5 解析函数的局域性展开

5.1 解析函数的Taylor展开

前面看到, 一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数. 相反地, 可以将一个解析函数表示成为幂级数.

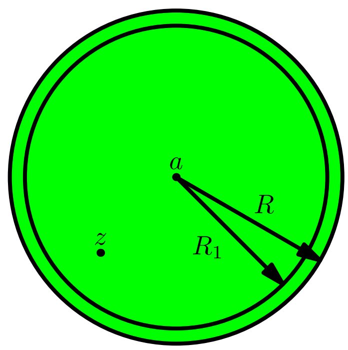
Theorem 5.1 (Taylor展开) *设函数 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆内 $|z-a|<R$ 解析, 则对圆内任何 z 点, $|z-a|<R$, $f(z)$ 可用幂级数展开为*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2}$$

Taylor 展开



Proof 对于圆内任意一点 z, $|z-a|<R$, 总可以以 a 为圆心作一个较小的圆, 把 z 包围在圆内

$$\exists R_1: \quad |z-a|<R_1<R$$

根据 Cauchy 积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi-a|=R_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

而

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi-z}&=\frac{1}{(\xi-a)-(z-a)}=\frac{1}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}\\&=\frac{1}{\xi-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

对于圆上 ξ, $|\xi-a|=R_1$, 所以

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|=\frac{|z-a|}{R_1}<1$$

由 M 判别法, 函数级数 (ξ 为自变量!) 在圆上一致收敛. 可逐项积分, 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\oint_{|\xi-a|=R_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

利用高阶导数公式

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

□

1. 这里 Taylor 展开的形式和实变函数中的 Taylor 公式相同, 但是条件不同.
   - 在实变函数中, $f(x)$ 的任何阶导数存在, 还不能保证 Taylor 级数收敛 (Taylor 公式的余项 $\to 0$).
   - 在复变函数中, 解析的要求就足以保证 Taylor 级数收敛.
2. Taylor展开的唯一性

   如果在 a 点的某个邻域内, 按不同的方法得到 $f(z)$ 的一个幂级数表示

$$f(z) = a_0' + a_1'(z-a) + a_2'(z-a)^2 + \cdots + a_n'(z-a)^n + \cdots$$

系数 a_n' 会不会与 a_n 不同?

为此, 对上式求 n 次导, 令 $z = a$, 可得[1]

$$a_n' = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = a_n$$

$\therefore$ 不论用什么方法, Taylor 展开式是唯一的.

5.2 Taylor 级数求法举例

基本初等函数的 Taylor 展开式

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty \tag{3}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad |z| < \infty \tag{4}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad |z| < \infty \tag{5}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1 \tag{6}$$

对于其它函数, 利用这些已知结果, 可使计算简化.

Example 5.1

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |z| < 1$$

1. 有理函数化成部分分式
2. 求导和积分
3. 级数相乘法
4. 待定系数法

[1]因为存在 a 的闭邻域, 在此闭邻域内幂级数都一致收敛, 所以交换求和和求导次序合法.

有理函数化成部分分式

Example 5.2

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3z+2z^2} &= \frac{1}{(1-z)(1-2z)}\\ &= -\frac{1}{1-z}+\frac{2}{1-2z}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n \qquad |z|<\frac{1}{2}\end{aligned}$$

求导和积分

Example 5.3 (求导例) 有理函数化部分分式时, 可能遇到

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad |z|<1\end{aligned}$$

积分例: 见下面多值函数例子.

级数相乘法

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3z+2z^2} &= \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-2z}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^l\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^{k+l}\end{aligned}$$

令 $k+l=n$, 则由

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\cdots \tag{7}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3z+2z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} 2^l z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)z^n\end{aligned}$$

这个例子不很恰当, 显然部分分式法更简单.

待定系数法

Example 5.4 (Bernoulli 数)　讨论函数

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \tag{8}$$

定义 $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = 1$, 则函数在 $|z| < 2\pi$ 范围内解析.

Solution　设其展开式为

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \tag{9}$$

B_n 称为Bernoulli数.

