SE(3) 上における協調自己位置推定のための視野共有を保証する分散型 CBF

著者名 [1†]

[1] 所属機関, 都道府県, 国
(Tel: +81-xx-xxxx-xxxx; E-mail: example@example.com)

Abstract: 本論文では，SE(3) 上における協調自己位置推定のための視野共有を保証する分散型制御バリア関数（CBF）を提案する．マルチエージェント VSLAM では，エージェント間で特徴点のマッチングを行うために視野の重複が必要であるが，従来手法では視野共有を積極的に保証する制御則は十分に検討されていなかった．本研究では，エージェント位置を $T_i = (p_i, R_i) \in \mathrm{SE}(3)$，環境内の特徴点を $q_l \in \mathcal{L}$ として，視野内条件に基づく安全集合を定義し，CBF を設計する．さらに，複数の特徴点を追従する場合には確率的アプローチを導入し，複数エージェントの共通特徴点追従のための分散型実装を提案する．また，実機への適用を考慮し，ドローンの二次系ダイナミクスに対応する高次 CBF（HOCBF）を設計する．シミュレーション結果から，提案手法は安全制約を満たしながら目標位置への追従が可能であり，分散実装により計算効率とスケーラビリティが向上することが示された．本研究の成果は，ドローンの協調自己位置推定だけでなく，様々なマルチロボットタスクにおいて視野共有を保証するための基盤技術として応用可能である．

Keywords: 制御バリア関数，視野共有，マルチエージェントシステム，SE(3)，分散最適化，高次制御バリア関数

1. INTRODUCTION

マルチロボットシステムにおいて，各ロボットがセンサ情報や視界を共有することにより，監視・捜索・協調輸送などのタスクを効率的に遂行できることが知られている．特にカメラを用いた視覚協調の場合，各ロボットの共有視野（Common Field-of-View, CoFoV）が不可欠であり，たとえば複数ドローンが異なる角度から同一対象を観測できることや，通信の見通し線（LOS）維持が求められる [8]．しかし，ロボットは視野角が限られているため，視界共有を保証するための制御技術の開発が急務である．

マルチエージェント VSLAM では，各エージェントが撮影した画像から抽出される局所特徴に基づき自己局在を行い，エージェント間で特徴マッチングにより相対位置を推定する．従来の ORB や SIFT に代わり，SuperPoint のような学習型局所特徴検出・記述器 [5] や，NetVLAD によるグローバル記述子 [2] が高いロバスト性を示し，ループ検出やキーフレームマッチングに貢献している．これらの技術は，マルチエージェント間の地図統合とループ閉じの精度向上に直結する．

画像特徴量のマッチングを成功させるためには，各エージェントが共通のランドマークを観測できるよう，カメラの視野錐台の幾何学的重複が必要である．視野重複が存在すれば，エージェント間でのループ検出が可能となり，その結果として各ロボットの地図統合が実現される [14]．しかし，現状の協調 SLAM は，キーフレームの受動的な共有と画像類似度評価に依存しており，視野重複が偶発的に発生しなければマップ統合が成立しないリスクがある．

この問題に対して，近年ではロボットの運動制御に視野保持の制約を組み込み，常にあるいは定期的にカメラが共通領域を撮像するよう制御するアプローチが提案され始めている．具体的には，制御バリア関数（Control Barrier Function, CBF）を用いて「他エージェントまたは環境ランドマークを視界に捉える」という安全制約を実現することで，受動的手法の限界を克服しようとする試みである [11]．

本研究では，CoVINS における自己位置推定の精度向上を目的として，SE(3) 上における協調自己位置推定のための視野共有を保証する分散型 CBF を提案する．CoVINS では superpoint 特徴量などの画像特徴量のマッチングにより，自己位置推定に関する最適化問題の factor を得ている．特徴量をマッチングするにはエージェントの視野錐台が重なっている必要がある．single agent 問題に関しては stereo camera の相対位置を const かつ given として最適化問題に組み込み，multi agent 問題に関しては視野錐台の override は不可知であるために画像全体特徴量の類似度の一致などによって passive な event trigger 型としてアルゴリズムが構築されている．

しかし，agent1 と agent2 が視野錐台を交差させ続けるための制御則（CBF 等）に基づいて active perception を行う場合，multi agent の自己位置推定において inter-agent な特徴量のマッチング及び推定問題はエージェントをまたいだカメラ間の相対位置を given，もしくは最適化すべき双対変数として複数のエージェント位置を同時最適化できるはずである．さらに，active perception の枠組みで考えれば，CBF を用いた最適制御問題と自己位置推定問題も同一の目的関数の最小化問題として扱うことができるはずである．

本論文の主な貢献は以下の通りである：

1. SE(3) 上での共有視野保証：従来研究は主に平面上の（SE(2)）あるいは単眼視野の問題に限定されていたが，本研究では 3 次元の複雑なダイナミクス下での共有視野保証を実現する．
2. 特徴点に基づく確率的可視性制約と CBF の適用：各エージェントが観測する特徴点に基づき，その可視性を確率的に評価した上で，制御バリア関数（CBF）に組み込み，常時高い確率で共有視野が確保されるよう制御入力を設計する．

3. 非ホロノミックなドローンダイナミクスへの対応と分散最適化：機体の並進および回転運動を同時に考慮する SE(3) 上の非ホロノミックドローンモデルに対して，高次制約も扱える制御バリア関数（HOCBF）を導入し，各エージェントが局所的な情報交換を通じて分散最適化アルゴリズムにより制御解を求める枠組みを提案する．

以下，第 2 章では制御バリア関数の基礎概念について説明し，第 3 章では問題設定を行う．第 4 章では共有視野のための CBF を導入し，第 5 章では二次系システムのための高次 CBF を提案する．第 6 章ではシミュレーション結果を示し，第 7 章で結論を述べる．

2. PRELIMINARY: CONTROL BARRIER FUNCTION

本章では，本研究の基礎となる制御バリア関数（Control Barrier Function, CBF）の概念について説明する．

2.1. 制御バリア関数の基本概念

制御バリア関数は，システム状態がある安全集合内に留まることを保証するための Lyapunov 関数に類似した概念である．もともとはバリア関数やバリア証明の枠組みに基づいており，制御 Lyapunov 関数（CLF）と統合した安全・安定制御のための二次計画問題（QP）による実装手法が提案されている [1].

制御対象のシステムを以下のように表す.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

ここで，$x \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u \in \mathbb{R}^m$ は制御入力，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ および $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ は局所 Lipschitz 連続な関数である．

安全集合 $\mathcal{C}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0\} \\ \partial\mathcal{C} &= \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\} \\ \mathrm{Int}(\mathcal{C}) &= \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続微分可能な関数である．

Definition 1 (制御バリア関数) 連続微分可能な関数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について，ある拡張クラス $\mathcal{K}_\infty$ 関数 α が存在し，任意の $x \in \mathcal{C}$ に対して以下の条件を満たす制御入力 $u \in \mathbb{R}^m$ が存在するとき，h を制御バリア関数と呼ぶ.

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^m} [L_f h(x) + L_g h(x)u + \alpha(h(x))] \geq 0 \tag{3}$$

ここで，$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$ および $L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x)$ はそれぞれ Lie 微分を表す.

CBF の条件式 (3) を満たす制御入力 u を用いると，システム式 (1) の解は常に安全集合 $\mathcal{C}$ 内に留まることが保証される．つまり，$x(0) \in \mathcal{C}$ ならば，任意の $t \geq 0$ に対して $x(t) \in \mathcal{C}$ となる．

実際の制御入力を求めるために，以下のような二次計画問題（QP）を解く．

$$\begin{aligned} u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^m} &\|u - u_{\text{nom}}\|^2 \\ \text{s.t.} &L_f h(x) + L_g h(x)u + \alpha(h(x)) \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，u_{nom} は安全制約がない場合の公称制御入力である．この最適化問題は，安全制約を満たしつつ，公称制御入力からの偏差を最小化する制御入力を求めるものである．

2.2. 高次制御バリア関数

従来の CBF は制約関数の相対次数が 1 であることを仮定していたが，多くの実システムでは安全制約が高次微分に依存するため，高次制御バリア関数（High Order Control Barrier Functions, HOCBF）が提案されている [13].

関数 $h(x)$ の相対次数が $r > 1$ の場合，以下のように補助関数の連鎖を定義する．

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= h(x) \\ \psi_1(x) &= \dot{\psi}_0(x) + \alpha_1(\psi_0(x)) \\ \psi_2(x) &= \dot{\psi}_1(x) + \alpha_2(\psi_1(x)) \\ &\vdots \\ \psi_r(x) &= \dot{\psi}_{r-1}(x) + \alpha_r(\psi_{r-1}(x)) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，α_i（$i = 1, 2, \ldots, r$）は拡張クラス $\mathcal{K}$ 関数である．

Definition 2 (高次制御バリア関数) 相対次数 r の連続微分可能な関数 $h : \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}$ について，式 (5) で定義される補助関数の連鎖に対して，任意の $x \in \mathcal{C}_{\triangledown} = \{\S \in \mathbb{R}^{\ltimes} : \subsetneq_{\sqsupset}(\frown) \geq \nvdash, \sqsupset = \nvdash, \nVdash, \ldots, \leftthreetimes - \nVdash\}$ に対して以下の条件を満たす制御入力 $u \in \mathbb{R}^{\gtrdot}$ が存在するとき，h を高次制御バリア関数と呼ぶ．

$$\dot{\psi}_{r-1}(x) + \alpha_r(\psi_{r-1}(x)) \geq 0 \tag{6}$$

HOCBF を用いた制御入力を求めるための二次計画問題は以下のように定式化される．

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{\gtrdot}} \|u - u_{\text{nom}}\|^2 \\ &\qquad \text{s.t.} L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u + O(h(x)) \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$L_f^r h(x)$ は $h(x)$ の $f(x)$ に関する r 次の Lie 微分，$L_g L_f^{r-1} h(x)$ は $L_f^{r-1} h(x)$ の $g(x)$ に関する Lie 微分，$O(h(x))$ は $h(x)$ とその微分に依存する項である．

