数学物理方法（上）第八次作业参考答案

鲍雷栋*1, 王思越†1, and 禹凯耀‡1

1 北京大学物理学院

2025 年 4 月 24 日

题 1. 定义双阶乘

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 2, & n \text{ is even}, \\ n(n-2)\cdots 1, & n \text{ is odd}, \end{cases} \tag{1}$$

用 *Gamma* 函数表示双阶乘.

解. 当 n 为偶数时，设 $n=2k, k\in\mathbb{N}$ 有

$$(2k)!! = (2k)(2k-2)\cdots 2 = 2^k k(k-1)\cdots 1 = 2^k\Gamma(k+1),$$

当 n 为奇数时，设 $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}(2k+1)!! &= (2k+1)(2k-1)\cdots 1 \\ &= 2^{k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2} = 2^{k+1}\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{k+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right),\end{aligned}$$

由此可以得到

$$n!! = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right), & n \text{ is even}, \\ \dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right), & n \text{ is odd}. \end{cases}$$

□

题 2. 借助 *Gamma* 函数计算如下积分

1. $-\displaystyle\int_0^1 x^k \ln x \,\mathrm{d}x, k>-1.$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x.$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

解. 1. 设 $x=\mathrm{e}^{-t}$，有 $\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$，可以得到

$$-\int_0^1 x^k\ln x\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(k+1)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(k+1)^2}\Gamma(2)=\frac{1}{(k+1)^2}.$$

2. 设 $x=t^{\frac{1}{4}}$，有 $\mathrm{d}x=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t$，可以得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$ □

题 3. 证明 *Gamma* 函数存在如下围道积分表示

$$\int_C z^\nu \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z=(\mathrm{e}^{2\nu\pi\mathrm{i}}-1)\Gamma(\nu+1),\quad \nu\notin\mathbb{Z},\tag{2}$$

其中积分围道取作 *Hankel* 围道，如图 1 所示.

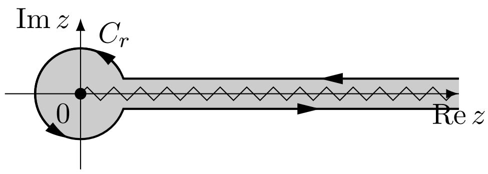

图 1: Hankel 围道示意图

证明. 设 $f(z)=z^\nu\mathrm{e}^{-z}$，根据幂函数的定义有 $f(z)=\mathrm{e}^{\nu\ln z-z}$，可以看出 $f(z)$ 的支点为 $z=0,\infty$，取单值分支为 $0<\arg z<2\pi$，割线为正实轴. 根据所取积分围道，对于割线下岸水平线，设 $z=x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$ 有

$$f(z)=\mathrm{e}^{\nu\ln x+2\nu\pi\mathrm{i}-x}=\mathrm{e}^{2\nu\pi\mathrm{i}}f(x),$$

对于小圆弧，由 $zf(z)=\mathrm{e}^{(\nu+1)\ln z-z}$ 设 $g(z)=(\nu+1)\ln z-z$，有

$$|zf(z)|=|\mathrm{e}^{g(z)}|=|\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,g(z)}(\cos\mathrm{Im}\,g(z)+\mathrm{i}\sin\mathrm{Im}\,g(z))|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,g(z)},$$

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，计算得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,g(z)&=\mathrm{Re}[(\nu+1)(\ln r+\mathrm{i}\theta)-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]\\&=(\mathrm{Re}\,\nu+1)\ln r-(\mathrm{Im}\,\nu+1)\theta-r\cos\theta\leqslant(\mathrm{Re}\,\nu+1)\ln r+(\mathrm{Im}\,\nu+1)2\pi+r,\end{aligned}$$

于是在 $\mathrm{Re}(\nu)>-1$ 的情况下有

$$|zf(z)|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,g(z)}\leqslant r^{(\mathrm{Re}\,\nu+1)}\mathrm{e}^{(\mathrm{Im}\,\nu+1)2\pi+r}\rightrightarrows 0,\quad(r\to 0),$$