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l$$

两边除以 z

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} z^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!(l+1)!} z^{k+l} \end{aligned}$$

令$n = k + l$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} z^n$$

比较系数

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{10}$$

$n = 0$, $B_0 = 1$.　$n = 1$, $\frac{1}{2!}B_0 + B_1 = 0$, $B_1 = -\frac{1}{2}$.　因为

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{2}\left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1\right) = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} - \frac{z}{2}$$

第一项为 z 的偶函数, 展开时只有 z 的偶数幂. 于是

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \tag{11}$$

即 $B_{2n+1} = 0(n > 0)$. 递推关系改写为

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{B_{2k}}{(2k)!(n-2k+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{2}\frac{1}{n!} = 0 \tag{12}$$

即

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{B_{2k}}{(2k)!(n-2k+1)!} = \frac{n-1}{2(n+1)!} \tag{13}$$

$n = 2$, $\frac{1}{2}B_2 = \frac{1}{12}$, $B_2 = \frac{1}{6}$. $n = 4$, $\frac{1}{12}B_2 + \frac{1}{24}B_4 = \frac{1}{80}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$.　...　□

利用 Bernoulli 数可求 $\tan z$ 和 $\cot z$ 的幂级数展开

$$\begin{aligned}\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} &= \mathrm{i}\frac{z}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}} \\ &= \mathrm{i}\frac{z}{2}+\frac{\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n} \end{aligned} \tag{14}$$

而

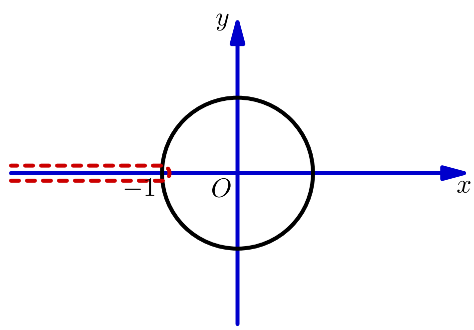
$$\begin{aligned}\frac{z}{2}\tan\frac{z}{2} &= \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2}-z\cot z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}-1}{(2n)!}B_{2n}z^{2n}\end{aligned} \tag{15}$$

多值函数的 Taylor 展开

多值函数在规定好单值分枝后, 在其解析区域即可作 Taylor 展开.

Example 5.5 $\ln(1+z)$ *在* $z=0$ *点邻域作 Taylor 展开.*

Solution 首先作割线如图, 并规定好单值分枝.



采用积分方法, 因为

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

积分, 在对数函数的解析区域内

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{1}{1+z} &= \ln(1+z)|_0^z \\ &= \ln(1+z)-\ln(1+z)|_{z=0}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\ln(1+z) &= \ln(1+z)|_{z=0}+\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \mathrm{d}z \\ &= \ln(1+z)|_{z=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} \\ &= \ln(1+z)|_{z=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \\ & |z|<1 \end{aligned} \tag{16}$$

□

Note 多值函数 $\ln(1+z)$ 的*Taylor*展开式只与展开中心的函数值规定有关, 收敛半径只与枝点有关, 不倚赖于割线的作法.

Example 5.6

$$(1+z)^\alpha \equiv \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+z)}$$

在 $z=0$ 作 *Taylor* 展开.

Solution 仍然如上例割线, 并规定单值分支. 求导

$$[(1+z)^\alpha]' = \frac{\alpha}{1+z}\mathrm{e}^{\alpha \ln(1+z)} = \frac{\alpha}{1+z}(1+z)^\alpha$$

采用待定系数法, 设

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

则

$$(1+z)\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha-n)c_n z^n$$

比较系数

$$(n+1)c_{n+1} = (\alpha-n)c_n$$

于是

$$\begin{aligned}
&c_0 = f(0) = (1+z)^\alpha|_{z=0} \\
&c_1 = \alpha c_0 \\
&c_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}c_0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

一般地, 可得

$$c_n = \binom{\alpha}{n} c_0$$

这里引入普遍二项式系数

$$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{17}$$

则

$$(1+z)^\alpha = (1+z)^\alpha|_{z=0}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n \tag{18}$$

□

常用函数的 Taylor 级数

函数	$z=0$ 点的 Taylor 展开	收敛范围
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$	$\lvert z\rvert < \infty$
$\ln(1+z)$ (主值)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$	$\lvert z\rvert < 1$
$(1+z)^\alpha$ (主值)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$	$\lvert z\rvert < 1$

5.3 解析函数的零点孤立性和解析函数的唯一性

零点 如果 $f(z)$ 在 a 点解析, $f(a)=0$, 则称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的**零点**.

若 $f(z)$ 在 $z=a$ 点解析, 则存在邻域 $|z-a|<R$, 函数在邻域解析, 展开为 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

由 $f(a)=0$, 得 $a_0=0$. 设 a_m 为不为零的最低阶系数 (m 最小), 即满足

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0, \quad a_m \neq 0 (m>0) \tag{19}$$

称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的 m **阶零点**.