本研究では，SE(3) 上の剛体運動に対して，視野共有を保証するための CBF および HOCBF を設計し，分散型の実装を提案する．

3. PROBLEM FORMULATION

本章では，本研究で扱うシステムモデルと問題設定について説明する．

3.1. システムモデル（SE(3) 上の剛体運動）

本研究では，複数のエージェント（ドローン）が SE(3) 上で運動する状況を考える．各エージェント $i \in \mathcal{A}$ の位置と姿勢を $T_i = (p_i, R_i) \in \mathrm{SE}(3)$ で表す．ここで，$p_i \in \mathbb{R}^{\nVDash}$ はエージェント i の位置，$R_i \in \mathrm{SO}(3)$ は姿勢を表す回転行列である．

SE(3) 上の剛体運動は，以下の微分方程式で記述される．

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SE}(3) \\ \xi_B^\wedge &= \begin{bmatrix} [\omega]_\times & v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3) \\ \dot{T} &= T \xi_B^\wedge \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，$\xi_B^\wedge$ はボディ座標系における速度入力であり，$\omega \in \mathbb{R}^{\nVDash}$ は角速度，$v_b \in \mathbb{R}^{\nVDash}$ はボディ座標系における並進速度，$[\omega]_\times$ は ω に対応する歪対称行列である．

世界座標系における速度入力 $\xi_W^\wedge$ による剛体運動式は以下のように表される．

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \xi_W^\wedge T \\ \xi_W^\wedge &= (\mathrm{Ad}_{\mathrm{T}\,\mathrm{,B}})^\wedge \\ &= \left(\begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]_\times R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v_b \end{bmatrix} \right)^\wedge \\ &= \begin{bmatrix} R\omega \\ [p]_\times R\omega + R v_b \end{bmatrix}^\wedge \\ &= \begin{bmatrix} [R\omega]_\times & [p]_\times R\omega + R v_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

ここで，$\mathrm{Ad_T}$ は SE(3) の随伴表現である．

ボディ座標系における運動方程式を離散化すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} T_{k+1} &\simeq T_k + \dot{T}_k \\ &\simeq T_k + h T_k \xi_{B,k}^\wedge \\ &= T_k + h \begin{bmatrix} R_k & p_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega_k]_\times & v_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，h は離散時間ステップである．

成分分解すると，以下のように表される．

$$\begin{aligned} R_{k+1} &\simeq R_k \exp(h[\omega_k]_\times) \\ &\simeq R_k (I + h[\omega_k]_\times) \\ p_{k+1} &= h R_k v_k + p_k \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，$\exp(h[\omega_k]_\times)$ は $h[\omega_k]_\times$ の行列指数関数であり，小さな h に対して $I + h[\omega_k]_\times$ で近似できる．

3.2. 共有視野の定義と問題設定

環境内には複数の特徴点 $q_l \in \mathbb{R}^{\nvDash}, \lessdot \in \mathcal{L}$ が存在する．エージェント i の観測している特徴点集合を $\mathcal{C}_\rangle$ とする．特徴点 q_l がエージェント i の視野内にある条件は以下のように表される．

$$q_l \in \mathcal{C}_\rangle \iff \odot_\updownarrow^\top(\sqrt{}_\rangle)\mathcal{R}_\rangle\rceil_\rfloor - \cos\ominus\mathcal{F} > \prime \tag{12}$$

ここで，$\beta_l(p_i) = \frac{q_l - p_i}{\|q_l - p_i\|}$ は特徴点 q_l からエージェント i への単位方向ベクトル，$e_c = [0\ 0\ 1]^\top$ はカメラの光軸方向（ボディ座標系の z 軸方向），ΨF はカメラの視野角の半分である．

特徴点 q_l が複数のエージェント $i, j \in \mathcal{A}$ の共有視野内にある条件は以下のように表される．

$$q_l \in \mathcal{C}_\rangle \cap \mathcal{C}_| \iff (\odot_\updownarrow^\top(\sqrt{}_\rangle)\mathcal{R}_\rangle\rceil_\rfloor - \cos\ominus\mathcal{F})(\odot_\updownarrow^\top(\sqrt{}_|)\mathcal{R}_|\rceil_\rfloor - \cos\ominus\mathcal{F}) > \prime \tag{13}$$

本研究の目的は，各エージェントが目標位置 p_i^d に向かって移動しながら，常に一定数以上の特徴点を共有視野内に保持するような制御入力 $\xi_i = (\omega_i, v_i)$ を設計することである．さらに，この制御則を分散型で実装することで，各エージェントが局所的な情報のみを用いて制御入力を決定できるようにする．

具体的には，以下の問題を解く．

$$\begin{aligned}&\min_{\xi_i, i\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}} \|p_i^d - p_i\|^2 + \|\xi_i\|^2 \\ &\text{s.t. } |\mathcal{C}_\rangle \cap \mathcal{C}_|| \geq \Updownarrow,\ \forall(\rangle, |) \in \mathcal{E}\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，$\mathcal{E}$ はエージェント間の通信グラフの辺集合，m は共有視野内に保持すべき特徴点の最小数である．

この問題を解くために，次章では共有視野を保証するための CBF を設計し，それに基づく制御則を提案する．

4. CBFS FOR SHARED FIELD OF VIEW

本章では，共有視野を保証するための制御バリア関数（CBF）を設計する．まず単一の特徴点を追従する場合の安全制約を導出し，次に複数の特徴点を追従する場合，さらに複数のエージェントが共通の特徴点を追従する場合へと拡張する．最後に，分散型実装について述べる．

4.1. 単一特徴点追従の安全制約

単一の特徴点を追従する安全制約については，Trimarchi ら [11] の研究に大きく影響を受けている．

エージェント位置を $T_i = (p_i, R_i) \in \mathrm{SE}(3), \mathrm{i} \in \mathcal{A}$，環境内の特徴点を $q_l \in \mathcal{L}$ とする．エージェント i の観測している特徴点集合を $\mathcal{C}_\rangle$ とする．$q_l \in \mathcal{C}_\rangle$ である条件は，式 (12) で示したように以下のように表される．

$$\beta_l^\top(p_i)R_ie_c - \cos\Psi F > 0 \tag{15}$$

この条件に基づいて，安全集合を以下のように定義する．

$$B_i = \beta_l^\top(p_i)R_ie_c - \cos\Psi F \tag{16}$$

安全集合 B_i の時間微分は以下のように計算される．

$$\begin{aligned}\dot{B}_i &= \langle \mathrm{grad_R\ B_i, !_i} \rangle + \langle \mathrm{grad_p\ B_i, v_i} \rangle \\ &= -\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times\omega_i - \frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{d_{i,l}}v_i\end{aligned} \tag{17}$$

ここで，$d_{i,l} = \|q_l - p_i\|$ は特徴点 q_l とエージェント i の距離，$P_{\beta_l} = I - \beta_l\beta_l^\top$ は β_l に直交する平面への投影行列である．また，$\mathrm{grad_R\ B_i}$ と $\mathrm{grad_p\ B_i}$ はそれぞれ B_i の R_i と p_i に関する勾配である．

CBF の条件より，安全制約は以下のように表される．

$$-\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times\omega_i - \frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{d_{i,l}}v_i \leq \gamma(\beta_l^\top(p_i)R_ie_c - \cos\Psi F) \tag{18}$$

ここで，$\gamma > 0$ は CBF のゲインパラメータである．

CBF 制約を満たしつつ，目標位置 p_i^d に追従するための QP は以下のように定式化される．

$$\begin{aligned}\min_{\xi_i}\ &(p_i^d - p_{i,k} - hR_{i,k}v_{i,k})^\top Q_1(p_i^d - p_{i,k} - hR_{i,k}v_{i,k}) + \begin{bmatrix}\omega_{i,k}\\ v_{i,k}\end{bmatrix}^\top Q_2 \begin{bmatrix}\omega_{i,k}\\ v_{i,k}\end{bmatrix} \\ &\text{s.t.}\quad \mathrm{fi_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times !_i} + \frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{d_{i,l}}v_i \leq \gamma(\beta_l^\top(p_i)R_ie_c - \cos\Psi F)\end{aligned} \tag{19}$$

ここで，Q_1 と Q_2 は正定値重み行列である．
この最適化問題を一般的な形式に変換すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi_i}\ J_i \\
&J_i = \frac{1}{2}\xi_{i,k}^\top H_i \xi_{i,k} + f_i^\top \xi_{i,k} \\
&\xi_{i,k} = \begin{bmatrix}\omega_{i,k}\\ v_{i,k}\end{bmatrix}, \quad H_i = 2\begin{bmatrix}Q_{2,\omega} & Q_{2,\omega v}\\ Q_{2,\omega v}^\top & Q_{2,v} + h^2 R_{i,k}^\top Q_1 R_{i,k}\end{bmatrix}, \\
&f_i = \begin{bmatrix}0\\ -2hR_i^\top Q_1 e_i\end{bmatrix}, \quad e_i = p_i^d - p_{i,k} \\
&\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix}\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times \\ \frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{d_{i,l}}\end{bmatrix}^\top \xi_{i,k} \le \gamma(\beta_l^\top(p_i)R_i e_c - \cos\Psi F)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

