我们考虑 $f(x)-1/2$ 的傅立叶级数表示。显然这是一个奇函数，因此用傅立叶正弦级数表示是方便的。令

$$f_s(x)=\frac{1}{2}+b_1\sin x+b_2\sin(2x)+b_3\sin(3x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)\,. \tag{10.39}$$

则傅立叶系数为

$$\begin{aligned}
b_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}\\
b_2&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)dx=0\\
b_3&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(3x)dx=\frac{2}{3\pi}\\
b_4&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(4x)dx=0\\
b_5&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(5x)dx=\frac{2}{5\pi}
\end{aligned} \tag{10.40}$$

一般的，该傅立叶系数可以写为

$$\{b_n\}=2\pi\{\frac{1}{1},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0,\cdots\} \tag{10.41}$$

这个系数级数与调和级数的收敛性质类似，因此是不收敛的。傅立叶级数前 5 项的图形可以画为 对于不连续函数，傅立叶级数会出现所谓的吉布斯现象，即在不连续点，傅立叶级数的部分和会比原来函数高出大约 18%。但是这与傅立叶定理并不违背，因为在这一点傅立叶级数只是逐点收敛，而非一致收敛。

讨论 11 一般的，如果傅立叶级数的系数是绝对收敛的，则对应的傅立叶级数是一致绝对收敛的；如果傅立叶级数的系数只是条件收敛的，则对应的傅立叶级数是逐点收敛的。

另外，傅立叶级数系数的大 n 衰变行为也反映了对应函数的光滑性质。越光滑的函数其傅立叶系数随 n 增大衰变的越快。

10.2 傅立叶变换

上一节的结果可以推广到周期为 $2T$ 的函数 $f(t)$，此时的傅立叶级数应写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nt}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nt}{L} \tag{10.42}$$

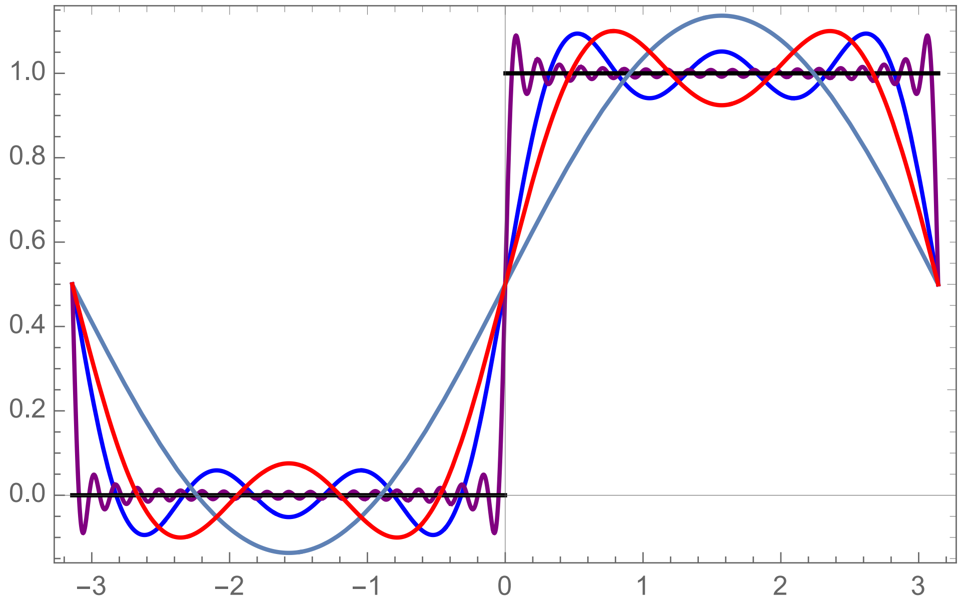

Figure 10.3: 黑色:完整结果;灰色:n=0; 红色:n=0,1,2,3; 蓝色:n=0,1,2,3,4,5; 紫色: 前 40 项和

其中

$$a_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt\,,$$
$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{\pi nt}{T}dt$$
$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{\pi nt}{T}dt \tag{10.43}$$

或者写成复数形式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\frac{i\pi nt}{T}\,,$$
$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\exp\left(-i\frac{\pi nt}{T}\right)dt \tag{10.44}$$

注意到 $2\pi/(2T) = \omega_1$ 具有频率单位，是在 $2T$ 周期内的正弦/余弦波的最小非零频率单元。因此自然可以定义 $\omega_n = n\omega_1$ 作为最小基元的 n 倍频，频

