数学物理方法（上）第六次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 4 月 10 日

题 1. 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\sin\theta}. \tag{1}$$

解. 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，得到

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(5-3\dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)}=\oint_{|z|=1}\frac{2\,\mathrm{d}z}{3+10\mathrm{i}z-3z^2}.$$

设 $f(z)=\dfrac{2}{3+10\mathrm{i}z-3z^2}$，有 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的奇点为 $z=\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$. 由于是 1 阶极点，可以计算得到

$$\mathrm{Res}\left(f,\frac{1}{3}\mathrm{i}\right)=\left.\frac{2}{(3+10\mathrm{i}z-3z^2)'}\right|_{z=\frac{1}{3}\mathrm{i}}=-\frac{1}{4}\mathrm{i},$$

根据留数定理有

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\sin\theta}=\oint_{|z|=1}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(f,\frac{1}{3}\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

□

题 2. 计算积分

$$\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n\cos nt\,\mathrm{d}t,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

解. 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，有 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}z\,\mathrm{d}t$，得到

$$\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n\cos nt\,\mathrm{d}t=\oint_{|z|=1}\frac{(1+z+z^2)^n(1+z^{2n})}{2\mathrm{i}z^{2n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

设 $f(z)=\dfrac{(1+z+z^2)^n(1+z^{2n})}{2\mathrm{i}z^{2n+1}}$，有 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的奇点为 $z=0$，根据 Laurent 展开式，要计算 $f(z)$ 在 $z=0$ 点的留数只需计算 $(1+z+z^2)^n$ 的 z^0 项和 z^{2n} 项系数，而二者均为 1，于是

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1+1}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{\mathrm{i}},$$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

根据留数定理有

$$\int_0^{2\pi} (1+2\cos t)^n \cos nt \, \mathrm{d}t = \oint_{|z|=1} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi. \qquad \square$$

题 3. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} \, \mathrm{d}x, \tag{3}$$

解. 设 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$，有 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的奇点为 $z=\pm\mathrm{i}$ 和 $z=\pm2\mathrm{i}$，取积分围道如图 1 所示.

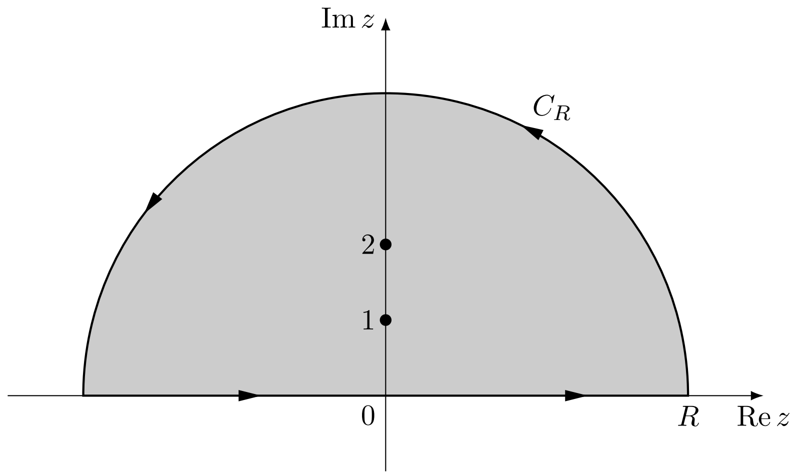

图 1: 题 3 积分围道示意图

由于 $z=\mathrm{i}$ 和 $z=2\mathrm{i}$ 是 1 阶极点，可以计算得到

$$\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = \left.\frac{1}{[(z^2+1)(z^2+4)]'}\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{1}{6\mathrm{i}}, \quad \operatorname{Res}(f,2\mathrm{i}) = \left.\frac{1}{[(z^2+1)(z^2+4)]'}\right|_{z=2\mathrm{i}} = -\frac{1}{12\mathrm{i}},$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$|zf(z)| \leqslant \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)} \rightrightarrows 0, \quad (R\to+\infty),$$

根据大圆弧引理有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z) \, \mathrm{d}z = 0,$$

根据留数定理，在 $R\to+\infty$ 极限下有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} [\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) + \operatorname{Res}(f,2\mathrm{i})] = \frac{\pi}{6}. \qquad \square$$

题 4. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

解. 设 $f(z) = \dfrac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2}$，有 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的奇点为 $z=\pm\mathrm{i}$，取积分围道如图 2 所示.