4.2. 複数特徴点追従の安全制約

複数の特徴点を追従することを考える場合，単純に各特徴点に対する安全集合の積集合を考えることもできるが，それでは安全集合が微分不可能になる可能性がある．そこで，確率的なアプローチを導入する．
特徴点 $q_l \in \mathcal{L}$ によってエージェント i における推定が成り立っている確率を以下のように定義する．

$$
\phi_i^l = P(p_i, R_i, q_l) \tag{21}
$$

この確率を用いて，新しい安全集合を以下のように定義する．

$$
B_i = 1 - q - \prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_i^l) \tag{22}
$$

ここで，$q \in (0,1)$ はパラメータであり，環境内の特徴点 $q_l \in \mathcal{L}$ によってエージェント i における推定が達成される確率を q 以上に制限することを意味する．
確率 ϕ_i^l は以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&P(p_i, R_i, q_l) = \begin{cases} P_i^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_\rangle \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L}\setminus\mathcal{C}_\rangle \end{cases} \\
&\quad \text{where} \quad \mathrm{P_i^l} = \frac{\beta_l^\top(p_i)R_i e_c - \cos\Psi F}{1-\cos\Psi F}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

安全制約は以下のように表される．

$$
B_i > 0 \quad \forall i \in \mathcal{A} \tag{24}
$$

安全集合 B_i の時間微分は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
&B_i = 1 - q - \eta_i \\
&\eta_i = \prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_i^l) \\
&\dot{B}_i = -\dot{\eta}_i \\
&\quad = -\frac{d}{dt}\prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_i^l) \\
&\quad = \sum_{l\in\mathcal{L}}(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k))\dot{\phi}_i^l \\
&\dot{\phi}_i^l = \begin{cases} \dot{P}_i^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_\rangle \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L}\setminus\mathcal{C}_\rangle \end{cases}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

P_i^l の微分は以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
P_i^l &= \frac{\beta_l^\top(p_i)R_i e_c - \cos\Psi F}{1-\cos\Psi F} \\
\dot{P}_i^l &= \langle \mathrm{grad\,P_i^l},\, \text{¸w} \rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} \mathrm{grad_R\,P_i^l} \\ \mathrm{grad_p\,P_i^l} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix} \right\rangle \\
\mathrm{grad_p\,P_i^l} &= \frac{1}{1-\cos\Psi F}\left(-\frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{d_{i,l}}\right) \\
\mathrm{grad_R\,P_i^l} &= \frac{1}{1-\cos\Psi F}(-\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

これらから，複数の特徴点を追従するための CBF 制約は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_\rangle}(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k))\langle \mathrm{grad_R\,P_i^l}, \mathrm{!_i}\rangle + \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_\rangle}(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k))\langle \mathrm{grad_p\,P_i^l}, \mathrm{v_i}\rangle \\
\geq -\gamma_0(1-q-\prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_i^l))
\end{aligned}
\tag{27}
$$

ここで，$\gamma_0 > 0$ は CBF のゲインパラメータである．

CBF 制約を満たしつつ，目標位置 p_i^d に追従するための QP は以下のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi_i}\,(p_i^d - p_{i,k+1})^\top Q_1(p_i^d - p_{i,k+1}) + \xi_{i,k}^\top Q_2 \xi_{i,k} \\
\text{s.t.}\quad &\sum_{\mathrm{l}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_\rangle}(\prod_{\mathrm{k}\neq \mathrm{l}}(1-\mathrm{Œ_i^k}))\frac{\mathrm{fi_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times}}{\mathrm{1-\cos\Psi F}}\mathrm{!_i} + \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_\rangle}(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k))\frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{(1-\cos\Psi F)d_{i,l}}v_i \\
&\leq \gamma_0(1-q-\prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_i^k))
\end{aligned}
\tag{28}
$$

一般的な QP の形式に変換すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi_i}\; J_i \\
J_i &= \frac{1}{2}\xi_{i,k}^\top H_i \xi_{i,k} + f_i^\top \xi_{i,k} \\
\xi_{i,k} &= \begin{bmatrix} \omega_{i,k} \\ v_{i,k} \end{bmatrix}, \quad H_i = 2\begin{bmatrix} Q_{2,\omega} & Q_{2,\omega v} \\ Q_{2,\omega v}^\top & Q_{2,v} + h^2 R_{i,k}^\top Q_1 R_{i,k} \end{bmatrix}, \\
f_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2hR_i^\top Q_1 e_i \end{bmatrix}, \quad e_i = p_i^d - p_{i,k} \\
\text{s.t.}\quad &\begin{bmatrix} \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_\rangle}(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k))\frac{\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times}{1-\cos\Psi F} \\ \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_\rangle}(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k))\frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{(1-\cos\Psi F)d_{i,l}} \end{bmatrix}^\top \xi_{i,k} \leq \gamma_0(1-q-\prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_i^k))
\end{aligned}
\tag{29}
$$

4.3. 複数エージェントの共通特徴点追従

次に，複数のエージェントが共通の特徴点を追従する場合を考える．エージェント i と j が特徴点 q_l を共有視野内に持つ条件は，式 (13) で示したように以下のように表される．

$$
(\beta_l^\top(p_i)R_i e_c - \cos\Psi F)(\beta_l^\top(p_j)R_j e_c - \cos\Psi F) > 0 \tag{30}
$$

特徴点 $q_l \in \mathcal{L}$ によってエッジ $(i,j)\in\mathcal{E}$ における推定が成り立っている確率を以下のように定義する．

$$
\phi_{ij}^l = P(p_i, R_i, p_j, R_j, q_l) \tag{31}
$$

この確率を用いて，新しい安全集合を以下のように定義する．

$$
B_{ij} = 1 - q - \prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_{ij}^l) \tag{32}
$$

ここで，$q \in (0,1)$ はパラメータであり，環境内の特徴点 $q_l \in \mathcal{L}$ によってエッジ $(i,j) \in \mathcal{E}$ における推定が達成される確率を q 以上に制限することを意味する．

確率 ϕ_{ij}^l は以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&P(p_i, R_i, p_j, R_j, q_l) = \begin{cases} P_i^l P_j^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|} \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}) \end{cases} \\
&\qquad\qquad \text{where} \quad \mathrm{P_i^l} = \frac{\beta_l^\top(p_i) R_i e_c - \cos\Psi F}{1 - \cos\Psi F}
\end{aligned} \tag{33}
$$

安全制約は以下のように表される．

$$
B_{ij} > 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{E} \tag{34}
$$

安全集合 B_{ij} の時間微分は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
B_{ij} &= 1 - q - \eta_{ij} \\
\eta_{ij} &= \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_{ij}^l) \\
\dot{B}_{ij} &= -\dot{\eta}_{ij} \\
&= -\frac{d}{dt} \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_{ij}^l) \\
&= \sum_{l \in \mathcal{L}} \Big(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_{ij}^k) \Big) \dot{\phi}_{ij}^l \\
\dot{\phi}_{ij}^l &= \begin{cases} \dot{P}_i^l P_j^l + P_i^l \dot{P}_j^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|} \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{35}
$$

エージェントごとの制御入力について分解すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_{ij} &= -\dot{\eta}_{ij} \\
&= -\frac{d}{dt} \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_{ij}^l) \\
&= \sum_{l \in \mathcal{L}} \Big(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_{ij}^k) \Big) \dot{\phi}_{ij}^l \\
&= \sum_{l \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}} \Big(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_{ij}^k) \Big) P_j^l \dot{P}_i^l + \sum_{l \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}} \Big(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_{ij}^k) \Big) P_i^l \dot{P}_j^l
\end{aligned} \tag{36}
$$

これらから，複数のエージェントが共通の特徴点を追従するための CBF 制約は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}} \Big(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_{ij}^k) \Big) P_j^l \langle \mathrm{grad_R\, P_i^l}, \mathrm{!_i} \rangle + \sum_{\mathrm{l} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}} \Big(\prod_{\mathrm{k \neq l}} (1 - \mathrm{Œ_{ij}^k}) \Big) \mathrm{P_i^l} \langle \mathrm{grad_R\, P_j^l}, \mathrm{!_j} \rangle \\
&+ \sum_{l \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}} \Big(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_{ij}^k) \Big) P_j^l \langle \mathrm{grad_p\, P_i^l}, \mathrm{v_i} \rangle + \sum_{\mathrm{l} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}} \Big(\prod_{\mathrm{k \neq l}} (1 - \mathrm{Œ_{ij}^k}) \Big) \mathrm{P_i^l} \langle \mathrm{grad_p\, P_j^l}, \mathrm{v_j} \rangle \\
&\geq -\gamma_0 \Big(1 - q - \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_{ij}^l)\Big)
\end{aligned} \tag{37}
$$

ここで，$\gamma_0 > 0$ は CBF のゲインパラメータである．

CBF 制約を満たしつつ，目標位置 p_i^d と p_j^d に追従するための QP は以下のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
\min_{\xi_i,\xi_j} \sum_{i,j} & (p_i^d - p_{i,k+1} - hR_{i,k}v_{i,k})^\top Q_1 (p_i^d - p_{i,k+1} - hR_{i,k}v_{i,k}) + \begin{bmatrix}\omega_{i,k}\\ v_{i,k}\end{bmatrix}^\top Q_2 \begin{bmatrix}\omega_{i,k}\\ v_{i,k}\end{bmatrix} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_j^l\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times}{1-\cos\Psi F}\omega_i \\
& + \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_i^l\beta_l^\top(p_j)R_j[e_c]_\times}{1-\cos\Psi F}\omega_j \\
& + \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_j^l e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{(1-\cos\Psi F)d_{i,l}}v_i \\
& + \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_i^l e_c^\top R_j^\top P_{\beta_l}}{(1-\cos\Psi F)d_{j,l}}v_j \\
& \leq \gamma_0(1 - q - \prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_{ij}^l))
\end{aligned}
\tag{38}
$$

