Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Школа естественных наук
Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

Петров Александр Дмитриевич

КУРСОВАЯ РАБОТА

Стабилизация неустойчивых параболических систем

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор

____________ Чеботарёв А.Ю.

Заведующий кафедрой — доктор физико-математических наук, профессор

____________ Чеботарёв А.Ю.

Владивосток 2014

Содержание

1 Введение

В реальных физических процессах неизбежно возникают непредусмотренные флуктуации и поэтому возникает необходимость разработки методов построения управлений, способных реагировать на непредусмотренные возмущения и подавлять их. Проблемы стабилизации для систем параболического типа, привлекают внимание специалистов в силу прикладной значимости данной системы[1]. Управления такого типа называются *управления с обратной связью*[4].

Вопрос о стабилизируемости различных эволюционных уравнений в частных производных, с помощью управлений, исследовался многими авторами, среди которых J.-L. Lions, V.Komornik, J.-M. Coron, M. Kristic[4] и разработы методы такого управления, такие как : стабилизация Ляпунова, метод backstepping, управление с обратной связью.

В данной курсовой работе рассматривается стабилизация линейной параболической системы с постоянными коэффициентами конечномерным локальным управлением с обратной связью.

2 Анализ устойчивости линейного параболического уравнения

Рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t = u_{xx} + \alpha u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

с начальным и граничными условиями:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2.2}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \in L^2(0,1).$$

Здесь и далее через u_t, u_x, $u_x x$ .. обозначаются соотвествующие частные производные функции u.
Умножим уравнение (2.1) на u скалярно в $L^2(0,1)$,

$$(u_t, u) = (u_{xx}, u) + \alpha(u, u).$$

Скалярное произведение в $L^2(0,1)$ определяется как $(u,v) = \int_0^1 uvdx$, а норма как $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$.
Получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u\right\|^2 = -\left\|u_x\right\|^2 + \alpha\left\|u\right\|^2. \tag{2.3}$$

С помощью неравенства Пуанкаре–Фридрихса-Стеклова

$$\left\|u\right\|^2 \leq \frac{1}{\pi^2}\left\|u_x\right\|^2.$$

получаем следующую оценку

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u\right\|^2 \leq (\alpha - \pi^2)\left\|u\right\|^2. \tag{2.4}$$

Рассмотрим 3 случая

1. $\alpha = \pi^2$. Тогда из (2.4) следует неравенство

$$\left\|u\right\|^2 \leq \left\|u_0\right\|^2. \tag{2.5}$$

Указанное неравенство означает, что нулевое решение задачи (2.1) - (2.2) устойчиво по Ляпунову, но не устойчиво ассимптотически

2. $\alpha < \pi^2$. Обозначим $\frac{\mu}{2} = -(\alpha - \pi^2)$.
   Тогда
   $$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \mu\|u\|^2 \leq 0 \tag{2.6}$$
   Домножим обе части (2.6) на $e^{\mu t}$. Тогда, $\frac{d(\|u\|^2 e^{\mu t})}{dt} \leq 0$. Проинтегрируем и в итоге получим
   $$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\mu t} = \|u_0\|^2 e^{2(\alpha-\pi^2)t}$$
   Полученная оценка гарантирует ассимптитическую экспоненциальную устойчивость.

3. $\alpha > \pi^2$. Решение начально краевой задачи (2.1) - (2.2) имеет вид
   $$u(x,t) = 2\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{(\alpha-\pi^2 j^2)t} \sin \pi j x \tag{2.7}$$
   Здесь $a_j = \int_0^1 u_0 \sin \pi j s ds$. Первый член суммы указывает на темп роста решения при $t \to \infty$. Следовательно, система неустойчива.

Для стабилизации системы (2.3) в случае 3, будем использовать ниже описанный метод.

3 Стабилизация конечномерным локальным управлением с обратной связью

Рассмотрим систему :

$$u_t = u_{xx} + \alpha u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

с начальным и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u(x,0) &= u_0(x) \in H. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь и далее $H = L_2(0,1)$, $V = H_0^1(0,1)$.
Как показано в §1, в случае, когда $\alpha > \pi^2$, нулевое решение уравнения (3.1) неустойчиво. Задача стабилизации параболического уравнения, заданного в ограниченной области, заключается в построении такого оператора управления, чтобы решение смешанной краевой задачи стремилось (при $t \to \infty$) к заданному стационарному решению с предписанной скоростью $\exp(-\delta_0 t)$

3.1 Конструкция оператора управления

Сформулируем задачу стабилизации неустойчивого нулевого решения уравнения (3.1) за счет локального управления

Пусть $\omega \subset (0,1)$ - произвольный интеравал такой, что $\bar{\omega} \subset (0,1)$.Задача стабилизации за счет конечномерных локально распределённых в ω управлений заключается в построении оператора $\mathcal{R} : H \to H$ такого, что :

1. $\forall z \in H \quad \operatorname{supp} \mathcal{R}z \subset \omega$,
2. $\dim \mathcal{R}(H) < +\infty$.