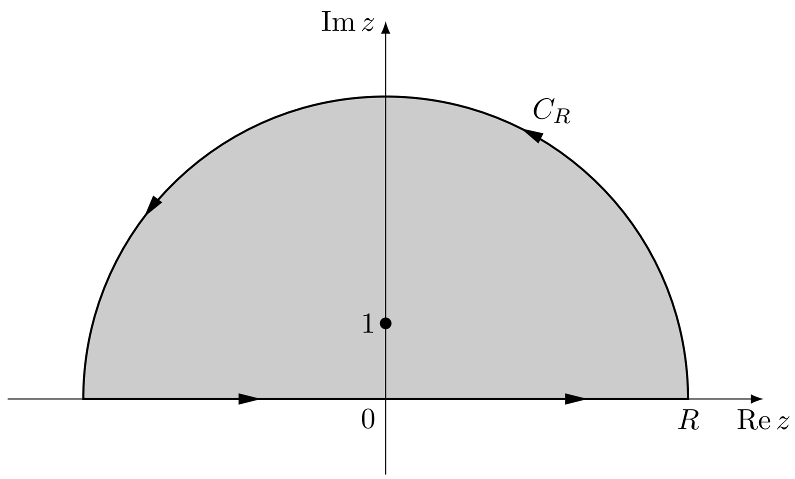

图 2: 题 4 积分围道示意图

由于 $z = \mathrm{i}$ 是 2 阶极点，可以计算得到

$$\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-\mathrm{i})^2 f(z)]\bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{1}{4\mathrm{e}},$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$\left|\frac{z}{(z^2+1)^2}\right| \leqslant \frac{R}{(R^2-1)^2} \rightrightarrows 0, \quad (R\to+\infty),$$

根据 Jordan 引理有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

根据留数定理，在 $R\to+\infty$ 极限下有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{e}},$$

由此得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}. \qquad \square$$

题 5. 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x, \quad -1<p<2. \tag{5}$$

解. 设 $t = \dfrac{x}{1-x}$，有 $x = \dfrac{t}{1+t}$ 和 $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$，得到

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{t^{1-p}}{(1+2t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

设 $f(z) = \dfrac{z^{1-p}}{(1+2z)^3}$，有 $f(z)$ 的支点为 $z=0,\infty$，在 $\mathbb{C}$ 内的奇点为 $z=-\dfrac{1}{2}$，取单值分支为 $0<\arg z<2\pi$，割线为正实轴，取积分围道如图 3 所示.

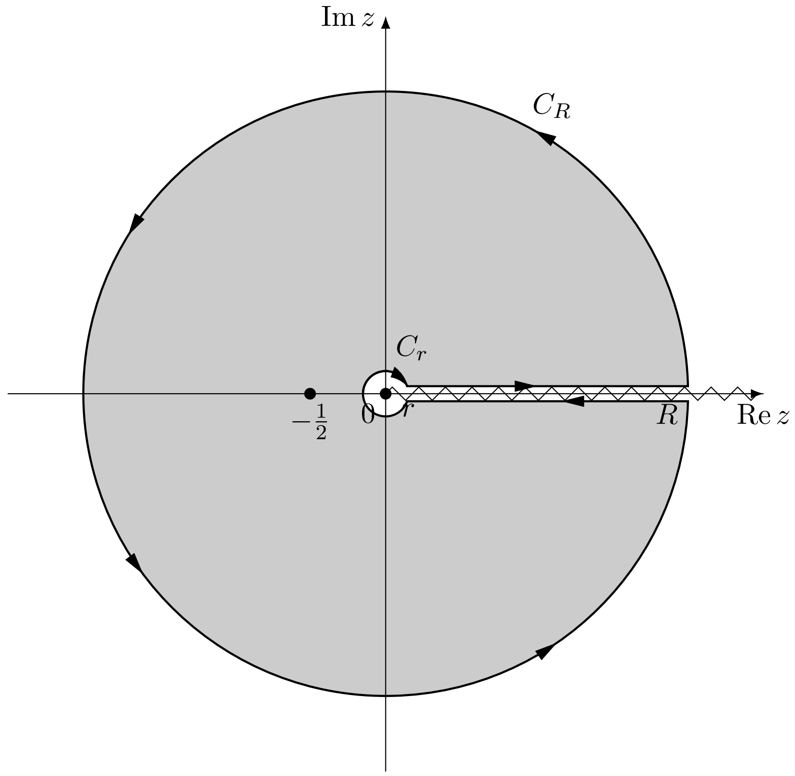

图 3: 题 5 积分围道示意图

对于割线下方水平线，设 $z = x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$ 有

$$f(z) = \frac{x^{1-p}\mathrm{e}^{2(1-p)\pi\mathrm{i}}}{(1+2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^3} = \mathrm{e}^{-2p\pi\mathrm{i}}f(x),$$