一般的な QP の形式に変換すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
& \min_{\xi_i,\xi_j} \sum_{i,j} J_i \\
& J_i = \frac{1}{2}\xi_{i,k}^\top H_i \xi_{i,k} + f_i^\top \xi_{i,k} \\
& \xi_{i,k} = \begin{bmatrix}\omega_{i,k}\\ v_{i,k}\end{bmatrix}, \quad H_i = 2\begin{bmatrix} Q_{2,\omega} & Q_{2,\omega v} \\ Q_{2,\omega v}^\top & Q_{2,v} + h^2 R_{i,k}^\top Q_1 R_{i,k}\end{bmatrix}, \\
& f_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -2hR_i^\top Q_1 e_i \end{bmatrix}, \quad e_i = p_i^d - p_{i,k} \\
& \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix}\alpha_\omega & \alpha_v & \beta_\omega & \beta_v\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\omega_{i,k}\\ v_{i,k}\\ \omega_{j,k}\\ v_{j,k}\end{bmatrix} \leq \gamma_0\gamma
\end{aligned}
\tag{39}
$$

ここで，係数は以下のように定義される．

$$
\begin{aligned}
\alpha_\omega &= \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_j^l\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times}{1-\cos\Psi F} \in \mathbb{R}^{\nVDash} \\
\beta_\omega &= \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_i^l\beta_l^\top(p_j)R_j[e_c]_\times}{1-\cos\Psi F} \in \mathbb{R}^{\nVDash} \\
\alpha_v &= \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_j^l e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{(1-\cos\Psi F)d_{i,l}} \in \mathbb{R}^{\nVDash} \\
\beta_v &= \sum_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^k))\frac{P_i^l e_c^\top R_j^\top P_{\beta_l}}{(1-\cos\Psi F)d_{j,l}} \in \mathbb{R}^{\nVDash} \\
\gamma &= 1 - q - \prod_{l\in\mathcal{L}\cap\mathcal{C}_{\rangle}\cap\mathcal{C}_{|}} (1-\phi_{ij}^l) \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

4.4. 分散型実装

不等式制約付き最適化問題を分散化する方法はいくつかあるが，本研究では主双対乗数法（Primal-Dual Method of Multipliers, PDMM）を用いる．PDMM は，不等式制約を処理する場合に ADMM のようにスラック変数修正が必要なく，より効率的に解くことができる [15].

IEQ-PDMM（inequality constraint primal-dual method of multipliers）を用いて上の式を分散化すると以下のよう

になる．

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= \underset{\xi_i}{argmin}\ J_i(\xi_i) + z_{i|j}^\top A_{ij}\xi_i + \frac{c}{2}\|A_{ij}\xi_i - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma\|^2 \\
y_{i|j} &= z_{i|j} + 2c(A_{ij}\xi_i - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma) \\
&\quad \mathbf{node_j} \leftarrow \mathbf{node_i}(\mathbf{y_{i|j}}) \\
&\quad \mathbf{if}\ \mathbf{y_{i|j}} + \mathbf{y_{j|i}} > \mathbf{0} \\
&\qquad z_{i|j} = y_{j|i} \\
&\quad \mathbf{else} \\
&\qquad z_{i|j} = -y_{i|j}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

ここで，$A_{ij} = \begin{bmatrix}\alpha_\omega \\ \alpha_v\end{bmatrix}$，$A_{ji} = \begin{bmatrix}\beta_\omega \\ \beta_v\end{bmatrix}$ である．

QP の形式に表すと，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi_i}\ \hat{J}_i = \frac{1}{2}\xi_{i,k}^\top \hat{H}_i \xi_{i,k} + \hat{f}_i^\top \xi_{i,k} \\
&\xi_{i,k} = \begin{bmatrix}\omega_{i,k} \\ v_{i,k}\end{bmatrix}, \quad \hat{H}_i = \begin{bmatrix} 2Q_{2,\omega} + c\alpha_\omega^\top\alpha_\omega & 2Q_{2,\omega v} + c\alpha_\omega^\top\alpha_v \\ 2Q_{2,\omega v}^\top + c\alpha_v^\top\alpha_\omega & 2Q_{2,v} + 2h^2R_{i,k}^\top Q_1 R_{i,k} + c\alpha_v^\top\alpha_v \end{bmatrix}, \\
&\hat{f}_i = \begin{bmatrix} z_{i|j}\alpha_\omega^\top - \frac{c}{2}\gamma_0\gamma\alpha_\omega^\top \\ -2hR_i^\top Q_1 e_i + z_{i|j}\alpha_v^\top - \frac{c}{2}\gamma_0\gamma\alpha_v^\top \end{bmatrix}, \quad e_i = p_i^d - p_{i,k}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

この計算手法では制約式がすべてソフト制約化するため，最適化中に元の制約式を満たすことを保証できない．そこで，Tan ら [10] が提案した CBF-induced QP を用いることも考えられる．これは，ADMM ベースの CBF 分散化手法であり，最適化中に元の制約式を満たすことを保証する．

本章では，共有視野を保証するための CBF を設計し，それに基づく制御則を提案した．次章では，二次系システムのための高次 CBF を導入し，より実際的なドローンダイナミクスに対応する手法を提案する．

5. HIGHER-ORDER CBFS FOR SECOND-ORDER SYSTEMS

共有視野の分散 CBF を実機に適用するため，本章ではドローンのダイナミクスを考慮した CBF 付き QP の定式化を行う．まず，SE(3) における離散ダイナミクスを導出し，次にホロノミック系と QP 定式化，非ホロノミック系への拡張，そして複数エージェント・複数特徴点の場合について述べる．

5.1. SE(3) における離散ダイナミクス

SE(3) における離散ダイナミクスは以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
R_{k+1} &= R_k F_k \\
p_{k+1} &= p_k + hR_k v_k \\
Mv_{k+1} &= F_k^\top M v_k + h\mathcal{U}_{\|+\infty} + \langle\{_\| \\
J\Omega_{k+1} &= F_k^\top J\Omega_k + hMv_{k+1} \times v_{k+1} + h\mathcal{M}_{\|+\infty} + \langle\ll_\|
\end{aligned}
\tag{43}
$$

ここで，F_k は回転行列の更新を表す行列，M は質量行列，J は慣性モーメント行列，$\mathcal{U}$ と $\mathcal{M}$ はそれぞれ位置と姿勢に関するポテンシャル力，f_k と τ_k はそれぞれ並進力とトルクである．

ポテンシャル力は以下のように定義される．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}(\surd, \mathcal{R}) &= -R^\top \frac{\partial U}{\partial p}(p, R) \\
\mathcal{M}(\surd, \mathcal{R})^\times &= \frac{\partial U}{\partial R}^\top R - R^\top \frac{\partial U}{\partial R} \\
U &= mgp_z
\end{aligned}
\tag{44}
$$

ここで，U はポテンシャルエネルギー，m は質量，g は重力加速度，p_z は高度である．

また，一般的な近似として以下を用いる．

$$
F_k \simeq \exp(h\Omega_k^\times) \simeq I + h\Omega_k^\times
\tag{45}
$$

f,τ を制御入力とし，p_{k+1} を $u_k=(f_k,\tau_k)$ についての線形な関数として表すと，並進運動について以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k + hR_k v_k \\
Mv_{k+1} &= F_k^\top M v_k + h\mathcal{U}_{\parallel+\infty} + \langle\{_{\parallel} \\
&= Mv_k + h(Mv_k\times\Omega_k - MgR^\top e_z + f)
\end{aligned}
\tag{46}
$$

回転運動について，後述する非ホロノミック系に対応するため以下のような近似を行う．

$$
\begin{aligned}
R_{k+1} &= R_k F_k \simeq R_k F_{k+1} \\
p_{k+1} &= p_k + hR_k v_k \simeq p_k + hR_{k+1} v_{k+1}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

この仮定のもとで，姿勢更新について以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
J\Omega_{k+1} &= F_k^\top J\Omega_k + \underbrace{hMv_{k+1}\times v_{k+1}}_{\simeq 0} + \underbrace{h\mathcal{M}_{\parallel+\infty}}_{=0} + h\tau_k \\
&= J\Omega_k + \underbrace{hJ\Omega_k\times\Omega_k}_{\simeq 0} + h\tau_k \\
R_{k+1} &= R_k + hR_k\Omega_{k+1}^\times \\
&= R_k + hR_k[\Omega_k + hJ^{-1}\tau_k]_\times \\
&= R_k + hR_k\Omega_k^\times + h^2 R_k[J^{-1}\tau_k]_\times
\end{aligned}
\tag{48}
$$

位置更新について以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k + hR_{k+1}v_{k+1} \\
&= p_k + h(R_k + hR_k\Omega_{k+1}^\times)(v_k + h(v_k\times\Omega_k - gR_k^\top e_z + R_k M^{-1} f)) \\
&= p_k + h(R_k + hR_k\Omega_k^\times + h^2[J^{-1}\tau_k]_\times)(v_k + h(v_k\times\Omega_k - gR_k^\top e_z + R_k M^{-1} f)) \\
&= p_k + hR_k v_k + h^2(-ge_z + R_k M^{-1} f) + h^3[J^{-1}\tau_k]_\times v_k + \mathcal{O}(\langle^{\triangle})
\end{aligned}
\tag{49}
$$

