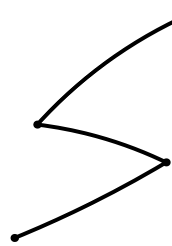
3 复变积分

3.1 复变积分

复变积分 如图, 设 C 是分段光滑曲线 *(本课程中曲线都是指分段光滑曲线)*.



复变函数积分定义为两个实变线积分的组合

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &\equiv \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\ &= \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)\end{aligned} \tag{1}$$

可知, 复变函数积分的实部和虚部都是第二型曲线积分. 根据实变线积分的知识, 可以知道: 如果 $f(z)$ 是 C 上的连续函数, 则复变积分一定存在.

复变积分性质可由实变线积分的性质得到:

1. 若 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z\\ =&\int_C f(z)\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{2}$$

2. 以 C^- 表示 C 的逆向

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

3. 积分不等式

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \tag{4}$$

上式右边的积分同样由实变线积分定义为第一型曲线积分

$$\begin{aligned}\int_C |f(z)||\mathrm{d}z| &\equiv \int_C |u+\mathrm{i}v||\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y|\\ &= \int_C \sqrt{u^2+v^2}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{5}$$

$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$.

如果$f(z)$在C上有界$|f(z)| \le M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C M|\mathrm{d}z| = Ml \tag{6}$$

$l = \int_C |\mathrm{d}z| = \int_C \mathrm{d}s$为$C$的长度

复变积分的计算　积分路径参数化

简单光滑曲线 简单光滑曲线可表示为 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t); a \le t \le b$, 且 $x(t)$ 和 $y(t)$ 有连续导数, 并且 $f'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t) \ne 0$. 则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + \mathrm{i}v(x(t), y(t))] \\ &\quad [x'(t) + \mathrm{i}y'(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{7}$$

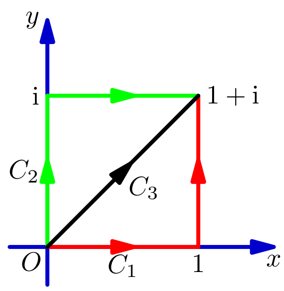
分段光滑曲线 设为 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 其中每一段 C_i 为简单光滑曲线, 则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \\ &\quad + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{8}$$

复变积分与路径相关

一般说来, 复变积分的数值, 不仅依赖于被积函数和积分路径的端点, 而且还依赖于积分路径本身

Example 3.1 求 $\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$



C_1: 沿实轴$0 \to 1$, 再平行于虚轴$1 \to 1 + \mathrm{i}$

C_2: 沿虚轴$0 \to \mathrm{i}$, 再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1 + \mathrm{i}$

C_3: 沿直线$0 \to 1 + \mathrm{i}$

Solution $\mathrm{Re}z = x$, 所以

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_C x\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_C x\mathrm{d}y$$

C_1:

$$\int_{C_1} \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \mathrm{i}$$

C_2:

$$\int_{C_2} \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = 0 + \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

C_3: 积分参数化为 $z(t) = (1 + \mathrm{i})t; 0 \le t \le 1$, 于是

$$\int_{C_3} \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$$

□

不定积分或原函数

不定积分或原函数 设 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 是区域 G 内的连续函数, 如果在 G 内有 $\Phi'(z) = f(z)$, 那么函数 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 G 内的一个**不定积分或原函数**

Note 1. $\Phi(z)$ 显然为 G 内解析函数

2. 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的

下列定理相当于微积分基本定理.

Theorem 3.1 设 C 的端点 a, b; f 的某个原函数为 Φ,

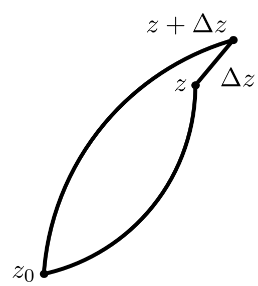
$$\int_C f\mathrm{d}z = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{9}$$

Theorem 3.2 设 f 连续. 积分 $\int_C f\mathrm{d}z$ 在区域 G 内仅与 C 的端点有关, 则 f 在 G 内的原函数 $F(z)$ 存在.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z \tag{10}$$

z_0 为区域内的任意参考点.

