Chapter 10

傅立叶级数和傅立叶变换

10.1 傅立叶级数

我们在微积分中学过，周期函数可以进行傅立叶级数分解。不妨设 $f(x) = f(x+2\pi)$ 是定义在实数域内的 2π 周期函数。这里周期的大小不重要。傅立叶定理说的是我们可以将 $f(x)$ 写为无穷级数的形式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{10.1}$$

其中 c_n 是复数，

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{10.2}$$

且对于 $n > 0$：

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \qquad c_0 = a_0 \tag{10.3}$$

且 a_0, a_n, b_n 为实数。换句话说 $c_n = c_{-n}^*$。代入(10.1)后得到

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{(a_n - ib_n)}{2} (\cos(nx) + i\sin(nx)) + \frac{(a_n + ib_n)}{2} (\cos(nx) - i\sin(nx)) \Big] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big]
\end{aligned} \tag{10.4}$$

这是大家更为熟悉的傅立叶级数分解。关于傅立叶分解的证明，需要用到实变函数的知识，或者是本节后面给出的较为繁琐的证明。但是，**假如** $f(x)$

能被解析延拓为复解析函数的话，我们借助解析函数的方法，从洛朗级数出发去理解傅立叶级数。必须指出的是，这个假设只是出于理解方便做的约束，完整的傅立叶定理是无需这个假设的。