这时

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^n \\ &= (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^{n-m} \\ &= (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-a)^n = (z-a)^m \phi(z) \end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z-a)^n$$

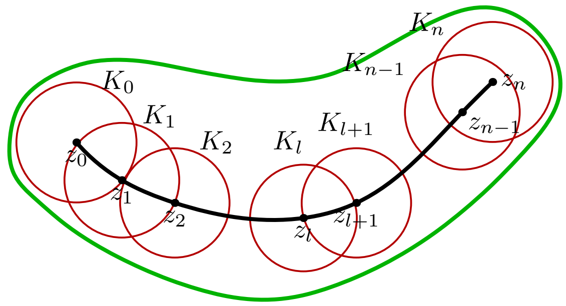
在邻域$|z-a|<R$内解析, 且$\phi(a)=a_m\neq 0$.

若 m 不存在, 或 $m=\infty$, 即 Taylor 展开所有系数 $a_m=0$, 则 $f(z)\equiv 0$ 在圆盘 $|z-a|<R$ 内成立.

Lemma 5.2 *设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析, 若 $f(z)$ 在 G 内的一个圆盘内恒等于零, 那么 $f(z)$ 在区域 G 内恒等于零.*

Proof 设在 a 为中心的一个圆盘 $K_0: |z-a|<R$ 内, $f(z)\equiv 0$. 对于 G 内任意一点 b, 用在 G 内的折线 L 连接 a 和 b. 设 d 为折线到 G 的边界的最短距离. 在 L 上依次取 $z_0=a$, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, $z_n=b$, 使

$|z_1 - a| < R$, 而其它任意相邻两点的距离小于 d, $|z_j - z_{j-1}| < d, j = 2, 3, ..., n$.



作每一点 z_j 的 d-邻域 $K_j : |z - z_j| < d$, $j = 1, 2, 3, ..., n-1$. 显然, 当 $j < n$ 时, $z_{j+1} \in K_j \subset G$.

由于 $f(z)$ 在 K_0 内恒等于零, $z_1 \in K_0$, $f^{(n)}(z_1) = 0, n = 0, 1, 2, 3, ...$ 于是 $f(z)$ 在 K_1 内 Taylor 展开式的系数都是零, 从而 $f(z)$ 在 K_1 内恒等于零. 一般地, 已经证明了 $f(z)$ 在 K_j 内恒等于零, 就可推出它在 K_{j+1} 内恒等于零. 最后得到它在 K_{n-1} 内恒等于零, 于是 $f(b) = 0$. □

Theorem 5.3 (零点的孤立性定理) *设 $f(z)$ 在区域 G 内解析且不恒等于零, a 为其零点. 则必能找到 a 的邻域 $|z - a| < \rho$, 使在此邻域内 $z = a$ 是 $f(z)$ 的唯一零点.*

Proof 将函数在 a 的某个邻域 $|z - a| < R$ 作 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

则 $a_0 = 0$. 但不能够所有的 $a_n = 0$, 否则函数在邻域内恒为零, 由引理函数在整个区域内恒为零, 与假设矛盾. 设 m 为最低阶不为零的系数, 即 a 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则在 $|z - a| < R$ 内

$$f(z) = (z - a)^m \phi(z)$$

$\phi(z)$ 解析且 $\phi(a) \neq 0$. 由函数在 a 点解析, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \rho > 0$, 使当 $|z - a| < \rho$ 时, 恒有 $|\phi(z) - \phi(a)| < \epsilon$. 不妨取 $\epsilon = |\phi(a)|/2$, 则

$$|\phi(z)| > |\phi(a)| - \epsilon = \frac{1}{2}|\phi(a)| > 0$$

在邻域 $|z - a| < \rho$ 内成立. □

Corollary 5.4 *设 $f(z)$ 在区域 G 内解析. 若在 G 内存在 $f(z)$ 的无穷多个零点 $\{z_n\}$, 且*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \in G$$

则 $f(z)$ 在 G 内恒为零.

Proof 因 $f(z)$ 在 $z = a$ 点连续

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

所以

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$$

a 为函数零点.

