

Laboratorul 4 – Evaluarea λ -termenilor

În acest laborator vom defini mașinăria de bază pentru evaluarea λ -termenilor:

- variabile și variabile libere
- variabile noi (față de o mulțime)
- α -redenumirea variabilelor
- substituție
- β -reducție
- normalizare

Reducerea expresiilor la expresii (mai) simple

Dar, mai întâi, vom începe prin a reduce tipul expresiilor la λ -calcul simplu (cu variabile indexate).

```
module Sugar where
```

```
import Exp
```

Deoarece va trebui să creăm variabile noi, cel mai simplu este ca o variabilă să aibă pe lângă un nume și o valoare numerică care ne spune a câta variabilă cu acel nume este:

```
data IndexedVar = IndexedVar
  { ivName :: String
  , ivCount :: Int
  } deriving (Eq, Read, Show)
```

```
makeIndexedVar :: String -> IndexedVar
makeIndexedVar name = IndexedVar name 0
```

Cu acest nou tip de variabile, putem defini tipul λ -expresiilor simple/standard, astfel:

```
data Exp
  = X IndexedVar
  | Lam IndexedVar Exp
  | App Exp Exp
  deriving (Show)
```

Exercițiu (de la Var la IndexedVar)

Implementați o funcție care transformă un obiect de tip `Var` într-unul de tip `IndexedVar` cu același nume și index 0:

```
desugarVar :: Var -> IndexedVar
desugarVar = undefined

-- >>> desugarVar (Var "x")
-- IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}
```

Exercițiu (de la IndexedVar la Var)

Implementați o funcție care transformă un obiect de tip `IndexedVar` într-unul de tip `Var` (pentru a-l putea afișa). Pentru variabilele indexate cu un index diferit de 0, să zicem `n`, folosiți `_n` ca prefix după numele variabilei.

```
sugarVar :: IndexedVar -> Var
sugarVar = undefined

-- >>> sugarVar (IndexedVar "x" 0)
-- Var {getVar = "x"}

-- >>> sugarVar (IndexedVar "x" 3)
-- Var {getVar = "x_3"}
```

Pentru transformarea expresiilor complexe în expresii simple vom folosi câteva variabile predefinite:

```
consExp, nilExp, zeroExp, succExp, fixExp :: Exp
consExp = X (makeIndexedVar ":")  -- : :: a -> List a -> List a  list
                                   constructor
nilExp = X (makeIndexedVar "Nil")  -- Nil :: List a              empty
                                   list
zeroExp = X (makeIndexedVar "Z")   -- Z :: Natural              zero
succExp = X (makeIndexedVar "S")   -- S :: Natural -> Natural    successor
fixExp = X (makeIndexedVar "fix")  -- fix :: (a -> a) -> a       fixpoint
fn.
```

Într-unul din laboratoarele următoare vom adăuga definiții pentru variabilele de mai sus, bazate pe Codările Church descrise la curs.

Exercițiu (de la ComplexExp la Exp)

Implementați următoarea funcție care transformă un ComplexExp într-un Exp, astfel:

- CApp, CLam și CX se transformă în App, Lam, și respectiv X
- listele se transformă în aplicări repetate ale lui : peste Nil
 - de exemplu, [a,b] se transformă în : a (: b Nil)
- numerele naturale se transformă în aplicări repetate ale lui S peste Z
 - de exemplu, 3 se transformă în S (S (S Z))
- let x = ex in e se transformă în (\x -> e) ex
- letrec f = ef in e se transformă în let f = fix (\f -> ef) in e, deci în (\f -> e)(fix (\f -> ef))

```
desugarExp :: ComplexExp -> Exp
```

```
desugarExp = undefined
```

```
-- >>> desugarExp (CApp (CLam (Var "x") (CX (Var "y")))) (CX (Var "z"))
-- App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "y", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName = "z", ivCount
= 0})))
```

```
-- >>> desugarExp (Nat 3)
-- App (X (IndexedVar {ivName = "S", ivCount = 0})) (App (X (IndexedVar
{ivName = "S", ivCount = 0})) (App (X (IndexedVar {ivName = "S", ivCount
= 0})) (X (IndexedVar {ivName = "Z", ivCount = 0}))))
```

```
-- >>> desugarExp (List [CX (Var "y"), CX (Var "x")])
-- App (App (X (IndexedVar {ivName = ":", ivCount = 0})) (X (IndexedVar
{ivName = "y", ivCount = 0}))) (App (App (X (IndexedVar {ivName = ":",
ivCount = 0})) (X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar
{ivName = "Nil", ivCount = 0})))
```

```
-- >>> desugarExp (Let (Var "y") (CX (Var "x")) (CX (Var "z")))
-- App (Lam (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "z", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount
= 0})))
```

```
-- >>> desugarExp (LetRec (Var "y") (CX (Var "x")) (CX (Var "z")))
-- App (Lam (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "z", ivCount = 0}))) (App (X (IndexedVar {ivName = "fix",
```

```
ivCount = 0})) (Lam (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "x", ivCount = 0}))))
```

Exercițiu (de la Exp la ComplexExp)

Implementați o funcție care traduce o expresie de tip `Exp` într-una de tip `ComplexExp`, traducând `App`, `Lam` și `X` în `CApp`, `CLam` și respectiv `CX`.

```
sugarExp :: Exp -> ComplexExp
sugarExp = undefined

-- >>> sugarExp (App (X (IndexedVar "x" 0)) (X (IndexedVar "y" 1)))
-- CApp (CX (Var {getVar = "x"})) (CX (Var {getVar = "y_1"}))

-- >>> sugarExp (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (X
(IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName =
"z", ivCount = 0})))
-- (CApp (CLam (Var "x") (CX (Var "y")))) (CX (Var "z")))
```

