数学物理方法上
00432108
2024-2025 学年第二学期

作业

姓名：XXX
学号：ZZZ
成绩：____

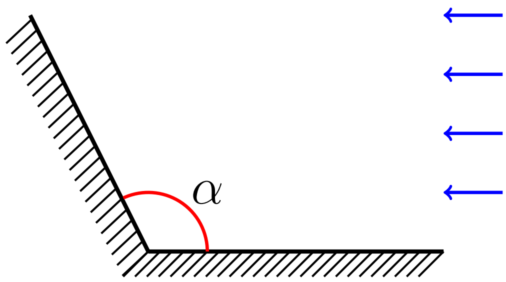

图 1: 第一题示意图

题 1. 考虑一个水平的定常不可压缩无旋流体，从右至左以均匀速度流入一个由两个平面夹成的角形区域，见图1。假设该角形区域的夹角为 α（满足 $0 < \alpha < \pi$），并且流体从无穷远处流入此区域。

1. 求出描述该流动的复势函数。（提示：可以通过寻找从上半平面到该角形区域的共形映射来解决此问题。）
2. 根据所求得的复势函数，绘制对应的流线图，展示流体在角形区域内的流动特性。

题 2. 证明对于下列函数项级数在 $x \in \mathbb{R}$ 上一致收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}\,.$$

题 3. 求下列级数的收敛半径：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n\ (|q|<1)\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}\,.$$

题 4. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ 的收敛半径。

题 5. 求 $1/(1+z^2)$ 在 $z_0 = a$ 处的泰勒展开通式，其中 a 是实数。

题 6. 勒让德多项式是如下生成函数在原点处的泰勒展开系数，

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+z^2}} = 1 + P_1(\alpha)z + P_2(\alpha)z^2 + \cdots$$

求出 $P_1(\alpha)$，$P_2(\alpha)$，$P_3(\alpha)$，$P_4(\alpha)$.