A \nsubseteq C$. Тогда $\exists x : x \in A$ и $x \notin C$. Поскольку $A \subseteq B$ и $x \in A$, то $x \in B$. С другой стороны, $B \subseteq C$ и $x \in C$. Противоречие.

   Операции над множествами

   1. **Объединение:** $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$ 2. **Пересечение:** $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$

   3. **Разность:** $A \backslash B = \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$ 4. **Симметрическая разность:** $A \dot{-} B = (A \backslash B \cup B \backslash A)$

   5. **Дополнение:** $\bar{A} = U \backslash A = \{x | x \in U \backslash A\}$

   Пустое множество ($\emptyset$) есть множество, не содержащее элементов, т.е. множество, которое не имеет ни одного элемента.

   Замечание. Пустое множество единственно.

   Доказательство. Пусть $\exists \emptyset_1, \emptyset_2$ — различные. То $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$. По определению равенства множеств $\exists x | x \in \emptyset_1$ и $x \notin \emptyset_2$, либо $\exists x | x \notin \emptyset_1$ и $x \in \emptyset_2$. Но т. к. $\emptyset_1$ и $\emptyset_2$ не имеют элементов, то такого x не существует. Противоречие.

   Замечание. $\emptyset$ является подмножеством любого множества

   Доказательство. Рассмотрим некоторое множество A. По определению включение $\emptyset \subseteq A$ означает: если $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$. Но в $\emptyset$ нет элементов и утверждение выполняется автоматически.

   Универсум (U) — множество, содержащее все элементы.

2. Логика высказываний: таблицы истинности, понятия формулы, тождественно истинной, тождественно ложной, выполнимой и опровержимой формулы

3. Логика высказываний: таблицы истинности, понятия формулы, эквивалентности формул

4. Выражение теоретико-множественных операций через логические связки

5. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ

6. Понятие алгебраической системы

7. Термы и формулы логики предикатов

8. Истинность формул на модели

9. Семантическая эквивалентность формул

10. Предваренная нормальная форма

11. Отношения и функции

12. Свойства бинарных отношений
13. Отношения эквивалентности.
14. Отношения порядка. Упорядоченные множества
15. Точная нижняя грань и точная верхняя грань. Решетки.
16. Определение булевой алгебры. Примеры булевых алгебр.
17. Свойства булевых алгебр.
18. Атомные и безатомные булевы алгебры
19. Теорема Стоуна для конечной булевой алгебры.
20. Равномощные множества. Теорема Кантора-Бернштейна.
21. Конечные и бесконечные множества. Теорема Кантора.
22. Счетные множества
23. Континуальные множества
24. Континуум гипотеза
25. Ординалы и кардиналы.
26. Машина Тьюринга
27. ЧРФ, ПРФ, ОРФ.
28. Канторовская нумерация.
29. Секвенциональное исчисление высказываний
30. Семантика исчисления секвенций. Теорема о корректности.
31. Теорема о замене в исчислении высказываний
32. Теорема о полноте секвенционального исчисления высказываний
33. Исчисление высказываний гильбертовского типа.
34. Гомоморфизмы, изоморфизмы.
35. Подмодель.
36. Теорема о существовании наименьшей подмодели
37. Теорема о модели, порожденной множеством замкнутых термов
38. Сохранение истинности формул на подмоделях
39. Отношение конгруэнции. Теорема о факторизации
40. Теорема о сильных эпиморфизмах
41. Основная теорема о гомоморфизмах
42. Секвенциональное исчисление предикатов
43. Семантика исчисления секвенций. Теорема о корректности
44. Теорема о замене в исчислении предикатов.
45. Приведение формулы к предваренной нормальной форме
46. Противоречивые, непротеречивые множества формул. Теории, полные теории