$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} (\bar{\xi} \ \ \bar{\eta}) \qquad \xi, \eta \in \mathbb{C}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix}$$

$$W \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{+}$$

$$= W \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \\ \ \end{pmatrix} (\sqrt{\lambda} \ \ 0) W^{+}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} (\bar{\xi} \ \ \bar{\eta})$$

显然 $A^{+} = A$，且 $\det A = 0$

$$z = \frac{x^1 + i x^2}{x^0 - x^3} = \frac{\xi\bar{\eta}}{\eta\bar{\eta}} = \frac{\xi}{\eta}.$$

在洛伦兹变换下，

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \xmapsto[\Lambda]{} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = U_{\Lambda} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\xi + b\eta \\ c\xi + d\eta \end{pmatrix}$$

$$z \mapsto z' = \frac{\xi'}{\eta'} = \frac{a\xi + b\eta}{c\xi + d\eta} = \frac{a\frac{\xi}{\eta} + b}{c\frac{\xi}{\eta} + d} = \frac{az+b}{cz+d}$$

$\Rightarrow$ 洛伦兹变换 $\Longleftrightarrow$ Mobius 变换！

- Mandelbrot 集合.

复动力系统.

$$f_c(z) = z^2 + c$$

$$M = \left\{ c \;\middle|\; z_0 = 0,\ z_n = f_c(z_{n-1}),\ \lim_{n\to\infty} z_n \text{ 有界} \right\}$$

在第一区域 z_n 收敛到一个极限值。

第一区域的边界方程由如下条件给出:

$$z_* = f_c(z_*) = z_*^2 + c$$

$$\Rightarrow c = z_*^2 - z_*$$

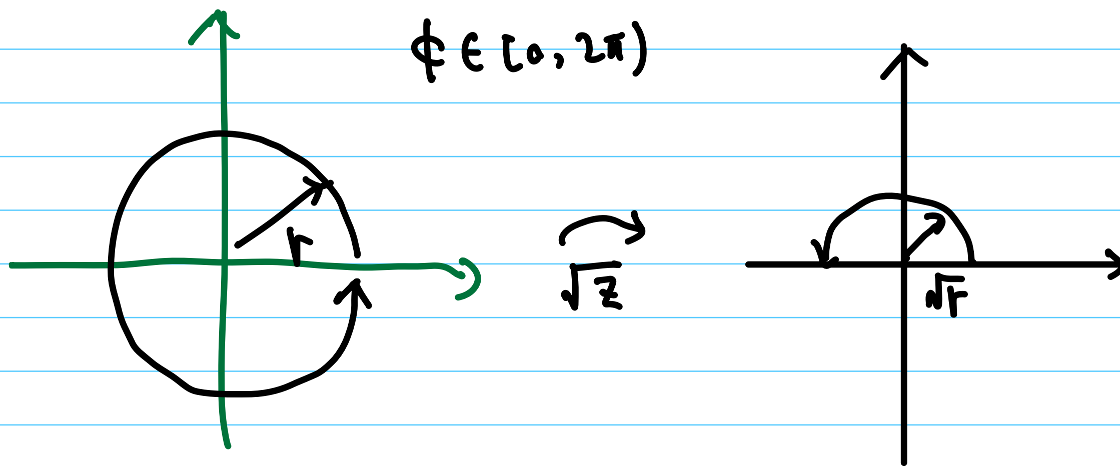
在 z_*, $\left|\frac{df_c}{dz}\right| = |2z_*| = 1$ 吸引区域

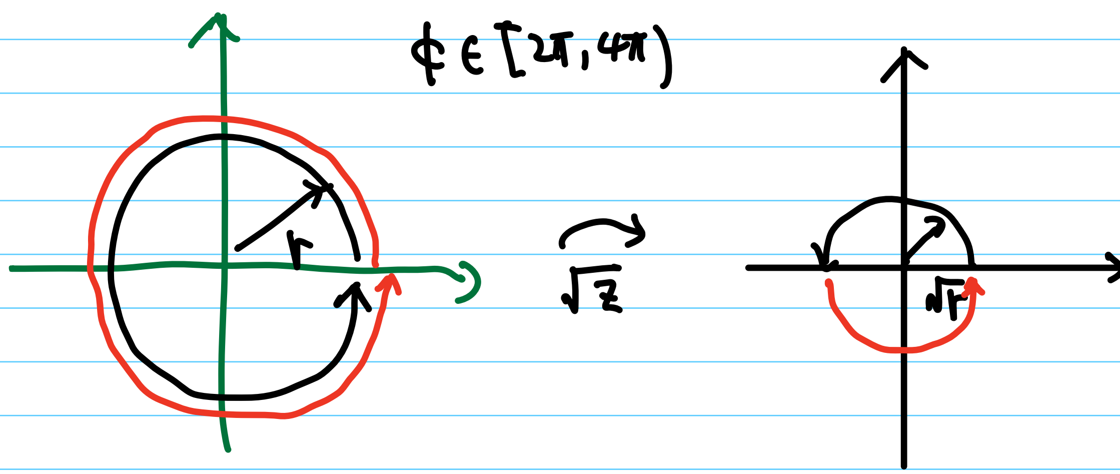
$$\Rightarrow r_* = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{4}e^{2i\theta} - \frac{1}{2}e^{i\theta}$$

