数学物理方法（上）第十二次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 5 月 22 日

题 1. 考虑积分

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t,\quad x>0, \tag{1}$$

1. 将 $I(x)$ 写成级数求和的形式

$$I(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n, \tag{2}$$

求出 a_n 和级数的收敛半径.

2. 定义部分和

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}a_n x^n, \tag{3}$$

证明余项

$$|R_{N+1}(x)|=|I(x)-S_N(x)|\leqslant (N+1)!x^{N+1}. \tag{4}$$

解. 1. 根据分部积分可以得到

$$\begin{aligned}I(x)&=-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{(-x)\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^2}\,\mathrm{d}t\\&=1-\frac{(-x)\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^2}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{(-x)(-2x)\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^3}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n n!x^n+\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^{N+1}(N+1)!x^{N+1}\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^{N+2}}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

于是系数为 $a_n=(-1)^n n!$，收敛半径

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

2. 根据余项的表达式有

$$
\begin{aligned}
|R_{N+1}(x)| &= \int_0^{+\infty} \frac{(N+1)!x^{N+1}\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^{N+2}}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} (N+1)!x^{N+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (N+1)!x^{N+1}.
\end{aligned}
$$

□

题 2. 定义如下积分

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2-\lambda x^4}\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

利用计算机工具，计算 $I(\lambda)$ 的级数表示

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\lambda^n \tag{6}$$

的前 20 项系数 a_n. 定义部分和 $S_N(\lambda)$，通过画图或列表的形式，比较当 $\lambda = 0.01$ 时部分和 $S_N(\lambda)$ 与 $I(\lambda)$ 的差异.

解. 根据被积函数在 $\lambda = 0$ 处的 Taylor 展开有

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2-\lambda x^4} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} x^{4n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\lambda^n + o(\lambda^N),$$

逐项积分得到

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} 2^{2n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)\lambda^n + o(\lambda^N),$$

于是系数为

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} 2^{2n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right),$$

当 $\lambda = 0.01$ 时 $S_N(\lambda)$ 与 $I(\lambda)$ 的差异如图 1 所示，具体算法见 nb 文件. □

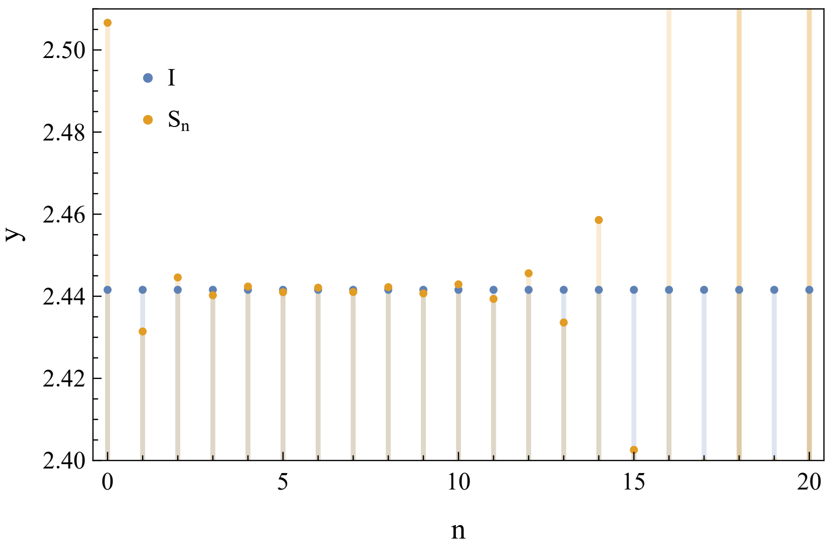

图 1: 题 2 中当 $\lambda = 0.01$ 时部分和 $S_N(\lambda)$ 与 $I(\lambda)$ 的图像

题 3. 计算如下积分的渐近展开的领头项

$$I(x)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t,\quad x\to+\infty. \tag{7}$$

解. 作换元 $u=t^4$，根据分部积分可以得到

$$\begin{aligned}
I(x)&=\frac{1}{4}\int_{x^4}^{+\infty}u^{-3/4}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\\
&=-\frac{1}{4}u^{-3/4}\mathrm{e}^{-u}\Big|_{x^4}^{+\infty}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\int_{x^4}^{+\infty}u^{-7/4}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{4}x^{-3}\mathrm{e}^{-x^4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}u^{-7/4}\mathrm{e}^{-u}\Big|_{x^4}^{+\infty}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\int_{x^4}^{+\infty}u^{-11/4}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\\
&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{4}\frac{\Gamma(n+3/4)}{\Gamma(3/4)}x^{-4n-3}\mathrm{e}^{-x^4}\\
&\qquad+\frac{(-1)^{N+1}}{4}\frac{\Gamma(N+7/4)}{\Gamma(3/4)}\int_{x^4}^{+\infty}u^{-N-7/4}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

其中领头项为

$$I(x)\sim\frac{1}{4}x^{-3}\mathrm{e}^{-x^4},\quad x\to+\infty.$$

□

题 4. 计算如下积分的渐近展开的领头项

$$F_\pm(\lambda)=\int_0^1\mathrm{e}^{\pm\lambda(t-t^2)}\,\mathrm{d}t,\quad\lambda\to+\infty. \tag{8}$$

解. 设 $f_+(t)=t-t^2$，有 $f_+(t)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微且存在唯一的最大值点 $t_*=1/2$，计算得到

$$f_+(t_*+t)=\frac{1}{4}-t^2+o(t^2),\quad t\to0,$$

于是根据 Laplace 方法有

$$F_+(\lambda)\sim\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\lambda\left(\frac{1}{4}-t^2\right)\right]\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\mathrm{e}^{\lambda/4},\quad\lambda\to+\infty.$$

设 $f_-(t)=-t+t^2$，有 $f_-(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微且最大值点位于端点，计算得到

$$f_-(t)=-t+o(t),\quad f_-(1-t)=-t+o(t),\quad t\to0^+,$$

于是根据 Watson 引理有

$$F_-(\lambda)\sim\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\lambda},\quad\lambda\to+\infty.$$

□

题 5. 计算如下积分的渐近展开的领头项

$$y(x)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-t-\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t,\quad x\to+\infty. \tag{9}$$

解. 设 $f(t)=-t-\dfrac{x}{\sqrt{t}}$，有 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶连续可微且存在唯一的最大值点 $t_*=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2/3}$，计算得到

$$f(t_*+t)=-\frac{3}{2^{2/3}}x^{2/3}-\frac{3}{2^{4/3}}x^{-2/3}t^2+o(t^2),\quad t\to0,$$

于是根据 Laplace 方法有

$$\begin{aligned}y(x) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{3}{2^{2/3}}x^{2/3} - \frac{3}{2^{4/3}}x^{-2/3}t^2\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2^{2/3}\pi^{1/2}}{3^{1/2}}x^{1/3}\exp\left(-\frac{3}{2^{2/3}}x^{2/3}\right), \quad x \to +\infty.\end{aligned}$$

□

题 6. 计算如下积分的渐近展开的领头项

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t, \quad x \to +\infty. \tag{10}$$

解. 设 $f(t) = -\sinh^2 t$，有 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可微且最大值点位于端点，计算得到

$$f(t) = -t^2 + o(t^2), \quad t \to 0^+,$$

于是根据 Watson 引理有

$$I(x) \sim \int_0^{+\infty} \exp(-xt^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}, \quad x \to +\infty.$$

□