

题 1. 求下列函数的拉普拉斯变换：

1.

$$\frac{\sin \omega t}{t}, \quad \omega > 0$$

2.

$$\int_t^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$$

题 2. 求下列函数的拉普拉斯变换的逆变换：

1.

$$\frac{\omega}{s(s^2 + \omega^2)}, \quad \omega > 0$$

2.

$$\frac{s}{(s^2 + 1)^2} e^{-s\tau}, \quad \tau > 0$$

题 3. 利用拉普拉斯变换计算积分：

1.

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(xt)}{1 + x^2} dx$$

2.

$$\int_0^\infty \left( \frac{\sin(xt)}{x} \right)^2 dx$$

题 4. 利用拉普拉斯变换证明：

$$\int_0^\infty \frac{\cos s}{s^\nu} ds = \frac{\pi}{2\Gamma(\nu) \cos(\nu\pi/2)}, \quad 0 < \nu < 1$$

提示：将  $s^{-\nu}$  写成  $t^{\nu-1}/\Gamma(\nu)$  的拉普拉斯变换。

题 5. 刚体在空气中下落的运动方程可以写为：

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = mg - b \frac{dX(t)}{dt}$$

取初始条件：

$$X(0) = \left. \frac{dX}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

利用拉普拉斯变换求解。

题 6. 利用拉普拉斯变换求解如下积分微分方程：

$$f'(t) - \int_0^t f(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = \Theta(t) - \Theta(t - 2), \quad f(0) = 1$$

其中  $\Theta(t)$  是阶跃函数。

题 7. 利用普遍反演公式计算

$$f(s) = s^{-1/2}$$

的反拉普拉斯变换。

题 8. 利用普遍反演公式计算

$$f(s) = \frac{\ln s}{s}$$

的反拉普拉斯变换。