若函数不恒为零, 则由零点的孤立性定理, 存在 a 的某个邻域, 在此邻域 a 为其唯一零点. 但由假设, 在 a 的任意邻域内都有无穷多个零点, 矛盾. □

Theorem 5.5 (解析函数的唯一性定理) *设在区域 G 内有两个解析函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$, 在 G 内存在无穷多个点 $\{z_n\}$, $f_1(z_n) = f_2(z_n)$. 且*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \in G$$

则在 G 内 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Proof 考虑 $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$, 有上面推论得 $g(z) \equiv 0$, 即 $f_1(z) \equiv f_2(z)$. □

Example 5.7 是否存在在原点解析的函数 $f(z)$ 满足下列条件

1. $f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right) = 0, f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2n}$
2. $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1}$

其中 $n = 1, 2, 3, ...$

Solution 1. 先设命题成立, 存在在原点解析的解析函数 $f(z)$ 满足条件. 则存在原点的邻域, 函数在邻域解析. 先构造满足第二个条件的解析函数. $f(z) = z$ 满足第二条件. 序列 $a_n = \frac{1}{2n}$ 的极限为 0, 由解析函数的唯一性定理, 在原点邻域内 $f(z) = z$ 为满足条件二的唯一解析函数. 但

$$f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{2n-1} \neq 0$$

$\therefore$ 函数不存在.

2. 改写

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

可见 $f(z) = \frac{1}{1+z}$ 满足条件.

在 0 的邻域内, 序列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的极限存在, 可见在 0 的任一邻域内 $f(z) = \frac{1}{1+z}$ 为满足条件的唯一解析函数. □

Example 5.8 在复平面上解析, 在实轴上等于 $\sin x$ 的函数, 只能是 $\sin z$.

Solution 由定义

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

在全平面上收敛, 解析. 在实轴上

$$\sin z|_{z=x} = \sin x$$

设有另一函数 $f(z)$ 也满足条件. 取点序列 $z_n = \frac{1}{n}$, 则由

$$\sin z_n = \sin \frac{1}{n} = f(z_n)$$

$\therefore \quad \sin z = f(z)$ □

5.4 解析函数的 Laurent 展开

解析函数在解析点可展开成 Taylor 级数. 有时, 还需要将它在奇点附近展开成幂级数, 这时就得到 Laurent 展开.

Theorem 5.6 (Laurent 展开) 设函数 $f(z)$ 在以 b 为圆心的环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 中单值解析, 则对于环域内的任何 z 点, $f(z)$ 可以用包括负幂项的幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \qquad R_1 < |z-b| < R_2 \tag{21}$$

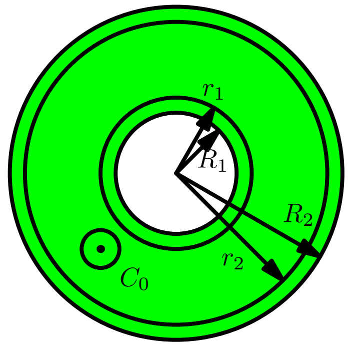
其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \tag{22}$$

C 是环域内绕内圆一周的任意一条曲线.

Proof 对于环域内任意一点 z, 存在 r_1 和 r_2 满足

$$R_1 < r_1 < |z-b| < r_2 < R_2$$



即 z 位于环域内两圆 $|z-b|=r_1$ 和 $|z-b|=r_2$ 之间. 再在环域 $r_1<|z-b|<r_2$ 内取 z 的一个邻域, 设 C_0 为邻域的边界. 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_0}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

又由复连通 Cauchy 定理

$$\oint_{|\xi-b|=r_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\oint_{|\xi-b|=r_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\oint_{C_0}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

于是

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi-b|=r_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi-b|=r_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

对于 $|\xi-b|=r_2$, 因为 $|z-b|<r_2$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-b)-(z-b)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(\xi-b)^{n+1}}$$

对于 $|\xi-b|=r_1$, 因为 $|z-b|>r_1$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-b)-(z-b)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-b)^n}{(z-b)^{n+1}}$$

代入, 得

$$\begin{aligned}f(z)=&\sum_{n=0}^{\infty}(z-b)^n\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi-b|=r_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\\&+\sum_{n=0}^{\infty}(z-b)^{-n-1}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\xi-b|=r_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{-n}}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

由复连通区域 Cauchy 定理, 因为在环域 $R_1<|z-b|<R_2$ 内各个被积函数解析, 故积分围道 $|\xi-b|=r2$ 和 $|\xi-b|=r_1$ 都可换成环域内绕内圆的任意一条简单闭合曲线. 将两求和和并后得

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-b)^n\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n\\a_n&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

□

1. 收敛范围为一环形区域.