Proof 只要直接求出 $F(z)$ 的导数即可. 为此, 设 z 是 G 内一点, $z + \Delta z$ 是它的邻点



则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \quad F(z+\Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

因为积分与路径无关, 所以

$$\begin{aligned} F(z+\Delta z) &= \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\ &= F(z) + \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

于是, 当 $\Delta z \to 0$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \to \frac{f(z)\Delta z}{\Delta z} = f(z) \end{aligned}$$

这样就证明了 $F(z)$ 在 G 内可导, 并且 $F'(z) = f(z)$. □

知道了被积函数的原函数, 可使复变积分的计算简化

Example 3.2 计算积分 $\int_a^b z^n \mathrm{d}z$, n 为整数

Solution 设 $f(z)=z^n$ 的原函数为 Φ, 则

$$\Phi(z)=\begin{cases}\frac{1}{n+1}z^{n+1} & n\neq -1\\ \ln z & n=-1\end{cases}$$

$n\geq 0$时, 原函数为整个复平面上的解析函数, 因此对于z平面上任意一条积分路线, 均有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$$

$n<-1$ 时, 原函数为除去 $z=0$ 点的整个复平面上的解析函数, 因此对于 z 平面上任意一条不通过 O 点的积分路线, 仍有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$$

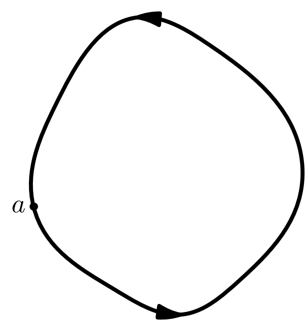
$n=-1$ 时, 原函数 $\ln z$ 为整个复平面除去一条从 O 点出发的割线: $\mathbb{C}\setminus\{$割线$\}$ 上的解析函数, 因此对于在解析区域内的任意一条积分路线, 有

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z}=\ln b-\ln a$$

□

3.2 单连通区域的 Cauchy 定理

围道积分



如图, 如果积分路线的起点和终点重合, 积分路线为一闭合曲线, 这时复变积分称为**围道积分**, 记为

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

显然, 如果 $f(z)$ 在区域 G 内原函数存在, 则 G 中任何一条闭合围道积分 ($\forall a\in C$)

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^a f(z)\mathrm{d}z=\Phi(a)-\Phi(a)=0$$

Theorem 3.3 *在区域 G内, 下列命题等价:*

1. *复变积分与路径无关*

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$$

2. 围道积分恒为零

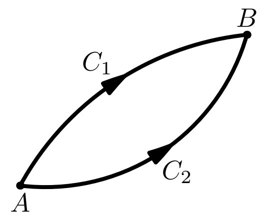
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

3. 函数的原函数存在

$$f(z) = \Phi'(z)$$

Proof 由上节定理3.2, 命题 1 与命题 3 等价. 命题 1 与命题 2 的等价显然:

设 C_1, C_2 为连接两点 A, B 的任意两条曲线



则下面等式互相等价

$$\oint_{C_1+C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

□

简单闭合围道 不与自身相交的闭合围道称为**简单闭合围道**.

Example 3.3 计算 $\oint_C z^n \mathrm{d}z$, n 为整数, C 为一逆时钟方向的简单闭合围道

Solution 原函数为

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

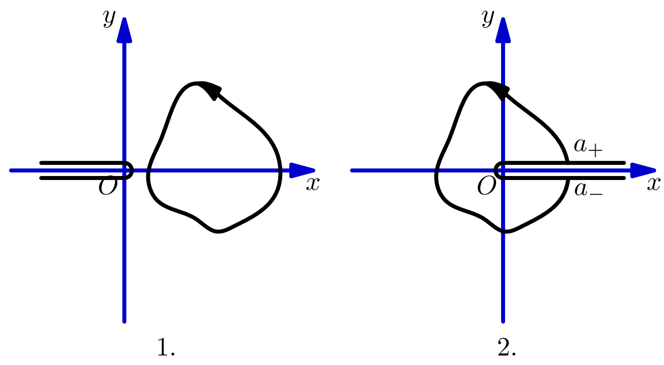
$n \geq 0$ 时, 原函数为整个复平面上的解析函数, 因此对于任意一条闭合围道, 均有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

$n < -1$ 时, 原函数为除去 $z = 0$ 点的整个复平面上的解析函数, 因此对于任意一条不通过 O 点的闭合围道, 仍有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

$n=-1$ 时, 原函数 $\ln z$ 为多值函数, 需作割线化为单值函数. 设积分围道不通过原点, 区分如下两种情况:



1. 闭合围道不包围 O 点. 可作割线, 使闭合围道位于 $\ln z$ 的解析区域内, 仍有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

2. 闭合围道包围 O 点. 这时无论如何作割线, 总会与闭合围道相交.例如作割线沿 x 轴方向, 与围道交 a 点. 但我们有 (设回路方向为逆时针)

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int_{a_+}^{a_-} \frac{\mathrm{d}z}{z} \\ &= \ln a_- - \ln a_+\end{aligned}$$