根据小圆弧引理有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\,\mathrm{d}z=0,\quad \mathrm{Re}(\nu)>-1,$$

根据 Cauchy 定理，在 $r\to 0$ 极限下有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{2\nu\pi\mathrm{i}}-1)f(x)\,\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^{2\nu\pi\mathrm{i}}-1)\Gamma(\nu+1),\quad \mathrm{Re}(\nu)>-1,\nu\notin\mathbb{Z},$$

由于围道积分对于任意的 $\nu\in\mathbb{C}$ 都有定义，因此可以解析延拓得到

$$\int_C z^\nu\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z=(\mathrm{e}^{2\nu\pi\mathrm{i}}-1)\Gamma(\nu+1),\quad \nu\notin\mathbb{Z}.$$ □

题 4. 试证明

$$|\Gamma(\alpha+\mathrm{i}\beta)|=|\Gamma(\alpha)|\prod_{n=0}^{+\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

该公式在 β 衰变理论的计算中具有重要意义.

证明. 根据 Gamma 函数的 Weierstrass 无穷乘积公式

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}},$$

设 $z=x+\mathrm{i}y$，计算得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\mathrm{i}y+1)}\right|&=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma y}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}y}{n}}\right|\\&=\prod_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{x+n+\mathrm{i}y}{x+n}\right|=\prod_{n=1}^{+\infty}\left[1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right]^{1/2},\end{aligned}$$

再令 $\alpha=x+1$ 和 $\beta=y$ 就得到

$$|\Gamma(\alpha+\mathrm{i}\beta)|=|\Gamma(\alpha)|\prod_{n=0}^{+\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$ □

题 5. 粒子在库仑势场中散射的波函数为 $\psi(r,\theta)$. 在原点处，波函数变为

$$\psi(0)=\mathrm{e}^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1+\mathrm{i}\gamma), \tag{4}$$

其中 $\gamma=Z_1Z_2e^2/\hbar v$. 试证明

$$|\psi(0)|^2=\frac{2\pi\gamma}{\mathrm{e}^{2\pi\gamma}-1}. \tag{5}$$

证明. 利用 $\Gamma(z^*)=(\Gamma(z))^*$，根据 Gamma 函数的余元公式有

$$\Gamma(\mathrm{i}\gamma)\Gamma(1-\mathrm{i}\gamma)=\frac{\pi}{\sin\mathrm{i}\pi\gamma}=\frac{2\pi\mathrm{e}^{\pi\gamma}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\pi\gamma}-1)},$$

利用 $\Gamma(1+\mathrm{i}\gamma)=\mathrm{i}\gamma\Gamma(\mathrm{i}\gamma)$ 就得到

$$|\psi(0)|^2=\mathrm{e}^{-\pi\gamma}|\Gamma(1+\mathrm{i}\gamma)|^2=\mathrm{e}^{-\pi\gamma}\gamma|\Gamma(\mathrm{i}\gamma)\Gamma(1-\mathrm{i}\gamma)|=\frac{2\pi\gamma}{\mathrm{e}^{2\pi\gamma}-1}.$$ □

题 6. *Pochhammer* 符号 $(a)_n$ 定义为

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),\quad (a)_0=1,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

1. 用阶乘表示 $(a)_n$.
2. 用 $(a)_n$ 和 *Digamma* 函数表示 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(a)_n$.

解. 1. 计算得到

$$(a)_n=\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

2. 根据 Digamma 函数的定义

$$\psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

计算得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(a)_n = (a)_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\ln(a)_n = (a)_n[\psi(a+n)-\psi(a)]. \qquad \square$$

题 7. 证明 *Perron* 公式的引理

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{y^s}{s}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 1, & y>1, \\ \frac{1}{2}, & y=1, \\ 0, & 0<y<1, \end{cases} \qquad c>0. \tag{7}$$

证明. 设 $f(z)=\dfrac{a^z}{z}$，有 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的奇点为 $z=0$，由于是 1 阶极点，计算得到

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = a^z|_{z=0} = 1.$$

当 $a>1$ 时，取积分围道如图 2 所示.