   Laurent 展开 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cdots$ 即有正幂项, 又有负幂项.

   (a) 正幂项 $\sum_{n=0}^{\infty}\cdots$ 称为 Laurent 级数的**正则部分**, 其收敛范围为收敛圆 $|z-b|<R_2$, 正幂项在 $|z-b|<R_2$ 圆内绝对收敛. 在圆内每一个闭圆盘内一致收敛.

   (b) 负幂项 $\sum_{n=-\infty}^{-1}\cdots$ 称为 Laurent 级数的**主要部分**, 其收敛范围 $\left|\dfrac{1}{z-b}\right|<\dfrac{1}{R_1}$ 为圆外 $|z-b|>R_1$, 负幂项在圆外 $|z-b|>R_1$ 绝对收敛, 在圆外任意一个闭圆盘中一致收敛.

   两部分合起来, 就构成了 Laurent 级数. 收敛范围为环域 $R_1<|z-b|<R_2$, 正则部分决定其外圆半径, 主要部分决定其内圆半径. 整个 Laurent 级数在环域 $R_1<|z-b|<R_2$ 内绝对收敛, 在环域内任意一个闭圆盘中一致收敛.

2. Laurent 展开与 Taylor 展开不同, 其展开区域 (收敛范围) 不同. 注意即使是正幂项系数

$$a_n \neq \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)$$

3. Laurent 展开的唯一性.

   设函数在环域 $R_1<|z-b|<R_2$ 内还有另一个 Laurent 展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a'_n(z-b)^n$$

   两边同乘以 $(z-b)^{-k-1}$

$$(z-b)^{-k-1}f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a'_n(z-b)^{n-k-1}$$

   沿环域内绕内圆一周的任一围道 C 积分[2]

$$\begin{aligned}\oint_C (z-b)^{-k-1}f(z)\mathrm{d}z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a'_n\oint_C (z-b)^{n-k-1}\mathrm{d}z\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a'_n 2\pi\mathrm{i}\delta_{nk}\\ &= 2\pi\mathrm{i}a'_k\end{aligned}$$

   所以

$$a'_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}\mathrm{d}z=a_k$$

   即 Laurent 展开是唯一的.

5.5 Laurent 级数求法举例

方法同 Taylor 级数求法, 包括部分分式法, 求导或积分, 级数相乘, 待定系数等.

Example 5.9 求 $\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 和 $|z|>1$ 区域内的幂级数展开.

[2]因为在围道上Laurent级数一致收敛, 可交换积分和求和次序.

Solution 区域为环形区域, 展开为 Laurent 展开.

当 $0<|z|<1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\end{aligned}$$

当 $|z|>1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2} = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n\end{aligned}$$

$\square$

另解 部分分式法

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

当 $0<|z|<1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\end{aligned}$$

当 $|z|>1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n\end{aligned}$$

$\square$

Example 5.10 求 $\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$ 在 $0<|t|<\infty$ 内的幂级数展开.

Solution 用级数乘法.

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \mathrm{e}^{zt/2}\mathrm{e}^{-z/2t}$$

在 $0<|t|<\infty$ 内, $\mathrm{e}^{zt/2}$ 展成 Taylor 级数

$$\mathrm{e}^{zt/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k t^k$$

$e^{-z/2t}$ 展成 Laurent 级数

$$e^{-z/2t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^l \left(\frac{1}{t}\right)^l$$

相乘则为 Laurent 级数

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+l} t^{k-l}$$

令 $k-l=n$, $k=n+l$, 由

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\cdots + \sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{l=-n}^{\infty}\cdots \tag{23}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(n+l)!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} t^n \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{l=-n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(n+l)!l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \end{aligned} \tag{24}$$

$J_n(z)$ 为 n 阶 Bessel 函数

$$J_n(z) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} & n \geq 0 \\ \sum_{l=-n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l} & n < 0 \end{cases} \tag{25}$$

□

5.6 解析函数的孤立奇点

孤立奇点 设 b 为函数 $f(z)$ 的一个奇点. 如果存在 b 的空心邻域, 在该邻域内 $0<|z-b|<r$, $f(z)$ 解析, 则称 b 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**. 否则称为**非孤立奇点**.