规定 $0 \le \arg z \le 2\pi$, 则

$$\begin{aligned}\ln a_+ &= \ln a \\ \ln a_- &= \ln a + 2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

故这时

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}$$

总之, 若简单闭合围道不通过原点, 且回路方向为逆时针

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n=-1\text{且}C\text{包围}z=0 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

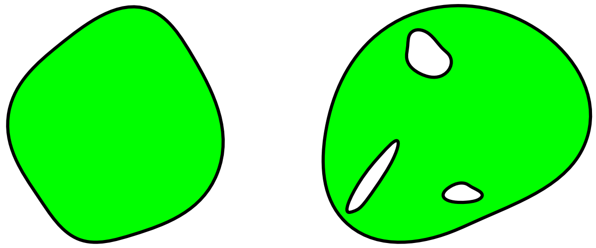
$\square$

Theorem 3.4 (Jordan定理) *任何一条简单闭合围道把整个平面分成两个不相交的区域:*

- *一个有界称为它的***内区域***,*
- *一个无界称为它的***外区域***.*

单连通与复连通区域 *若区域内任何简单闭合围道的内区域都属于该区域, 称为***单连通区域***. 否则为***复连通区域***.*

Example 3.4 下图中, *(a)*和*(b)*是两个区域



(a) *(b)*

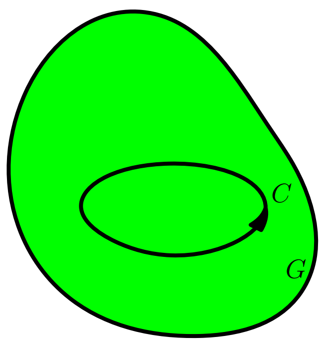
Solution (a) 单连通区域

(b) 复连通区域

□

Theorem 3.5 ((单连通区域的)Cauchy定理) 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 G 中解析, 则沿G中任何一个简单闭合围道 C, 有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$



证明 我们用Green公式给出证明. 假设 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 连续, 下列 Green 公式成立:

$$\oint_C [P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y] = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

S 为 C 的内区域. 复变积分定义为两个实变线积分的组合(方程(1)). 如果是解析函数, $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 连续.

$$\oint_C [u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y] = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\oint_C [v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y] = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据 C–R 方程, 右端两个面积分中的被积函数均等于零. 故有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

□

推论1 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

推论2 若 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析, 则复变积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关.

推论3 单连通区域 G 内的解析函数总有原函数.

Note 复连通区域则不一定. 例如: $1/z$ 和 $1/z^n (n > 1)$ 都是复连通区域—复平面除去原点中的解析函数...

3.3 复连通区域的 Cauchy 定理

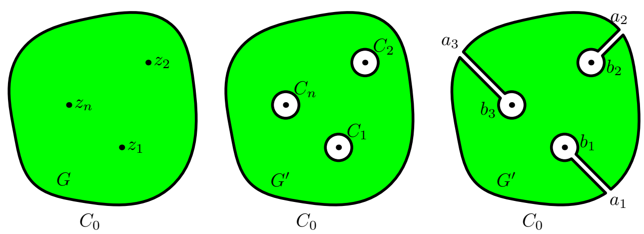
根据单连通区域的 Cauchy 定理(推论1), 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

如果被积函数在区域 G 内有奇点 z_1, z_2, ..., z_n, 则单连通区域的Cauchy定理不能直接使用.

复连通区域的Cauchy定理

我们可用一系列小围道 C_1, C_2, ..., C_n 将奇点排除在讨论的区域之外. 这时, 我们便会遇到复连通区域.



我们把最大围道用 C_0 代表, 其它围道包含在 C_0 内部用 C_1, C_2, ..., C_n 表示. 不妨取 C_0, C_1, ..., C_n 均为逆时钟方向.

作适当割线把 C_1, C_2, ..., C_n 和 C_0 连接起来, 从而得到一个单连通区域 G'. 对 G' 可以应用单连通区域的 Cauchy 定理, 沿 G' 边界取积分围道, 则由

$$\int_{a_i}^{b_i} f(z)\mathrm{d}z + \int_{b_i}^{a_i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

可得

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \cdots \oint_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

于是

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \cdots \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

我们把上述结果总结为

Theorem 3.6 (复连通区域的 Cauchy 定理) *如果 $f(z)$ 是复连通区域 $\overline{G}$ 中的 (单值) 解析函数, 则*

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z \tag{12}$$

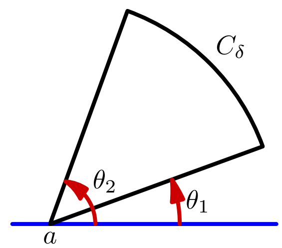
其中 C_0, C_1, C_2, ..., C_n 是构成复连通区域 $\overline{G}$ 的边界的各个(分段光滑)闭合围道, C_1, C_2, ..., C_n 都包含在 C_0 的内部. 而且所有积分围道走向相同.

