МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИССЛЕДОВАНИЯ КОРРЕКТНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ТЕМА 1. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Основные понятия: открытое покрытие множества, сходящиеся последовательности, ε-сеть множества, относительно компактные множества, теорема Хаусдорфа, теорема Арцела-Асколи, критерий относительной компактности в пространствах l_p, $L_p[a,b]$ ($p \geq 1$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача № 1. Выяснить, является ли относительно компактным в пространстве $C[0,1]$ множество функций

$$M = \left\{ x \in C[0,1]\colon \left|x(0)\right| \leq 1,\ \left|x''(t)\right| \leq 4 \quad \forall t \in [0,1] \right\}.$$

Решение. Множество M в пространстве $C[0,1]$ относительно компактно, если оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Данное множество не является равномерно ограниченным, так как $\exists x_n(t) = nt \in C[0,1]$, что $\forall c > 0 \quad \|x_n(t)\|_{C[0,1]} = n$ и поскольку $n \in N$, то норму $x_n(t)$ можно сделать больше любой наперед заданной константы *c*.

Задача № 2. Будет ли относительно компактным в $C[0,1]$ множество функций

$$M = \left\{ x \in C[0,1]\colon\ x(t) = \sin nt,\ n \in N \right\}?$$

Решение. По определению множество M является равностепенно непрерывным, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall t_1, t_2\colon \left|t_1 - t_2\right| < \delta$ вытекает, что $\left|x(t_1) - x(t_2)\right| < \varepsilon \ \ \forall x(t) \in M$. Покажем, что наше множество не является равностепенно непрерывным, т.е. $\exists\varepsilon_0 = 1$ такое, что какое бы $\delta_n = \frac{2}{n}$ мы не взяли, найдутся точки $\exists t_1 = 0,\ t_2 = \frac{\pi}{2n}$, что хотя $|t_1 - t_2| < \delta_n$, но $|x(t_1) - x(t_2)| \ge \varepsilon_0$.

Действительно, $|t_1 - t_2| = \frac{\pi}{2n} < \frac{2}{n}$ и $|x(t_1) - x(t_2)| = \left|\sin\frac{\pi}{2n}\cdot n\right| = 1 = \varepsilon_0$; значит, M не относительно компактное.

Задача № 3. Выяснить, является ли относительно компактное множество M в пространстве $C[0,1]$, где $M = \left\{x \in C[0,1]:\ |x(t)| \le 1,\ |x''(t)| \le 4\right\}$.

Решение. Используя теорему Арцела, покажем, что M равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.

1) M равномерно ограниченно, если $\exists c > 0$ такое, что $\|x\| \le c \quad \forall x \in M$.

Пусть $c = 1$, тогда $\|x\| = \max\limits_t |x(t)| \le 1 \ \ \forall x \in M$.

2) M равностепенно непрерывно, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$ вытекает, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для всех

$x(t) \in M$.

Для доказательства равномерной непрерывности покажем, что ограничена первая производная функция $x(t)$. Воспользуемся равенством:

$x'(t) = \int\limits_0^t x''(\tau)d\tau + x'(0)$; тогда $|x'(t)| \le \int\limits_0^t |x''(\tau)|d\tau + |x'(0)| \le 4 + |x'(0)|$.

Покажем, что $x'(0)$ ограничена. Имеем

$$x(t) - x(0) = \int\limits_0^t x'(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \big(x'(\tau) - x'(0) + x'(0)\big)d\tau = \int\limits_0^t \big(x'(\tau) - x'(0)\big)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t x'(0)d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_0^\tau x''(s)ds + tx'(0).$$

Тогда $tx'(0) = x(t) - x(0) - \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau x''(s)ds$ и поэтому $\forall t \in [0,1]$

$$\left|tx'(0)\right| = \left|x(t)\right| - \left|x(0)\right| - \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \left|x''(s)\right|ds \le 1 + 1 + 4 = 6.$$

А это означает, что $\left|x'(0)\right| \le 6$. Следовательно, $\left|x'(t)\right| \le 4 + 6 = 10.$

Пусть $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ такие, что $\left|t_1 - t_2\right| < \delta$, тогда

$$\left|x(t_1) - x(t_2)\right| \le \left|x'(\tau)\right|\left|t_1 - t_2\right| \le 10\delta < \varepsilon.$$

В этом случае $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{10}$, что $\forall t_1, t_2$ $\left|t_1 - t_2\right| < \delta$ вытекает, что $\left|x(t_1) - x(t_2)\right| < \varepsilon$. А это означает равностепенную непрерывность множества *M*.

Таким образом, *M* – относительно компактно.

Задача № 4. Выяснить, является ли множество *M* относительно компактным в $C[0,2]$, где $M = \left\{x \in C[0,1]:\ \left|x(t)\right| \le 1,\ \forall t \in [0,1]\right\}$.