И при этом решение задачи

$$u_t - u_{xx} - \alpha u = \mathcal{R}u$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0$$

экспоненциально стремится к нулю при $t \to +\infty$

Заметим, что функции

$$w_j = w_j(x) = \sqrt{2}\sin \pi j x, \quad x \in (0,1), \quad j = 1,2,.. \tag{3.3}$$

образуют базис в H и в V, причем в H базис ортонормирован.
Через H_m обозначим подпространство в H, образованное первыми m функциями из (3.3).
Далее рассмотрим следующие операторы проектирования : $P_m : H \to H_m$, $Q_m : H \to H_m^{\perp}$.

$$P_m u = \sum_{j=1}^{m} (u, w_j) w_j \tag{3.4}$$

$$Q_m u = (I - P_m)u(x) = \sum_{j=m+1}^{\infty} (u, w_j) w_j \tag{3.5}$$

В качестве оператора стабилизиции будем рассматривать следующий конечномерный оператор : $\mathcal{R}z = -r\chi_\omega P_m z, \quad r > 0$.
Здесь $\chi_\omega(x) \ = \ \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \omega, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$

В следующем параграфе будет доказано, что существуют подходящие параметры $m \in \mathbb{N}$, $r = r_m > 0$, при которых $\mathcal{R}$ обеспечивает стабилизацию неустойчивого решения.

3.2 Теоретическое обоснование стабилизации

Рассмотрим уравнение

$$u_t - u_{xx} - \alpha u = -r\chi_\omega \varphi. \tag{3.6}$$

Здесь $\varphi = P_m u$ Домножим скалярно обе части (3.6) на φ. Учтем, что
$(u, \varphi) = \|\varphi\|^2$,
$(u_t, \varphi) = (\varphi_t, \varphi) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|^2$,

$(u_x x, \varphi) = (\varphi_x x, \varphi) = -(\varphi_x, \varphi_x) = -\left\|\varphi_x\right\|^2,$
$(\chi_\omega \varphi, \varphi) = \left\|\varphi\right\|_\omega^2,$
Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\varphi\right\|^2 + \left\|\varphi_x\right\|^2 - \alpha\left\|\varphi\right\|^2 + r\left\|\varphi\right\|_\omega^2 = 0.$$

Воспользуемся неравенством Пуанкаре-Фридрихса-Стеклова

$$\left\|\varphi\right\|^2 \leq \frac{1}{\pi^2}\left\|\varphi_x\right\|^2 \tag{3.7}$$

В итоге получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\varphi\right\|^2 + \pi^2\left\|\varphi\right\|^2 - \alpha\left\|\varphi\right\|^2 + r\left\|\varphi\right\|_\omega^2 \leq 0. \tag{3.8}$$

Приведём полезные для доказательства стабилизируемости леммы.

Лемма 1. *Система* $\{w_j|_\omega\}_1^m$ *линейно независима.*

Доказательство. Система $\{w_j|_\omega\}_1^m$ линейно независима, если тождество ввида

$$\sum_{j=1}^{m} c_j w_j(x) = 0, \quad x \in \omega \tag{3.9}$$

выполняется только при $c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$

Пусть D оператор дифференцирования, действующий в пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Заметим, что $D^2 w_j = -(\pi k)^2 w_j$. Подействуем на (3.9) оператором D $2l$ раз.

$$c_m(\pi m)^{2l} w_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_j(\pi j)^{2l} w_j(x) = 0$$

Разделим на $(\pi m)^{2l}$. Тогда

$$c_m w_m + \sum_{j=1}^{m-1} c_j \left(\frac{j}{m}\right)^{2l} w_j(x)$$

Устремим $l \to +\infty$ и заметим, что правое слагаемое стремится к 0.

Следовательно
$$c_m w_m = 0$$
Функция $w_m(x) = \sin \pi m x$ не может принимать нулевые значения на целом интервале, следовательно $c_m = 0$. Проделав те же самые рассуждения для $\sum\limits_{j=1}^{m-1} c_j w_j(x)$, получаем что
$$c_1 = c_2 = ... = c_m = 0.$$
$\square$

Лемма 2. $\gamma = \inf \left\{ \|z\|_\omega^2 : z = P_m u, \;\; u \in H, \;\; \|z\| = 1 \right\} > 0.$

