数学物理方法（上）第四次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1]北京大学物理学院

2025 年 3 月 20 日

题 1. 考虑一个定常不可压缩无旋流体，从无穷远区域流入一个由两个平面夹成的角形区域，见图 1. 假设该角形区域的夹角为 α（满足 $0<\alpha<\pi$）.

1. 求出描述该流动的复势函数，要求流函数仅在物理边界处为常数.
2. 根据所求得的复势函数，绘制对应的流线图，展示流体在角形区域内的流动特性.

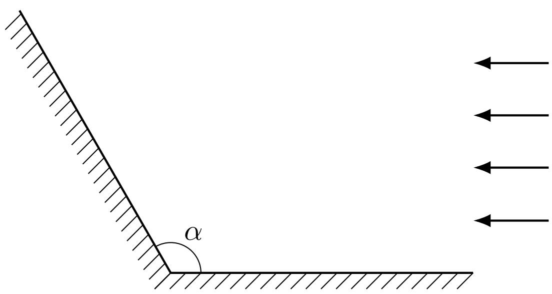

图 1: 题 1 区域示意图

解. 1. 取单值分支 $0<\arg z<\alpha$，有 $f(z)=z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 将该角形区域共形映射到上半平面. 设 $w=f(z)$，角形区域和上半平面的复势函数分别为 Φ_z 和 Φ_w，则有

$$\Phi_z(z)=\Phi_w(w)=\Phi_w\circ f(z).$$

由于 Φ_w 在上半平面解析且在实轴上取实值，可以设多项式解

$$\Phi_w=\sum_{k=0}^{n}a_kw^k,\quad a_k\in\mathbb{R},a_n\neq 0,$$

设 $w=Re^{\mathrm{i}\varphi}$，要求下列方程对任意 $R>0$ 只有平凡解 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$

$$\operatorname{Im}\Phi_w=\sum_{k=1}^{n}a_kR^k\sin k\varphi=0.$$

---

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

对于 $n=1$ 情况成立．对于 $n\geqslant 2$ 情况，不妨设 $a_n>0$，可以取充分大的 R 使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k R^k \sin k\varphi\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| R^k < \frac{1}{2} a_n R^n,$$

此时可以得到估计

$$-\frac{1}{2} a_n R^n + a_n R^n \sin n\varphi < \sum_{k=1}^{n} a_k R^k \sin k\varphi < \frac{1}{2} a_n R^n + a_n R^n \sin n\varphi,$$

于是当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2n}$ 时，有 $\operatorname{Im}\Phi_w > \dfrac{1}{2}a_n R^n$；当 $\varphi=\dfrac{3\pi}{2n}$ 时，有 $\operatorname{Im}\Phi_w < -\dfrac{1}{2}a_n R^n$，根据介值定理，方程在 $\dfrac{\pi}{2n}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2n}$ 区间存在非平凡解，因此这种情况不成立．综上可能的一族复势为

$$\Phi_z(z) = a_0 + a_1 z^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0.$$

2. 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，根据流线族方程 $\operatorname{Im}\Phi_z(z)=C$ 有

$$a_1 r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) = C,$$

于是可以得到方程的极坐标形式

$$r = \frac{a}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}}, \quad a>0,$$

根据方程绘制的流线图如图 2 所示． □

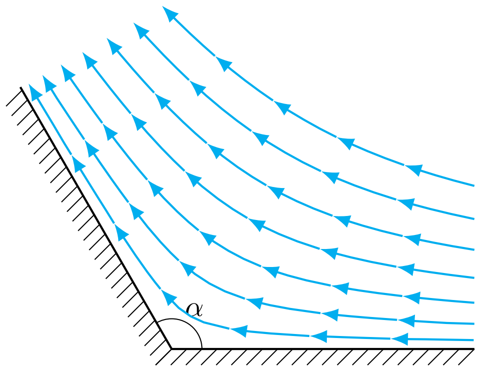

图 2: 题 1 区域流线示意图

题 2. 证明对于下列函数项级数在 $x\in\mathbb{R}$ 上一致收敛．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}. \tag{1}$$

证明. 根据均值不等式 $1+nx^2 \geqslant 2\sqrt{n}|x|$ 可以得到

$$\left|\frac{x}{n(1+nx^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ 收敛，根据 M 判别法有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(1+nx^2)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛． □

题 3. 求下列级数的收敛半径：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n, (|q|<1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}. \tag{2}$$

解. 1. 根据 $c_n = n!$ 有

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

2. 根据 $c_n = q^{n^2}$ 有

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}|q|^{-2n-1} = \infty.$$

3. 根据

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = k!, k\in\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

有

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

题 4. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n$ 的收敛半径.

解. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，有

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{2n}}} = \left(\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}}\right)^{1/2} = \sqrt{R},$$

$$R_2 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|a_{2n}|^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|a_{2n}|^{\frac{1}{2n}}}\right)^{2} = R^2.$$

□

题 5. 求 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z_0 = a$ 处的 *Taylor* 展开通式，其中 a 是实数.

解. 根据因式分解 $1+z^2 = (z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}(a-\mathrm{i})}\frac{1}{1+\dfrac{z-a}{a-\mathrm{i}}} - \frac{1}{2\mathrm{i}(a+\mathrm{i})}\frac{1}{1+\dfrac{z-a}{a+\mathrm{i}}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}(a-\mathrm{i})}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a-\mathrm{i}}\right)^n - \frac{1}{2\mathrm{i}(a+\mathrm{i})}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a+\mathrm{i}}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(a-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(a+\mathrm{i})^{n+1}}\right](z-a)^n, \quad |z-a| < \sqrt{1+a^2}.
\end{aligned}$$

□

题 6. *Legendre* 多项式是如下生成函数在原点处的 *Taylor* 展开系数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+z^2}}=1+P_1(\alpha)z+P_2(\alpha)z^2+\cdots,\quad |z|<\min|\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}|, \tag{3}$$

求出 $P_1(\alpha), P_2(\alpha), P_3(\alpha), P_4(\alpha)$.

解. 根据幂函数的 Taylor 展开可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+z^2}}&=\frac{1}{\sqrt{(1-z)^2-2(\alpha-1)z}}=\frac{1}{1-z}\left[1-\frac{2(\alpha-1)z}{(1-z)^2}\right]^{-1/2}\\&=\frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k\right)\left[-\frac{2(\alpha-1)z}{(1-z)^2}\right]^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(\alpha-1)^k z^k(1-z)^{-2k-1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k!k!}(\alpha-1)^k z^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{n!(2k)!}z^n,\end{aligned}$$

设 $l=n+k$，由 $n\geqslant 0$ 有 k 的求和范围变为 $0\leqslant k\leqslant l$，于是得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+z^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{k!k!(l-k)!}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^k z^l,\quad |z|<\min|\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}|,$$

根据 Legendre 多项式的表达式

$$P_l(\alpha)=\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{k!k!(l-k)!}\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^k,$$

直接计算即可得到

$$P_1(\alpha)=\alpha,\qquad P_2(\alpha)=\frac{1}{2}(3\alpha^2-1),$$
$$P_3(\alpha)=\frac{1}{2}(5\alpha^3-3\alpha),\qquad P_4(\alpha)=\frac{1}{8}(35\alpha^4-30\alpha^2+3).$$

□