

## 1. Множества, операции над множествами

Строгого определения множества нет, т. к. это понятие из которого выводятся многие понятия математики, в то время как оно само не выводится из других понятий и не определяется ими. Понятие множества столь же первично, как понятие точки или числа. Синонимами слова “множество” можно считать такие слова, как “совокупность”, “набор”, “коллекция”, “семейство”.

$x \in A$  обозначает **принадлежность элемента  $x$  к множеству  $A$** . В таком случае говорят, что элемент  $x$  **принадлежит множеству  $A$**  или  $x$  является элементом множества  $A$ .

Множество  $A$  является подмножеством множества  $B$  ( $A \subseteq B$ ), если все элементы множества  $A$  являются элементами множества  $B$ , т. е.  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$ .

**(Принцип равнообъемности)** Множества  $A$  и  $B$  называются **равными** ( $A = B$ ), если они содержат одни и те же элементы, т. е. для каждого элемента  $x$  имеем  $x \in A \Leftrightarrow A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$

**Замечание.** Два множества равны  $\Leftrightarrow$  каждое из них является подмножеством другого  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$

**Доказательство:** По определению  $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \\ \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subseteq A \end{cases}$

**Предложение.** Отношение включения является **отношением частичного порядка**, т. е. обладает следующими свойствами:

1.  $\forall A(A \subseteq A)$  — рефлексивность 2.  $\forall A, B((A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A) \Rightarrow A = B)$  — антисимметричность

3.  $\forall A, B, C((A \subseteq B \text{ и } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C)$  — транзитивность

**Доказательство.** 1. По определению отношения включения, утверждение  $A \subseteq A$  равносильно  $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A)$ , с другой стороны утверждение  $x \in A \Rightarrow x \in A$  всегда истинно, поэтому верно и  $A \subseteq A$ .

2. Очевидно из замечания

3. Пусть  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ . Допустим, что  $A \not\subseteq C$ . Тогда  $\exists x : x \in A$  и  $x \notin C$ . Поскольку  $A \subseteq B$  и  $x \in A$ , то  $x \in B$ . С другой стороны,  $B \subseteq C$  и  $x \in B$ . Противоречие.

### Операции над множествами

1. **Объединение:**  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$  2. **Пересечение:**  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$

3. **Разность:**  $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$  4. **Симметрическая разность:**  $A \dot{\cup} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

5. **Дополнение:**  $\bar{A} = U \setminus A = \{x | x \in U \setminus A\}$

**Пустое множество** ( $\emptyset$ ) есть множество, не содержащее элементов, т.е. множество, которое не имеет ни одного элемента.

**Замечание.** Пустое множество единственно.

**Доказательство.** Пусть  $\exists \emptyset_1, \emptyset_2$  — различные. То  $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$ . По определению равенства множеств  $\exists x | x \in \emptyset_1$  и  $x \notin \emptyset_2$ , либо  $\exists x | x \notin \emptyset_1$  и  $x \in \emptyset_2$ . Но т. к.  $\emptyset_1$  и  $\emptyset_2$  не имеют элементов, то такого  $x$  не существует. Противоречие.

**Замечание.**  $\emptyset$  является подмножеством любого множества

**Доказательство.** Рассмотрим некоторое множество  $A$ . По определению включения  $\emptyset \subseteq A$  означает: если  $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ . Но в  $\emptyset$  нет элементов и утверждение выполняется автоматически.

**Универсум** ( $U$ ) — множество, содержащее все элементы.

## 2. Логика высказываний: таблицы истинности, понятия формулы, тождественно истинной, тождественно ложной, выполнимой и опровержимой формулы

Также, как и в арифметике, в логике высказываний есть переменные и операции, но в логике высказываний мы имеем дело с мерой истинности. Значениями переменных являются значения истинности «истина» и «ложь». Каждая переменная обозначает некоторое неизменное высказывание, предложение про которое может быть известно только является ли оно истинным, либо ложным.

**Пропозициональными переменными**  $(A, B, C, \dots)$  будем называть переменные принимающие свои значения из множества  $\{\text{«истина»}, \text{«ложь»}\}$

Логические связки — операции над пропозициональным переменными:

1. **Дизъюнкция**  $\vee$  (или) 2. **Конъюнкция**  $\wedge, \&$  (и) 3. **Импликация**  $\rightarrow$  (если ..., то ...)
4. **Отрицание**  $\neg$  (не) 5. **Эквиваленция**  $\leftrightarrow$  (равносильно)

Значения логических связок приведены в таблицах, называемых **таблицами истинности**:

$A$	$B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$
и	и	и	и	и	л	и
и	л	и	л	л	л	л
л	и	и	л	и	и	л
л	л	л	л	и	и	и

**Формула логики высказываний:**

1. Атомные формулы: все пропозициональные переменные  $(A, B, C, \dots)$  являются формулами
2. Построение новых: если  $\phi$  и  $\psi$  — формулы, то  $(\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\neg \phi)$  — формулы.
3. Других формул нет.