率改变的最小单元为 $\Delta\omega = \pi/T$。因此复的傅立叶级数可以写为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t)\,,$$
$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\exp(-i\omega_n t)dt \tag{10.45}$$

我们把(10.45)的第二行代入第一行，得到

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\exp(-i\omega_n t')dt' \exp(i\omega_n t) \tag{10.46}$$

对于非周期函数，可以认为 $T\to\infty$。此时频率单元 $\omega_1\to 0$，而 n 倍频成为一个连续变量，记为 $\omega = \omega_n$。另外

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{2T} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tag{10.47}$$

因此(10.46)可以写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\exp(-i\omega t')dt'\right]\exp(i\omega t) \tag{10.48}$$

定义 27 傅立叶变换 我们把方括号中的量称作 $f(t)$ 的**傅立叶变换**，记为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{10.49}$$

而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{10.50}$$

称为反傅立叶变换或逆傅立叶变换。当 $\hat{f}(\omega)$ 在实轴上有奇点时，傅立叶逆变换应理解为主值积分：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{10.51}$$

当傅立叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 已知时，我们把(10.50)或(10.51)称作函数 $f(t)$ 的傅立叶积分表示。

同样还能定义高维函数的傅立叶变换。例如，对于三维函数 $f(x,y,z)$，其三维傅立叶变换定义为

$$f(k_x,k_y,k_z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)e^{-i(k_x x+k_y y+k_z z)}dx\,dy\,dz \tag{10.52}$$

如果一个时间域内的函数 $f(t)$ 能展开成简谐波的话，则其傅立叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 给出了对应频率的振幅。

例子 81 定义 *Heaviside* 阶跃函数为

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \tag{10.53}$$

求 $e^{-ax}H(x), a > 0$ 的傅立叶变换，并验证其逆变换给出原来的函数。

令 $f(x) = e^{-ax}H(x)$，我们要求

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} (e^{-ax-i\omega x}) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned} \tag{10.54}$$

其逆傅立叶变换为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \\ = &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega} \exp(i\omega x) d\omega \end{aligned} \tag{10.55}$$

令

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a+i\omega} \tag{10.56}$$

这是 $\mathbb{C}$ 上的半纯函数（除了孤立奇点外处处解析），具有单极点位于 $\omega = ia$。我们分情况来讨论这个积分。利用复变函数知识，当 $x < 0$ 的时候，我们将 ω 沿下半平面绕一个大圆弧构成封闭围道，由约当引理大圆弧积分等于零，而围道内没有奇点，因此此时积分为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+i\omega} \exp(i\omega x) d\omega = 0\,, \qquad x < 0 \tag{10.57}$$

当 $x > 0$ 时，我们将 ω 沿上半平面绕一个大圆弧构成封闭围道，同样约当引理告诉我们大圆弧积分为零，而围道内有奇点 $\omega = ia$，在奇点处的留数为

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a+iw} \exp(iwx), ia) = \frac{\exp(-ax)}{2\pi i} \tag{10.58}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+i\omega}\exp(i\omega x)d\omega=\exp(-ax)\,,\qquad x>0 \tag{10.59}$$

当 $x=0$ 时，(10.55)是发散的。此时我们**定义**傅立叶逆变换为主值积分

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{a+i\omega}d\omega\\=&\frac{1}{2\pi}i(\ln(a-iR)-\ln(a+iR))\end{aligned} \tag{10.60}$$

对数函数是多值函数，我们选取主值分支

$$-\pi<\arg(z)\leq\pi \tag{10.61}$$

此时(10.60)可以写成

$$\frac{1}{2\pi}i(-i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2} \tag{10.62}$$

综上我们得到逆傅立叶变换为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+i\omega}\exp(i\omega x)d\omega=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ e^{-ax} & x>0\end{cases} \tag{10.63}$$

跟原始函数比较我们发现在间断点处逆变换给出的函数值为

$$\lim_{\varepsilon\to0_+}\frac{f(-\varepsilon)+f(\varepsilon)}{2} \tag{10.64}$$

与傅立叶定理一致。

从物理角度，我们一般考虑绝对可积函数，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty \tag{10.65}$$

容易知道，此时傅立叶变换一定存在。$f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 称为傅立叶变换对，或者称作互为（傅立叶）对偶函数。$f(t)$ 通常称为时域函数，而 $\hat{f}(\omega)$ 通常称为频域函数。傅立叶变换的一个有用之处在于对一个对时域或频域函数的操作在对偶函数空间会变得更简单。傅立叶变换的如下性质是重要的。