Note 上面, $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中解析, 则函数不仅在 G 中无奇点, 且在边界(即积分围道)上也解析无奇点. 例如: 若 z_1, z_2, ..., z_n 为 G 内奇点, $G \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ 为复连通区域, 但不能够应用复连通区域的 Cauchy 定理.

3.4 两个有用的定理

Theorem 3.7 (小圆弧定理) 若函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的空心邻域内连续, 且当 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$, $|z-a| \to 0$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k, 则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1) \tag{13}$$



其中 C_δ 是以 a 为圆心, δ 为半径, 夹角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧, 即

$$C_\delta = \{|z-a| = \delta \& \theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2\}$$

Proof 将 C_δ 路径参数化, 为

$$z = a + \delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2$$

可得

$$\int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{i}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| \\
=&\left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_\delta}\frac{k}{z-a}\mathrm{d}z\right| \\
=&\left|\int_{C_\delta} [(z-a)f(z)-k]\frac{\mathrm{d}z}{z-a}\right| \\
\le&\int_{C_\delta} |(z-a)f(z)-k|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|}
\end{aligned}$$

由 $(z-a)f(z)\to k$ 一致趋近条件: $\forall\epsilon>0$, $\exists r(\epsilon)$ 与 $\arg(z-a)$ 无关, 当 $\delta<r$ 时, 对于 C_δ 上所有点 $|z-a|=\delta$, $|(z-a)f(z)-k|<\epsilon$. 于是

$$\left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| \le \epsilon\int_{C_\delta}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|} = \epsilon(\theta_2-\theta_1)$$

即

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)$$

□

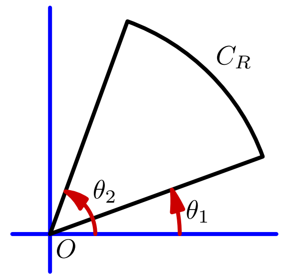
Note 在实际运用中, 若

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = k$$

即在 $0\le\arg(z-a)\le 2\pi$ 的范围内, $|z-a|\to 0$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k.

Theorem 3.8 (大圆弧定理) 设 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内连续，当 $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, $z \to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋近于 K，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1) \tag{14}$$



其中 C_R 是以原点为圆心，R 为半径，夹角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，即

$$C_R = \{|z| = R \& \theta_1 \le \arg z \le \theta_2\}$$

Proof 令 $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right|\\ =&\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_R}\frac{K}{z}\mathrm{d}z\right|\\ =&\left|\int_{C_R}[zf(z)-K]\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|\\ \le&\int_{C_R}|zf(z)-K|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}\end{aligned}$$

由 $z\to\infty$, $zf(z)\to K$ 一致趋近条件: $\forall\epsilon>0$, $\exists M(\epsilon)$ 与 $\arg z$ 无关，当 $R>M$ 时，对于 C_R 上所有点 $|z|=R$, $|zf(z)-k|<\epsilon$. 于是

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| \le \epsilon\int_{C_R}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|} = \epsilon(\theta_2-\theta_1)$$

即

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)$$

□

Note 若

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = K$$

即在 $0\le\arg z\le 2\pi$ 的范围内，$z\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋近于 K.

3.5 Cauchy 积分公式

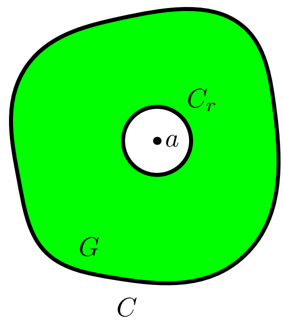
复变函数积分的另一重要而又极有用的关系式是Cauchy积分公式.

Theorem 3.9 (Cauchy 积分公式) *设 C 为一简单闭合围道, G 为其内部, a 为 G 内一点. 若 $f(z)$ 是区域 $\overline{G}$ 上的 (单值) 解析函数, 则*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z \tag{15}$$

其中围道积分沿 C 的正向即逆时针方向.

Proof 在 G 内作小圆 $|z-a| = r$. 则 $\{G \setminus (\text{小圆内}) | z-a| < r\}$ 为一复连通区域.