由于 $z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{2}$ 是 3 阶极点，可以计算得到

$$\operatorname{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^3 f(z)\right]\Bigg|_{z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{2}} = 2^{p-3}p(1-p)\mathrm{e}^{-p\pi\mathrm{i}},$$

对于小圆弧，可以计算得到

$$|zf(z)| \leqslant \frac{r^{2-p}}{(1-2r)^3} \rightrightarrows 0, \quad (r \to 0),$$

根据小圆弧引理有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$|zf(z)| \leqslant \frac{R^{2-p}}{(2R-1)^3} \rightrightarrows 0, \quad (R \to +\infty),$$

根据大圆弧引理有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

根据留数定理，在 $r\to 0$ 和 $R\to +\infty$ 极限下有

$$\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-2p\pi\mathrm{i}})f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(f,-\frac{1}{2}\right) = 2^{p-2}p(1-p)\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-p\pi\mathrm{i}},$$

由此得到

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{p-3}p(1-p)\pi}{\sin p\pi}.$$ □

题 6. 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

解. (方法 1) 利用分部积分可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_{x=0}^{\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\,\mathrm{d}(2x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

设 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$，有 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的奇点为 $z=0$，取积分围道如图 4 所示.

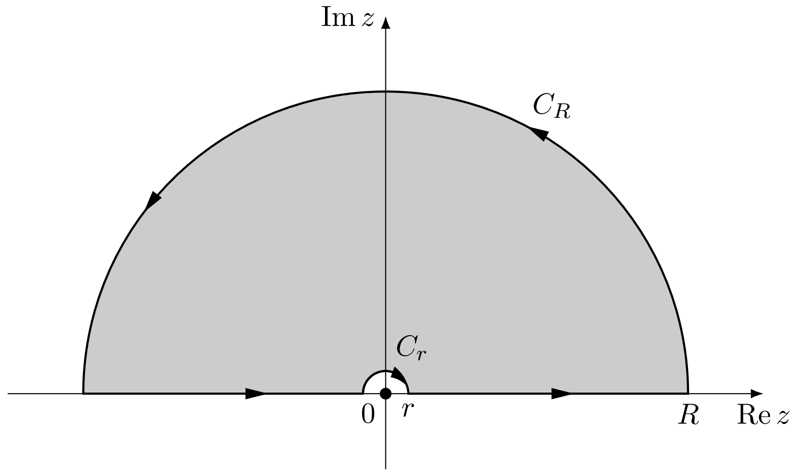

图 4: 题 6 积分围道示意图

对于小圆弧，由于绕的是 1 阶极点，可以计算得到

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 1,$$

根据小圆弧引理有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}\cdot 1 = -\pi\mathrm{i},$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R} \rightrightarrows 0, \quad (R\to +\infty),$$

根据 Jordan 引理有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

根据 Cauchy 定理，在 $r \to 0$ 和 $R \to +\infty$ 极限下有

$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \pi\mathrm{i} = 0,$$

由此得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

解. (方法 2) 设 $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^2}$，有 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内仅有可去奇点 $z=0$，取积分围道如图 5 所示.

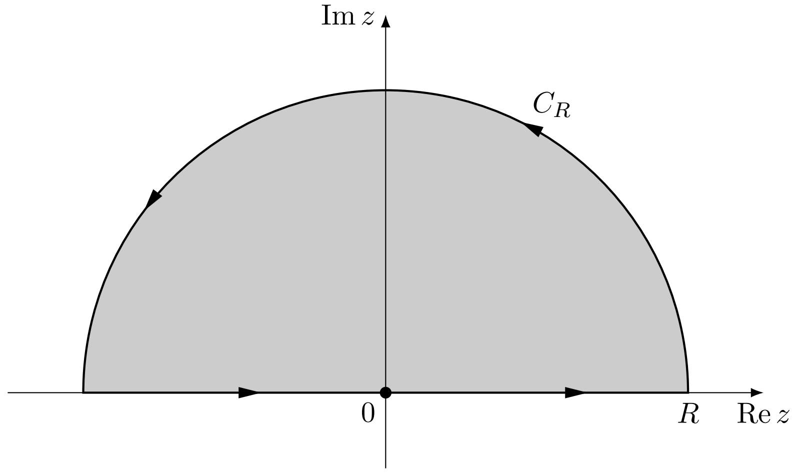

图 5: 题 6 积分围道示意图

对于大圆弧，可以计算得到

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R} \rightrightarrows 0, \quad \left|\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{R^2} \rightrightarrows 0, \quad (R \to +\infty),$$

根据大圆弧引理、Jordan 引理和补充引理有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z^2}\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{z^2}\right] = 4\pi,$$

根据 Cauchy 定理，在 $R \to +\infty$ 极限下有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2}{(2\mathrm{i}z)^2}\,\mathrm{d}z = 0,$$

由此得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{4z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

注. 教材上有补充引理：设 $Q(z)$ 只有有限个奇点，且在下半平面范围内 $z \to \infty$ 时 $Q(z)$ 一致地趋于 0，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pz}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}[Q(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pz}],$$

其中 $p > 0$，C_R 是以原点为圆心，R 为半径的上半圆弧.