Решение. Функции вида $x_n(t) = \sin 2n\pi t,\ n = 1,2,...$ принадлежат множеству *M*, но последовательность $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ не содержит последовательности Коши, так как при *k*>*n* $\left\|x_n - x_k\right\| = \max\limits_{0 \le t \le 1}\left|x_n(t) - x_k(t)\right| \ge \left|x_n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) - x_k\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right| = 1.$

По определению, множество *M* не относительно компактно.

Задача № 5. Выяснить, будет ли множество *M* компактным в $C[0,1]$, если $M = \left\{x(t) \in C[0,1]:\ x(0) = 0,\ x(1) = 1, \left|x(t)\right| \le 1 \quad \forall t \in [0,1]\right\}$.

Решение. Рассмотрим отображение $f: C[0,1] \to R$, где $f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$. Заметим, что $f(x) \ge 0$ для $\forall x(t) \in C[0,1]$. Данное отображение является равномерно непрерывным. Поэтому, если *M* компактно, то по теореме Вейерштраса $\exists x_0 \in M$, что $f(x_0) = \min\limits_{x \in M} f(x)$. Пусть $x_n(t) = t^n, t \in [0,1], n \in N, x_n(t) \in M$ и $f(x_n) = \int\limits_0^1 t^{2n}dt = \dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Следовательно $f(x_0)=0$. Поэтому $x_n(t)\to x_0(t)$ такой, что $\int\limits_0^1 x_0^2(t)dt=0$, но тогда $x_0(t)\equiv 0$. Однако $x_0(t)\equiv 0$ не принадлежит множеству *M*. А это означает, что M не компактно.

Задание №1. Являются ли относительно компактными следующие множества в пространстве $C[0,1]$?

1.1. $M=\left\{t^n : n\in N\right\}$;

1.2. $M=\left\{\sin(nt) : n\in N\right\}$;

1.3. $M=\left\{\sin(n+t) : n\in N\right\}$;

1.4. $M=\left\{\cos(n+t) : n\in N\right\}$;

1.5. $M=\left\{\sin(\alpha\, t) : \alpha\in(0,1)\right\}$;

1.6. $M=\left\{arctg(\alpha\, t) : \alpha\in(0,1)\right\}$;

1.7. $M=\left\{e^{t-\alpha} : \alpha\geq 0\right\}$;

1.8. $M=\left\{a\sin(b+t) : |a|<10, b>0\right\}$;

1.9. $M=\left\{at^n : |a|\leq 1, b>0\right\}$;

1.10. $M=\left\{|x(t)|<\sin(t)\right\}$;

1.11. $M=\left\{at^\alpha : 0\leq a\leq 1, 0<\alpha<1\right\}$;

1.12. $M=\left\{at^\alpha : |a|\leq 1, 1\leq\alpha\leq 10\right\}$;

1.13. $M=\left\{arctg(at+b) : |a|<1, b>1\right\}$;

1.14. $M=\left\{\dfrac{\sin(at)}{at} : 0<a<\infty\right\}$;

1.15. $M=\left\{x(t) : |x(t)|\leq B\right\}$;

1.16. $M=\left\{x(t) : |x(t)|\leq B; |x(t_1)-x(t_2)|<L|t_1-t_2|\right\}$;

1.17. $M=\left\{x(t)\in C^{(2)}[0,1] : |x(t)|\leq B_0, |x''(t)|\leq B_2\right\}$;

1.18. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]\colon |x(t)| \le 2,\, |x'(t)| \le 3 \right\};$

1.19. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]\colon |x(t)| \le |x''(t)| \le 1 \right\};$

1.20. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]\colon |x(0)| \le 1,\, |x(t_1) - x(t_2)| \le |t_1 - t_2| \right\};$

1.21. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]\colon |x(0)| \le 1,\, |x''(t)| \le 4 \right\};$

1.22. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]\colon |x'(t)| \le 2 \right\}.$

Задание №2. Является ли множество *M* относительно компактным в пространстве l_p? В случае положительного ответа построить для множества конечную ε-сеть для ε=0,1.

2.1. $M = \left\{ x\colon |x_k| < \frac{1}{k},\, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

2.2. $M = \left\{ x\colon |x_k| < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}},\, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

2.3. $M = \left\{ x\colon |x_k| < \frac{1}{k^2},\, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

2.4. $M = \left\{ x\colon |x_k| < \frac{1}{\sqrt[5]{k^2}},\, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

2.5. $M = \left\{ x\colon |x_1| = 1,\, |x_{2k}| < \frac{1}{2^k},\, |x_{2k+1}| < \frac{1}{3^{2k}},\ k \in N \right\}, \quad p = 1;$

2.6. $M = \left\{ x\colon |x_k| < \frac{1}{2^{ak}},\, k \in N,\, \frac{1}{2} < a < 1 \right\}, \quad p = 2;$

2.7. $M = \left\{ x\colon |x_k| = \frac{k}{1+k^2},\, k \in N \right\}, \quad p = 3;$

2.8. $M = \left\{ x\colon |x_k| = \frac{k}{1+2k^2},\, k \in N \right\}, \quad p = 3;$