被积函数在此复连通区域内解析, 根据复连通区域的 Cauchy 定理

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z = \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z$$

此结果与 r 的大小无关, 故可令 $r \to 0$. 因为

$$\lim_{z \to a} (z-a) \frac{f(z)}{z-a} = f(a)$$

所以, 由小圆弧定理

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z &= \lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z \\ &= f(a) \cdot 2\pi \mathrm{i} \end{aligned}$$

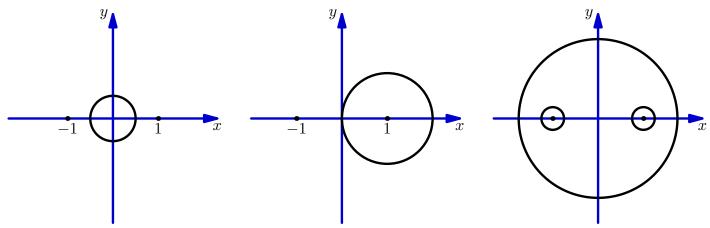
就证得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z = f(a)$$

□

Example 3.5 计算积分 $\oint_C \frac{1}{z^2-1} \mathrm{d}z$

1. $|z| = \frac{1}{2}$
2. $|z-1| = 1$
3. $|z| = 3$



1. *2.* *3.*

Solution 被积函数的奇点为 $z=\pm1$

1. 奇点都在 $|z|=\frac{1}{2}$ 圆外, 故根据 Cauchy 定理

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z=0$$

2. 采用 Cauchy 积分公式

$$\begin{aligned}&\oint_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z\\=&\oint_{|z-1|=1}\frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\mathrm{d}z\\=&2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1}\\=&\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

3. 解法1: 由复连通 Cauchy 定理, 作两个小圆将奇点 1 和 −1 包围, 则

$$\begin{aligned}&\oint_{|z|=3}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z\\=&\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z+\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z\\=&\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z\\=&2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=1}+2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=-1}=\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}=0\end{aligned}$$

解法2: 化为部分分式

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z+1)(z-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

每个部分分式只有一个奇点. 于是

$$\begin{aligned}&\oint_{|z|=3}\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z\\=&\frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z\\=&\frac{1}{2}\cdot2\pi\mathrm{i}\cdot\left.1\right|_{z=1}-\frac{1}{2}\cdot2\pi\mathrm{i}\cdot\left.1\right|_{z=-1}\\=&\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}=0\end{aligned}$$

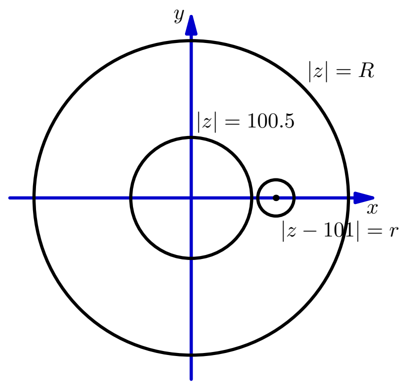
□

Example 3.6 求积分

$$I = \oint_{|z|=100.5} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)\cdots(z-100)(z-101)}$$

对无界区域应用 Cauchy 定理 本题中被积函数有101个奇点. 其中, 100个奇点在圆 $|z| = 100.5$ 之内, 1个在圆外. 诚然, 可分别以 $z_0 = 1$, $z_1 = 2$, ..., $z_{100} = 100$ 为圆心, 以正数 $r < 0.5$ 为半径作100个小圆, 然后利用 Cauchy 积分公式求积分.

为简单计, 我们考虑圆外的无界区域. 作大圆 $|z| = R(R > 102)$. 再作一小圆 $|z-101| = r(r < 0.5)$ 包围奇点 $z_{101} = 101$.



由复连通的 Cauchy 定理

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=100.5} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z + \oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z$$

其中, 我们令

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)\cdots(z-100)}$$

所以

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z - \oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z$$

此积分值与 R 无关. 令 $R \to \infty$, 利用大圆弧定理

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{f(z)}{z-101} = 0$$

所以

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z = 0$$

最后, 由 Cauchy 积分公式

$$\begin{aligned} I &= -\oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z \\ &= -2\pi\mathrm{i}f(101) = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{100\cdot 99\cdots 1} = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{100!} \end{aligned}$$

□

Theorem 3.10 (无界区域的 Cauchy 积分公式)　如果 $f(z)$ 在简单闭合围道 C 上及 C 外解析, 且

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

则 *Cauchy* 积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

仍然成立, 此处 a 为 C 外一点, 积分路线 C 为顺时针方向.