线性性：对于任意复数 a,b，如果 $h(t)=af(t)+bg(t)$，则 $\hat{h}(\omega)=a\hat{f}(\omega)+b\hat{g}(\omega)$。

位移定理：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t-a)e^{-i\omega t}d\omega=e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega) \tag{10.66}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-a)e^{i\omega t}d\omega=e^{iat}f(t) \tag{10.67}$$

伸缩定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{10.68}$$

求导:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n}e^{-i\omega t}dt = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \tag{10.69}$$

乘积:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)e^{-i\omega t}dt = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega) \tag{10.70}$$

卷积定理: 定义两个函数的卷积为

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{10.71}$$

则卷积的傅立叶变换可以写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \tag{10.72}$$

定理 44 *Plancherel 定理* 对于平方可积函数 $f(t)$，$g(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega \tag{10.73}$$

这个定理的证明留待讲了 δ 函数后再给出。从这个定理出发很容易得到 Parseval 定理。

定理 45 *Parseval 定理*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \tag{10.74}$$

我们说一个函数 $f(x)$ 是平方可积，指的是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \tag{10.75}$$

设 $f(x)$ 既是可积函数也是平方可积函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{10.76}$$

是 $f(x)$ 的平均值，

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{10.77}$$

称为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一次矩，而

$$D_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \tag{10.78}$$

称为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的二次矩。二次矩表征了函数的展宽。例如对于高斯函数 e^{-x^2}，其二次矩为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,. \tag{10.79}$$

定理 46 傅立叶变换的不确定原理 如果 $f(t)$，$tf(t)$，$\omega\hat{f}(\omega)$ 均为平方可积函数，则

$$D_0(|f|)D_0(|\hat{f}|) \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt\right)^2 \tag{10.80}$$

这意味着，f 记起傅立叶对偶的展宽不能同时非常小。当 f 的展宽变小，相应的 $\hat{f}$ 的展宽要增大。反之亦然。

证明：由于 $\omega\hat{f}(\omega)$ 是平方可积的，由 Parseval 定理知道 $f'(t)$ 也是平方可积的。我们定义参数积分

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}|\lambda tf(t) + f'(t)|^2dt \geq 0\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{10.81}$$

由于 $tf(t)$ 和 $f'(t)$ 均为平方可积函数，因此 $I(\lambda)$ 也是平方可积函数。我们有

$$|\lambda tf(t) + f'(t)|^2 = \lambda^2t^2|f(t)|^2 + \lambda t[f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)}f'(t)] + |f'(t)|^2 \tag{10.82}$$

因此

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[t^2|f(t)|^2 + \lambda t[f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)}f'(t)] + |f'(t)|^2\right]dt \\ &= \lambda^2\int_{-\infty}|tf(t)|^2dt + \lambda\int_{-\infty} t[f(t)\overline{f'(t)} + \overline{f(t)}f'(t)]dt + \int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2dt \\ &= \lambda^2\int_{-\infty}|tf(t)|^2dt + \lambda t|f(t)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \lambda\int_{-\infty}|f(t)|^2dt + \int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2dt \end{aligned} \tag{10.83}$$

由于 $f(t)$ 是平方可积的，因此 $\lambda t|f(t)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$。因此

$$I(\lambda)=\lambda^2\int_{-\infty}|tf(t)|^2dt-\lambda\int_{-\infty}|f(t)|^2dt+\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2dt\geq 0 \quad (10.84)$$

由于 $I(\lambda)$ 是 λ 的二次多项式，因此其二次方程判别式必须小于等于零，即

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}|f(t)|^2dt\right)^2&\leq 4\int_{-\infty}^{\infty}|tf(t)|^2dt\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2dt\\&=4D_0(|f|^2)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega\hat{f}(\omega)|^2d\omega\\&=\frac{2}{\pi}D_0(|f|^2)D_0(|\hat{f}|^2)\end{aligned} \quad (10.85)$$

得证。

例子 82 定义矩形函数

$$rect(t)=\begin{cases}0 & |t|>\frac{1}{2}\\1 & |t|\leq\frac{1}{2}\end{cases} \quad (10.86)$$

求 $f(t)=a\cdot rect(at)\,,a>0$ 的傅立叶变换。

10.3 傅立叶变换与微分方程

傅立叶变换的一个重要应用是求解常微分方程。其核心是如下关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}f(t)dt=(i\omega)^n\hat{f}(\omega) \quad (10.87)$$