Здесь $\|z\|_\omega^2 = \int\limits_\omega z^2 dx.$

Доказательство. Рассмотрим функцию f, определённую на единичной сфере в $\mathbb{R}^m$:
$f(c_1, c_2, ..., c_m) = \int\limits_\omega (\sum\limits_1^m c_j w_j)^2$, где $c_1^2 + c_2^2 + ... + c_m^2 = 1.$
По теореме Вейштрасса, существует функция $z_0 = \sum\limits_1^m c_j^0 w_j \in H_m$, такая, что $\gamma = f(c_1^0, c_2^0, ..., c_m^0) = \inf\limits_{c_1^2+..+c_m^2=1} f$. Заметим, что из линейной независимости $\{\omega_j\}_1^m$(по лемме 1) следует положительность γ. $\square$

Выберем число $m \in \mathbb{N}$ так, что
$$q = [(\pi(m+1))^2 - \alpha - 1] > 0 \tag{3.10}$$
На основании леммы 2 справедлива оценка
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|^2 + (\pi^2 - \alpha + r\gamma)\|\varphi\|^2 \leq 0.$$
Далее, выберем число $r = r_m > 0$ так, чтобы $\beta = \pi^2 - \alpha + r\gamma > 0$. Умножим обе части неравенства на $2e^{2\beta t}$, интегрируем по t и получаем следующую важную оценку
$$\|\varphi\|^2 \leq \|\varphi_0\|^2 e^{-2\beta t} \tag{3.11}$$

Здесь $\varphi_0 = P_m u_0$

Проведём аналогичные выкладки с $\psi = Q_m u$. Домножим обе части (3.6) скалярно на ψ. Учтем, что
$(u, \psi) = \|\psi\|^2$,
$(u_t, \psi) = (\psi_t, \psi) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2$,
$(u_x x, \psi) = (\psi_x x, \psi) = -(\psi_x, \psi_x) = -\|\psi_x\|^2$,
$(\chi_\omega \varphi, \psi) = \int_\omega \varphi\psi \leq \|\varphi\| \|\psi\|$.

С помощью неравенства Пуанкаре-Фридрихса-Стеклова получаем оценку

$$\|\psi\|^2 \leq (\frac{1}{\pi(m+1)})^2 \|\psi_x\|^2 \tag{3.12}$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 + (\pi(m+1))^2 \|\psi\|^2 - \alpha \|\psi\|^2 \leq r \|\varphi\| \|\psi\| . \tag{3.13}$$

Рассмотрим подробнее (3.13).
Для оценки произведения норм, воспользуемся неравенством Юнга

$$\|\varphi\| \|\psi\| \leq (\frac{\varepsilon \|\psi\|^2}{2} + \frac{\|\varphi\|^2}{2\varepsilon}).$$

Здесь $\varepsilon = \frac{2}{r}$. Из (3.13) получаем неравенства

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 + (\pi(m+1))^2 \|\psi\|^2 - \alpha \|\psi\|^2 \leq r(\frac{\varepsilon \|\psi\|^2}{2} + \frac{\|\varphi\|^2}{2\varepsilon})$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 + [(\pi(m+1))^2 - \alpha - 1] \|\psi\|^2 \leq \frac{r^2}{4}\|\varphi\|^2 \leq \frac{r^2}{4}\|\varphi_0\|^2 e^{-2\beta t}.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 + q\|\psi\|^2 \leq \frac{r^2}{4}\|\varphi_0\|^2 e^{-2\beta t}. \tag{3.14}$$

Напомним, что $q > 0$ за счет выбора числа гармоник в операторе P_m
Домножим обе части неравенства на $2e^{2qt}$ и проинтегрируем:
$\int\limits_0^t d(e^{2q\tau}\|\psi\|^2) \leq \frac{r^2}{2}\|\varphi_0\|^2 \frac{1}{2q-2\beta} \int\limits_0^t e^{(2q-2\beta)\tau} d[(2q-2\beta)\tau]$.
$e^{2qt}\|\psi\|^2 - \|\psi_0\|^2 \leq \frac{r^2}{2}\|\varphi_0\|^2 \frac{1}{2q-2\beta} e^{(2q-2\beta)t}$.

Следовательно

$$\|\psi\|^2 \leq \|\psi_0\|^2 e^{-2qt} + \frac{r^2}{2} \|\varphi_0\|^2 \frac{1}{2(q-\beta)} e^{-2\beta t} \tag{3.15}$$

Известно, что $u = \varphi + \psi$. Воспользуемся оценками норм ψ и φ [(3.15), (3.11)] и получим
$\|u\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 \leq \|\varphi_0\|^2 e^{-2\beta t} + \|\psi_0\|^2 e^{-2qt} + \frac{r^2}{2} \|\varphi_0\|^2 \frac{1}{2(q-\beta)} e^{-2\beta t}$. Окончально, оценку стабилизации можно записать в виде