2.9. $M = \left\{ x\colon \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k| \cdot 2^k < \infty,\, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

2.10. $M = \left\{ x\colon x_k = \frac{\sin k}{k},\, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

2.11. $M=\left\{x: x_k=\dfrac{k}{1+3k^2},\ k\in N\right\},\quad p=2;$

2.12. $M=\left\{x: x_k>0, x_{k+1}<\dfrac{1}{2}x_k,\ k\in N\right\},\quad p=2;$

2.13. $M=\left\{x: \dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k}}\le\dfrac{1}{2^k},\ k\in N, |x_1|<1\right\},\quad p=4;$

2.14. $M=\left\{x: x_k=\dfrac{1}{2^k},\ k\in N\right\},\quad p=2.$

ТЕМА 2. СОПРЯЖЕННЫЕ, САМОСОПРЯЖЕННЫЕ, ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Основные понятия: сопряженный оператор, самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах, интегральный оператор, вполне непрерывный оператор.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. К оператору $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, действующему по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$, вычислить сопряженный.

Решение. Оператор A является линейным и ограниченным, отображающим гильбертово пространство $L_2[0,1]$ в себя. Для построения сопряженного оператора воспользуемся определением:

$$(Ax,y)_{L_2[0,1]}=(x,A^*y)_{L_2[0,1]} \text{ для } \forall x(t),y(t)\in L_2[0,1].$$

Тогда

$$(Ax,y)=\int\limits_0^1 Ax(t)y(t)dt=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t x(\tau)d\tau\right)y(t)dt=\int\limits_0^1 x(t)\left(\int\limits_t^1 y(\tau)d\tau\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^1 x(t)A^*y(t)dt=(x,A^*y).$$

Следовательно, сопряженный оператор определяется соотношением $A^*y(t)=\int\limits_t^1 y(\tau)d\tau$. Видно, что оператор A не является самосопряженным.

Задача 2. Найти сопряженный оператор A^* к оператору A, если $A: l_2 \to l_2$ и $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$, *где* $x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность вещественных чисел.

Решение. Оператор A является линейным и непрерывным. Согласно определению сопряженного оператора в гильбертовом пространстве, имеем

$$(Ax, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k = y_k \sum_{k=1}^{\infty} x_k \alpha_k y_k = (x, A^* y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^* y = (\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2, \ldots).$$

Видно, что над полем вещественных чисел оператор является самосопряженным.

Задача 3. Выяснить, является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}} ds$.

Решение. Оператор A задан не на всем пространстве $C[0,1]$. Действительно, если рассмотреть функцию $x(t) \equiv 1$, $\forall t \in [0,1]$, то $Ax(t) = \int_0^1 \frac{ds}{|t-s|}$ и интеграл является расходящимся. Оператор A поэтому не является ограниченным и, следовательно, вполне непрерывным как отображение из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

Задача 4. Выяснить, является ли вполне непрерывным оператор
а) $A: C[0,1] \to C[01,]$; б) $A: L_2[0,1] \to L_2[01,]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int_0^1 x(s^2) ds$.

Решение. а). Оператор A является линейным, ограниченным $(\|A\| = 1)$ оператором конечного ранга, следовательно, A – вполне непрерывный оператор.

б). Исследуем оператор A в пространстве $L_2[0,1]$. $\int_0^1 x(s^2) ds = \begin{bmatrix} s^2 = t \\ 2sds = dt \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{x(t)}{2\sqrt{t}} dt$ Покажем, что оператор A неограничен.

Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{t^{1/2n - 1/2}}{\sqrt{n}}$, $t \in [0,1]$ из пространства $L_2[0,1]$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{x_n(t)}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{t^{1/n - 1}}{\sqrt{n}} dt = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax_n\| = \sqrt{n}, \quad \forall n \in N.$$

Оператор A неограничен и поэтому A не является вполне непрерывным.

Задача 5. Будет ли вполне непрерывным оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$, если он действует из $C^{(2)}[0,1]$ в $C[0,1]$.

Решение. Покажем, что оператор A вполне непрерывен. Пусть $M \subset C^{(2)}[0,1]$ – произвольное ограниченное множество, т.е. $\exists \beta > 0$, что $\forall x(t) \in M \Rightarrow \|x\|_{C^2[0,1]} = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x''(t)| \le \beta$, тогда $\max\limits_t |x'(t)| \le \beta$ и $\max\limits_t |x''(t)| \le \beta, \quad \forall x \in M$.

Рассмотрим множество $A(M) = \{x'(t) | x(t) \in M\}$.Тогда каждая функция из $A(M)$ непрерывно дифференцируема и как показано выше $A(M)$ равномерно ограничено. Докажем, что $A(M)$ равностепенно непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$ задано, выберем $\delta = \varepsilon/\beta$. Тогда для $\forall x(t) \in M, \quad \forall t_1, t_2 \in [0,1]$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < \delta$, имеем

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |x''(\tau)| \cdot |t_1 - t_2| < \beta\delta \le \varepsilon \quad (\tau \in [t_1, t_2] \subset [0,1]).$$

По теореме Арцела множество $A(M)$ относительно компактно, поэтому оператор A вполне непрерывен.