Example 5.11 函数 $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$

Solution 显然, $z=0$为奇点. $1/z=n\pi$, $z=\frac{1}{n\pi}$ 也是奇点.
$z=\frac{1}{n\pi}$ 为函数的孤立奇点. 而在 $z=0$ 的任意邻域, 总有无穷多个奇点, 故 $z=0$ 是非孤立奇点. □

孤立奇点分类

如果 $z=b$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则存在一个环域 $0<|z-b|<R$, 在环域内 $f(z)$ 解析, 可以展开成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \tag{26}$$

可能出现三种情况:

1. 级数展开式不含负幂项. b 点称为 $f(z)$ 的 **可去奇点**.
2. 级数展开式只含有有限个负幂项. b 称为 $f(z)$ 的**极点**.
3. 级数展开式含有无穷多个负幂项. b 称为 $f(z)$ 的**本性奇点**.

可去奇点

级数展开式不含负幂项, $a_n = 0 (n < 0)$.

这时级数退化为 Taylor 级数, 上式可写成

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

右边级数的收敛区域为收敛圆, 级数在收敛圆内解析. 如果定义或重新定义函数 $f(z)$ 在 b 点的值为级数在 b 点的值

$$f(b) = a_0$$

则 b 不再是 $f(z)$ 的奇点, 故奇点称为可去奇点.

重新定义的 $f(z)$ 为

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq b \\ a_0 = \lim_{z \to b} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n = \lim_{z \to b} f(z) & z = b \end{cases} \tag{27}$$

上式用到了级数在 b 点的连续性. 下面的定理告诉我们哪些奇点是可去奇点.

Theorem 5.7 *设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z-b| < R$ 解析, b 是函数的可去奇点的充要条件为, 存在极限 $\lim_{z \to b} f(z)$.*

Proof 只需证明充分性. 在 $0 < |z-b| < R$ 内, $f(z)$ 展成Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

由极限存在, 存在复数 A, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |z-b| < \delta$, $|f(z) - A| < \epsilon$. 于是得

$$|f(z)| < |A| + \epsilon = M$$

即函数有界. 取 $\rho < \delta$, 估算 Laurent 级数系数如下

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\xi - b| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - b)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$$

$$|a_n| < \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$$

当 $n < 0$ 时, 令 $\rho \to 0$, 得 $a_n = 0$, 即 b 为可去奇点. □

或

Theorem 5.8 *设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z-b| < R$ 解析, b 是函数的可去奇点的充要条件为, 存在 b 的空心邻域 $0 < |z-b| < \delta$, 函数在此邻域内有界 $|f(z)| < M$.*

极点

级数展开式只含有有限个复幂项, $\exists m > 0, a_n = 0 (n < -m)$.

进一步, 若 $a_{-m} \neq 0$, 即 a_{-m} 为最小的不为零系数, b 称为 $f(z)$ 的 m **阶极点**.

这时

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^n \\
&= (z-b)^{-m} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^{n+m} \\
&= (z-b)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-b)^n \\
&= (z-b)^{-m} \phi(z)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-b)^n
$$

为 $|z-b|<R$ 内的解析函数, 且 $\phi(b)\neq 0$. 这时, $\lim_{z\to b} f(z) = \infty$, 函数在极点附近趋于无穷.

Theorem 5.9 *设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-b|<R$ 内解析, b 是 $f(z)$ 的极点的充要条件是*

$$
\lim_{z\to b} f(z) = \infty
$$

即 $\forall M>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|z-b|<\delta$ 时, $|f(z)|>M$.

Proof 由定义, $\lim_{z\to b} f(z) = \infty$ 即 $\lim_{z\to b} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

再任取 $M>0$, $\exists\delta$, $0<|z-b|<\delta$ 时, $|f(z)|>M$. 即在 $|z-b|<\delta$ 内, $f(z)\neq 0$, 所以 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在此邻域内解析 (包括 b 点, b 点为可去奇点). 进一步, b 为其零点 (且为孤立零点), 设其为 m 阶零点. 则

$$
\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m g(z) \qquad g(b)\neq 0
$$

即

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (z-b)^{-m}\frac{1}{g(z)} = (z-b)^{-m}\phi(z) \\
\phi(b) &= \frac{1}{g(b)} \neq 0
\end{aligned}
$$

b 为函数 m 阶极点. □

本性奇点

级数展开式含有无穷多个负幂项.