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 \left(e^{-2\beta t} + e^{-2qt} + \frac{r^2 e^{-2\beta t}}{4(q-\beta)} \right) \tag{3.16}$$

4 Численные эксперименты

В настоящем параграфе приведены численные примеры, демонстрирующие предложенный алгоритм стабилизации

Рассмотрим задачу с построенным выше стабилизирующим оператором

$$u_t - u_x x - \alpha u = -r\chi_\omega P_m u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

К уравнению (4.1) добавим начальное и граничные условия

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \in H \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для численной реализации, запишем для (4.1) неявную разностную схему :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_{i+1}^j + u_{i+1}^{j-1}}{h^2} - \alpha u_i^j + r\chi_\omega P_m u_i^j = 0 \tag{4.3}$$

Запишем аппроксимацию начального и граничных условий:

$$\begin{aligned} u_i^0 &= u_0(x_i) \\ u_1^{j+1} &= u_N^{j+1} = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Вспомним, что оператор проектирования имеет вид :
$P_m u = \sum\limits_{j=1}^{m} (u, w_j) w_j = \sqrt{2}(\sum\limits_{j=1}^{m} C_k \sin \pi k x)$. Здесь $C_k = \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(s)\sin(\pi k s) ds$
Заметим, что C_k - это интеграл от быстро осциллирующей функции вида

$$\int\limits_a^b f(x) e^{i\omega x} dx \approx \int\limits_a^b L_3(x) e^{i\omega x} dx \tag{4.5}$$

Поскольку, функция f является гладкой, то на $[a, b]$ она легко приближается с известной погрешностью интерполяционными многочленами. Пусть для определенности, это интерполяционный многочлен в форме Лагранжа :

$$L_3(x) = P_1(x)f(x_1) + P_2(x)f(x_2) + P_3(x)f(x_3) \tag{4.6}$$

построенный по узлам $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$. P_i - многочлены второй степени не зависящие от функции f. Данный метод приближенного интегрирования, называется формулой Филона. Именно этим способом и будем аппроксимировать оператор P_m

Для решения неявной схемы (4.3), воспользуемся методом прогонки.

Пример 4.1.

В качестве начального условия $u(x, 0) = \sin \pi x$, а граничные данные возмем равные нулю. Вспомним, что при $\alpha < \pi^2$ система устойчива. На рис.1 приведен график решения задачи (4.1) - (4.2) без управления $m = 0$, $r = 0$ при $\alpha = \pi^2 - 2$

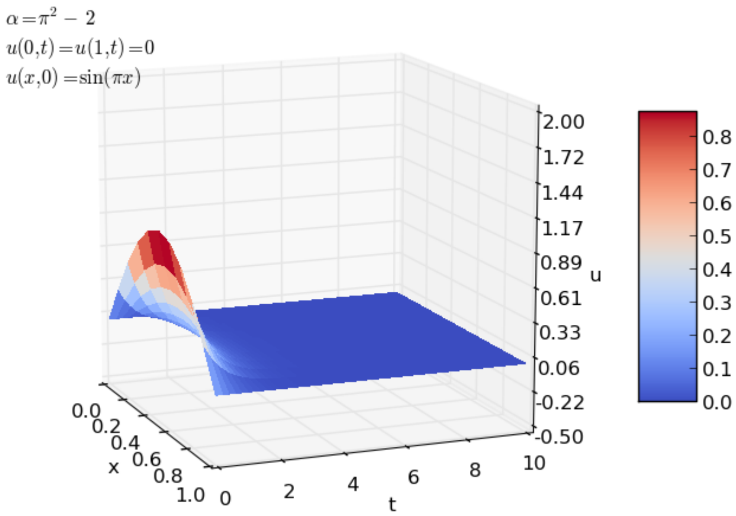

Рис. 1: Система при $\alpha = \pi^2 - 2$

На рис.2 продемонстрируем неустойчивость нулевого решения при $\alpha = \pi^2 + 0.01$