3.6　解析函数的高阶导数

由 Cauchy 积分公式, G 内任意一点的函数值 $f(z)$ 可用边界 C 上各点的函数值积分表示

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{16}$$

首先求 $f'(z)$. 因为

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{h}\oint_C\left[\frac{f(\xi)}{\xi-z-h}-\frac{f(\xi)}{\xi-z}\right]\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

将被积函数视为 ξ, h 的函数, 因函数连续, 故可交换积分与求极限的次序

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{17}$$

同样, 可得

$$\begin{aligned}f''(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{h}\oint_C\left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)^2}-\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\right]\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)^2}-\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\right]\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\partial}{\partial z}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{18}$$

一般可得高阶导数公式

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi} \tag{19}$$

Theorem 3.11　设 $f(z)$ 是区域 G 内的解析函数, 则在区域 G 内 $f(z)$ 的任何阶导数都存在, 并且 $f^{(n)}(z)$ 也是区域内的解析函数.

Example 3.7 利用高阶导数公式求复变积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2} \mathrm{d}z$$

Solution 由高阶导数公式, 得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \frac{2\pi \mathrm{i}}{n!} f^{(n)}(a)$$

令 $a = 0$, $n = 1$

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2} \mathrm{d}z &= \frac{2\pi \mathrm{i}}{1!} (\sin^2 z)'_{z=0} \\ &= 4\pi \mathrm{i} \sin z \cos z|_{z=0} = 0 \end{aligned}$$

□

Theorem 3.12 (Liouville (刘维) 定理) 如果 $f(z)$ 在全平面解析, 而且 $|f(z)|$ 有界. 则 $f(z)$ 是一个常数.

Proof 任取一点 z. 以 z 为圆心, R 为半径作圆. 则

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\xi - z| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi$$

于是

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi - z| = R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} |\mathrm{d}\xi|$$

$\because |f(z)|$ 有界, $\therefore \exists M > 0$ 使得 $|f(z)| < M$. 于是

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \oint_{|\xi - z| = R} |\mathrm{d}\xi| \\ &= \frac{M}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R} \end{aligned}$$

令 $R \to \infty$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= 0 \\ f'(z) &= 0 \\ f(z) &= \text{常数} \end{aligned}$$

□

Theorem 3.13 (代数基本定理) 任一 n 次(复数)多项式 $(n > 0)$ 都有一个复数根.

Proof 设 $f(z)$ 是一非常数的多项式,

$$f(z) = a_n z^n + ... + a_0,$$

$n > 0$ 且 $a_n \neq 0$. 如果 $f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, 则函数

$$g(z) = 1/f(z)$$

为全平面解析. 显然

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = 0$$

即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists R > 0$, 当 $|z| > R$ 时, $|g(z)| < \epsilon$.

而 $|z| \leq R$ 为一有界闭区域, 由连续函数有界性定理(第一章), $|g(z)|$ 在此闭区域有界并达到它上下界.

因此, $g(z)$ 是一全平面解析且 $|g(z)|$ 有界的函数. 由 Liouville 定理, 它只能是一个常数. 这与假设 $n > 0$ 矛盾. □

3.7 Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

Theorem 3.14 (Morera (摩列拉) 定理) *设 $f(z)$ 在区域 G 内连续. 如果对 G 中的任何闭合围道 C, 都有 $\oint_C f(z) = 0$. 则 $f(z)$ 在 G 内解析.*

Proof 由 $\oint_C f(z) = 0$, 则 $f(z)$ 有原函数 $\Phi(z)$

$$f(z) = \Phi'(z)$$

说明 $\Phi(z)$ 为解析函数. 于是 $\Phi(z)$ 的导数 $f(z) = \Phi'(z)$ 也解析. □

Theorem 3.15 (含参量积分的解析性) *设*

1. *$f(t, z)$ 是 t 和 z 的连续函数, $t \in [a, b]$, $z \in G$,*
2. *对于 $[a, b]$ 上的任何 t, $f(t, z)$ 是 G 内的解析函数,*

则 $F(z) = \displaystyle\int_a^b f(t, z)\mathrm{d}t$ 在 G 内是解析的, 且

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\mathrm{d}t \tag{20}$$

Proof 对于 G 内任意一点 z_0, 取它的一个 G 内邻域 $|z - z_0| < \epsilon$. 在邻域内任取闭合围道 C, 都有 (因为 $f(t, z)$ 连续, 故可交换积分次序)

$$\begin{aligned}
\oint_C F(z)\mathrm{d}z &= \oint_C \int_a^b f(t, z)\mathrm{d}t\mathrm{d}z \\
&= \int_a^b \oint_C f(t, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

由 Morera 定理, $F(z)$ 在 z_0 的邻域内解析. 因为 z_0 是 G 内任意一点, $F(z)$ 在 G 内解析.

