北京大学

理论力学

赵鹏巍

连续系统与场论

内容回顾

- 我们已经介绍了课程的绝大部分内容
- 最后两讲将介绍经典场论：

  从波动方程出发

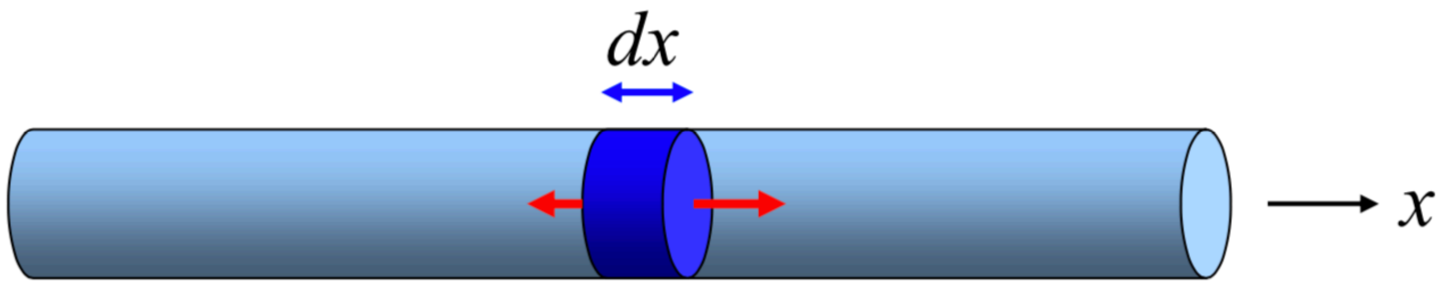
  给出相应的拉格朗日以及哈密顿表述

  相对论场论
- 时间有限，我们不能讨论所有的内容

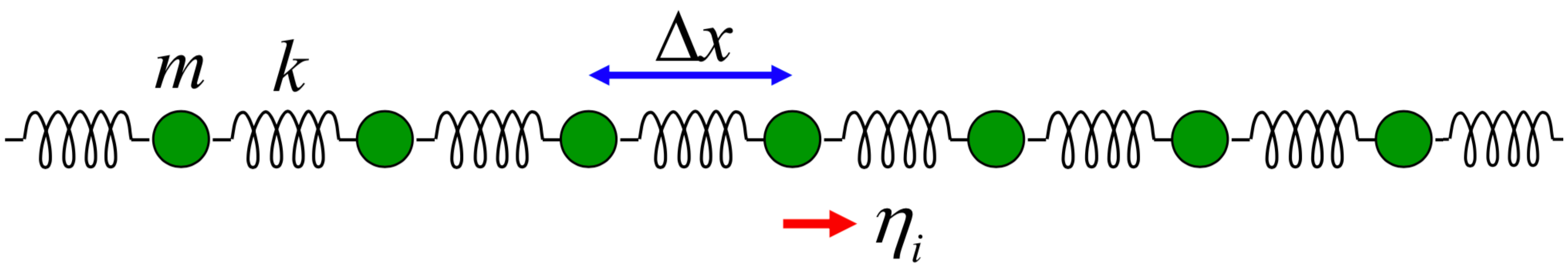
纵向波动

- 考虑一个无限长弹性棒的纵向振动

无限长避免处理端点



- 可以将之模型化为一串质点与弹簧组成的系统



- 第 i 个质点相对于其平衡位置的位置移动为 η_i

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2 \qquad V = \sum_i \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2$$

拉格朗日量

- 拉格朗日量

$$L = \sum_i \frac{1}{2}\left[m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2\right]$$
$$= \sum_i \frac{1}{2}\left[\frac{m}{\Delta x}\dot{\eta}_i^2 - k\Delta x\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x}\right)^2\right]\Delta x$$

- *Δx* 质点间的平衡间距

  m/Δx = μ 为线密度，即单位长度上的质量

  kΔx = *K* 为弹性模量，类似于杨氏模量，为应力/ 单位长度上的伸缩

  考虑胡克定律

$$F = -k\Delta L = -K\boxed{\frac{\Delta L}{L}}$$

弹簧相对于自然长度的伸长

- μ 和 *K* 始终保持为常量，我们接下来过渡到连续系统 *Δx* —〉*0*

连续极限

- 现在，我们有 $$L=\sum_i \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}_i^2-K\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\Delta x}\right)^2\right]\Delta x$$