定义微分算符

$$D=\frac{d}{dt} \quad (10.88)$$

我们考虑形如

$$P(D)y(t)=f(t) \quad (10.89)$$

的常微分方程，其中 $P(x)$ 是一个多项式函数，$f(t)$ 是已知函数，$y(t)$ 是要求的解。例如，如果

$$P(x)=x^2+8x+7 \quad (10.90)$$

则对应的微分方程为

$$y''(t)+8y'(t)+7y(t)=f(t) \quad (10.91)$$

我们下面就以

$$f(t) = H(t)e^{-at}\,, \qquad a > 0 \tag{10.92}$$

为例来求解这个方程。设 $y(t)$ 的傅立叶变换为 $\hat{y}(\omega)$。对(10.90)左右边做傅立叶变换，得到

$$i^2\omega^2\hat{y} + 8i\omega\hat{y} + 7\hat{y} = \hat{f}(\omega) \tag{10.93}$$

我们在前面的例题知道

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} \tag{10.94}$$

代入上式，可以求解出 $\hat{y}(\omega)$，

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(a + i\omega)(1 + i\omega)(7 + i\omega)} \tag{10.95}$$

因此我们的问题化为求解傅立叶逆变换，而我们有留数定理这一利器来做这件事情。如果将 ω 看成复变量，则 $\hat{y}(\omega)$ 是一个半纯函数。其逆傅立叶变换为

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{10.96}$$

$\hat{y}$ 在复平面上只有单极点，分别位于

$$ia\,, \qquad i\,, \qquad 7i \tag{10.97}$$

均在上半平面。当 $t > 0$ 时，我们取上半大圆弧构成封闭围道，并由约当引理知道圆弧积分为零，因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = i\sum \mathrm{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, \omega_m) \tag{10.98}$$

其中 ω_m 是上半平面内的留数。容易得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, ia) &= \frac{1}{i(1-a)(7-a)}e^{-at} \\
\mathrm{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, i) &= \frac{1}{i(a-1)6}e^{-t} \\
\mathrm{Res}(\hat{y}e^{i\omega t}, 7i) &= \frac{1}{i(a-7)(-6)}e^{-7t}
\end{aligned} \tag{10.99}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \left(\frac{e^{-at}}{(1-a)(7-a)} + \frac{e^{-t}}{6(a-1)} - \frac{e^{-7t}}{6(a-7)}\right) \tag{10.100}$$

当 $t<0$ 时，我们可以取下半大圆弧构成封闭围道。但此时围道内没有奇点，因此积分恒为零。我们因此得到

$$y(t)=\begin{cases}\left(\frac{e^{-at}}{(1-a)(7-a)}+\frac{e^{-t}}{6(a-1)}-\frac{e^{-7t}}{6(a-7)}\right) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{10.101}$$

例子 83 求解微分方程

$$x''(t)+x(t)=f(t)=H(t)e^{-at}\,,\qquad a>0 \tag{10.102}$$

10.4 δ 函数（分布）

我们在讲傅立叶级数的时候提到这样一个现象。通常，如果一个函数的傅立叶级数系数的渐近行为是 $1/n$，则这个函数是不连续的；如果是 $1/n^2$，则这个函数的导数是不连续的；如果是 $1/n^3$，则这个函数的二阶导数是不连续的；依此类推。对于傅立叶级数系数是多项式衰减的，其函数的某阶导数一般不连续。当系数以指数衰减时 $1/r^n$，这个函数就是所有阶可导且连续，因而一般是（实）解析的。

这个现象也同样适用于傅立叶变换。一个自然的问题是，如果函数的傅

傅立叶变换渐近行为	函数行为
1	???
$\frac{1}{\omega}$	函数不连续
$\frac{1}{\omega^2}$	函数一次导不连续
$\frac{1}{\omega^3}$	函数二次导不连续

Table 10.1: 傅立叶变换的衰减行为

立叶变换趋于一个非零常数，例如 1，这个函数的行为如何？从傅立叶变换的不确定原理我们知道，这时傅立叶变换模方的二次矩无穷大，因此原函数模方的二次矩应无穷小。从函数图像上看应该是一个无穷窄的函数。我们以前面给出的一个具体例子来看。

例子 84 带参量的矩形函数

$$f(t,a)=\frac{1}{a}rect(t/a)\,, \tag{10.103}$$

其傅立叶变换为

$$\hat{f}(\omega,a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t,a)e^{-i\omega t}dt=\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega} \tag{10.104}$$

当 $a\neq0$ 时，$\hat{f}(\omega,a)$ 至少是是以 $/1\omega$ 衰减。但当 $a\to0$ 时，

$$\lim_{a\to0}\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega}=1 \tag{10.105}$$