Белый Николай, 16210, 09.10.2016

1 Определения

1. Абсолютная величина:
$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$
2. Инъекция: $f : X \to Y$ называется инъективным (однозначным), если $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
3. Сюръекция: $f : X \to Y$ называется сюръективным (накрывающим), если $\forall y \in Y\ \exists x \in X \mid f(x) = y$.
4. Биекция: отображение называют биективным, если он инъективно и сюръективно.
5. Счетное множество — это множество, равномощное $\mathbb{N}$, т. е. элементы которого можно пронумеровать.
6. Континуальное множество — это множество, равномощное $\mathbb{R}$.
7. Образ отображения — это область значений функции.
8. Прообраз отображения — это область определения функции.
9. Принцип Архимеда: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \mid n > x$.
10. Последовательность: Числовой последовательностью называется любое отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
11. Возрастающая последовательность (строго монотонно возрастающая): $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1}$.
12. Убывающая последовательность (строго монотонно убывающая): $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > x_{n+1}$.
13. Строго монотонная последовательность либо возрастающая, либо убывающая.
14. Невозрастающая последовательность (монотонно убывающая): $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geqslant x_{n+1}$.
15. Неубывающая последовательность (монотонно возрастающая): $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leqslant x_{n+1}$.
16. Монотонная последовательность либо невозрастающая, либо неубывающая.
17. Существует нижняя граница (посл. огр. снизу): $\exists \varepsilon \in \{a_n\} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geqslant \varepsilon$. Отр.: $\forall \varepsilon \in \{a_n\} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a_n < \varepsilon$.
18. Точная нижняя грань (наибольшая нижняя граница):
$$\inf \{a_n\} = A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \exists A \mid \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geqslant A \\ 2) & \forall A' > A\ \exists a_n \in \mathbb{N} \mid a_n < A' \end{cases}$$
19. Существует верхняя граница (посл. огр. сверху): $\exists \varepsilon \in \{a_n\} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant \varepsilon$. Отр.: $\forall \varepsilon \in \{a_n\} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a_n > \varepsilon$.
20. Точная верхняя грань (наименьшая верхняя граница):
$$\sup \{a_n\} = A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \exists A \mid \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant A \\ 2) & \forall A' < A\ \exists a_n \mid a_n > A' \end{cases}$$
21. Последовательность ограничена: $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| < M$.
22. Последовательность неограничена: $\forall M > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \mid |a_n| \geqslant M$.
23. Предел последовательности: $\lim_{n\to\infty} a_n = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |a_n - A| < \varepsilon$.
24. Сходимость: последовательность сходится, если она имеет конечный предел:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |a_n - A| < \varepsilon,\ A \in \mathbb{R}$$
25. Расходимость: последовательность расходится, если у нее либо бесконечный предел, либо предел не существует.
26. Бесконечно малая ($a_n \to 0$): $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |a_n| < \varepsilon$.
27. Не является бесконечно малой: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 \mid |a_n| \geqslant \varepsilon$.
28. Бесконечно большая ($a_n \to \infty$): $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |a_n| > \varepsilon$.
29. Не является бесконечно большой: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \infty \ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 \mid |a_n| \leqslant \varepsilon$.
30. Теорема о зажатой последовательности: Если $\forall n\ b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$, то при n$\to \infty$: $\lim b_n = \lim c_n = A \ \Rightarrow\ \lim a_n = A$.

31. Теорема Вейерштрасса: Любая монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательнос имеет предел.

32. Последоввательность фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m, n > n_0\ |a_m - a_n| < \varepsilon$.

33. Последовательность не фундаментальна, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N} \mid \exists m, n > n_0\ |a_m - a_n| \geqslant \varepsilon$.

34. Критерий Коши: $\{a_n\}$ — фундаментальна $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ — имеет конечный предел (сходится).

35. Отрицание критерия Коши: $\{a_n\}$ — не фундаментальна $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ — не имеет конечного предела (расходится).

36. Подпоследовательность: $\{a_{n_k}\}$ — подпоследовательнось $\{a_n\}$, если $\{n_k\}$ — строго возр. посл.

37. Частичный предел: Если $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$, то A — частичный предел последовательности $\{a_n\}$.

38. Нижний предел последовательности есть наименьший частичный предел:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\to\infty} \left\{ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \right\}$$

39. Верхний предел последовательности есть наибольший частичный предел:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\to\infty} \left\{ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \right\}$$

40. Необходимое и достаточное условие существования предела: $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

41. Теорема Больцано-Вейерштрасса: Из ограниченной посл. можно выделить сходящуюся подпосл.

42. Число $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

43. Окрестностью точки x_0 на числовой прямой наывается множество точек, удаленных от x_0 менее чем на ε, т. е. $O_\varepsilon(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$.