Задача 6. Рассмотрим оператор $A : l_2 \to l_2$, определенный с помощью формулы

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2,$$

где $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ – заданная числовая последовательность. Какой должна быть эта последовательность, чтобы оператор A был вполне непрерывным?

Решение. Мы показывали ранее, что оператор A является ограниченным тогда и только тогда, когда последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, т.е. $\exists L > 0$, что $|\alpha_i| \le L, \ \forall i$. Докажем, что оператор A является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и пусть $M \subset l_2$ ограничено, т.е. $\exists \beta > 0$, что $\|x\|_{l_2} = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} \le \beta$ для $\forall x \in M$. В этом случае оператор A ограничен, т.е. он отображает ограниченное множество M в ограниченное множество $A(M)$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ следует, что $\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |\alpha_n| < \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta}$. Поэтому для $\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ имеем $\sum\limits_{j=n_0}^{\infty} |Ax_i|^2 = \sum\limits_{j=n_0}^{\infty} \alpha_i{}^2 x_i{}^2 \le \dfrac{\varepsilon}{\beta^2} \sum\limits_{j=n_0}^{\infty} x_i{}^2 \le \varepsilon$, т.е. согласно критерию относительной компактности в l_2 множество $A(M)$ относительно компактно. Пусть теперь A вполне непрерывный оператор, тогда он ограничен и, следовательно, последовательность $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ также ограничена. Рассмотрим для каждого $n \in N$ вектор $l_n = (0,...,0,1,0,...) \neq 0, \quad Al_n = \alpha_n l_n$. Следовательно, все числа α_n являются собственными значениями вполне непрерывного оператора A. Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Задание 1. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующему по следующим формулам:

1.1. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} tx(s)ds;$

1.2. $Ax(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t \le \lambda\ , \\ 0, & \lambda < t \le 1, \end{cases}$

1.3. $Ax(t) = x(t^{\alpha});$

1.4. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} sx(s)ds;$

1.5. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} sx\left(s^{1/4}\right)ds;$

1.6. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} sx(s)ds;$

1.7. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} ts^3x(s)ds;$

1.8. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} e^s x(s)ds;$

1.9. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} ts^2x(s)ds;$

1.10. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} ts^2x(s)ds;$

1.11. $Ax(t) = \int\limits_0^{\cos t} tsx(s)ds;$

1.12. $Ax(t) = \int\limits_{t^3}^{1} t^2x\left(\sqrt[3]{s}\right)ds;$

1.13. $Ax(t) = \int\limits_t^{t^2} e^t x(s)ds;$

1.14. $Ax(t) = \int\limits_t^{1-t} x(s)ds.$

Задание 2. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A: l_2 \to l_2$, действующему по следующим формулам. Будет ли A само сопряженным?

2.1. $Ax = (x_2, x_3, ...), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.2. $Ax = (0, x_1, x_2, ...), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.3. $Ax = (0, 0, \alpha_1 x_1, ...), \quad \alpha_i \in C, \quad i = 1,2,..., \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.4. $Ax = (x_1, ..., x_n, 0, ...), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.5. $Ax = \left(\underbrace{0,...,0}_{n-1}, x_1, ...\right), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.6. $Ax = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, ...), \quad \alpha_i \in R, \quad i = 1,2,..., \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.7. $Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, ...), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.8. $Ax = (x_3, x_1, x_2, x_4, ...), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.9. $Ax = (-x_1, x_2, -x_3, x_4, ...), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;$

2.10. $Ax=(0,0,x_3,x_4,\ldots),\quad x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_2$;

2.11. $Ax=(0,0,x_1,x_2,\ldots),\quad x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_2$;

2.12. $Ax=(x_2,x_1,x_4,x_3,\ldots),\quad x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_2$;

2.13. $Ax=(x_1,0,x_2,0,\ldots),\quad x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_2$;

2.14. $Ax=(x_2,0,x_3,0,\ldots),\quad x=(x_1,x_2,\ldots)\in l_2$.

Задание 3. Являются ли вполне непрерывными следующие операторы как отображение E в E?

3.1. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=x(0)+tx\left(\frac{1}{2}\right)+t^2x(1)$;

3.2. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=x(t^2)$;

3.3. $E=C[-1,1],\quad Ax(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$;

3.4. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^t \tau x(\tau)d\tau$;

3.5. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 e^{ts}\tau x(s)ds$;

3.6. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^t \tau x(\tau)d\tau$;

3.7. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 \frac{x(s)ds}{|t-s|^{\alpha}}$;

3.8. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 \frac{x(\sqrt{s})}{s^{5/4}}ds$;

3.9. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 \frac{x(s)}{\sin(t-s)}ds$;

3.10. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 (s\sin t+s^2\cos t)x(s)ds$;

3.11. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 \frac{x(s)}{s-1/2}ds$;

3.12. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 t^{\alpha}s^{\beta}x(s^{\gamma})ds,\ \gamma>0$;

3.13. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 t^{\alpha}s^{\beta}x(s^{\gamma})ds,\ \gamma>0$;

$E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1 tsx(s)ds+\sin tx(1)$.