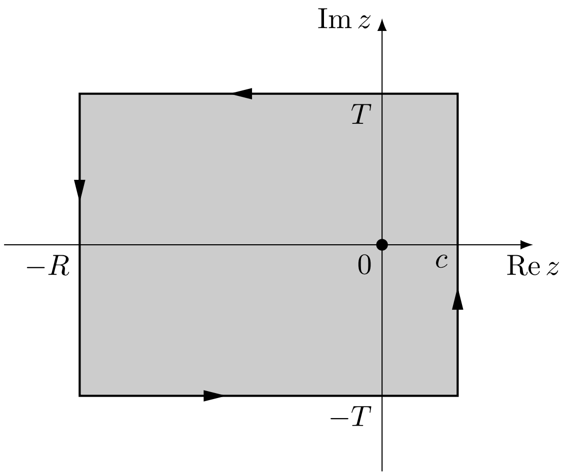

图 2: 题 7 当 $a>1$ 时积分围道示意图

对于上下方水平线，设 $z=x\pm\mathrm{i}T$ 有

$$\left|\int_{c\pm\mathrm{i}T}^{-R\pm\mathrm{i}T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{-R}^{c}\frac{a^x}{\sqrt{x^2+T^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-R}^{c}\frac{a^x}{T}\,\mathrm{d}x = \frac{a^c-a^{-R}}{T\ln a},$$

对于左方竖直线，设 $z=-R+\mathrm{i}y$ 有

$$\left|\int_{-R+\mathrm{i}T}^{-R-\mathrm{i}T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{-T}^{T}\frac{a^{-R}}{\sqrt{R^2+y^2}}\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-T}^{T}\frac{a^{-R}}{R}\,\mathrm{d}y = \frac{2a^{-R}T}{R},$$

根据留数定理，在先取 $R\to+\infty$ 再取 $T\to+\infty$ 极限下有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = 1.$$

当 $0<a<1$ 时，取积分围道如图 3 所示.

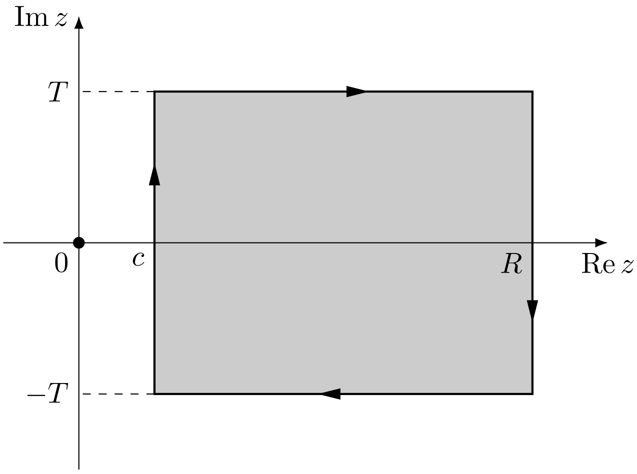

图 3: 题 7 当 $0 < a < 1$ 时积分围道示意图

对于上下方水平线，设 $z = x \pm \mathrm{i}T$ 有

$$\left|\int_{c\pm\mathrm{i}T}^{R\pm\mathrm{i}T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_c^R \frac{a^x}{\sqrt{x^2+T^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_c^R \frac{a^x}{T}\,\mathrm{d}x = \frac{a^R - a^c}{T\ln a},$$

对于左方竖直线，设 $z = R + \mathrm{i}y$ 有

$$\left|\int_{R+\mathrm{i}T}^{R-\mathrm{i}T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{-T}^{T} \frac{a^R}{\sqrt{R^2+y^2}}\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-T}^{T} \frac{a^R}{R}\,\mathrm{d}y = \frac{2a^R T}{R},$$