* 多值函数，支点与割线

$\sqrt{z} \equiv +\sqrt{|r|}\,e^{i\phi/2}$ $\qquad \phi = \mathrm{Arg}\, z$





"多值性"。解决方案：

① 引入割线单值化.

定义：如果z绕点z_0的"充分小"的圆一周，$f(z)$的值发生了，则称z_0是$f(z)$的支点。

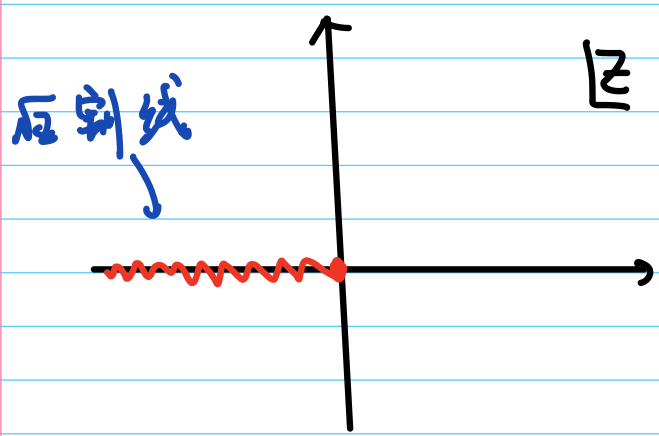
$\sqrt{z}$的支点：

a) 令 $z-0=te^{i\phi}$. 易知 $z=0$ 是支点.

b) 令 $z=\frac{1}{t}e^{-i\phi}$, $t\to 0$, $\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-i\phi/2}$

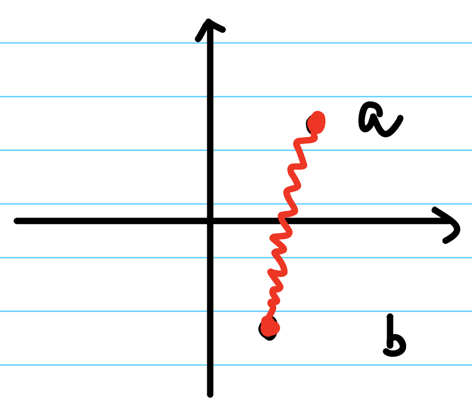
故 $z=\infty$ 也是支点.

定义: 为了使"多值"函数单值化, 从一个支点出发, 连接另一支点连线, 要求 z 在连续变化中不能穿越该连线, 称作割线.

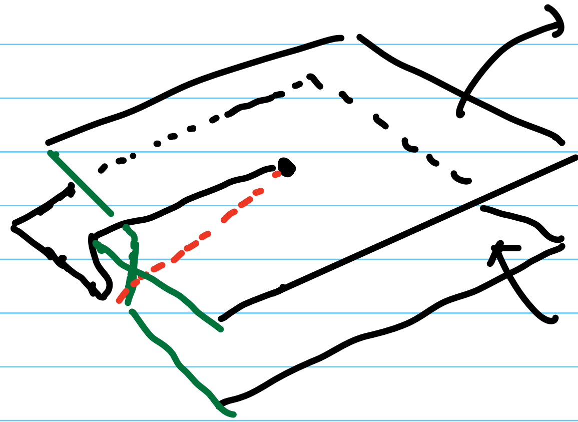


有任意性.
最终择画法.

例: $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ $a\neq b\neq\infty$



(2) 引入黎曼面。



$$M = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z,w) = w^2 - z = 0 \}$$

- $z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$.