これにより，逐次ステップでトルク τ_k によって状態 $(p_{k+1},R_{k+1})\in \mathrm{SE}(3)$ を操作可能になる．

5.2. ホロノミック系と QP 定式化

まず，$f=(f_x,f_y,f_z)\in\mathbb{R}^{\not\models}$（ホロノミック系）における HOCBF-QP を考える．
目標位置 p_k^d と現在位置 p_{k+1} の誤差を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
p_k^d - p_{k+1} &= \underbrace{p_k^d - p_k - hR_k v_k}_{e_k} - h^2(-ge_z + R_k M^{-1} f) - h^3[J^{-1}\tau_k]_\times v_k \\
&= \underbrace{e_k + h^2 g e_z}_{\tilde{e}_k} - h^2 M^{-1} R_k f + h^3 v_k^\times J^{-1}\tau_k \\
&= \tilde{e}_k - h^2 M^{-1} R_k f + h^3 v_k^\times J^{-1}\tau_k \\
&= \tilde{e}_k + A_f f_k + A_\tau \tau_k \\
&= \tilde{e}_k + \begin{bmatrix} A_f & A_\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_k \\ \tau_k \end{bmatrix} \\
&= \tilde{e}_k + A u_k
\end{aligned}
\tag{50}
$$

ここで，$A_f=-h^2M^{-1}R_k$，$A_\tau=h^3 v_k^\times J^{-1}$，$u_k=[f_k^\top,\tau_k^\top]^\top$ である．
最小化したい目的関数は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\|\tilde{e}_k + Au_k\|^2 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_g + M^{-1} f \\ J^{-1}\tau \end{bmatrix}^\top B \begin{bmatrix} A_g + M^{-1} f \\ J^{-1}\tau \end{bmatrix} \\
&\propto \frac{1}{2}u_k^\top A^\top A u_k + (A^\top \tilde{e}_k)^\top u_k \\
&\quad + \frac{1}{2}u_k^\top \underbrace{\begin{bmatrix} M^{-2}B_1 & 0 \\ 0 & (J^{-1})^\top B_2 J^{-1} \end{bmatrix}}_{B_1'\in\mathbb{R}^{\not\triangleleft\times\not\triangleleft}} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} M^{-1}B_1 A_g^\top e_z \\ 0 \end{bmatrix}^\top}_{B_2'\in\mathbb{R}^{\not\triangleleft}} u_k \\
&\propto \frac{1}{2}u_k^\top (A^\top A + B_1')u_k + (A^\top\tilde{e}_k + B_2')^\top u_k
\end{aligned}
\tag{51}
$$

ここで，$A_g = v^\times \Omega - gR^\top e_z$ である．
　よって解くべき QP は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\min_{u_k} \frac{1}{2} u_k^\top (A^\top A + B_1') u_k + (A^\top \tilde{e}_k + B_2')^\top u_k \\
&u_k = \begin{bmatrix} f_k \\ \tau_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ntriangleleft} \\
&A = \begin{bmatrix} -h^2 M^{-1} R_k & h^3 v_k \times J^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nvDash \times \ntriangleleft} \\
&B_1' = \begin{bmatrix} M^{-2} B_1 & 0 \\ 0 & (J^{-1})^\top B_2 J^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ntriangleleft \times \ntriangleleft} \\
&B_2' = \begin{bmatrix} M^{-1} B_1 A_g^\top e_z \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ntriangleleft} \\
&\tilde{e}_k = p_k^d - p_k - hR_k v_k + h^2 g e_z
\end{aligned}
\tag{52}
$$

5.3. 単一の特徴点を追従する **HOCBF** 制約
　前章で導入した安全集合 $h = \beta_l^\top(p_i) R_i e_c - \cos\Psi F$ に対して，二階微分を計算する．

$$
\begin{aligned}
\ddot{h} &= \underbrace{-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d}\dot{v}}_{\langle \mathrm{grad_p h, \dot{v}} \rangle} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d}\right) v}_{\langle \mathrm{Hess_p h[v], v} \rangle + \langle \mathrm{Hess_p h[v], \Omega} \rangle} \\
&\quad + \underbrace{\left(\frac{P_\beta}{d} R v\right)^\top R e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{Hess_R h[\Omega], v} \rangle} + \underbrace{-\beta^\top R \Omega^\times e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{Hess_R h[\Omega], \Omega} \rangle} + \underbrace{-\beta^\top R e_c^\times \dot{\Omega}}_{\langle \mathrm{grad_R h}, \dot{\Omega} \rangle} \\
&= \langle \mathrm{grad_p h, \dot{v}} \rangle + \langle \mathrm{Hess_p h[v], v} \rangle + \langle \mathrm{Hess_p h[v], \Omega} \rangle \\
&\quad + \langle \mathrm{grad_R h}, \dot{\Omega} \rangle + \langle \mathrm{Hess_R h[\Omega], v} \rangle + \langle \mathrm{Hess_R h[\Omega], \Omega} \rangle
\end{aligned}
\tag{53}
$$

ここで，各項は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{Hess_p h[v], \Omega} \rangle = \langle \mathrm{Hess_R h[\Omega], v} \rangle &= \mathrm{v}^\top \mathrm{R}^\top \frac{\mathrm{P_{fi} R e_c^\times}}{\mathrm{d}} \Omega \\
\langle \mathrm{Hess_R h[\Omega], \Omega} \rangle &= \Omega^\top [R^\top \beta]_\times e_c^\times \Omega \\
\mathrm{grad_p h} &= -\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d} \\
\mathrm{grad_R h} &= -\beta^\top R e_c^\times
\end{aligned}
\tag{54}
$$

　また，$\frac{d}{dt}\left(-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d}\right) v$ は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d}\right) v &= \underbrace{v^\top R^\top \frac{P_\beta R e_c^\times}{d} \Omega}_{\langle \mathrm{Hess_p h[v], \Omega} \rangle} - \frac{z^\top \dot{P}_\beta}{d} R v - \frac{z^\top P_\beta}{d} R \Omega^\times v - v^\top R^\top \frac{P_\beta z \beta^\top}{d^2} R v \\
&= \langle \mathrm{Hess_p h[v], \Omega} \rangle \\
&\quad \underbrace{- v^\top R^\top \frac{\beta(z^\top P_\beta) + (z^\top \beta) P_\beta + P_\beta z \beta^\top}{d^2} R v - \frac{z^\top P_\beta}{d} R \Omega^\times v}_{\langle \mathrm{Hess_p h[v], v} \rangle} \\
&= \langle \mathrm{Hess_p h[v], v} \rangle + \langle \mathrm{Hess_p h[v], \Omega} \rangle
\end{aligned}
\tag{55}
$$

ここで，$z = R e_c$ である．

よって，二次系における HOCBF は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d}\dot{v}}_{\langle \mathrm{grad_p h}, \dot{\mathrm{v}}\rangle} + \underbrace{v^\top R^\top \frac{P_\beta R e_c^\times}{d}\Omega}_{\langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \Omega\rangle} \\
&\underbrace{-v^\top R^\top \frac{\beta(z^\top P_\beta) + (z^\top \beta)P_\beta + P_\beta(Re_c)\beta^\top}{d^2} Rv - \frac{(Re_c)^\top P_\beta}{d} R\Omega^\times v}_{\langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \mathrm{v}\rangle} \\
&\underbrace{-\beta^\top R e_c^\times \dot{\Omega}}_{\langle \mathrm{grad_R h}, \dot{\Omega}\rangle} + \underbrace{-\beta^\top R\Omega^\times e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \Omega\rangle} + \underbrace{\left(\frac{P_\beta}{d}Rv\right)^\top R e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \mathrm{v}\rangle} \\
&+ (\gamma_0 + \gamma_1)\left(\underbrace{-\beta^\top R e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{grad_R h}, \Omega\rangle} + \underbrace{-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d} v}_{\langle \mathrm{grad_p h}, \mathrm{v}\rangle}\right) + \gamma_0\gamma_1(\beta_l^\top R e_c - \cos\Psi F) \geq 0
\end{aligned}
\tag{56}
$$

ここで，$\gamma_0, \gamma_1 > 0$ は HOCBF のゲインパラメータである．

$\dot{v}, \dot{\Omega}$ を制御入力で表すと，

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Omega} \simeq J^{-1}\tau \\
&\dot{v} \simeq v^\times \Omega - gR^\top e_z + M^{-1} f
\end{aligned}
\tag{57}
$$

となる．これを式 (56) に代入すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{-\beta^\top R e_c^\times J^{-1}\tau}_{\langle \mathrm{grad_R h}, \dot{\Omega}\rangle} + \underbrace{-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d}(v^\times \Omega - gR^\top e_z + M^{-1} f)}_{\langle \mathrm{grad_p h}, \dot{\mathrm{v}}\rangle} \\
&+ \underbrace{v^\top R^\top \frac{P_\beta R e_c^\times}{d}\Omega}_{\langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \Omega\rangle} \\
&+ \underbrace{-v^\top R^\top \frac{\beta(z^\top P_\beta) + (z^\top \beta)P_\beta + P_\beta(Re_c)\beta^\top}{d^2} Rv - \frac{(Re_c)^\top P_\beta}{d} R\Omega^\times v}_{\langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \mathrm{v}\rangle} \\
&+ \underbrace{-\beta^\top R\Omega^\times e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \Omega\rangle} + \underbrace{\left(\frac{P_\beta}{d}Rv\right)^\top R e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \mathrm{v}\rangle} \\
&+ 2\gamma_0\left(\underbrace{-\beta^\top R e_c^\times \Omega}_{\langle \mathrm{grad_R h}, \Omega\rangle} + \underbrace{-\frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d} v}_{\langle \mathrm{grad_p h}, \mathrm{v}\rangle}\right) + \gamma_0^2(\beta_l^\top R e_c - \cos\Psi F) \geq 0
\end{aligned}
\tag{58}
$$

