数学物理方法（上）第五次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1]北京大学物理学院

2025 年 4 月 3 日

题 1. 求下列函数在对应环域上的 *Laurent* 展开：

1. $\dfrac{z}{z+2}, |z|>2.$
2. $\sin\dfrac{1}{z}, |z|>0.$
3. $\cos\dfrac{1}{z}, |z|>0.$
4. $\dfrac{1}{z-3}, |z|>3.$

解. 1. 直接计算即可

$$\frac{z}{z+2}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{-n},\quad |z|>2.$$

2. 直接展开即可

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n-1},\quad |z|>0.$$

3. 直接展开即可

$$\cos\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-2n},\quad |z|>0.$$

4. 直接计算即可

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{3}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}3^n z^{-n-1},\quad |z|>3.$$

□

题 2. 证明 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}$ 在原点处的 *Laurent* 展开具有形式

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}z^{2k-1},\quad 0<|z|<2\pi. \tag{1}$$

其中 B_k 称作 *Bernoulli* 数．求出 B_1, B_2, B_3．

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

证明. 设 $f(z)=\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}$，有 $z=2k\pi\mathrm{i}, k\in\mathbb{Z}$ 为 $f(z)$ 的奇点，根据

$$\lim_{z\to 0} f(z)=1,\qquad \lim_{z\to 2k\pi\mathrm{i}}(z-2k\pi\mathrm{i})f(z)=2k\pi\mathrm{i},$$

有 $z=0$ 是可去奇点，其余奇点为 1 阶极点. 由于

$$f(z)=\frac{z}{2}\frac{2\mathrm{e}^{-z/2}}{\mathrm{e}^{z/2}-\mathrm{e}^{-z/2}}=\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}-\frac{z}{2},$$

而 $\dfrac{z}{2}\coth\dfrac{z}{2}$ 是偶函数，可以设原点附近的 Taylor 展开为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n=1-\frac{1}{2}z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}z^{2k},\quad |z|<2\pi,$$

因此 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}$ 在原点附近的 Laurent 展开为

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}=\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}z^{2k-1},\quad 0<|z|<2\pi.$$

根据待定系数法的计算有

$$1=\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l}\frac{b_n}{n!(l-n+1)!}z^l,$$

可以得到递推公式

$$b_0=1,\quad \sum_{n=0}^{l}\frac{b_n}{n!(l-n+1)!}=0,\quad (l\geqslant 1),$$

直接计算即可得到

$$B_1=b_2=\frac{1}{6},\quad B_2=-b_4=\frac{1}{30},\quad B_3=b_6=\frac{1}{42}.$$ □

注. *实际上 b_n 才是现代标准的 Bernoulli 数的定义.*

题 3. 证明：∞ 是整函数 $f(z)$ 的可去奇点当且仅当 f 是常函数.

证明. (方法 1)

1. 若 $f(z)=C$ 是常函数，则由 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=C$ 有 ∞ 是 f 的可去奇点.
2. 若 ∞ 是 f 的可去奇点，可以设 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=C_1$，于是存在 $R>0$ 使得

   $$|f(z)|-|C_1|\leqslant|f(z)-C_1|<|C_1|,\quad \forall|z|>R,$$

   由于 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上有界，可以设一个上界为 C_2，从而有

   $$|f(z)|<M=\max\{2|C_1|,C_2\},\quad \forall z\in\mathbb{C},$$

   因此根据 Liouville 定理有 f 是常函数. □

证明. (方法 2) 设 $t=1/z$，根据定义 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点等价于 $t=0$ 是 $f(1/t)$ 的可去奇点．由于 $f(z)$ 是整函数，于是 $f(1/t)$ 在 $|t|>0$ 上有 Laurent 展开

$$f(1/t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{-n},\quad |t|>0,$$

因此这又等价于 $a_n=0(n\geqslant 1)$，从而等价于 f 是常函数． □

题 4. 求出下列函数在延展复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点和留数．

1. $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}, n\in\mathbb{N}$.
2. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+9)}$.

解. 1. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的奇点为 $z=-1$．根据 $f(1/t)=\dfrac{1}{t^n(1+t)^n}$ 有 $z=\infty$ 也是 $f(z)$ 的奇点，因此 $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的奇点为 $z=-1$ 和 $z=\infty$．计算 Laurent 展开

$$f(z)=\frac{(z+1-1)^{2n}}{(z+1)^n}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k(2n)!}{k!(2n-k)!}(z+1)^{k-n},\quad |z+1|>0,$$
$$f(1/t)=\frac{1}{t^n(1+t)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+k-1)!}{k!(n-1)!}t^{k-n},\quad 0<|t|<1,$$

由此可以得到

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(n-1)!(n+1)!},\quad \mathrm{Res}(f,\infty)=\frac{(-1)^n(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

2. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的奇点为 $z=0,\pm 3\mathrm{i}$．根据 $f(1/t)=\dfrac{t^4\mathrm{e}^{1/t}}{1+9t^2}$ 有 $z=\infty$ 也是 $f(z)$ 的奇点，因此 $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的奇点为 $z=0,\pm 3\mathrm{i}$ 和 $z=\infty$．利用公式计算得到

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2f(z)]\Big|_{z=0}=\frac{(z^2-2z+9)\mathrm{e}^z}{(z^2+9)^2}\Big|_{z=0}=\frac{1}{9},$$
$$\mathrm{Res}(f,\pm 3\mathrm{i})=\lim_{z\to\pm 3\mathrm{i}}(z\mp 3\mathrm{i})f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{z^2\cdot 2z}\Big|_{z=\pm 3\mathrm{i}}=\pm\frac{\mathrm{i}}{54}\mathrm{e}^{\pm 3\mathrm{i}},$$
$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}(f,0)-\mathrm{Res}(f,3\mathrm{i})-\mathrm{Res}(f,-3\mathrm{i})=-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\sin 3.$$ □

题 5. 求出下列函数在复平面 $\mathbb{C}$ 上的所有奇点，判断其是本性奇点还是极点，求出其极点阶数和留数．

1. $f(z)=\dfrac{\sin z-z}{z\sinh z}$.
2. $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z}$.
3. $f(z)=\dfrac{\cos 1/z}{\sin z}$.
4. $f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2z}+\mathrm{e}^z+1}$.