ТЕМА 3. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ С ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНВМ ОПЕРАТОРОМ

Основные понятия: вполне непрерывные операторы, их признаки, условия разрешимости неоднородных уравнений с вполне непрерывным оператором, теоремы Фредгольма.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Найти $KerA$ и $KerA^*$ для оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующего по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau,\ x(t) \in L_2[0,1]$.

Решение. Оператор *A* является линейным и непрерывным, а сопряженный к нему (см. лаб. раб. №4) действует по формуле

$$A^*x(t) = \int\limits_t^1 x(\tau)d\tau,\ x(t) \in L_2[0,1].$$

$$KerA^* = \left\{ x(t) \in L_2[0,1]:\ \int\limits_t^1 x(\tau)d\tau = 0,\ t \in [0,1] \right\}.$$

Продифференцировав по *t* соотношение $\int\limits_\tau^1 x(\tau)d\tau = 0$, получим, что $x(t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$. Поэтому $KerA^* = \{0\}$.

Аналогично и ядро оператора *A* состоит только из нулевых функций.

Задача 2. Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, определенный с помощью равенства $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau,\ \forall x(t) \in C[0,1]$.

а) Доказать, что уравнение $x - Ax = y$ имеет решение при $\forall y(t) \in C[0,1]$.

б) Найти $(I - A)^{-1}$.

Решение. Проверим, что *A* – вполне непрерывный оператор. Пусть $M \subset C[0,1]$ – ограниченное множество, т.е. $\exists \beta > 0$, что $\|x\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le \beta \quad для \quad \forall x(t) \in M$. Тогда

$$\|Ax\| = \max_{0 \le t \le 1} \left| \int\limits_0^t x(\tau)d\tau \right| \le \max_{0 \le t \le 1} \int\limits_0^t |x(\tau)|d\tau \le \beta \quad для \quad \forall x(t) \in C[0,1].$$

Значит $A(M)$ – равномерно ограничено. Покажем еще, что *A(M)* равностепенно-непрерывное множество.

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} x(\tau)d\tau \right| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} |x(\tau)|d\tau \le \max_{0 \le \tau \le 1} |x(\tau)| \cdot |t_1 - t_2| =$$

$$= \|x\| \cdot |t_1 - t_2| \leq \beta \cdot |t_1 - t_2| < \varepsilon \quad \text{\textit{при}} \;\; \delta < \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Следовательно, A – вполне непрерывный оператор. Согласно первой теореме Фредгольма, покажем, что однородное уравнение $z(t) - Az(t) = 0$ имеет только нулевое решение. Из тождества

$$z(t) = \int_0^t z(\tau)d\tau \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

получаем (после дифференцирования)

$$z'(t) = z(t), \;\; z(0) = 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0.$$

Поэтому существует обратный оператор $(I - A)^{-1} : C[0,1] \to C[0,1]$, являющийся линейным и непрерывным. Найдем его, решив уравнение

$$x(t) - \int_0^t x(\tau)d\tau = y(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Уравнение дифференцировать нельзя, т.к. функция $y(t)$ лишь непрерывна, и поэтому она не обязана быть дифференцируемой. Ищем решение уравнения в виде $x(t) = y(t) + z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, где $z(t)$ – новая неизвестная функция, удовлетворяющая условию $z(0) = 0$.

Имеем, $z(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau + \int_0^t z(\tau)d\tau \quad (0 \leq t \leq 1)$.

Сейчас $z(t)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению $z'(t) = y(t) + z(t)$, $z(0) = 0$. Решая это уравнение методом вариации постоянной, имеем $z(t) = \left(c + \int_0^t y(\tau)e^{-\tau}d\tau \right)e^t$, $0 \leq t \leq 1$.

С учетом условия: $z(t) = e^t \int_0^t y(\tau)e^{-\tau}d\tau$.

Значит, $x(t) = y(t) + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau$, $0 \leq t \leq 1$.

Следовательно, обратный оператор действует по формуле

$$\left((I - A)^{-1}\right)y(t) = y(t) + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau, \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

Задача 3. Найти решение интегрального уравнения Фредгольма при всех значениях $\lambda \neq 0$ и при всех значениях параметров *a* и *b*.

$$x(t) - \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (s \sin t + \cos s)x(s)ds = at + b. \qquad (1)$$

Решение. В соответствии с теоремой Фредгольма рассмотрим следующие уравнения:

$$x(t)-\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(s\sin t+\cos s)x(s)ds=0, \qquad (2)$$

$$u(t)-\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(t\sin s+\cos t)u(s)ds=g(t), \qquad (3)$$

$$u(t)-\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(t\sin s+\cos t)u(s)ds=0. \qquad (4)$$

В альтернативе Фредгольма утверждается, что:

а) уравнения (2) и (4) имеют только нулевые решения, уравнения (1) и (3) разрешимы для любых правых частей;

б) уравнение (2) имеет только конечное число линейно независимых решений $x_1,..., x_n$, уравнение (4) также имеет только n линейно независимых решений $u_1,..., u_n$. Уравнение (1) разрешимо для $y(t)\in L_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b y(t)u_k(t)dt=0, \quad k=1,2,...,n.$$

В связи с этим рассмотрим решение уравнения (2).

$$x(t)=\lambda\sin t\int_{-\pi/2}^{\pi/2}sx(s)ds+\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos s\cdot x(s)ds=\lambda C_1\sin t+C_2\lambda,$$

где $C_1=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}sx(s)ds,\ \ C_2=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos s\cdot x(s)ds.$ Таким образом, решение уравнения (2) нужно искать в виде $x(t)=C_1\lambda\sin t+C_2\lambda.$ Вычислим C_1 и C_2 из следующей системы:

$$\begin{cases} C_1=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}s(C_1\lambda\sin s+C_2\lambda)\,ds, \\ C_2=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos s(C_1\lambda\sin s+C_2\lambda)\,ds; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(1-2\lambda)=0, \\ C_2(1-2\lambda)=0. \end{cases}$$

В соответствии с теорией разрешимости линейных систем, система имеет ненулевое решение относительно C_1 и C_2 в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это значит, что при $\lambda = 1/2$ система имеет ненулевое решение, а при $\lambda \neq 1/2$ $C_1 = C_2 = 0$. Рассмотрим два случая.

а) $\lambda \neq 1/2$. Уравнение (2) имеет только нулевое решение, тогда уравнение (1) имеет решение при любой правой части, т.е., при $\forall a, b$. Будем его искать в виде:

$$x(t) = C_1\lambda \ \sin t + C_2\lambda + at + b,$$

где
$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} s\left(C_1\lambda \ \sin s + C_2\lambda\right) ds, \\ C_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos s\left(C_1\lambda \ \sin s + C_2\lambda\right) ds. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = \dfrac{\pi^3 a\lambda}{12(1-2\lambda)}$, $C_2 = \dfrac{2b}{1-2\lambda}$.

Получим следующее решение уравнения (1) при $\lambda \neq 1/2$:

$$x(t) = \frac{\pi^3 a\lambda^2}{12(1-2\lambda)}\sin t + \frac{2b\lambda}{1-2\lambda} + at + b.$$

б) $\lambda = 1/2$. В этом случае мы должны вычислить линейно независимые решения уравнения (4):

$$u(t) = 1/2\, t \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin s\, u(s) ds + 1/2 \cos t \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} u(s) ds = 1/2\, t\ C_1 + 1/2 \cos t\, C_2,$$

где $C_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin s \left[1/2\, sC_1 + 1/2 \cos s\, C_2\right] ds,\quad C_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1/2\, sC_1 + 1/2 \cos s\, C_2\right) ds.$

После вычисления интегралов получим ,что линейно независимыми решениями (4) будут функции:

$$u_1(t) = 1/2\, tC_1, \quad u_2(t) = 1/2 \cos t\, C_2.$$

Таким образом, уравнение (1) разрешимо, если a и b удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} t C_1 (at+b) dt = 0, \\ \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos t \, C_2 (at+b) dt = 0. \end{cases}$$

Из решения систем имеем, что $a = b = 0$. При $\lambda = 1/2$ уравнение (1) разрешимо при $a = b = 0$ и его решение $x(t) = C_2 + C_1 \sin t,$ где C_1 и C_2 любые константы.

Задача 4. Решить уравнение $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 K(t,s) x(s) ds = t$ с симметричным ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \le t \le s, \\ s(t-1), & s \le t \le 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем характеристические значения и собственные функции этого ядра. Исходя из определения, нужно найти те значения λ_n, при которых уравнение $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 K(t,s) x(s) ds = 0$ имеет нетривиальные решения $x_n(t)$, и найти функции $x_n(t)$. Для этого перейдем от интегрального уравнения к соответствующему ему дифференциальному уравнению. Поскольку

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^t s(t-1) x(s) ds + \lambda \int\limits_t^1 t(s-1) x(s) ds,$$

то после двукратного дифференцирования обеих частей по t имеем

$$x''(t) - \lambda \, x(t), \; x(0) = x(1) = 0.$$

Значит $x(t) = c_1 e^{i\sqrt{\pi} t} + c_2 e^{-i\sqrt{\pi} t}$, тогда

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{i\sqrt{\pi}} + c_2 e^{-i\sqrt{\pi}} = 0. \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение $\lambda_n = -n^2 \pi^2, \; n \in N$, при этом $x_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t, \; n \in N$.

Воспользуемся теоремой Гильберта-Шмидта о разрешимости уравнений с вполне непрерывным самосопряженным оператором. Итак, при $\lambda \ne \lambda_n$ решением данного уравнения являются функции

$$x(t) = t - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} a_n}{\lambda + n^2 \pi^2} \sin \pi n t,$$

где a_n – коэффициенты Фурье функции $f(t) \equiv t$, т. е. $a_n = \int\limits_0^1 t \sin \pi n t dt$.