Часть формулы, которая сама является формулой называется **подформулой** данной формулы.

Формула, принимающая значение «истина» при любых означиваниях входящих в ее состав пропозициональным переменных называется **тождественно истинной формулой**

Формула, принимающая значение «ложь» при любых означиваниях входящих в ее состав пропозициональным переменных называется **тождественно ложной формулой**

Формула, не являющаяся тождественно ложной, называется **выполнимой**

Формула, не являющаяся тождественно истинной, называется **опровержимой**

### 3. Логика высказываний: таблицы истинности, понятия формулы, эквивалентности формул

Также, как и в арифметике, в логике высказываний есть переменные и операции, но в логике высказываний мы имеем дело с мерой истинности. Значениями переменных являются значения истинности «истина» и «ложь». Каждая переменная обозначает некоторое неизместное высказывание, предложение про которое может быть известно только является ли оно истинным, либо ложным.

**Пропозициональными переменными**  $(A, B, C, \dots)$  будем называть переменные принимающие свои значения из множества  $\{\text{«истина»}, \text{«ложь»}\}$

Логические связки — операции над пропозициональным переменными:

1. **Дизъюнкция**  $\vee$  (или) 2. **Конъюнкция**  $\wedge, \&$  (и) 3. **Импликация**  $\rightarrow$  (если ..., то ...)
4. **Отрицание**  $\neg$  (не) 5. **Эквиваленция**  $\leftrightarrow$  (равносильно)

Значения логических связок приведены в таблицах, называемых **таблицами истинности**:

$A$	$B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$
и	и	и	и	и	л	и
и	л	и	л	л	л	л
л	и	и	л	и	и	л
л	л	л	л	и	и	и

**Формула логики высказываний:**

1. Атомные формулы: все пропозициональные переменные  $(A, B, C, \dots)$  являются формулами
2. Построение новых: если  $\phi$  и  $\psi$  — формулы, то  $(\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\neg \phi)$  — формулы.
3. Других формул нет.

Двуместное отношение  $\sim$  называется **отношением эквивалентности** (на множестве  $A$ ), если  $\forall a, b, c \in A$  выполняется: 1.  $a \sim a$  2.  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  3.  $(a \sim b \text{ и } b \sim c) \Rightarrow a \sim c$

Формулы  $\phi$  и  $\psi$  называются **эквивалентными**  $(\phi \sim \psi)$ , если они принимают одинаковые значения истинности при одинаковых значениях входящих в них пропозициональных переменных.

4. Выражение теоретико-множественных операций через логические связки
5. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ
6. Термы и формулы логики предикатов
7. Понятие алгебраической системы
8. Истинность формул на модели
9. Семантическая эквивалентность формул
10. Предваренная нормальная форма
11. Отношения и функции
12. Свойства бинарных отношений
13. Отношения эквивалентности.
14. Отношения порядка. Упорядоченные множества
15. Точная нижняя грань и точная верхняя грань. Решетки.
16. Определение булевой алгебры. Примеры булевых алгебр.
17. Свойства булевых алгебр.
18. Атомные и безатомные булевы алгебры
19. Теорема Стоуна для конечной булевой алгебры.
20. Равномощные множества. Теорема Кантора-Бернштейна.
21. Конечные и бесконечные множества. Теорема Кантора.
22. Счетные множества
23. Континуальные множества
24. Континуум гипотеза
25. Ординалы и кардиналы.
26. Машина Тьюринга
27. ЧРФ, ПРФ, ОРФ.
28. Канторовская нумерация.
29. Секвенциональное исчисление высказываний
30. Семантика исчисления секвенций. Теорема о корректности.
31. Теорема о замене в исчислении высказываний
32. Теорема о полноте секвенционального исчисления высказываний
33. Исчисление высказываний гильбертовского типа.
34. Гомоморфизмы, изоморфизмы.
35. Подмодель.
36. Теорема о существовании наименьшей подмодели
37. Теорема о модели, порожденной множеством замкнутых термов
38. Сохранение истинности формул на подмоделях
39. Отношение конгруэнции. Теорема о факторизации
40. Теорема о сильных эпиморфизмах
41. Основная теорема о гомоморфизмах

- 42. Секвенциональное исчисление предикатов
- 43. Семантика исчисления секвенций. Теорема о корректности
- 44. Теорема о замене в исчислении предикатов.
- 45. Приведение формулы к предваренной нормальной форме
- 46. Противоречивые, непротеречивые множества формул. Теории, полные теории