将 η_i 用平衡时的位置 x 来表示 $\eta_i \to \eta(x)$

$$L=\sum_i \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2(x)-K\left(\frac{\eta(x+\Delta x)-\eta(x)}{\Delta x}\right)^2\right]\Delta x$$

$$\xrightarrow{\Delta x\to 0} \int \boxed{\frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2-K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]} dx$$

单位长度上的拉格朗日量

拉格朗日密度

- 我们可以将拉格朗日量写为

$$L = \int \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]dx \equiv \int \mathscr{L} dx$$

- 其中 $\mathscr{L}$ 表示一维情况下的拉格朗日密度

- 可以将之推广至三维情况下

$$L = \iiint \mathscr{L}\, dxdydz$$

其中，

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]$$

ρ 是体积密度 μ/A （A 为棒的横截面）

Y 是杨氏模量 K/A

拉格朗日方程

- 首先，从分立情况出发

$$L = \sum_i \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}_i^2 - K\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\Delta x}\right)^2\right]\Delta x$$

- 根据拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = \boxed{\left[\mu\ddot{\eta} - \frac{K}{\Delta x}\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{\Delta x}\right) + \frac{K}{\Delta x}\left(\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{\Delta x}\right)\right]}\Delta x = 0$$

$$\mu\ddot{\eta} - K\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$$

二阶导数的差分公式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}$$

这是一个波动方程，速度 $v = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$

如何将之直接从连续的拉格朗日量中导出呢?

拉格朗日方程

- 在分立情况下，我们有拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}\right) = 0$$

对每个i

- 在连续情况下，将 $\eta_i \to \eta(x)$

做个类比给出：

$$\frac{\partial L}{\partial \eta(x)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}(x)}\right) = 0$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right] \not\Longrightarrow \mu\ddot{\eta} - K\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$$

需要回到哈密顿原理中找答案

$$\delta I = \delta \int_1^2 L dt = \delta \int_1^2 \int \mathscr{L} dx dt = 0$$

哈密顿原理

- 我们有拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]$$

不失一般性，其依赖于

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t\right)$$

- 我们要关于 η 的路径作变分，

$$\eta(x,t;\alpha) = \eta(x,t;0) + \alpha\zeta(x,t) \qquad \alpha \to 0$$

- 端点处的变分为零

$$\zeta(x,t_1) = \zeta(x,t_2) = \zeta(x_1,t) = \zeta(x_2,t) = 0$$

初态　末态　边界　边界

对一无穷长棒来说，这一点无关紧要

哈密顿原理

利用了 x, t 的分部积分，端点变分为零

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\mathscr{L}\left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t\right)dxdt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}\frac{d\eta}{d\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dx}}\frac{d\frac{d\eta}{dx}}{d\alpha} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dt}}\frac{d\frac{d\eta}{dt}}{d\alpha}\right\}dxdt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dx}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dt}}\right\}\frac{d\eta}{d\alpha}dxdt$$

- 哈密顿原理给出

为零

$$\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_0 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\boxed{\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dx}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dt}}\right\}}\zeta(x,t)dxdt$$

拉格朗日方程

- 针对一维问题的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta}=0$$

- 试验一下

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2-K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mu\frac{d\eta}{dt}\right)-\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\eta}{dx}\right)=\mu\frac{d^2\eta}{dt^2}-K\frac{d^2\eta}{dx^2}=0$$

这正是我们之前得到的正确的波动方程！

三维情形

- 推广至三维情形是很直接的

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}\left(\eta,\frac{d\eta}{dx},\frac{d\eta}{dy},\frac{d\eta}{dz},\frac{d\eta}{dt},x,y,z,t\right)$$

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\mathscr{L}\left(\eta,\frac{d\eta}{dx},\frac{d\eta}{dy},\frac{d\eta}{dz},\frac{d\eta}{dt},x,y,z,t\right)dxdydzdt$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dt}}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dx}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dy}}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\eta}{dz}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}=0$$