したがって，HOCBF 制約付き QP は以下のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
&\min_{u_k} \frac{1}{2} u_k^\top (A^\top A + B_1') u_k + (A^\top \tilde{e}_k + B_2')^\top u_k \\
&\text{s.t. } C u_k \leq b
\end{aligned}
\tag{59}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
C &= \left[\tfrac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d} M^{-1} \quad \beta^\top R e_c^\times J^{-1}\right] \in \mathbb{R}^{\not\Vdash \times \not\triangleleft} \\
b &= \langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \Omega\rangle + \langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \Omega\rangle \\
&\quad + 2\gamma_0(\langle \mathrm{grad_R h}, \Omega\rangle + \langle \mathrm{grad_p h}, \mathrm{v}\rangle) + \mathrm{fl}_0^2(\mathrm{fi}_l^\top \mathrm{Re_c} - \cos\Psi \mathrm{F}) \\
&\quad - \frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d}(v^\times \Omega - gR^\top e_z)
\end{aligned}
\tag{60}
$$

である．

5.4. 非ホロノミック系への拡張

ドローンの非ホロノミック系力学モデルに合わせるため,

$$
\begin{aligned}
&f_k \mapsto f e_z, \quad f_k \in \mathbb{R} \\
&u_k = \begin{bmatrix} f_k \\ \tau_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}
\end{aligned}
\tag{61}
$$

とする．非ホロノミック系における HOCBF 制約付き QP は以下のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
&\min_{u_k} \frac{1}{2} u_k^\top (A^\top A + B_1') u_k + (A^\top \tilde{e}_k + B_2')^\top u_k \\
&\text{s.t.}\, C u_k \leq b
\end{aligned}
\tag{62}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
u_k &= \begin{bmatrix} f_k \\ \tau_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \\
A &= \begin{bmatrix} -h^2 M^{-1} R_k e_z & h^3 v_k \times J^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nvDash \times \ntrianglerighteq} \\
B_1' &= \begin{bmatrix} M^{-2} b_1 & 0 \\ 0 & (J^{-1})^\top B_2 J^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq \times \ntrianglerighteq} \\
B_2' &= \begin{bmatrix} M^{-1} b_1 A_g^\top e_z \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \\
\tilde{e}_k &= p_k^d - p_k - h R_k v_k + h^2 g e_z \\
C &= \begin{bmatrix} \frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d} e_z M^{-1} & \beta^\top R e_c^\times J^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nvDash \times \ntrianglerighteq} \\
b &= \langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \Omega \rangle + \langle \mathrm{Hess_p h[v]}, \mathrm{v} \rangle + \langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \mathrm{v} \rangle + \langle \mathrm{Hess_R h}[\Omega], \Omega \rangle \\
&\quad + 2\gamma_0 (\langle \mathrm{grad_R h}, \Omega \rangle + \langle \mathrm{grad_p h, v} \rangle) + \mathrm{fl}_0^2 (\mathrm{fi_l}^\top \mathrm{Re_c} - \cos \Psi \mathrm{F}) \\
&\quad - \frac{e_c^\top R^\top P_\beta R}{d} (v^\times \Omega - g R^\top e_z)
\end{aligned}
\tag{63}
$$

である．

5.5. 複数エージェント・複数特徴点の場合

以下では非ホロノミック系について HOCBF の設計を行う．前章と同様に，安全集合を

$$
\begin{aligned}
B_i &= 1 - q - \eta_i \\
\eta_i &= \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_i^l)
\end{aligned}
\tag{64}
$$

とする．

安全集合の一階微分は前章と同様に

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_i &= -\dot{\eta}_i \\
&= -\frac{d}{dt} \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_i^l) \\
&= \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_i^k) \right) \dot{\phi}_i^l \\
\dot{\phi}_i^l &= \begin{cases} \dot{P}_i^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_\rangle \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{C}_\rangle \end{cases}
\end{aligned}
\tag{65}
$$

となる．

安全集合の二階微分は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
\ddot{B}_i &= \frac{d}{dt}\dot{B}_i \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{l\in\mathcal{L}}\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k)\right)\dot{\phi}_i^l\right) \\
&= \sum_{l\in\mathcal{L}}\frac{d}{dt}\left(\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k)\right)\dot{\phi}_i^l\right) \\
&= \sum_{l\in\mathcal{L}}\left(\frac{d}{dt}\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k)\right)\dot{\phi}_i^l + \left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k)\right)\ddot{\phi}_i^l\right) \\
&= \sum_{l\in\mathcal{L}}\left(-\sum_{j\neq l}\left(\prod_{m\neq j,l}(1-\phi_i^m)\right)\dot{\phi}_i^j\dot{\phi}_i^l + \left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k)\right)\ddot{\phi}_i^l\right)
\end{aligned}
\tag{66}
$$

ここで，$\ddot{\phi}_i^l$ は P_i^l の二階微分であり，以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
\ddot{\phi}_i^l &= \begin{cases} \ddot{P}_i^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_\rangle \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L}\setminus\mathcal{C}_\rangle \end{cases} \\
\ddot{P}_i^l &= \frac{d}{dt}\dot{P}_i^l \\
&= \frac{d}{dt}\langle \mathrm{grad\,P_i^l}, \text{¸w} \rangle \\
&= \langle \mathrm{Hess\,P_i^l}[\text{¸w}], \text{¸w}\rangle + \langle \mathrm{grad\,P_i^l}, \dot{\text{¸w}}\rangle
\end{aligned}
\tag{67}
$$

ここで，$\mathrm{Hess\,P_i^l}$ は P_i^l のヘッシアン行列であり，$\dot{\xi}_W$ は制御入力に依存する項である．$\mathrm{Hess\,P_i^l}$ は以下のように分解できる．

$$
\langle \mathrm{Hess\,P_i^l}[\text{¸w}], \text{¸w}\rangle = \langle \mathrm{Hess_p\,P_i^l}[\mathrm{v}], \mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{Hess_p\,P_i^l}[\mathrm{v}], !\rangle + \langle \mathrm{Hess_R\,P_i^l}[!], \mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{Hess_R\,P_i^l}[!], !\rangle \tag{68}
$$

また，$\langle \mathrm{grad\,P_i^l}, \dot{\text{¸w}}\rangle$ は以下のように分解できる．

$$
\langle \mathrm{grad\,P_i^l}, \dot{\text{¸w}}\rangle = \langle \mathrm{grad_p\,P_i^l}, \dot{\mathrm{v}}\rangle + \langle \mathrm{grad_R\,P_i^l}, \dot{!}\rangle \tag{69}
$$

これらを用いて，HOCBF の制約は以下のように表される．

$$
\ddot{B}_i + \gamma_1\dot{B}_i + \gamma_0 B_i \geq 0 \tag{70}
$$

ここで，$\gamma_0, \gamma_1 > 0$ は正の定数である．この制約を展開すると：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l\in\mathcal{L}}\left(-\sum_{j\neq l}\left(\prod_{m\neq j,l}(1-\phi_i^m)\right)\dot{\phi}_i^j\dot{\phi}_i^l + \left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k)\right)\ddot{\phi}_i^l\right) \\
&+ \gamma_1\sum_{l\in\mathcal{L}}\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_i^k)\right)\dot{\phi}_i^l \\
&+ \gamma_0(1-q-\prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_i^l)) \geq 0
\end{aligned}
\tag{71}
$$

制御入力 $u_k = [f_k, \tau_k]^\top$ に依存する項は $\ddot{\phi}_i^l$ の中の $\langle \mathrm{grad_p\,P_i^l}, \dot{\mathrm{v}}\rangle$ と $\langle \mathrm{grad_R\,P_i^l}, \dot{!}\rangle$ である．これらを制御入力について整理すると：

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{grad_p\,P_i^l}, \dot{\mathrm{v}}\rangle &= \frac{1}{1-\cos\Psi F}\left(-\frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{d_{i,l}}\right)\dot{v} \\
\langle \mathrm{grad_R\,P_i^l}, \dot{!}\rangle &= \frac{1}{1-\cos\Psi F}(-\beta_l^\top(p_i)R_i[e_c]_\times)\dot{\omega}
\end{aligned}
\tag{72}
$$

$\dot{v}$ と $\dot{\omega}$ を制御入力 $u_k = [f_k, \tau_k]^\top$ で表すと：

$$
\begin{aligned}
\dot{v} &= v^\times \Omega - gR^\top e_z + M^{-1} f \\
\dot{\omega} &= J^{-1} \tau
\end{aligned}
\tag{73}
$$

これらを代入して整理すると，以下のような制約付き QP が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\min_{u_k} \frac{1}{2} u_k^\top (A^\top A + B_1') u_k + (A^\top \tilde{e}_k + B_2')^\top u_k \\
&\text{s.t. } C_{\text{multi}} u_k \geq b_{\text{multi}}
\end{aligned}
\tag{74}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
C_{\text{multi}} &= \left[\textstyle\sum_{l \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_\rangle} \left(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_i^k) \right) \frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{(1 - \cos \Psi F) d_{i,l}} e_z M^{-1} \quad \sum_{l \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_\rangle} \left(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_i^k) \right) \frac{\beta_l^\top (p_i) R_i [e_c]_\times}{1 - \cos \Psi F} J^{-1} \right] \\
b_{\text{multi}} &= -\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(-\sum_{j \neq l} \left(\prod_{m \neq j,l} (1 - \phi_i^m) \right) \dot{\phi}_i^j \dot{\phi}_i^l + \left(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_i^k) \right) (\langle \mathrm{Hess\ P}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{l}}[¸\mathrm{w}], ¸\mathrm{w} \rangle) \right) \\
&\quad - \gamma_1 \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_i^k) \right) \dot{\phi}_i^l \\
&\quad - \gamma_0 (1 - q - \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_i^l)) \\
&\quad + \sum_{l \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}_\rangle} \left(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_i^k) \right) \frac{e_c^\top R_i^\top P_{\beta_l}}{(1 - \cos \Psi F) d_{i,l}} (v^\times \Omega - gR^\top e_z)
\end{aligned}
\tag{75}
$$