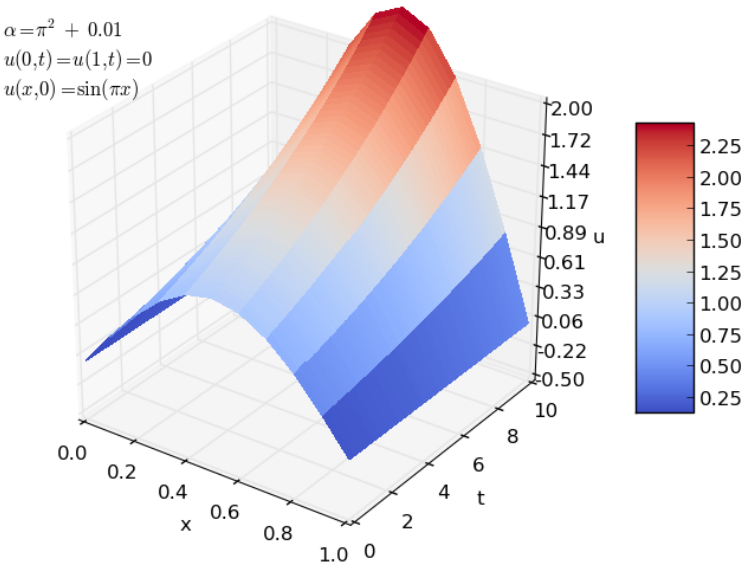

Рис. 2: Неустойчивость при $\alpha = \pi^2 + 0.01$

Теперь попробуем стабилизировать нашу систему. Фиксируем $\omega = (0, 0.1)$. Вспомним, что необходимо подобрать параметры m, r_m так, чтобы $\beta > 0$ и $q > 0$. Рассмотрим подробнее $q = [(\pi(m+1))^2 - \alpha - 1]$. При заданном $\alpha = \pi^2 + 0.01$, достаточно взять $m = 1$ для выполнения неравенства. Параметр r придется подобрать, чтобы решение стремилось к 0.

Обозначим за $T_\tau = \max\limits_{x \in (0,1)} u(x, \tau)$ и проиллюстрируем (рис. 3) зависимость устойчивости решения от выбора параметра r при фиксированных $m = 1$, $\omega = (0, 0.1)$ и $\alpha = \pi^2 + 0.01$.

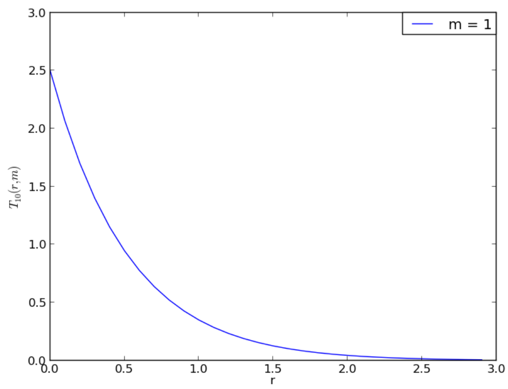

Рис. 3: Зависимость T от r при $m = 1$

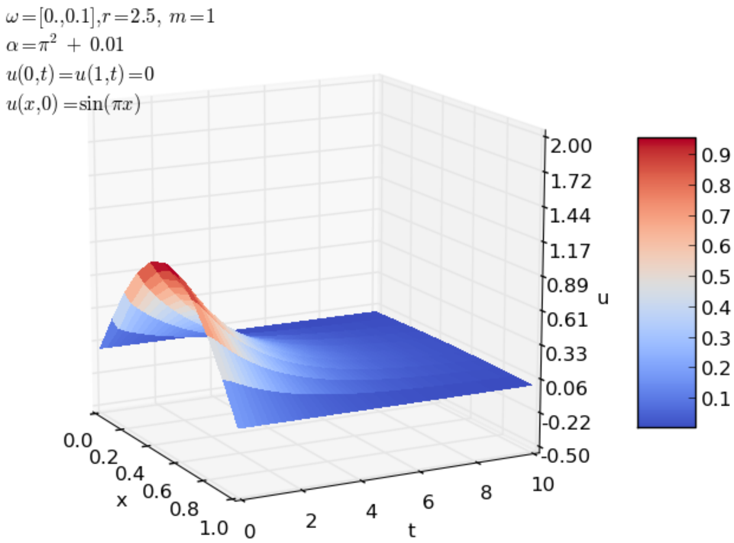

Рис. 4: Стабилизация при подборе параметров $r = 2.5$ и $m = 1$

На рис. 4 приведен график решения, который демонстрирует стабилизацию при выборе параметра $r = 2.5$ исходя из рис. 2

Видим, что решение системы (4.1) стремится к 0 при возрастании t

Продемонстрируем зависимость устойчивости решения (на рис. 5) от выбора параметра r при разных m.

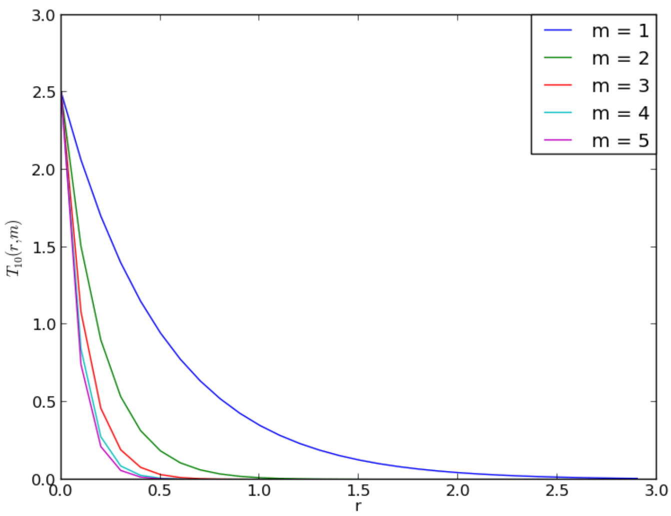

Рис. 5: Зависимость T от r при разных m

Пример 4.2.