Значит,

$$x(t) = t - \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi n t}{n(\lambda + n^2 \pi^2)}.$$

При $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n \in N$ исходное уравнение решений не имеет, т.к. его правая часть не ортогональна ($a_n \neq 0$) всем решениям соответствующего однородного уравнения.

Задание 1. Найти все решения следующих интегральных уравнений при всех значениях $\lambda \neq 0$ и при всех значениях параметров *a, b, c*, входящих в свободный член этих уравнений.

1.1. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) ds = a \sin t + b;$

1.2. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts+1) x(s) ds = a t^2 + bt + c;$

1.3. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t^2 s + s^2 t) x(s) ds = at + b t^3;$

1.4. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2} (ts + s^2 t^2) x(s) ds = at + b;$

1.5. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(5(ts)^{1/3} + 7(st)^{2/3}\right) x(s) ds = at + b t^{1/3};$

1.6. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+st}{1+s^2} x(s) ds = a + t + b t^2;$

1.7. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t}\right) x(s) ds = a t^2 + bt + c;$

1.8. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(ts + s^2 + t^2 - 3s^2 t^2\right) x(s) ds = at + b;$

1.9. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(3t + ts - 5s^2 t^2\right) x(s) ds = at;$

1.10. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(3ts + 5s^2 t^2\right) x(s) ds = at^2 + bt;$

1.11. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (t \sin s + \cos t) x(s) ds = a + b \cos t;$

1.12. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(st^2+s^2t^3\right)x(s)\,ds=at^2+bt+c;$

1.13. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{st+s^2t^2}{1+s^2}x(s)\,ds=at+b;$

1.14. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{1}\left(ts-\tfrac{1}{3}\right)x(s)\,ds=at^2-bt+1;$

1.15. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(ts+2s^2t^2\right)x(s)\,ds=at^2+bt^4-c;$

1.16. $x(t)-\lambda\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(s\sin t+\cos s)x(s)\,ds=at+b-c;$

1.17. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos(2t+4s)x(s)\,ds=e^{at+b};$

1.18. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+st}{\left(1+s^2\right)^{1/2}}x(s)\,ds=at^2-(b+c)t+b;$

1.19. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(s^2t+s\right)x(s)\,ds=at^2+b+ct;$

1.20. $x(t)-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t\cos s+\sin t\cos s)x(s)\,ds=a+b\sin t;$

1.21. $x(t)-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t\sin s+\cos t)x(s)\,ds=(a-b)t+b;$

1.22. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{s}+\sqrt[3]{t}\right)x(s)\,ds=(a+b)t^2+t-c;$

1.23. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+ts}{\sqrt{1-s^2}}x(s)ds=at^2-(b+c)t+b;$

1.24. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{1}(t+s)x(s)ds=at^2+b+1;$

1.25. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos(2t+4s)x(s)ds=e^{at+b}.$

Задание 2. При каждом значении λ выяснить значения параметров a, b, c, используя сопряженный оператор, при которых существует решение интегрального уравнения в пространстве $L_2[a,b]$.

2.1. $x(t)-\lambda\int_{0}^{\pi}\sin(t-2s)x(s)ds=(a-b)t+c;$

2.2. $x(t)-\lambda\int_{0}^{\pi}\sin(3t+s)x(s)ds=ae^{t}+(b+c)t;$

2.3. $x(t)-\lambda\int_{0}^{\pi}\sin(2t+s)x(s)ds=at+c+b\sin t;$

2.4. $x(t)-\lambda\int_{0}^{2\pi}\cos(2t+4s)x(s)ds=e^{at+b};$

2.5. $x(t)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(t\sin s+\cos t)x(s)ds=at+b;$

2.6. $x(t)-\lambda\int_{0}^{\pi}\cos(2t+s)x(s)ds=a+2b\cos 2t;$

2.7. $x(t)-\lambda\int_{0}^{\pi}\sin(t+s)x(s)ds=a\cos t+b\sin t+c;$

2.8. $x(t)-\lambda\int_{0}^{\pi}(\cos t\sin s-\cos 2t\cos 2s)x(s)ds=at+bt^{2}+c;$

2.9. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(1+s^{2}+t^{2}\right)x(s)ds=at+bt^{3};$

2.10. $x(t)-\lambda\int_{0}^{2\pi}(\cos t\cos s+2\sin 2t\sin 2s)x(s)ds=at+b;$

2.11. $x(t)-\lambda\int_{0}^{2\pi}\cos(3t+s)x(s)ds=a+b+\sin t;$

2.12. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(5+4ts+9t^{2}s^{2}-3t^{2}-3s^{2}\right)x(s)ds=at+b;$

2.13. $x(t)-\lambda\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{t}{s}\right)^{2/5}+\left(\frac{s}{t}\right)^{2/5}\right]x(s)ds=(a-b)t+b-ct^{2};$