我们假设 2π 周期函数 $f(x)$ 可以延拓为复解析函数 $f(z)$，且具有同样的周期，

$$f(z) = f(z + 2\pi) \tag{10.5}$$

其解析区域位于复平面上的一个包含实轴的无穷长带状区域（实际的解析区域可能更大，但对我们的讨论不重要），见图 Figure 10.1左。

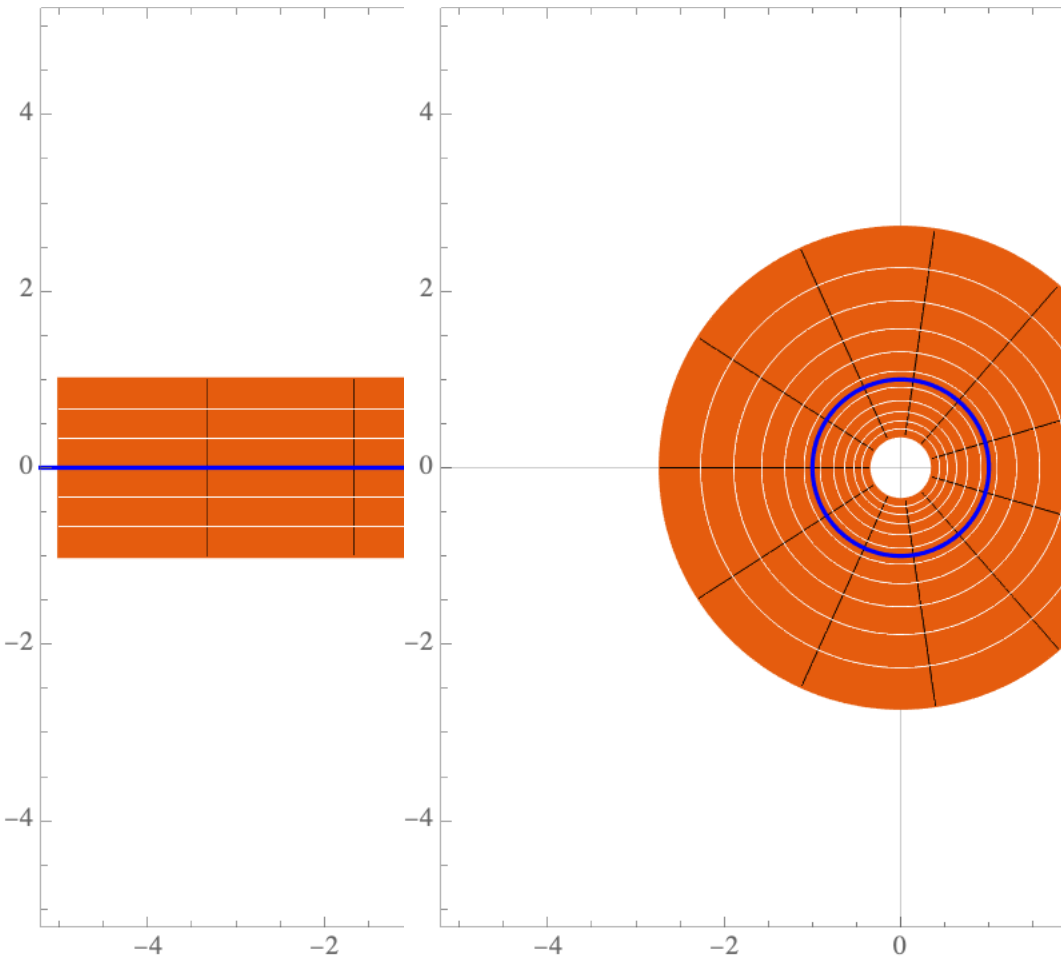

Figure 10.1: 带状区域被映射到环域。

如果我们做一个变量替换，

$$\boxed{w = e^{iz}\,, \qquad z = \frac{\ln w}{i}} \tag{10.6}$$

则左侧到带状区域并映射到右侧到环域，而 z 平面的实轴被映射到 w 平面的单位圆。我们有如下定理：

定理 42 复平面上在包含实轴的水平带状区域上的 2π 周期解析函数 $f(z)$ 与 w 平面上的包含单位圆周的环域上的解析函数 $g(w)$ 有一一对应关系，

$$f(z) = g(w)\,, \qquad w = e^{iz} \tag{10.7}$$

证明 15 首先，给定一个 $g(w)$，我们证明(10.7)中定义的 $f(z)$ 是 z 平面上的 2π 周期函数，这可由下式得到

$$f(z) = g(e^{iz}) = g(e^{i(z+2\pi)}) = f(z+2\pi) \tag{10.8}$$

接下来，我们证明，给定一个 $f(z) = f(z+2\pi)$，我们一定能找到一个对应的 $g(w)$。只需令

$$g(w) = f\left(\frac{\ln w}{i}\right) \tag{10.9}$$

我们还需证明如此构造的 $g(w)$ 在包含单位圆周的环域上是解析的。但是 $\ln w$ 在负实轴上有割线，因此 $g(w)$ 咋看并不是环域上的解析函数。幸运的是，如果我们观察在负实轴上 $g(w)$ 的行为，

$$\begin{aligned} g(re^{i\pi - i0+}) &= f\left(\frac{\ln(re^{i\pi - i0_+})}{i}\right) \\ &= f\left(\frac{Ln(r)}{i} + \pi - 0_+\right) \\ &= f\left(\frac{Ln(r)}{i} - \pi + 0_+\right) \\ &= g(re^{-i\pi + i0_+}) \end{aligned} \tag{10.10}$$

其中在倒数第二步我们应用了 $f(z)$ 是 2π 周期函数。我们看到 $g(w)$ 在负实轴上是连续的，因此负实轴并不是其割线。从而我们得到 $g(w)$ 在环域上是解析的。证毕。

例子 78

$$f(z) = \frac{1}{1+\sin^2(z)}$$

是周期为 2π 到函数，对应的 $g(w)$ 可以写为

$$\begin{aligned} g(w) &= f\left(\frac{\ln w}{i}\right) \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{(2i)^2}\left(e^{i(\ln w)/i}-e^{-i(\ln w)/i}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}\left(w-1/w\right)^2} \end{aligned} \tag{10.11}$$

注意这个函数的奇点位于 $-1-\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}$。因此 $g(w)$ 在 $-1+\sqrt{2}<|w|<1+\sqrt{2}$ 的包含单位圆周的环域上是解析的。

有了这个结果，我们立刻可以得到(10.1)和(10.2)。我们只需注意到，由于 $g(w)$ 是环域上到解析函数，因此必然存在洛朗级数展开：

$$g(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n \tag{10.12}$$

有洛朗级数的柯西公式，我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{g(w)}{w^{n+1}}dw \tag{10.13}$$

上式中我们选取了位于解析环域中的单位圆周作为积分围道。令 $w=e^{it}$，(10.13)可以写为

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f\left(\frac{\ln w}{i}\right)}{w^{n+1}}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(\frac{\ln e^{it}}{i}\right)}{e^{it(n+1)}}ie^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \end{aligned} \tag{10.14}$$

此即(10.2)。注意一般来说，洛朗展开系数间并没有关联，$c_n\neq c_{-n}^*$。但当 $f(z)$ 在实轴上取实数时，关系 $c_n=c_{-n}^*$ 成立。

当 $f(x)$ 无法解析延拓到实轴之外时，上面的证明不再适用，原因是此时在 w 平面解析环域被压缩为单位圆周，但只定义在单位圆周上的函数不是解析函数，因此无法作洛朗展开。

尽管如此，我们下面将看到，傅立叶定理也仍然成立。

定理 43 (傅立叶定理) 设实函数 $f(x)$ 在 $-\pi<x<\pi$ 上只有有限个最大值或最小值，以及有限个不连续点，则如下傅立叶级数

$$a_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos(mx)+b_m\sin(mx)\right) \tag{10.15}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\,,$$
$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)dt$$
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt \tag{10.16}$$

在 x 处收敛于

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2} \tag{10.17}$$

注意在函数间断点对应的是逐点收敛，而非一致收敛。在复数表示下，傅立叶级数具有更为易记忆的形式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\,, \tag{10.18}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{10.19}$$