- 时间与空间看起来相当对称，这正是相对论所要求的

下一讲的内容！

含多个分量的场

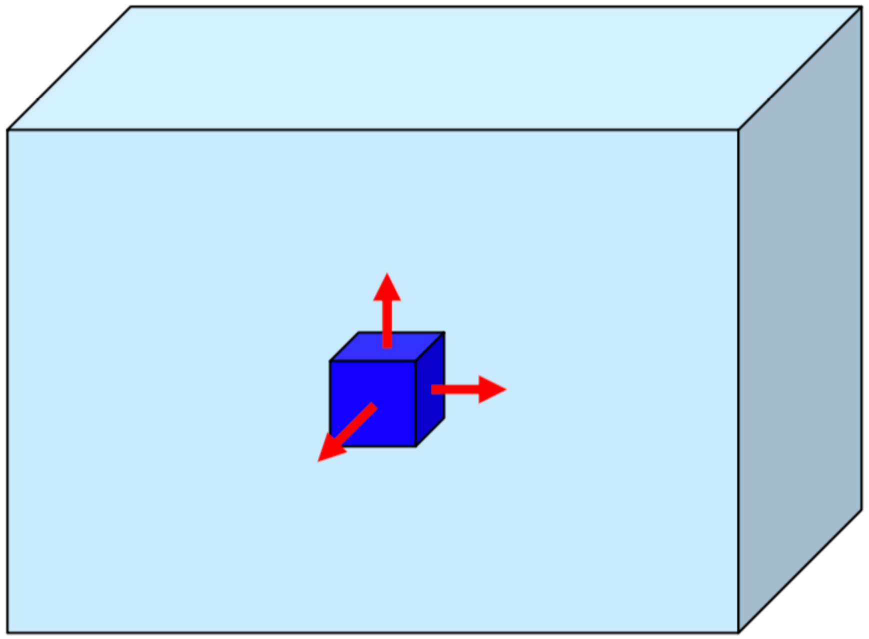
- 我们定义 η 为沿 x 轴方向的偏离平衡位置的大小

  一般的三维振动可以沿任意方向，故

$$\eta \rightarrow \boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$$

- 现在，我们需要处理三个关于时空的函数

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\begin{array}{c} \eta_x, \dfrac{d\eta_x}{dx}, \dfrac{d\eta_x}{dy}, \dfrac{d\eta_x}{dz}, \dfrac{d\eta_x}{dt}, \\ \eta_y, \dfrac{d\eta_y}{dx}, \dfrac{d\eta_y}{dy}, \dfrac{d\eta_y}{dz}, \dfrac{d\eta_y}{dt}, \\ \eta_z, \dfrac{d\eta_z}{dx}, \dfrac{d\eta_z}{dy}, \dfrac{d\eta_z}{dz}, \dfrac{d\eta_z}{dt}, \\ x, y, z, t \end{array}\right)$$



有没有觉得心情一下不好了?

简写标记

- 利用 *(0, 1, 2, 3)* 标记（*t, x, y, z)*

  这和以前在相对论中学过的符号标记类似

  我们还会用到一些物理量，如 η_i $\dfrac{d\eta_i}{dx_\mu}$ $\dfrac{d^2\eta_i}{dx_\mu dx_\nu}$

- 进一步缩写

$$\eta_{\rho,\mu} \equiv \frac{d\eta_\rho}{dx_\mu} \qquad \eta_{\rho,\mu\nu} \equiv \frac{d^2\eta_\rho}{dx_\mu dx_\nu} \qquad \eta_{,\mu} \equiv \frac{d\eta}{dx_\mu}$$

- 于是，我们可以将拉格朗日方程写为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\mu}, x_\mu) \qquad \frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$$

连续力学系统与场

- 以上采用四维空间缩写标记，只是为了符号上的简便，完全不要求该空间内任何一个量具有协变特性！
- 以上引入连续广义坐标组的拉格朗日表述是为了处理连续力学系统，如弹性固体，声波振动的气体等…
- 脱离特定力学系统，该表述依然成立，可用于描述支配某种**场**的方程。在数学上，**场**不过是一组或几组关于空间和时间的独立函数，完全可做为广义坐标
- 没有必要使场一定与某力学系统相关联
  “以太”所起的作用不过是作为动词“波动”一词的主语

一个例子：薛定谔经典场

- 拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{i}{2}\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \frac{(\nabla\psi^*)\cdot(\nabla\psi)}{2m}$$