Начальные условия $u(x,0) = x(1-x)$, а граничные данные возмем равные нулю. Заведомо выберем параметр $\alpha = \pi^2 + 3$ большим. Зафиксируем $\omega = (0, 0.4)$. Необходимо подобрать m, таким чтобы $q > 0$. При $m \geq 1$ условие выполняется, поэтому мы фиксируем $m = 1$.

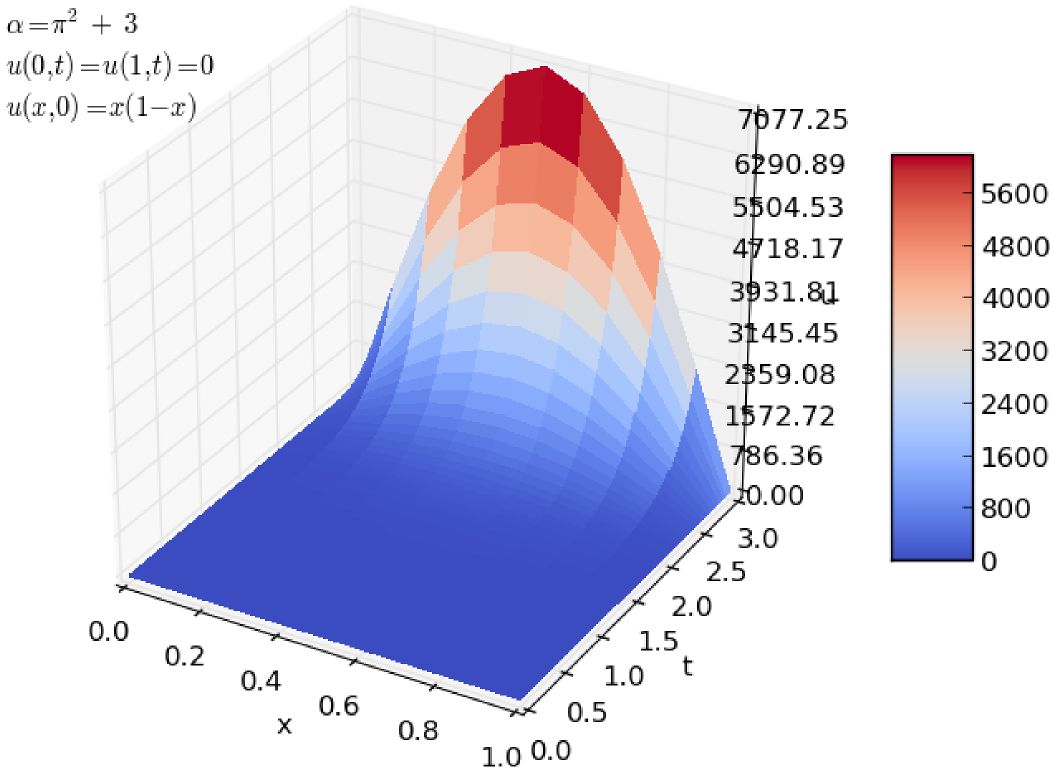

Рис. 6: Неустойчивость при $\alpha = \pi^2 + 3$

На рис. 6 продемонстрировано, как быстро растет решение задачи (4.1) - (4.2) при небольшом увеличении α.

Для стабилизации решения, проиллюстрируем (рис. 7) зависимость устойчивости решения от выбора параметра r для фиксированных ω и при разных m.