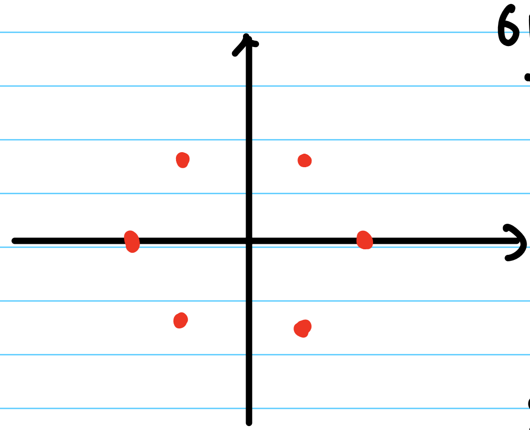
$k = 0, 1, \cdots, n-1$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\phi/n} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\arg\phi/n + \frac{2\pi k i}{n}}$$

支点 $\{0, \infty\}$, n 个单值分支.

单位方根:

$\sqrt[6]{1}$

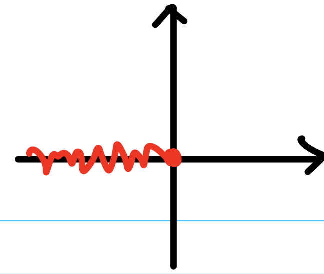


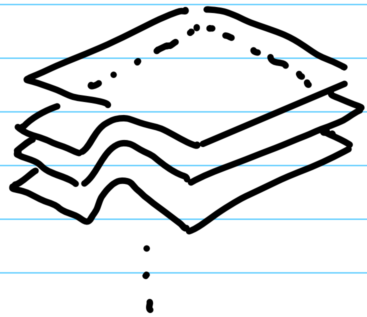
常数的实对数

$k \in \mathbb{Z}$

- 对数函数 $\ln z \equiv \ln r + i\mathrm{Arg}\, z = \ln r + i\arg z + 2\pi k i$

支点：$\{0, \infty\}$.





无穷多页结构！

$(\ln z)' = \frac{1}{z}$ 是单值函数！

• 广义幂次函数：

$$z^a \equiv e^{a\ln z}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

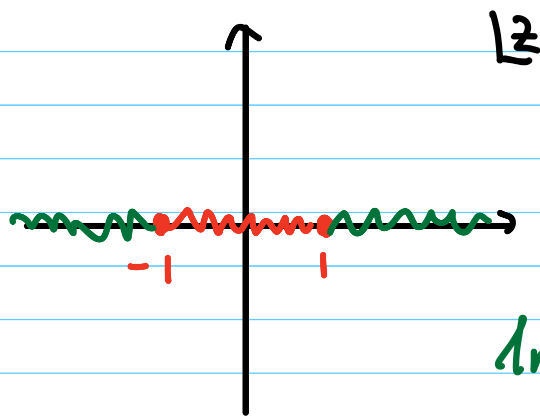
支点 $\{0, \infty\}$，一般有 ∞ 多页.

• a^z，$a>0$. 非"多值函数"！

$a = re^{i0}$，

$a^z = e^{z\ln r}$ 单值.

例：$\ln\frac{1-z}{1+z}$.



两种常见割线连法.

令 $z = \frac{1}{t}e^{-i\phi}$，$t \to 0$，

$$\ln\frac{1-\frac{1}{t}e^{-i\phi}}{1+\frac{1}{t}e^{-i\phi}}$$

应用：

1、$+,-,\times,/$ 无法表示二次方程解.

2. 三次方程求根公式必含根式的迭代.

• 命题：对于一般 n 次多项式 $P_n(w)=\sum_{i=0}^{n} a_i w^i$，$n$ 个不同根记为 $w_{(1)} \cdots w_{(n)}$，总可选取一条 a_i 的封闭路径使 $\{w_{(k)}\}$ 发生任意置换.

令 $\gamma_1=(1\,2\,3)$　　$\gamma_1^{-1}=(3\,2\,1)$

$\gamma_2=(1\,2)$

对易子：$[\gamma_1,\gamma_2]=\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\neq e$.

$[1,2,3]\to[2,3,1]\to[3,2,1]\to[1,3,2]\to[3,1,2]$

如果三次方程根可通过一个根式表示，

$$w=\frac{\circ\pm\sqrt{f}}{\circ}\qquad f(a_0,\cdots a_n)$$

的有理函数.

则　γ_1，$f\mapsto fe^{2\pi i m}$

γ_2　$f\mapsto fe^{2\pi i n}$

γ_1^{-1}　$f\mapsto fe^{-2\pi i m}$

$\gamma_2^{-1} \quad f \mapsto f e^{-2\pi i n}$

则 $[\gamma_1, \gamma_2]: f \mapsto f$ 根本矛盾!