- 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{,\mu}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\right) + \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\psi}{dx_i}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m}\right]\psi^* = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*}\right) + \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{d\psi^*}{dx_i}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[-i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m}\right]\psi = 0$$

薛定谔方程是一个经典场的运动方程；也被用来描述量子力学中的波函数的演化

守恒律

- 我们可以计算相应的“能量函数”

  考虑拉格朗日密度的全微商

$$\mathscr{L}(\eta, \eta_{,\mu}, x_\mu) \Rightarrow \frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta}\eta_{,\mu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\eta_{,\mu\nu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu}$$

- 利用拉格朗日方程

$$\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu} &= \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\right)\eta_{,\mu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\boxed{\eta_{,\mu\nu}} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\eta_{,\mu}\right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu}\end{aligned}$$

$$\frac{d\eta_{,\mu}}{dx_\nu}$$

应力—能量张量

$$\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu} = \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\eta_{,\mu}\right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu}$$

- 可以得到 $$\frac{d}{dx_\nu}\left(\boxed{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\eta_{,\mu} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu}}\right) = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_\mu}$$

$\equiv T_{\mu\nu}$ 　**应力—能量张量**　注意：这并不是一个相对论意义上的张量

- 如果拉格朗日密度不显式依赖于 x_μ

当 μ = 1, 2, 3 时，意味着无外力作用

自由场

当 μ = 0 时，意味着无能量源/渊

$$\Rightarrow \quad \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0$$

这看起来像是个什么东西守恒的样子？

能量张量的散度

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0$$

- 这个像守恒律的式子可以进一步写成一个散度的样子

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = \frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \frac{dT_{\mu i}}{dx_i} = \frac{dT_{\mu 0}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{T}_\mu = 0$$

- 在某一确定体积 *V* 内积分，利用高斯定律

$$\frac{d}{dt}\boxed{\int T_{\mu 0} dV} = -\int \nabla \cdot \mathbf{T}_\mu dV = -\boxed{\int \mathbf{T}_\mu \cdot d\mathbf{S}}$$

这一矢量表示一个“流”

体积内总的 $T_{\mu 0}$

从表面流出的流量

现在我们需要探讨物理含义：$T_{\mu 0}$ $\mathbf{T}_\mu$

能量密度

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}} \eta_{,\mu} - \mathscr{L} \delta_{\mu\nu}$$

- 首先考虑 $T_{00} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathscr{L}$

  很像"能量函数"

  以一维弹性棒为例

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right] \Rightarrow T_{00} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}_{\text{动能}} + \underbrace{K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}_{\text{势能}}\right]$$

- 于是，**T**$_0$ 应该是能量流密度了

$$T_{01} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \dot{\eta} = -K \frac{d\eta}{dx} \dot{\eta}$$

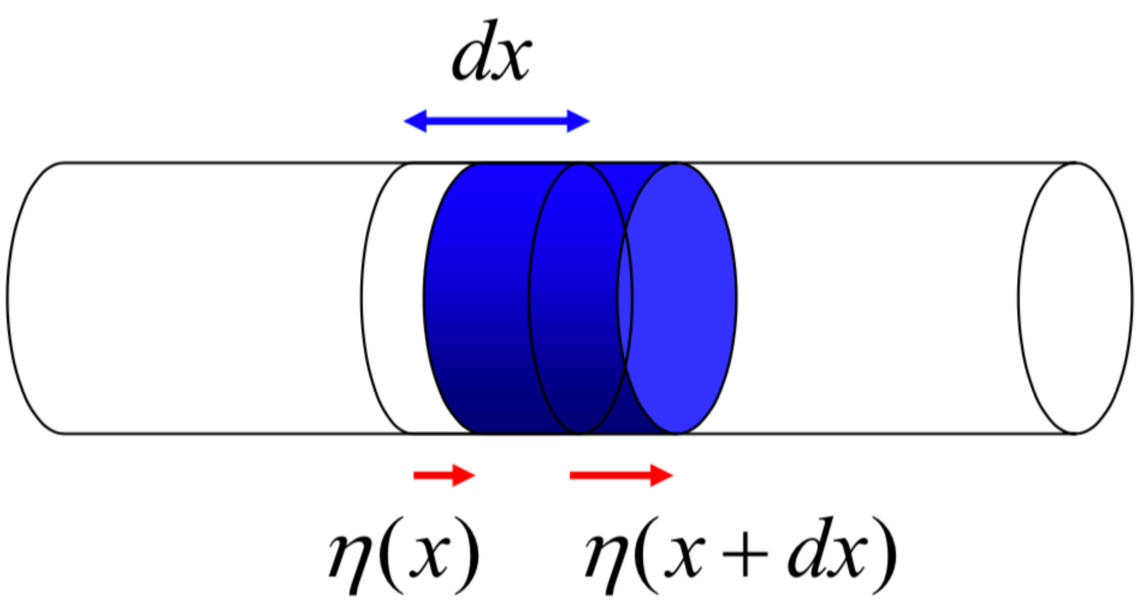
是吗?