利用解析函数的导数公式, 在上述 z 点的邻域内, 设 C 为任一包围 z 点的闭合围道

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{1}{(\xi - z)^2} \left[\int_a^b f(t, \xi)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

再次交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t, \xi)}{(\xi - z)^2}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

设 C 为一条分段光滑的(闭合和不闭合)曲线, $\phi(\xi)$ 为 C 上的连续的函数, 对于 C, 积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{\phi(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

称为 Cauchy 型积分. 由上述定理, $f(z)$ 为曲线外点 z 的解析函数, 并且其导数可通过积分号下求导而得到,

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}\mathrm{d}\xi \tag{21}$$

3.8 Poisson 公式

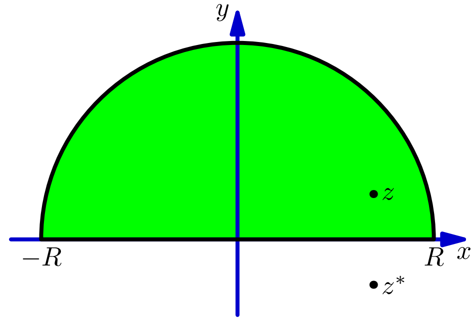
上半平面的 Poisson 公式

Cauchy 积分公式告诉我们, 对于区域 $\overline{G}$ 上的解析函数$f(z)$, 边界上的数值就完全决定了函数在 G 内任意一点的值.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

其中 z 为 C 内任意一点.

当 $f(z)$ 在上半平面解析时, 现在取一个特殊的围道, 它由实轴上的线段 $[-R,\ R]$ 和以原点为圆心, R为半径的半圆弧 C_R 组成.



令$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$, 就有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-R}^{R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

若 z 在上半平面趋于 ∞ 时 $f(z)$ 一致地趋于0, 则根据大圆弧定理可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=0$$

这时

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \tag{22}$$

此结果说明, 由 $f(z)$ 在实轴上的值, 可以唯一地决定它在上半平面任意一点的数值. 更进一步, 令 $z=x+\mathrm{i}y$, $f(z)=u+\mathrm{i}v$, 还可以单独地写出 $f(z)$ 的实部与虚部:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)+yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi, \tag{23}$$

$$v(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)-yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{24}$$

由于解析函数的实部和虚部并不互相独立, 由解析函数的实部就可以求出虚部(反之亦然), 从而确定解析函数本身. 因此可以设想,

Question

能否只知道解析函数的实部在实轴上的数值, 而决定函数在上半平面内任意一点 z 的值?

为此, 考虑 z (相对于实轴)的反演点 z^*. 它在下半平面, 所以

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-x+\mathrm{i}y}\mathrm{d}\xi=0, \tag{25}$$

或者也分别比较等式两端的实部与虚部,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)+yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi=0, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)-yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi=0 \tag{27}$$

将(23)和(27)式相加减, 就得到

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{28a}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{28b}$$

将(24)和(26)式相加减, 又能得到

$$v(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{29a}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{29b}$$

3.9 解析函数的定义

历史注记

Cauchy 定义的解析函数是可导且导数 $f'(z)$ 连续. Cauchy 在 1820 年代证明的 Cauchy 定理自然也是在导数 $f'(z)$ 连续的前提下给出的, 如同我们前面给出的证明一样. 1881年, Goursat 在他的博士论文中, 没有假设 $f'(z)$ 的连续性, 对 Cauchy 定理给出了新的证明. 所以, Cauchy 定理也称为 Cauchy-Goursat 定理, 而我们现在对解析函数的定义也仅仅是可导.

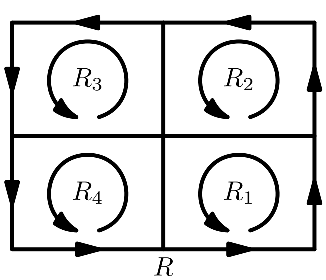
Theorem 3.16 *设 $f(z)$ 在区域 G 内可导. R 为区域 G 内一个矩形, C 为其边界, 则*

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

Proof 对于任意 G 内的矩形 P, C_P 为其边界(方向约定为逆时钟), 记围道积分为

$$I(P)=\oint_{C_P} f(z)\mathrm{d}z$$

如图, 我们将矩形 R 对分成四个小矩形 R_1, R_2, R_3, 和 R_4.