对于本性奇点, $\lim_{z\to b} f(z)$ 不存在 (既不能有界, 也不能无穷). 可以证明

Theorem 5.10 *设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-b|<R$ 内解析, b 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是: 对于任何复数 A, 总可以找到一个序列 $z_n\to b$, 使得 $f(z_n)\to A$.*

Proof 只需证必要性. 不然, 则可给出 A, $\epsilon_0>0$ 与 $\delta_0>0$, 使 $|f(z)-A|\geq\epsilon_0$ 对于 $0<|z-z_0|<\delta_0$ 上的一切 z 成立. 那么,

$$
g(z) = \frac{1}{f(z)-A}
$$

在 $0<|z-z_0|<\delta_0$ 上是正则的且是有界的,

$$
|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon_0}
$$

所以, z_0 为 $g(z)$ 的可去奇点. $g(z)$ 的 Laurent 展开为

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

z_0 最多为 $g(z)$ 的 m 阶零点[3]

$$g(z)=(z-z_0)^m h(z) \qquad h(z)\neq 0$$

所以

$$f(z)=A+\frac{1}{g(z)}=A+\frac{1}{h(z)}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^m}$$

z_0 最多为 $f(z)$ 的 m 阶极点. 矛盾. □

Example 5.12 考虑函数

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$

Solution $z=0$ 为其本性奇点. z 沿正实轴 $\to 0$, $e^{1/z}\to\infty$ z 沿负实轴 $\to 0$, $e^{1/z}\to 0$ z 沿虚轴 $\to 0$, $e^{1/z}$ 不趋于一个确定的数: 若 $z_n=\dfrac{\mathrm{i}}{2n\pi}$, $e^{1/z_n}=1\to 1$ 若 $z_n=\dfrac{\mathrm{i}}{(2n+1)\pi}$, $e^{1/z_n}=-1\to -1$ □

5.7 解析延拓

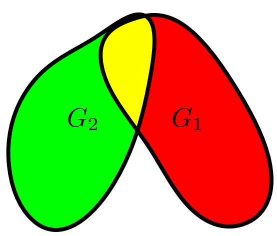
解析延拓

设函数 $f_1(z)$ 在区域 G_1 内解析, 函数 $f_2(z)$ 在区域 G_2 内解析. 而在 G_1 和 G_2 的公共区域 $G_1\cap G_2(\neq 0)$ 内, $f_1(z)\equiv f_2(z)$, 则可在区域 $G_1\cup G_2$ 内定义函数 $f(z)$

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\in G_1\\ f_2(z) & z\in G_2\end{cases}$$

$f(z)$ 在区域 $G_1\cup G_2$ 内每一点都单值解析, 所以 $f(z)$ 为 $G_1\cup G_2$ 内的解析函数. 这样函数 $f_1(z)$ 或 $f_2(z)$ 的解析范围被扩展了.

我们称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 G_2 内的**解析延拓**; 反之, $f_1(z)$ 是 $f_2(z)$ 在 G_1 内的**解析延拓**. $f(z)$ 则称为 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在更大区域 $G_1\cup G_2$ 内的**解析延拓**.



Example 5.13 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\dots$$

在以 $z=0$ 为圆心的单位圆 $|z|<1$ 内收敛, 代表一个解析函数. 又在 $|z|<1$ 内

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$$

[3]按 $g(z)$ 的定义, 在 $0<|z-z_0|<\delta_0$ 上 $g(z)\neq 0$.

而函数 $\frac{1}{1-z}$ 在更大的区域: 全平面除去奇点 $z=1$ 解析. 函数 $\frac{1}{1-z}$ 即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在除去 $z=1$ 的全平面的解析延拓.

解析延拓和奇点

函数在一点 z_1 解析的必要与充分条件是: 它在 z_1 的某一邻域内有幂级数展开. 因此要将函数从 z_1 附近向外延拓, 只要研究它的幂级数展开式是否能延拓.

求出幂级数的和函数的有限表达式, 当然是理想的解析延拓的方法. 但在许多问题中, 往往难以求出函数的有限表达式. 这时可以用幂级数来延拓幂级数.

设在 z_1 点解析函数的幂级数展开式为

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} (z-z_1)^n$$

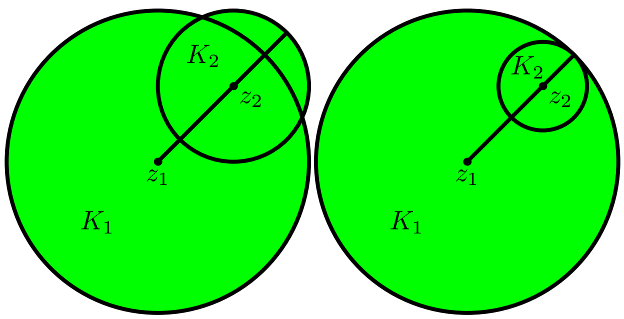
设其收敛圆为 $K_1 : |z-z_1| < r_1$. 在 K_1 内任取一点 $z_2 \neq z_1$, $f_1(z)$ 在 z_2 点的幂级数展开式为

