1. **Множества, операции над множествами**

Строгого определения множества нет, т. к. это понятие из которого выводятся многие понятия математики, в то время как оно само невыводится из других понятий и не определяется ими. Понятие множества стольже первично, как понятие точки или числа. Синонимами слова “множество” можно считать такие слова, как “совокупность”, “набор”, “коллекция”, “семейство”.

$x \in A$ обозначает **принадлежность элемента** x **к множеству** A. В таком случае говорят, что элемент x **принадлежит множеству** A или x является элементом множества A .

Множество A является подмножество множества B ($A \subseteq B$), если все элементы множества A являются элементами множества B, т. е. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

(Принцип равнообъемности) Множества A и B называются **равными** ($A = B$), если они содержат одни и те же элементы, т. е. для каждого элемента x имеем $x \in A \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Замечание. Два множества равны $\Leftrightarrow$каждое из них является подмножеством другого $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Доказательство: По определению $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \\ \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subseteq A \end{cases}$

Предложение. Отношение включения является **отношением частичного порядка**, т. е. обладает следующими свойствами:

1.$\forall A(A \subseteq A)$ — рефлексивность 2.$\forall A, B((A \subseteq B$ и $B \subseteq A) \Rightarrow A = B)$— антисимметричность

3. $\forall A, B, C((A \subseteq B$ и $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C)$ — транзитивность

Доказательство. 1. По определению отношения включения, утверждение $A \subseteq A$ равносильно $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in A)$, с другой стороны утверждение $x \in A \Rightarrow x \in A$ всегда истинно, поэтому верно и $A \subseteq A$.

2. Очевидно из замечания

3. Пусть $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$. Допустим, что $A \nsubseteq C$. Тогда $\exists x : x \in A$ и $x \notin C$. Поскольку $A \subseteq B$ и $x \in A$, то $x \in B$. С другой стороны, $B \subseteq C$ и $x \in C$. Противоречие.

Операции над множествами

1. **Объединение:** $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$ 2. **Пересечение:** $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$

3. **Разность:** $A \backslash B = \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$ 4. **Симметрическая разность:** $A \dot{-} B = (A \backslash B \cup B \backslash A)$

5. **Дополнение:** $\bar{A} = U \backslash A = \{x | x \in U \backslash A\}$

Пустое множество ($\emptyset$) есть множество, не содержащее элементов, т.е. множество, которое не имеет ни одного элемента.

Замечание. Пустое множество единственно.

Доказательство. Пусть $\exists \emptyset_1, \emptyset_2$ — различные. То $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$. По определению равенства множеств $\exists x | x \in \emptyset_1$ и $x \notin \emptyset_2$, либо $\exists x | x \notin \emptyset_1$ и $x \in \emptyset_2$. Но т. к. $\emptyset_1$ и $\emptyset_2$ не имеют элементов, то такого x не существует. Противоречие.

Замечание. $\emptyset$ является подмножеством любого множества

Доказательство. Рассмотрим некоторое множество A. По определению включение $\emptyset \subseteq A$ означает: если $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$. Но в $\emptyset$ нет элементов и утверждение выполняется автоматически.

Универсум (U) — множество, содержащее все элементы.

2. **Логика высказываний: таблицы истинности, понятия формулы, тождественно истинной, тождественно ложной, выполнимой и опровержимой формулы**

Также, как и в арифметике, в логике высказываний есть переменные и операции, но в логике высказываний мы имеем дело с мерой истинности. Значениями переменных являются значения истинности «истина» и «ложь». Каждая переменная обозначает некоторое неизместное высказывание, предложение про которое может быть известно только является ли оно истинным, либо ложным.

Пропозициональными переменными $(A, B, C, \dots)$ будем называть переменные принимающие свои значения из множества $\{$«истина», «ложь»$\}$

Логические связки — операции над пропозициональным переменными:

1. **Дизъюнкция** $\vee$ (или) 2. **Конъюнкция** $\wedge, \&$ (и) 3. **Импликация** $\rightarrow$(если ..., то ...)

4. **Отрицание** $\neg$ (не) 5. **Эквиваленция** $\leftrightarrow$ (равносильно)

Значения логических связок приведены в таблицах, называемых **таблицами истинности**:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$
и	и	и	и	и	л	и
и	л	и	л	л	л	л
л	и	и	л	и	и	л
л	л	л	л	и	и	и

Формула логики высказываний:

1. Атомные формулы: все пропозициональные переменные $(A, B, C, \dots)$ являются формулами

2. Построение новых: если ϕ и ψ — формулы, то $(\phi \vee \psi)$,$(\phi \wedge \psi)$,$(\phi \rightarrow \psi)$,$(\neg\phi)$ — формулы.

3. Других формул нет.

Часть формулы, которая сама является формулой называется **подформулой** данной формулы.

Формула, принмиающая значение «истина» при любых означиваниях входящих в ее состав пропозициональным переменных называется **тождественно истинной формулой**

Формула, принмиающая значение «ложь» при любых означиваниях входящих в ее состав пропозициональным переменных называется **тождественно ложной формулой**

Формула, не являющаяся тождественно ложной, называется **выполнимой**

Формула, не являющаяся тождественно истинной, называется **опровержимой**

3. Логика высказываний: таблицы истинности, понятия формулы, эквивалентности формул
4. Выражение теоретико-множественных операций через логические связки
5. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ
6. Термы и формулы логики предикатов
7. Понятие алгебраической системы
8. Истинность формул на модели
9. Семантическая эквивалентность формул
10. Предваренная нормальная форма
11. Отношения и функции
12. Свойства бинарных отношений
13. Отношения эквивалентности.
14. Отношения порядка. Упорядоченные множества
15. Точная нижняя грань и точная верхняя грань. Решетки.
16. Определение булевой алгебры. Примеры булевых алгебр.
17. Свойства булевых алгебр.
18. Атомные и безатомные булевы алгебры
19. Теорема Стоуна для конечной булевой алгебры.
20. Равномощные множества. Теорема Кантора-Бернштейна.
21. Конечные и бесконечные множества. Теорема Кантора.
22. Счетные множества
23. Континуальные множества
24. Континуум гипотеза
25. Ординалы и кардиналы.
26. Машина Тьюринга
27. ЧРФ, ПРФ, ОРФ.
28. Канторовская нумерация.
29. Секвенциональное исчисление высказываний
30. Семантика исчисления секвенций. Теорема о корректности.
31. Теорема о замене в исчислении высказываний
32. Теорема о полноте секвенционального исчисления высказываний
33. Исчисление высказываний гильбертовского типа.
34. Гомоморфизмы, изоморфизмы.
35. Подмодель.
36. Теорема о существовании наименьшей подмодели
37. Теорема о модели, порожденной множеством замкнутых термов
38. Сохранение истинности формул на подмоделях
39. Отношение конгруэнции. Теорема о факторизации
40. Теорема о сильных эпиморфизмах

41. Основная теорема о гомоморфизмах
42. Секвенциональное исчисление предикатов
43. Семантика исчисления секвенций. Теорема о корректности
44. Теорема о замене в исчислении предикатов.
45. Приведение формулы к предваренной нормальной форме
46. Противоречивые, непротеречивые множества формул. Теории, полные теории