显然

$$I(R)=\sum_{i=1}^{4}I(R_i)$$

由复平面的矢量相加三角不等式可得

$$|I(R)| \leq \sum_{i=1}^{4} |I(R_i)|$$

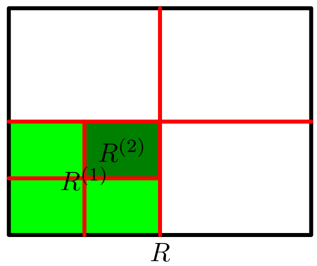
所以, 至少有一个 R_i, 使得

$$|I(R_i)| \geq \frac{1}{4}|I(R)|$$

我们将其记为 $R^{(1)}$. 同样我们可以重复上述过程, 将 $R^{(1)}$ 对分为四个更小的矩形. 并得到其中一个矩形 $R^{(2)}$ 满足

$$|I(R^{(2)})| \geq \frac{1}{4}|I(R^{(1)})| \geq \frac{1}{4^2}|I(R)|$$

重复下去,



得

$$R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset ... \supset R^{(k)} \supset ...$$

使得

$$|I(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4^k}|I(R)|$$

由区间套定理可证, 存在唯一的一点 z_0 属于所有的矩形 $R^{(k)}$.

因为 $f(z)$ 在 z_0 点可导, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$. 若 $|z - z_0| < \delta$, 则

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon$$

即

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0|$$

由

$$\oint \mathrm{d}z = 0 \qquad \oint z\mathrm{d}z = 0$$

得

$$I(R^{(k)}) = \oint_{C^{(k)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, \mathrm{d}z$$

$C^{(k)}$ 为 $R^{(k)}$ 的边界.

设 R 的对角线长 D, 则 $R^{(k)}$ 的对角线长 $D/2^k$. 对于 $R^{(k)}$ 内的任意两点有 $|z_1 - z_2| \leq D/2^k$. 所以对于 $z \in R^{(k)}$

$$|z - z_0| < D/2^k$$

当 k 足够大时, $R^{(k)}$ 在 z_0 的 δ-邻域 $|z - z_0| < \delta$ 内. 这时, 由积分不等式 (4)

$$\left|I(R^{(k)})\right| < \epsilon \frac{D}{2^k} L_k$$

其中

$$L_k = \oint_{C^{(k)}} |\mathrm{d}z|$$

为矩形 $R^{(k)}$ 的周长. 设 R 的周长为 L, 则

$$L_k = L/2^k$$

于是

$$\left|I(R^{(k)})\right| < \epsilon \frac{DL}{4^k}$$

即

$$\frac{1}{4^k}|I(R)| \le \left|I(R^{(k)})\right| < \epsilon \frac{DL}{4^k}$$

所以 $|I(R)| < \epsilon DL$. 令 $\epsilon \to 0$, 得 $|I(R)| = 0$, 即 $I(R) = 0$. □

Theorem 3.17 若 $f(z)$ 在圆内 $|z - z_0| < R$ 内可导, 则圆内原函数 $\Phi(z)$ 存在

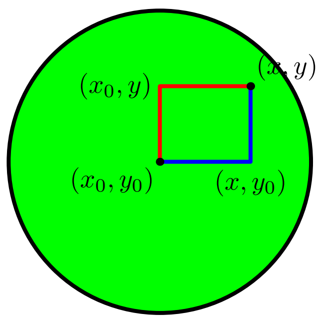
$$\Phi'(z) = f(z)$$

Theorem 3.18 (推论) 若 $f(z)$ 在圆内 $|z - z_0| < R$ 内可导, 则 $f(z)$ 在圆内解析.

Proof 定义函数

$$F(z) = \int_\sigma f \mathrm{d}z$$

其中积分路线 σ 由水平线段 (x_0, y_0) 到 (x, y_0) 和竖直线段 (x, y_0) 到 (x, y) 构成(图中蓝线).



容易证明

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i} f(z)$$

由上面的定理, 可得

$$F(z) = \int_{\sigma_1} f \mathrm{d}z$$

其中积分路线 σ_1 由竖直线段 (x_0, y_0) 到 (x_0, y) 和水平线段 (x_0, y) 到 (x, y) 构成(图中红线). 又可得到

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{i} \frac{\partial F}{\partial x}$$

函数 F 的实部和虚部满足 $Cauchy - Riemann$ 方程, 且偏导数连续. 所以 F 为圆内的解析函数,且

$$F'(z) = f(z)$$

$f(z)$ 的原函数存在. □

Theorem 3.19 若 $f(z)$ 在区域 G 内可导, 则 $f(z)$ 在区域 G 内必然解析.

解析函数 若 $f(z)$ 在区域 G 内可导, 则称 $f(z)$ 为 G 内在的解析函数.