解. 1. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的奇点为 $z = k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$. 这些点都是 $\sinh z$ 的 1 阶零点，由于 $z=0$ 点是 $\sin z - z$ 的 3 阶零点，因此 $z=0$ 是可去奇点，其余奇点为 1 阶极点. 利用公式计算得到

$$\operatorname{Res}(f, k\pi\mathrm{i}) = \lim_{z\to k\pi\mathrm{i}} (z-k\pi\mathrm{i})f(z) = \left.\frac{\sin z - z}{z\cosh z}\right|_{z=k\pi\mathrm{i}} = (-1)^k \frac{\sinh k\pi - k\pi}{k\pi}, \quad k \neq 0.$$

2. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的奇点为 $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$，且为 2 阶极点. 由于 $f(z)$ 为偶函数有 $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$，再根据 $f(z) = f(z+k\pi)$ 可以得到 $\operatorname{Res}(f, k\pi) = 0$.

3. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的奇点为 $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$，其中 $z=0$ 是本性奇点，其余为 1 阶极点. 利用公式计算得到

$$\operatorname{Res}(f, k\pi) = \lim_{z\to k\pi} (z-k\pi)f(z) = \left.\frac{\cos 1/z}{\cos z}\right|_{z=k\pi} = (-1)^k \cos\frac{1}{k\pi}, \quad k \neq 0.$$

对于 $z=0$ 点，根据 Bernoulli 数的定义有

$$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = \frac{\mathrm{i}z}{2}\coth\frac{\mathrm{i}z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < 2\pi,$$

利用三角恒等式可以得到

$$\frac{z}{\sin z} = z\cot\frac{z}{2} - z\cot z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2-2^{2n}) b_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \pi,$$

于是 $f(z)$ 在 $z=0$ 附近可以展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-2^{2k}) b_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \quad 0 < |z| < \pi,$$

对于 z^{-1} 项的求和有 $n=k$，因此

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-2^{2n})}{[(2n)!]^2} b_{2n} \approx 0.917474009464329.$$

4. $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的奇点为 $z = \frac{2\pi}{3}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}$ 和 $z = \frac{4\pi}{3}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$，且为 1 阶极点. 利用公式计算得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) \\ &= \left.\frac{1}{2\mathrm{e}^{2z} + \mathrm{e}^z}\right|_{z=z_0} = \begin{cases} \dfrac{-3+\sqrt{3}\mathrm{i}}{6}, & z_0 = \dfrac{2\pi}{3}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}, \\ \dfrac{-3-\sqrt{3}\mathrm{i}}{6}, & z_0 = \dfrac{4\pi}{3}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}. \end{cases}\end{aligned}$$

□

题 6. 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2+4}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

解. (方法 1) 设 $f(z)=\dfrac{z^2+4}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$，有 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 中的奇点为 $z=\pm\mathrm{i}$，且为 1 阶极点．利用公式计算得到

$$\mathrm{Res}(f,\pm\mathrm{i})=\lim_{z\to\pm\mathrm{i}}(z\mp\mathrm{i})f(z)=\frac{z^2+4}{2z}\bigg|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{3}{2}\mathrm{i},$$

因此根据留数定理得到

$$\int_{|z|=2}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})+\mathrm{Res}(f,-\mathrm{i})]=0.$$ □

解. (方法 2) 设 $f(z)=\dfrac{z^2+4}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$，有 $f(z)$ 在 $|z|>2$ 上无奇点，由于 $f(z)$ 为偶函数有 $\mathrm{Res}(f,\infty)=0$，因此根据留数定理得到

$$\int_{|z|=2}f(z)\,\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\infty)=0.$$ □

题 7. 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2}z\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z. \tag{3}$$

解. 设 $f(z)=z\sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$，有 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 中的奇点为 $z=1$．计算 Laurent 展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}[(z-1)^{-2n}+(z-1)^{-2n-1}],\quad |z-1|>0.$$

由此可以得到 $\mathrm{Res}(f,1)=1$，因此根据留数定理得到

$$\int_{|z|=2}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,1)=2\pi\mathrm{i}.$$ □

题 8. 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=a}\frac{\mathrm{d}z}{z^*-b}, \tag{4}$$

分别讨论 $a>|b|$ 和 $|b|>a>0$ 的情形．

解. 根据 $zz^*=a^2$ 设 $f(z)=\dfrac{z}{a^2-bz}$．当 $a>|b|$ 时，有 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 中无奇点，因此

$$\int_{|z|=a}f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

当 $|b|>a>0$ 时，有 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 中的奇点为 $z=a^2/b$，且为 1 阶极点．利用公式计算得到

$$\mathrm{Res}\big(f,a^2/b\big)=\lim_{z\to a^2/b}(z-a^2/b)f(z)=-\frac{z}{b}\bigg|_{z=a^2/b}=-\frac{a^2}{b^2},$$

因此根据留数定理得到

$$\int_{|z|=a}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\big(f,a^2/b\big)=-2\pi\mathrm{i}\frac{a^2}{b^2}.$$ □

题 9. 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=5} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+9)}\,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

解. 设 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+9)}$，根据题 4 中的结论有

$$\int_{|z|=5} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\infty) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{27}(3-\sin 3). \qquad \square$$