

题 1. 计算积分：

$$\int_{-5}^1 8e^{t^2} \cos(t) \delta(t^2 - 2) dt$$

题 2. 狄拉克梳（在信号处理中又称作脉冲序列或取样函数）是具有等间隔  $T$  的无穷多  $\delta$  函数：

$$\Delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1)$$

证明狄拉克梳的傅立叶变换也是狄拉克梳。

题 3. 利用傅立叶变换法求解拉普拉斯方程的格林函数  $G(\vec{x} - \vec{x}')$ ,

$$\nabla^2 G(\vec{x} - \vec{x}') = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2)$$

其中  $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ ,  $\vec{x} = (x, y, z)$ 。

题 4. 证明

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{x - i\epsilon} = \delta(x)$$

题 5. **delta 函数的应用**。假设一个匀速运动的点粒子的电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{w}(t))$$

其中  $\mathbf{w}(t)$  是粒子的运动轨迹。计算：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

其中

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

称作推迟时间， $c$  是光速。