5.6. 複数エージェントが共通の特徴点を追従する場合（HOCBF）

複数のエージェントが共通の特徴点を追従する場合，安全集合を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
B_{ij} &= 1 - q - \eta_{ij} \\
\eta_{ij} &= \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_{ij}^l)
\end{aligned}
\tag{76}
$$

ここで，ϕ_{ij}^l は特徴点 $q_l \in \mathcal{L}$ によってエッジ $(i, j) \in \mathcal{E}$ における推定が成り立っている確率であり，以下のように定義される．

$$
\begin{aligned}
\phi_{ij}^l &= \begin{cases} P_i^l P_j^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_\rangle \cap \mathcal{C}_| \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{C}_\rangle \cap \mathcal{C}_|) \end{cases} \\
\text{where} \quad \mathrm{P_i^l} &= \frac{\beta_l^\top (p_i) R_i e_c - \cos \Psi F}{1 - \cos \Psi F}
\end{aligned}
\tag{77}
$$

安全集合 B_{ij} の時間微分は以下のように計算される．

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_{ij} &= -\dot{\eta}_{ij} \\
&= -\frac{d}{dt} \prod_{l \in \mathcal{L}} (1 - \phi_{ij}^l) \\
&= \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\prod_{k \neq l} (1 - \phi_{ij}^k) \right) \dot{\phi}_{ij}^l \\
\dot{\phi}_{ij}^l &= \begin{cases} \dot{P}_i^l P_j^l + P_i^l \dot{P}_j^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_\rangle \cap \mathcal{C}_| \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{C}_\rangle \cap \mathcal{C}_|) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{78}
$$

安全集合 B_{ij} の二階微分を計算するために，$\dot{B}_{ij}$ の時間微分を計算する．

$$
\begin{aligned}
\ddot{B}_{ij} &= \frac{d}{dt}\dot{B}_{ij} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{l\in\mathcal{L}}\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^{k})\right)\dot{\phi}_{ij}^{l}\right) \\
&= \sum_{l\in\mathcal{L}}\frac{d}{dt}\left(\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^{k})\right)\dot{\phi}_{ij}^{l}\right) \\
&= \sum_{l\in\mathcal{L}}\left(\frac{d}{dt}\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^{k})\right)\dot{\phi}_{ij}^{l}+\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^{k})\right)\ddot{\phi}_{ij}^{l}\right) \\
&= \sum_{l\in\mathcal{L}}\left(-\sum_{j\neq l}\left(\prod_{m\neq j,l}(1-\phi_{ij}^{m})\right)\dot{\phi}_{ij}^{j}\dot{\phi}_{ij}^{l}+\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^{k})\right)\ddot{\phi}_{ij}^{l}\right)
\end{aligned}
\tag{79}
$$

ここで，$\ddot{\phi}_{ij}^{l}$ は ϕ_{ij}^{l} の二階微分であり，以下のように計算できる．

$$
\ddot{\phi}_{ij}^{l} = \begin{cases} \ddot{P}_i^l P_j^l + 2\dot{P}_i^l\dot{P}_j^l + P_i^l\ddot{P}_j^l & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|} \\ 0 & \text{if} \quad \mathrm{q_l} \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{C}_{\rangle} \cap \mathcal{C}_{|}) \end{cases}
\tag{80}
$$

$\ddot{P}_i^l$ と $\ddot{P}_j^l$ は P_i^l と P_j^l の二階微分であり，前述の方法で計算できる．
これらを用いて，HOCBF の制約は以下のように表される．

$$
\ddot{B}_{ij} + \gamma_1\dot{B}_{ij} + \gamma_0 B_{ij} \geq 0
\tag{81}
$$

ここで，$\gamma_0, \gamma_1 > 0$ は正の定数である．この制約を展開すると：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l\in\mathcal{L}}\left(-\sum_{j\neq l}\left(\prod_{m\neq j,l}(1-\phi_{ij}^{m})\right)\dot{\phi}_{ij}^{j}\dot{\phi}_{ij}^{l}+\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^{k})\right)\ddot{\phi}_{ij}^{l}\right) \\
&+\gamma_1\sum_{l\in\mathcal{L}}\left(\prod_{k\neq l}(1-\phi_{ij}^{k})\right)\dot{\phi}_{ij}^{l} \\
&+\gamma_0(1-q-\prod_{l\in\mathcal{L}}(1-\phi_{ij}^{l})) \geq 0
\end{aligned}
\tag{82}
$$

制御入力 $u_i = [f_i, \tau_i]^\top$ と $u_j = [f_j, \tau_j]^\top$ に依存する項は $\ddot{\phi}_{ij}^{l}$ の中の $\langle \mathrm{grad_p\, P_i^l}, \mathrm{\dot{v}_i} \rangle$，$\langle \mathrm{grad_R\, P_i^l}, \mathrm{\dot{l}_i} \rangle$，$\langle \mathrm{grad_p\, P_j^l}, \mathrm{\dot{v}_j} \rangle$，$\langle \mathrm{grad_R\, P_j^l}, \mathrm{\dot{l}_j} \rangle$ である．

これらを制御入力について整理し，前述の方法と同様に QP を定式化することで，複数エージェントが共通の特徴点を追従するための HOCBF 制約付き QP が得られる．

本章では，SE(3) 上の剛体運動に対して，視野共有を保証するための高次制御バリア関数（HOCBF）を設計し，それに基づく制御則を提案した．これにより，実際のドローンダイナミクスを考慮した共有視野保証が可能となる．

6. SIMULATION RESULTS

本章では，提案手法の有効性を検証するためのシミュレーション結果を示す．まず，単一特徴点追従のシミュレーション結果を示し，次に複数特徴点追従，そして複数エージェントの共通特徴点追従の結果を示す．最後に，分散実装の性能評価を行う．

6.1. シミュレーション設定

シミュレーションでは，以下のパラメータを用いた．

- ドローンの質量: $m = 1.0$ kg
- 慣性モーメント: $J = \mathrm{diag}(0.01, 0.01, 0.02)$ kg·m^2
- カメラの視野角: $\Psi F = 60°$
- 離散時間ステップ: $h = 0.01$ s
- CBF のゲインパラメータ: $\gamma = 1.0$, $\gamma_0 = 1.0$, $\gamma_1 = 2.0$

- 確率パラメータ: $q = 0.8$
- 目標位置への追従重み: $Q_1 = \mathrm{diag}(1.0, 1.0, 1.0)$
- 制御入力の重み: $Q_2 = \mathrm{diag}(0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$

環境内には複数の特徴点を配置し，エージェントは初期位置から目標位置に向かって移動する．シミュレーションは，Python 環境で実装し，QP 問題の解法には CVXPY を用いた．

6.2. 単一特徴点追従のシミュレーション

まず，単一のエージェントが単一の特徴点を視野内に保持しながら目標位置に移動するシミュレーションを行った．図 1 に，エージェントの軌跡と特徴点の位置を示す．

Fig. 1: 単一特徴点追従におけるエージェントの軌跡．青線はエージェントの軌跡，赤点は特徴点の位置，緑点は目標位置を表す．

図 2 に，シミュレーション中の CBF 値の推移を示す．CBF 値は常に正の値を保っており，安全制約が満たされていることがわかる．

Fig. 2: 単一特徴点追従における CBF 値の推移．CBF 値が常に正であり，安全制約が満たされていることを示している．

図 3 に，制御入力の推移を示す．制御入力は滑らかに変化しており，実機への適用が可能であることがわかる．

Fig. 3: 単一特徴点追従における制御入力の推移．(a) 並進力，(b) トルク．

6.3. 複数特徴点追従のシミュレーション

次に，単一のエージェントが複数の特徴点を視野内に保持しながら目標位置に移動するシミュレーションを行った．図 4 に，エージェントの軌跡と特徴点の位置を示す．

Fig. 4: 複数特徴点追従におけるエージェントの軌跡．青線はエージェントの軌跡，赤点は特徴点の位置，緑点は目標位置を表す．

図 5 に，各特徴点の視野内確率 P_i^l の推移を示す．確率値は 0 から 1 の間で変化しており，エージェントの移動に伴って特徴点が視野内に入ったり出たりする様子がわかる．

Fig. 5: 複数特徴点追従における各特徴点の視野内確率 P_i^l の推移．異なる色の線は異なる特徴点に対応している．

図 6 に，シミュレーション中の CBF 値の推移を示す．CBF 値は常に正の値を保っており，安全制約が満たされていることがわかる．

Fig. 6: 複数特徴点追従における CBF 値の推移．CBF 値が常に正であり，安全制約が満たされていることを示している．

6.4. 複数エージェントの共通特徴点追従

次に，複数のエージェントが共通の特徴点を視野内に保持しながら目標位置に移動するシミュレーションを行った．図 7 に，エージェントの軌跡と特徴点の位置を示す．

Fig. 7: 複数エージェントの共通特徴点追従におけるエージェントの軌跡．青線と緑線はそれぞれエージェント 1 と 2 の軌跡，赤点は特徴点の位置，青点と緑点はそれぞれエージェント 1 と 2 の目標位置を表す．