下面我们给出定理43的证明。

证明 16 如下证明方法基于复变函数，是柯西最早给出的。文献中通常给的是狄利克雷的证明。将(10.16)代入(10.15)，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos[m(x-t)]dt \tag{10.20}$$

我们取该无穷级数的前 $2N+1$ 项，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos[m(x-t)]dt$$
$$= \sum_{m=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{im(x-t)}dt \tag{10.21}$$

并在稍后让 $N\to\infty$。我们把这个有限级数分为两部分

$$U_N(x) = \sum_{m=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} f(x)e^{im(x-t)}dt$$
$$V_N(x) = \sum_{m=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{x}^{\pi} f(x)e^{im(x-t)}dt \tag{10.22}$$

我们下面将证明，

$$\lim_{N\to\infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{1}{2} f(x-\varepsilon), \qquad \lim_{N\to\infty} V_N(x) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{1}{2} f(x+\varepsilon). \tag{10.23}$$

为此，我们定义函数

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta}-1} \int_{-\pi}^{x} e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \tag{10.24}$$

这是一个关于 ζ 的解析函数，奇点在 $\cdots, -3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \cdots$，并且在奇点 im 处的留数为

$$Res(\psi, im) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} e^{im(x-t)} f(t) dt \tag{10.25}$$

因此如果我们取一个以原点为圆心，半径为 $N+1/2$ 的正定向圆围道 C_N，在围道上有 $\zeta = (N+1/2)e^{i\theta}$，则根据留数定理有

$$U_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \psi(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta\psi(\zeta) d\theta. \tag{10.26}$$

为了估计这个积分，我们把之分成五部分，

$$\begin{aligned} U_N(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2-1/\sqrt{N}} \zeta\psi(\zeta)d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2-1/\sqrt{N}}^{\pi/2+1/\sqrt{N}} \zeta\psi(\zeta)d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}} \zeta\psi(\zeta)d\theta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/2-1/\sqrt{N}}^{3\pi/2+1/\sqrt{N}} \zeta\psi(\zeta)d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{3\pi/2+1/\sqrt{N}}^{2\pi} \zeta\psi(\zeta)d\theta \\ = & I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned} \tag{10.27}$$

首先注意到在 I_1 的积分范围内，有 $Re(\zeta) > O(\sqrt{N})$。因此被积函数

$$\zeta\psi(\zeta) = \frac{\zeta}{e^{2\pi\zeta}-1} \int_{-\pi}^{x} e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \tag{10.28}$$

趋于 0。同理可证 I_5 趋于 0。再来看 I_2。在这个区域内被积函数 $\zeta\psi(\zeta)$ 总是有限的，而 $d\theta$ 的积分限无穷小，因此也趋于零。同理也可得 I_4 趋于零。

因此主要的贡献来自 I_3。在积分区域内，有 $Re(\zeta) < -O(\sqrt{N})$，

$$\zeta\psi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta}-1} \int_{-\pi}^{x} \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \sim -\int_{-\pi}^{x} \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt = -J_1 - J_2 \tag{10.29}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\pi}^{x-\frac{1}{\ln N}} \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \\ J_2 &= \int_{x-\frac{1}{\ln N}}^{x} \zeta e^{\zeta(x-t)} f(t) dt \end{aligned} \tag{10.30}$$

对于 J_1 其被积函数趋于零，积分区间有限，因此 $J_1 \to 0$。而对于 J_2 我们作变量替换 $v = \zeta(x-t)$，

$$J_2 = \int_0^{\frac{\zeta}{\ln N}} e^v f(x - \frac{v}{\zeta}) dv \tag{10.31}$$

再令 $w = e^v$，

$$J_2 = \int_1^{\exp(\frac{\zeta}{\ln N})} f(x - \frac{\ln w}{\zeta}) dw \tag{10.32}$$

在 $d\theta$ 的积分区间内，$\exp(\zeta/\ln N) \to 0$，$\ln w/\zeta \to 0$。因此

$$J_2 \sim \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_1^0 f(x-\varepsilon) dw = -\lim_{\varepsilon \to 0} f(x-\varepsilon) \tag{10.33}$$

因此

$$U_N(x) = I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2+1/\sqrt{N}}^{3\pi/2-1/\sqrt{N}} \lim_{\varepsilon \to 0_+} f(x-\varepsilon) d\theta \tag{10.34}$$

因此

$$\lim_{N \to \infty} U_N(x) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{2} f(x-\varepsilon) \tag{10.35}$$

同理可证

$$\lim_{N \to \infty} V_n(x) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{2} f(x+\varepsilon) \tag{10.36}$$