Variabile

```
module Eval where

import Exp
import Data.List ( union, delete )
```

Exercițiu (variabile)

Definiți o funcție care dat fiind un λ -termen, calculează mulțimea (ca listă) variabilelor care apar în termen.

```
vars :: Exp -> [IndexedVar]
vars = undefined

-- >>> vars (Lam (makeIndexedVar "x") (X (makeIndexedVar "y")))
-- [IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}, IndexedVar {ivName = "y",
ivCount = 0}]

-- >>> vars (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "y", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName = "z", ivCount
= 0})))
```

```
-- [IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0},IndexedVar {ivName = "y",
ivCount = 0},IndexedVar {ivName = "z", ivCount = 0}]

-- >>> vars (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "x", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount
= 0})))
-- [IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}]
```

Exercițiu (variabile libere)

Definiți o funcție care dat fiind un λ -termen, calculează mulțimea (ca listă) variabilelor libere care apar în termen.

```
freeVars :: Exp -> [IndexedVar]
freeVars = undefined

-- >>> freeVars (Lam (makeIndexedVar "x") (X (makeIndexedVar "y")))
-- [IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}]

-- >>> freeVars (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0})
(X (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName =
"z", ivCount = 0})))
-- [IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0},IndexedVar {ivName = "z",
ivCount = 0}]

-- >>> freeVars (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (X
(IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName =
"x", ivCount = 0})))
-- [IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}]

-- >>> freeVars (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (App (X
(IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0})) (X (IndexedVar {ivName = "x",
ivCount = 0}))))
-- []
```

Definiți o funcție care dată fiind o variabilă și un λ -termen, verifică dacă variabila apare liberă în termen.

```
occursFree :: IndexedVar -> Exp -> Bool
occursFree = undefined
```

```
-- >>> makeIndexedVar "x" `occursFree` Lam (makeIndexedVar "x") (X (makeIndexedVar
"y"))
-- False

-- >>> makeIndexedVar "y" `occursFree` Lam (makeIndexedVar "x") (X (makeIndexedVar
"y"))
-- True
```

Exercițiu (variabilă nouă)

Scrieți o funcție care dată fiind o variabilă și o listă de variabile produce o variabilă nouă care are același nume cu variabila dată dar e diferită de ea și de orice altă variabilă din lista dată.

```
freshVar :: IndexedVar -> [IndexedVar] -> IndexedVar
freshVar = undefined

-- >>> freshVar (makeIndexedVar "x") [makeIndexedVar "x"]
-- IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 1}

-- >>> freshVar (makeIndexedVar "x") [makeIndexedVar "x", IndexedVar
{ivName = "x", ivCount = 1}, IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 2}]
-- IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 2}
```

Substituții

Exercițiu (redenumiri de variabile)

Scrieți o funcție care dată fiind o variabilă de redenumit, variabila care o redenumeste și un λ -termen, redenumeste toate aparițiile variabilei de redenumit cu cea care o redenumeste.

```
renameVar :: IndexedVar -> IndexedVar -> Exp -> Exp
renameVar toReplace replacement = undefined

-- >>> renameVar (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (IndexedVar
{ivName = "z", ivCount = 0}) (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount
= 0}) (X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName
= "x", ivCount = 0})))
```

```
-- App (Lam (IndexedVar {ivName = "z", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "z", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName = "z", ivCount
= 0}))
```

Exercițiu (substituție)

Scrieți o funcție care definește substituția unei variabile cu un termen într-un λ -termen, implementând definiția matematică din curs (redenumind variabilele dacă există pericolul capturării).

```
substitute :: IndexedVar -> Exp -> Exp -> Exp
substitute toReplace replacement = undefined

-- >>> substitute (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "z", ivCount = 0})) (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount
= 0}) (X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName
= "x", ivCount = 0})))
-- App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "x", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName = "z", ivCount
= 0}))

-- >>> substitute (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}) (X (IndexedVar
{ivName = "x", ivCount = 0})) (App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount
= 0}) (X (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName
= "z", ivCount = 0})))
-- App (Lam (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 1}) (X (IndexedVar
{ivName = "x", ivCount = 0}))) (X (IndexedVar {ivName = "z", ivCount
= 0}))
```

Strategii de evaluare

Exercițiu (normalizare)

Implementați strategia normală de beta-reducție.

```
normalize :: Exp -> Exp
normalize = undefined

-- >>> normalize (X (makeIndexedVar "x"))
-- X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0})
```

```
-- >>> normalize (App (Lam (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0})
(X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0}))) (App (Lam (IndexedVar
{ivName = "y", ivCount = 0}) (App (X (IndexedVar {ivName = "y", ivCount
= 0})) (X (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0})))) (Lam (IndexedVar
{ivName = "y", ivCount = 0}) (App (X (IndexedVar {ivName = "y", ivCount
= 0})) (X (IndexedVar {ivName = "y", ivCount = 0}))))))
-- X (IndexedVar {ivName = "x", ivCount = 0})
```

Intergrare cu REPL

Exercițiu (REPL)

Importați modulele `Sugar` și `Eval` în `Main` și recreiați linia

```
Right e -> putStrLn (showExp e) >> main
```

astfel încât să facă următoarele:

- să transforme expresia din `ComplexExp` în `Exp`
- să normalizeze expresia
- să transforme expresia înapoi în `ComplexExp`
- să afișeze expresia
- să ruleze din nou `main`