2.14. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(ts-3t^{2}s^{2}+t^{2}+s^{2}\right)x(s)ds=c-(b+1)t;$

2.15. $x(t)-\lambda\int_{0}^{1}(t+s-2ts)x(s)ds=at^{2}+bt-ct^{3};$

2.16. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(t^{2}-ts\right)x(s)ds=(a+b)\sin t-b;$

2.17. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(5t^3s+t^4\right)x(s)ds=at^3+bt-c;$

2.18. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}(1-t+2ts)x(s)ds=at+b;$

2.19. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(t^3s+t^2s^2\right)x(s)ds=(a+b)t+ce^t;$

2.20. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(2ts^3+5t^2s^2\right)x(s)ds=(b+c)t+a;$

2.21. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(1+ts+t^2+s^2\right)x(s)ds=at+b+ct^2;$

2.22. $x(t)-\lambda\int_{-1}^{1}(1+ts)x(s)ds=at^3+bt+c;$

2.23. $x(t)-\lambda\int_{0}^{\pi}\sin(3s+t)x(s)ds=a\sin t+bt;$

2.24. $x(t)-\lambda\int_{0}^{2\pi}\cos(3s-t)x(s)ds=a\cos t+b\sin t+ct;$

Задание 3. В пространстве $L_2[a,b]$ найти решение интегрального уравнения $x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds=y(t)$ с помощью разложения по собственным функциям.

3.1. $K(t,s)=\sin(t+s),\quad f(t)=t+\sin t,\quad x(t)\in L_2\left[0,\pi/2\right];$

3.2. $K(t,s)=\cos(t+s),\quad f(t)=\cos t+1,\quad x(t)\in L_2[0,\pi];$

3.3. $K(t,s)=\sin(t+s),\quad f(t)=t+1,\quad x(t)\in L_2[0,\pi];$

3.4. $K(t,s)=e^{t+s},\quad f(t)=te^t,\quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.5. $K(t,s)=ts+t^2s^2,\quad f(t)=t^2+t+1,\quad x(t)\in L_2[-1,1];$

3.6. $K(t,s)=\cos^2(t-s),\quad f(t)=\sin 2t+1,\quad x(t)\in L[-\pi,\pi];$

3.7. $K(t,s)=\cos(t+s),\quad f(t)=t^2,\quad x(t)\in L_2\left[0,\pi/2\right];$

3.8. $K(t,s)=\begin{cases}(t+1)s, & 0\le t\le s,\\ (s+1)t, & s\le t\le 1,\end{cases}\quad f(t)=\cos\pi t,\quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.9. $K(t,s)=\begin{cases}t-s, & 0\le t\le s,\\ s-t, & s\le t\le 1,\end{cases}\quad f(t)=t^3-t^2,\quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.10. $K(t,s)=\begin{cases}t(s-1), & t\le s,\\ s(t-1), & s\le t,\end{cases}\quad f(t)=\sin\pi t,\quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.11. $K(t,s)=\min(t,s), \quad f(t)=\sin \pi t, \quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.12. $K(t,s)=2\cos(t-s), \quad f(t)=t^2+t, \quad x(t)\in L[0,\pi];$

3.13. $K(t,s)=ts, \quad f(t)=t, \quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.14. $K(t,s)=\begin{cases}\sin t\cos s, & t\le s,\\ \cos t\sin s, & s\le t,\end{cases} \quad f(t)=t, \quad x(t)\in L_2\left[0,\pi/2\right];$

3.15. $K(t,s)=\begin{cases}t(s+1), & t\le s,\\ s(t+1), & s\le t,\end{cases} \quad f(t)=t, \quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.16. $K(t,s)=\begin{cases}(t+1)(s-2), & t\le s,\\ (s+1)(t-2), & s\le t,\end{cases} \quad f(t)=\sin 2t, \quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.17. $K(t,s)=\begin{cases}\sin t\sin(s-1), & t\le s,\\ \sin s\sin(t-1), & s\le t,\end{cases} \quad f(t)=t-1, \quad x(t)\in L_2[-\pi,\pi];$

3.18. $K(t,s)=\begin{cases}\sin t\sin(s-1), & t\le s,\\ \sin s\sin(t-1), & s\le t,\end{cases} \quad f(t)=\cos 3t, \quad x(t)\in L_2[0,\pi];$

3.19. $K(t,s)=\begin{cases}t(s-1), & t\le s,\\ s(t-1), & s\le t,\end{cases} \quad f(t)=t-1, \quad x(t)\in L_2[0,1];$

3.20. $K(t,s)=\cos(t+s), \quad f(t)=\sin t, \quad x(t)\in L_2[0,\pi];$

3.21. $K(t,s)=s^{1/3}+t^{1/3}, \quad f(t)=t^2+1, \quad x(t)\in L_2[-1,1];$

3.22. $K(t,s)=t^2s+s^2t, \quad f(t)=t+1, \quad x(t)\in L_2[-1,1].$