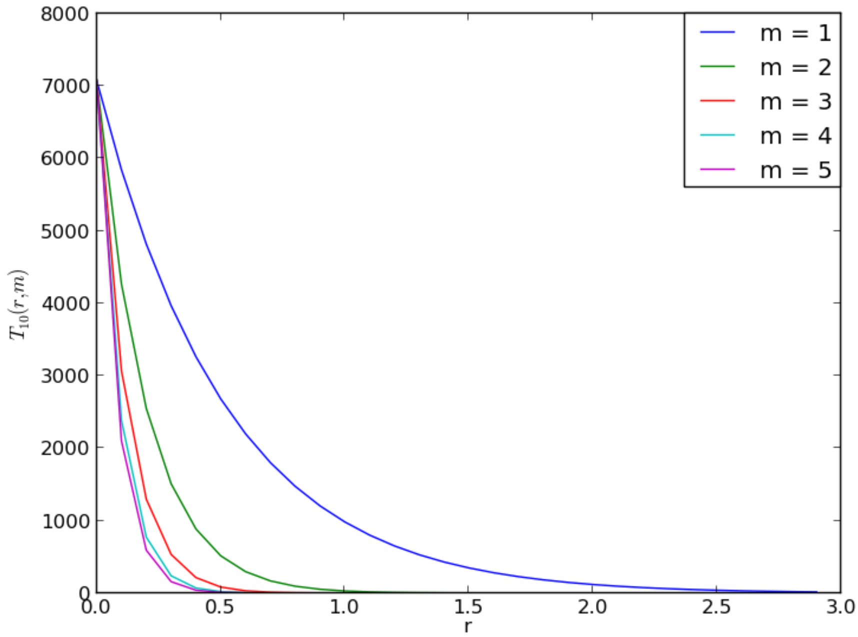

Рис. 7: Зависимость T от r при $\omega = (0, 0.4)$ и при разных m

Из рис. 7, параметр r выбираем равный 2.5

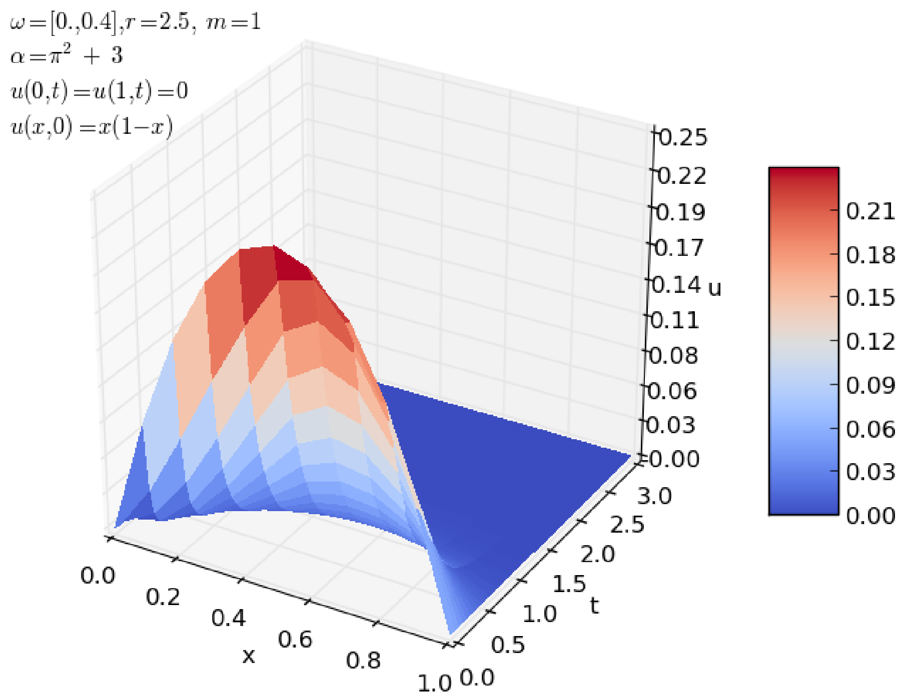

Рис. 8: Стабилизация при подборе параметров $r = 2.5$ и $m = 1$

Пример 4.3.

Выберем начальные условия $u(x,0) = \sin(x)\cos(\frac{\pi x}{2})$, граничные - нулевыми. Будем рассматривать систему (4.1) - (4.2) при $\alpha = \pi^2$. Вспомним, что в этом случае, теория говорит о том, что нулевое решение устойчиво по Ляпунову, но неустойчиво ассимптотически.