题 7. 早期宇宙历史中的中微子 ν 的能量密度为

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^{x/kT}+1}\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

计算此积分.

解. 利用换元将积分无量纲化，可以得到

$$\rho_\nu = \frac{4\pi(kT)^4}{h^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

设 $f(z)=\dfrac{z^{s-1}}{\mathrm{e}^z+1}, s\in\mathbb{N}^*$，有 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的奇点为

$$z=(2k+1)\pi\mathrm{i},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

取积分围道如图 6 所示.

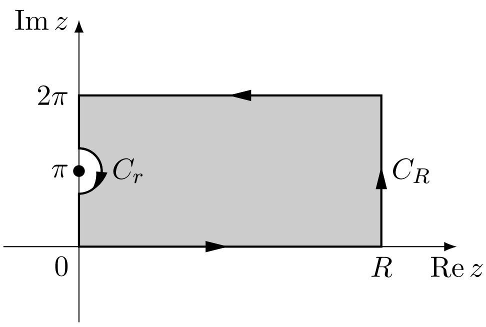

图 6: 题 7 积分围道示意图

对于上方水平线，设 $z=x+2\pi\mathrm{i}$ 有

$$f(z)=\frac{(x+2\pi\mathrm{i})^{s-1}}{\mathrm{e}^{x+2\pi\mathrm{i}}+1}=\frac{(x+2\pi\mathrm{i})^{s-1}}{\mathrm{e}^{x}+1},$$

对于左方竖直线，设 $z=\mathrm{i}y$ 有

$$f(z)=\frac{(\mathrm{i}y)^{s-1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+1}=\frac{(\mathrm{i}y)^{s-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y/2}}{2\cos(y/2)}=\frac{1}{2}(\mathrm{i}y)^{s-1}\left(1-\mathrm{i}\tan\frac{y}{2}\right),$$

对于小圆弧，由于绕的是 1 阶极点，可以计算得到

$$\lim_{z\to\pi\mathrm{i}}(z-\pi\mathrm{i})f(z)=\left.\frac{z^{s-1}}{(\mathrm{e}^z+1)'}\right|_{z=\pi\mathrm{i}}=-(\pi\mathrm{i})^{s-1},$$

根据小圆弧引理有

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}f(z)\,\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i}\cdot[-(\pi\mathrm{i})^{s-1}]=(\pi\mathrm{i})^s,$$

对于右方竖直线，设 $z=R+\mathrm{i}y$ 有

$$\left|\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{2\pi}|f(z)|\,\mathrm{d}y\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{R^{s-1}}{\mathrm{e}^R-1}\,\mathrm{d}y=\frac{2\pi R^{s-1}}{\mathrm{e}^R-1}\to0,\quad(R\to+\infty),$$

根据 Cauchy 定理，在 $r \to 0$ 和 $R \to +\infty$ 极限下有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1} - (x + 2\pi \mathrm{i})^{s-1}}{\mathrm{e}^x + 1}\, \mathrm{d}x - \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\mathrm{i}y)^{s-1} \Big(1 - \mathrm{i} \tan \frac{y}{2}\Big) \mathrm{i}\, \mathrm{d}y + (\pi \mathrm{i})^s = 0,$$

取 $s = 3$ 并对等式取虚部可以得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{-4\pi x}{\mathrm{e}^x + 1}\, \mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} y^2\, \mathrm{d}y - \pi^3 = 0,$$

取 $s = 5$ 并对等式取虚部可以得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{32\pi^3 x - 8\pi x^3}{\mathrm{e}^x + 1}\, \mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} y^4\, \mathrm{d}y + \pi^5 = 0,$$

由此解得

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x + 1}\, \mathrm{d}x = \frac{7\pi^4}{120},$$

最终得到

$$\rho_\nu = \frac{4\pi (kT)^4}{h^3} \cdot \frac{7\pi^4}{120} = \frac{7\pi^5 (kT)^4}{30 h^3}.$$

□

注. 事实上这个积分与 Γ 函数和 *Riemann* ζ 函数满足如下关系

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x + 1}\, \mathrm{d}x = (1 - 2^{1-s}) \Gamma(s) \zeta(s), \quad \forall\, \mathrm{Re}\, s > 0.$$