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} (z-z_2)^n$$

其中

$$a_n^{(2)} = \frac{f_1^{(n)}(z_2)}{n!}$$

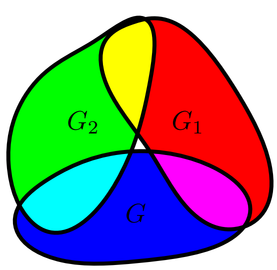
设幂级数 $f_2(z)$ 的收敛圆为 $K_2 : |z-z_2| < r_2$. 显然, $r_2 \geq r_1 - |z_1 - z_2|$.



1. 如果 $r_2 > r_1 - |z_1 - z_2|$. 那么, $f_1(z)$ 就由 z_1 从 z_2 的方向延拓到 K_1 圆外.
2. 如果 $r_2 = r_1 - |z_1 - z_2|$. 那么, 圆 K_1 与 K_2 相切. 相应的切点一定是奇点: 无论如何延拓, 函数在此点都不可能解析. 可能是极点、本性奇点以及枝点、非孤立奇点.

解析延拓与多值函数

解析延拓非常重要, 因为它能将一个解析函数的定义域尽可能地扩大. 但是, 解析延拓时, 可能发生如下的现象:



如图, 设 f 在 G 上解析, 我们将它解析延拓到 G_1 上的解析函数 f_1. f_1 又可解析延拓到 G_2 上的解析函数 f_2. 设 G_2 与 G 相交, 则 f 与 f_2 在 $G \cap G_2$ 上不一定相等! 这样, 解析延拓的结果可能为多值函数.

所以, 若 z_1 为奇点, 我们可以绕它一圈做解析延拓. 这时可能出现两种情况:

1. 若在 $G \cap G_2$ 上 $f(z) = f_2(z)$, 则函数可解析延拓到绕 z_1 点的环域. z_1 为函数的极点或本性奇点.

2. 若在 $G \cap G_2$ 上 $f(z) \neq f_2(z)$, 则函数不可解析延拓到绕 z_1 点的环域. 函数为多值函数. 化为单值函数, 环域内必存在不解析的割线. z_1 为函数的枝点.

全局解析函数

解析函数经常先定义在一个小的区域, 然后通过解析延拓推广到整个复平面 (Riemann 面). 在解析延拓的过程中, 自然可以找出函数的奇点: 孤立奇点, 枝点, 非孤立奇点等. 如此定义的解析函数称为*全局解析函数*.

如果 $f(z)$ 是一个全局解析函数, 则它在复平面 (Riemann 面) 上每一点的值是确定的, 它的奇点及其性质也是确定的.

Taylor 展开的收敛半径与解析函数的奇点

设函数在 a 点展开为 Taylor 级数, 则收敛圆上一定有奇点. 否则, 函数会在更大的收敛圆内解析.

设 b 是 $f(z)$ 离展开中心 a 点最近的奇点, 则 $f(z)$ 在 a 点 Taylor 展开的收敛半径 $R = |b - a|$.

Example 5.14

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$$

$R = 1$. 在收敛圆上有和函数奇点 $z = \pm \mathrm{i}$.

上例若在实数域, 就不好理解为什么和函数在 $(-\infty, \infty)$ 无奇点, 但幂级数展开却只局限在 $R = 1$ 的有限范围. 这也是扩充到复数域上研究函数的好处之一.

Laurent 展开的收敛区域与解析函数的奇点

若外圆半径 $R_2 \neq \infty$, 则函数 $f(z)$ 在外圆上一定有奇点. 同样, 若内圆半径 $R_1 \neq 0$, 函数在内圆上也一定有奇点.

特殊情况 $R_1 = 0$, 若 Laurent 级数主要部分不为零, 则 $z = b$为 $|z - b| < R_2$ 内的唯一奇点 (孤立奇点), 若 Laurent级数主要部分为零, 则函数在 $|z - b| < R_2$ 内解析, $z = b$为可去奇点.

Note *一个全局解析函数可能无法定义在整个复平面. 解析延拓能否实现, 取决于函数的奇点分布: 如果在幂级数的收敛圆的边界上 “充满” 了奇点, 那么函数将无法解析延拓出去.*

Example 5.15 *见本章习题 10.*