定理得证。

例子 79 计算傅立叶级数表示。在 $(-\pi, \pi)$ 周期内，函数为

$$f(x) = |\sin x|, \qquad -\pi < x < \pi$$

我们注意到这是一个 $(-\infty, \infty)$ 上的连续偶函数，因此可通过傅立叶余弦级数表示。记其傅立叶余弦级数为

$$f_c(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots, \tag{10.37}$$

则

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx = \frac{2}{\pi}\,,\\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx = 0\,,\\
a_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos(2x) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(2x) dx = -\frac{4}{3\pi}\,,\\
a_3 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos(3x) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(3x) dx = 0\,,\\
a_4 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos(4x) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(4x) dx = -\frac{4}{15\pi}\,, \qquad (10.38)
\end{aligned}
$$

从前面几项可以估计，傅立叶系数在 n 很大时的与 $1/n^2$ 相关。换句话说，该函数的傅立叶系数是一个绝对收敛级数。用前 5 项可以画出图形如下：

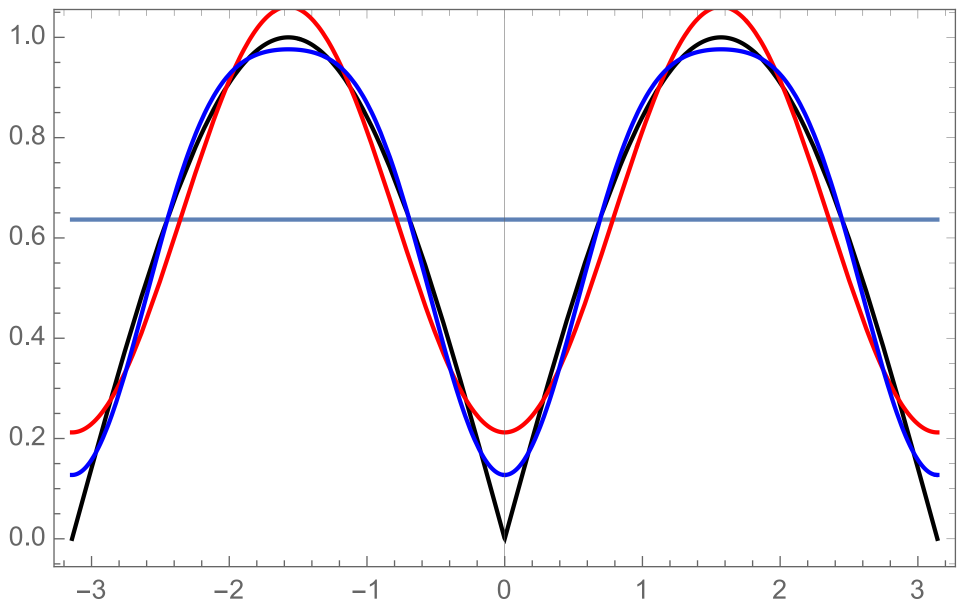

Figure 10.2: 黑色：完整结果；灰色：n=0; 红色:n=0,1,2,3; 蓝色:n=0,1,2,3,4,5

例子 80 计算方波的傅立叶级数表示。在 $(-\pi,\pi)$ 周期内，方波为

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}
$$

我们考虑 $f(x)-1/2$ 的傅立叶级数表示。显然这是一个奇函数，因此用傅立叶正弦级数表示是方便的。令

$$f_s(x)=\frac{1}{2}+b_1\sin x+b_2\sin(2x)+b_3\sin(3x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)\,. \tag{10.39}$$

则傅立叶系数为

$$\begin{aligned}
b_1&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}\\
b_2&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)dx=0\\
b_3&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(3x)dx=\frac{2}{3\pi}\\
b_4&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(4x)dx=0\\
b_5&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(5x)dx=\frac{2}{5\pi}
\end{aligned} \tag{10.40}$$

一般的，该傅立叶系数可以写为

$$\{b_n\}=2\pi\{\frac{1}{1},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0,\cdots\} \tag{10.41}$$

这个系数级数与调和级数的收敛性质类似，因此是不收敛的。傅立叶级数前 5 项的图形可以画为 对于不连续函数，傅立叶级数会出现所谓的吉布斯现象，即在不连续点，傅立叶级数的部分和会比原来函数高出大约 18%。但是这与傅立叶定理并不违背，因为在这一点傅立叶级数只是逐点收敛，而非一致收敛。

讨论 11 一般的，如果傅立叶级数的系数是绝对收敛的，则对应的傅立叶级数是一致绝对收敛的；如果傅立叶级数的系数只是条件收敛的，则对应的傅立叶级数是逐点收敛的。

另外，傅立叶级数系数的大 n 衰变行为也反映了对应函数的光滑性质。越光滑的函数其傅立叶系数随 n 增大衰变的越快。

10.2 傅立叶变换

上一节的结果可以推广到周期为 $2T$ 的函数 $f(t)$，此时的傅立叶级数应写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nt}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nt}{L} \tag{10.42}$$