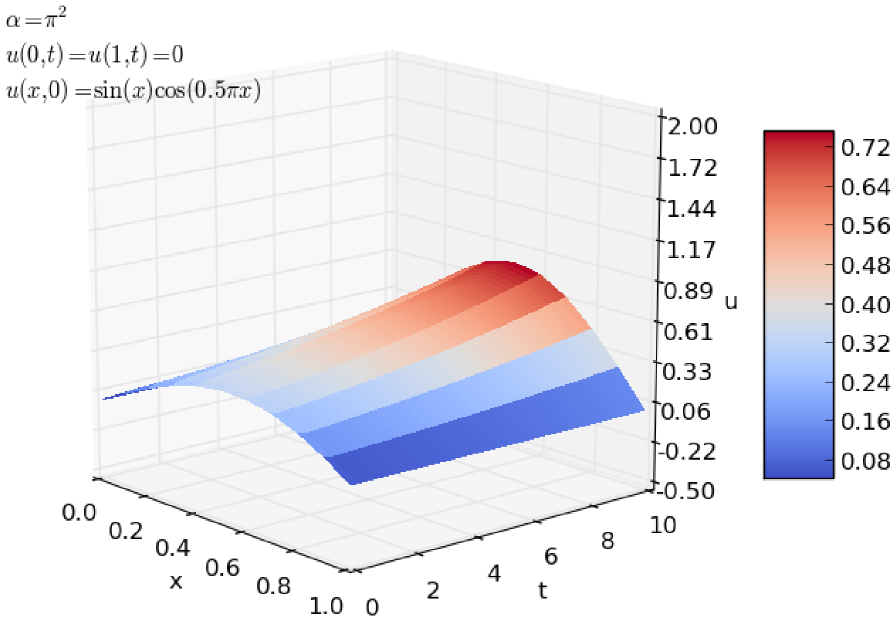

Рис. 9: Решение задачи при $\alpha = \pi^2$

На рис. 9 продемонстрировано ассимптотически неустойчивое решение задачи

Стабилизируем решение, зафиксировав $\omega = (0, 0.2)$,выбрав $m = 1$, $r = 1$ из тех же соображений, что и раньше.

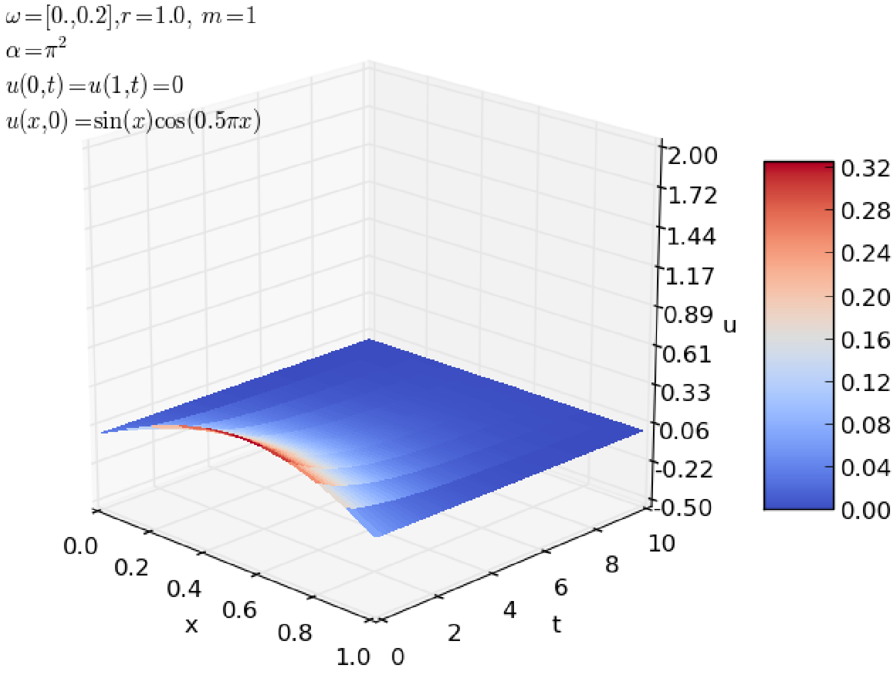

Рис. 10: Решение задачи при $\alpha = \pi^2$ при $m = 1$, $r = 1$

На рис. 10 продемонстрировано стабилизация решение начально-краевой задачи (4.1) - (4.2)

5 Заключение

При выполнении цели данной курсовой работы были выполнены следующие задачи:

1. Изучена литература, связанная с описанием и решением задачи стабилизации параболической системы;
2. Подробно разобран метод стабилизацей локальным конечномерным управлением с обратной связью;
3. Мною были доказаны 2 небольшие леммы полезные для доказательства стабилизируемости системы;
4. Численная реализация метода стабилизации, в том числе : написание программы для вычисления разностной схемы, метода Филона.
5. Проделаны численные эксперименты для, показывающие эффективность данного метода стабилизации

6 Список литературы

[1] А.Ю. Чеботарёв, Конечномерная стабилизация с заданой скоростью систем типа Навье-Стокса. Дальневосточный мат. журнал 2010. Том 10 2 с 200-205

[2] M. Krstic, A. Smyshlyaev, Boundary Control of PDEs. 2008

[3] M. Krstic, A. Smyshlyaev, Boundary Control of PDEs (short course). 2006

[4] А. В. Фурсиков. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью. Матем. сб., 192:4 (. 2001)

[5] О.А. Ладыженская, Краевые задачи математической физики. 1973

[6] А.А. Самарский, А.В. Гулин, Численные методы. общий базовый курс. 1989

[7] Метод прогонки, неявная схема [Электронный ресурс] : http://ikt.muctr.ru/html2/4/lek4_2_1.html

[8] Формула Филона [Электронный ресурс] : http://window.edu.ru/resource/886/19886/files/rsu177.pdf