根据 Cauchy 定理，在先取 $R \to +\infty$ 再取 $T \to +\infty$ 极限下有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

当 $a = 1$ 时，设 $z = c + \mathrm{i}y$，在主值积分的意义下有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c+\mathrm{i}y}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c-\mathrm{i}y}{c^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\left[\arctan\frac{y}{c} - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln(c^2+y^2)\right]\Bigg|_{y=-\infty}^{y=+\infty} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

综上得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{y^s}{s}\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 1, & y > 1, \\ \dfrac{1}{2}, & y = 1, \\ 0, & 0 < y < 1, \end{cases} \qquad c > 0. \qquad \square$$

题 8. 定义

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \quad \zeta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0, \tag{8}$$

因此

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}}\zeta^*(s), \tag{9}$$

从上式证明 $s = 1$ 是 $\zeta(s)$ 的单极点，留数为 1.

解. 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时定义 $\zeta^*(s)$ 的级数绝对收敛，此时可以交换求和顺序，计算得到

$$\begin{aligned}\zeta^*(s)&=1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots\\&=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\right)-2\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\right)=\zeta(s)-2^{1-s}\zeta(s),\quad \mathrm{Re}(s)>1,\end{aligned}$$

由于 $\zeta(s)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，因此可以解析延拓得到

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\zeta^*(s),\quad s\in\mathbb{C},$$

根据 $\zeta^*(1)=\ln 2$ 可以计算得到

$$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(s)=\frac{1}{(1-2^{1-s})'}\zeta^*(s)\bigg|_{s=1}=\frac{1}{\ln 2}\ln 2=1,$$

因此 $s=1$ 是 $\zeta(s)$ 的 1 阶极点且留数为 1. □

题 9. *已知第二类 Chebyshev 函数*

$$\psi(x)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s,\quad c>1,\tag{10}$$

且 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点构成集合 $\{\rho_k\}$，假设左半平面的无穷大半圆弧上的积分为零，试论证

$$\psi(x)=x-\sum_k\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}).\tag{11}$$

证明. 设 $f(s)=\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\dfrac{x^s}{s}$，有 $f(s)$ 在 $\mathbb{C}$ 内的奇点为 $\zeta(s)$ 的零点和奇点以及 $s=0$，根据假设有

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}f(s)\,\mathrm{d}s=-\sum_{\mathrm{Re}(s)<c}\mathrm{Res}(f,s),$$

设 $s=s_0$ 是 $\zeta(s)$ 的 m 阶零点或 $-m$ 阶极点，有 $\zeta(s)=(s-s_0)^m g(s)$，其中 $g(s)$ 在 s_0 附近非零解析，可以计算得到

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{m}{s-s_0}+\frac{g'(s)}{g(s)},$$

于是 $s=s_0$ 是 $f(s)$ 的 1 阶极点，有

$$\mathrm{Res}(f,s_0)=\lim_{s\to s_0}(s-s_0)f(s)=m\frac{x^{s_0}}{s_0},$$

由于 $s=0$ 是 $f(s)$ 的 1 阶极点，有

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{s\to0}sf(s)=\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},$$

根据 $s=1$ 是 $\zeta(s)$ 的 1 阶极点，$s=-2n,n\in\mathbb{N}^*$ 是 $\zeta(s)$ 的 1 阶零点，可以计算得到

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{Re}(s)<c}\mathrm{Res}(f,s)&=\mathrm{Res}(f,1)+\sum_k\mathrm{Res}(f,\rho_k)+\mathrm{Res}(f,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Res}(f,-2n)\\&=-x+\sum_k\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}+\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n}\\&=-x+\sum_k\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}+\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}+\frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}),\quad |x|>1,\end{aligned}$$

这里需要对 m 阶非平凡零点求和 m 次，将等式解析延拓得到

$$\psi(x) = x - \sum_k \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}). \qquad \square$$

注. 事实上可以严格证明 $f(s)$ 在左半平面上的积分为零，但是需要用到 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 的零点展开定理进行估计.