図 8 に，シミュレーション中の CBF 値の推移を示す．CBF 値は常に正の値を保っており，安全制約が満たされていることがわかる．

Fig. 8: 複数エージェントの共通特徴点追従における CBF 値の推移．CBF 値が常に正であり，安全制約が満たされていることを示している．

図 9 に，共有視野内の特徴点数の推移を示す．共有視野内の特徴点数は常に設定した最小数 m 以上を保っており，共有視野が保証されていることがわかる．

Fig. 9: 複数エージェントの共通特徴点追従における共有視野内の特徴点数の推移．赤線は設定した最小数 m を表す．

Fig. 10: 分散最適化アルゴリズム（PDMM）の収束性．(a) 目的関数値の推移，(b) 制約違反の推移．

Fig. 11: 分散実装と中央集権的実装の比較．(a) 計算時間，(b) 通信量．

6.5. 分散実装の性能評価

最後に，分散実装の性能評価を行った．図 10 に，分散最適化アルゴリズム（PDMM）の収束性を示す．

図 11 に，分散実装と中央集権的実装の比較を示す．分散実装は中央集権的実装と比較して，計算時間が短く，スケーラビリティに優れていることがわかる．

6.6. 二次系システムのための HOCBF の評価

最後に，二次系システムのための HOCBF の評価を行った．図 12 に，HOCBF を用いたエージェントの軌跡を示す．

Fig. 12: HOCBF を用いたエージェントの軌跡．青線はエージェントの軌跡，赤点は特徴点の位置，緑点は目標位置を表す．

図 13 に，シミュレーション中の HOCBF 値の推移を示す．HOCBF 値は常に正の値を保っており，安全制約が満たされていることがわかる．

Fig. 13: HOCBF を用いたシミュレーションにおける HOCBF 値の推移．HOCBF 値が常に正であり，安全制約が満たされていることを示している．

図 14 に，HOCBF と CBF の比較を示す．HOCBF は CBF と比較して，より滑らかな制御入力を生成し，安全制約の満足度も高いことがわかる．

Fig. 14: HOCBF と CBF の比較．(a) 制御入力の滑らかさ，(b) 安全制約の満足度．

6.7. 考察

シミュレーション結果から，以下のことがわかった．

1. 提案手法は，単一特徴点追従，複数特徴点追従，複数エージェントの共通特徴点追従のいずれの場合も，安全制約を満たしながら目標位置への追従が可能である．
2. 確率的アプローチにより，複数の特徴点を視野内に保持する制約を滑らかに表現でき，最適化問題の解法が容易になる．
3. 分散実装は，中央集権的実装と比較して計算効率が高く，スケーラビリティに優れている．
4. HOCBF は，二次系システムに対して滑らかな制御入力を生成し，安全制約の満足度も高い．

これらの結果から，提案手法は実機への適用が期待できる．特に，複数のドローンが協調して自己位置推定を行う場合に，視野共有を保証することで推定精度の向上が期待できる．

7. CONCLUSION

本論文では，SE(3) 上における協調自己位置推定のための視野共有を保証する分散型 CBF を提案した．提案手法は，単一特徴点追従，複数特徴点追従，複数エージェントの共通特徴点追従，そして二次系システムのための高次 CBF へと段階的に拡張され，それぞれの場合について理論的な解析と定式化を行った．

7.1. 研究成果のまとめ

本研究の主な成果は以下の通りである．

1. SE(3) 上での共有視野保証:従来研究は主に平面上の（SE(2)）あるいは単眼視野の問題に限定されていたが，本研究では 3 次元の複雑なダイナミクス下での共有視野保証を実現した．エージェント位置を $T_i = (p_i, R_i) \in \mathrm{SE}(3)$，環境内の特徴点を $q_l \in \mathcal{L}$ として，視野内条件 $\beta_l^\top(p_i) R_i e_c - \cos\Psi F > 0$ に基づく安全集合を定義し，CBF を設計した．
2. 特徴点に基づく確率的可視性制約と CBF の適用：各エージェントが観測する特徴点に基づき，その可視性を確率的に評価した上で，制御バリア関数（CBF）に組み込み，常時高い確率で共有視野が確保されるよう制御入力を設計した．特に，複数の特徴点を追従する場合に，安全集合 $B_i = 1 - q - \prod_{l\in\mathcal{L}}(1 - \phi_i^l)$ を定義し，確率 q 以上で特徴点が視野内に保持されるよう制約を設計した．
3. 非ホロノミックなドローンダイナミクスへの対応と分散最適化：機体の並進および回転運動を同時に考慮する SE(3) 上の非ホロノミックドローンモデルに対して，高次制約も扱える制御バリア関数（HOCBF）を導入し，各エージェントが局所的な情報交換を通じて分散最適化アルゴリズム（PDMM）により制御解を求める枠組みを提案した．これにより，リアルタイム性とスケーラビリティの両立を実現した．

4. 二次系システムのための高次 CBF：実機への適用を考慮し，ドローンの二次系ダイナミクスに対応する HOCBF を設計した．SE(3) における離散ダイナミクスを導出し，ホロノミック系と非ホロノミック系それぞれに対する QP 定式化を行った．これにより，より実際的なドローンモデルに対しても視野共有保証が可能となった．

シミュレーション結果から，提案手法は安全制約を満たしながら目標位置への追従が可能であることが示された．特に，確率的アプローチにより複数の特徴点を視野内に保持する制約を滑らかに表現でき，分散実装により計算効率とスケーラビリティが向上することが確認された．また，HOCBF は二次系システムに対して滑らかな制御入力を生成し，安全制約の満足度も高いことが示された．

7.2. 今後の課題

本研究の今後の課題として，以下の点が挙げられる．

1. 実機実験による検証：本研究ではシミュレーションによる検証を行ったが，実機実験による検証は今後の課題である．特に，センサノイズや通信遅延などの実環境での不確実性に対するロバスト性の評価が必要である．
2. 自己位置推定との統合：本研究では視野共有を保証する CBF を設計したが，実際の自己位置推定アルゴリズム（CoVINS など）との統合は今後の課題である．視野共有保証と自己位置推定の精度向上の関係を定量的に評価することが重要である．
3. 障害物回避との統合：実環境では障害物が存在するため，視野共有保証と障害物回避を同時に満たす制御則の設計が必要である．複数の安全制約を統合するための手法の開発が課題となる．
4. スケーラビリティの向上：より多数のエージェントに対応するため，分散アルゴリズムのさらなる効率化や，グラフ構造を考慮した通信トポロジの最適化が課題である．
5. 動的環境への対応：本研究では静的な環境を仮定したが，動的な環境（移動する特徴点や障害物）に対応するための拡張が必要である．特に，予測に基づく制御や適応的な CBF 設計が課題となる．

これらの課題に取り組むことで，より実用的な視野共有保証手法の開発が期待される．特に，自己位置推定との統合により，マルチロボットシステムの協調自己位置推定の精度向上に貢献できると考えられる．

本研究の成果は，ドローンの協調自己位置推定だけでなく，監視・捜索・協調輸送などの様々なマルチロボットタスクにおいて，視野共有を保証するための基盤技術として応用可能である．今後は，より複雑な環境や多様なタスクに対応するための拡張を進めていく予定である．

REFERENCES

[1] A. D. Ames, X. Xu, J. W. Grizzle, and P. Tabuada, “Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 62, No. 8, pp. 3861-3876, 2017.

[2] R. Arandjelovi^^c4^^87, P. Gronat, A. Torii, T. Pajdla, and J. Sivic, “NetVLAD: CNN architecture for weakly supervised place recognition,” in *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 5297-5307, 2016.

[3] B. Capelli and L. Sabattini, “Connectivity maintenance: Global and optimized approach through control barrier functions,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Autom. (ICRA)*, pp. 5590-5596, 2020.

[4] T.-H. Chang, M. Hong, W.-C. Liao, and X. Wang, “Distributed optimization using the primal-dual method of multipliers,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 64, No. 2, pp. 447-461, 2016.

[5] D. DeTone, T. Malisiewicz, and A. Rabinovich, “SuperPoint: Self-supervised interest point detection and description,” in *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW)*, pp. 224-236, 2018.

[6] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch, “Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3),” in *Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 5420-5425, 2010.

[7] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch, “Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on SE(3),” *Asian Journal of Control*, Vol. 15, No. 2, pp. 391-408, 2013.

[8] D. Panagou, D. M. Stipanovi^^c4^^87, and P. G. Voulgaris, “Distributed dynamic coverage and avoidance control under anisotropic sensing,” *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, Vol. 4, No. 4, pp. 850-862, 2017.

[9] T. Qin, P. Li, and S. Shen, “VINS-Mono: A Robust and Versatile Monocular Visual-Inertial State Estimator,” *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 34, No. 4, pp. 1004-1020, 2018.

[10] X. Tan and D. V. Dimarogonas, “Distributed implementation of control barrier functions for multi-agent systems,” *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 6, pp. 1879-1884, 2022.

[11] B. Trimarchi, F. Schiano, and R. Tron, “A Control Barrier Function Candidate for Quadrotors with Limited Field of View,” *arXiv:2410.01277 [eess.SY]*, 2025.

[12] Y. Wang, A. D. Ames, and M. Egerstedt, “Safety barrier certificates for collisions-free multi-robot systems,” *IEEE Trans. Robotics*, Vol. 33, No. 3, pp. 641-652, 2017.

[13] W. Xiao and C. Belta, “High-order control barrier functions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 67, No. 7, pp. 3655-3662, 2022.

[14] T. Zhang, H. Wu, Y. Guan, X. Jin, and H. Zhang, “Distributed visual-inertial cooperative localization,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, Vol. 7, No. 2, pp. 2232-2239, 2022.

[15] G. Zhang and R. Heusdens, “Distributed optimisation with linear equality and inequality constraints using PDMM,” *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, Vol. 10, pp. 294-306, 2024.