能量流密度

- 考虑一维棒上的一小段

  振动中，它被拉长了$d\eta$

$$\eta(x+dx)-\eta(x)=\frac{d\eta}{dx}dx$$



- 于是，相对应的胡克律力为

$$F=-K\frac{d\eta}{dx}$$

- 由此，可得到由这一小段对下一小段所做的功率

$$F\dot{\eta}=-K\frac{d\eta}{dx}\dot{\eta} \quad \Longleftrightarrow \quad T_{01}=-K\frac{d\eta}{dx}\dot{\eta}$$

动量密度

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}} \eta_{,\mu} - \mathscr{L} \delta_{\mu\nu}$$

- 首先考虑 $T_{i0} = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}} \dfrac{d\eta}{dx_i}$

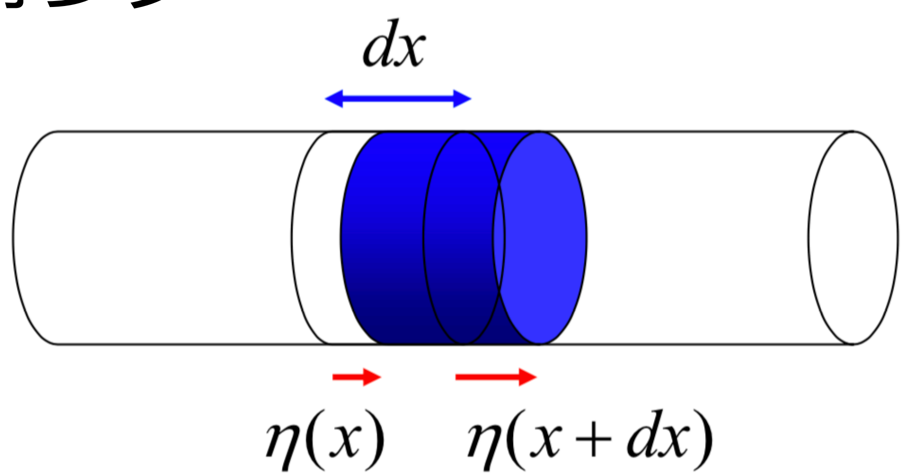
同样地，以一维弹性棒为例

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right] \Rightarrow T_{10} = \mu \frac{d\eta}{dt}\frac{d\eta}{dx}$$

并不很明显看出是动量密度…

动量密度

- 一维棒上从 x 到 $x+dx$ 的一小段，质量有多少？



零阶情况：μdx

一阶情况：$$\mu\left(1-\frac{d\eta}{dx}\right)dx$$

这一小段被拉伸了 $d\eta$

故其动量为 $$\mu\left(1-\frac{d\eta}{dx}\right)\frac{d\eta}{dt}dx$$

额外的动量密度 $$-\mu\frac{d\eta}{dt}\frac{d\eta}{dx}=-T_{10}$$

$-T_{10}$ 可以被认为是动量密度

$$T_{10}=\mu\frac{d\eta}{dt}\frac{d\eta}{dx}$$

应力—能量张量

- 我们可以解释应力—能量张量的各个分量为：

  T_{00} = 能量密度

  T_{0i} = 能量流密度

  T_{i0} = 动量密度

  T_{ij} = 动量密度的流密度

- 所以散度条件表示了能量与动量的守恒

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0$$

总结

- 建立了连续力学系统的拉格朗日表述

$$L = \iiint \mathscr{L}\, dxdydz$$

拉格朗日量

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$$

- 能量、动量守恒由应力—能量张量的散度条件给出

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\eta_{,\mu} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} \Rightarrow \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0$$