Chapter 6

留数定理及其在定积分中的应用

6.1 留数定理

上一章我们介绍了解析函数在孤立奇点 z_0 附近可以作洛朗级数展开：

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}, \tag{6.1}$$

其中上述洛朗展开的收敛区域是 $0 < |z-z_0| < r_1$，其中 $0 < r_1 \leq \infty$。

定义 18 (留数) $f(z)$ 在 z_0 处的留数（*residue*）定义为 b_1，记为

$$Res(f, z_0) := b_1 . \tag{6.2}$$

注意在留数的定义中要求洛朗展开的区域必须是 $0 < |z-z_0| < r_1$，即紧邻孤立奇点的环域上的洛朗展开。

例子 53 求

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

在 $z_0 = 0$ 处的留数。

定理 31 (留数定理) 设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的单连通区域，$f(z)$ 是定义在 $D\backslash\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的解析函数，即 $\backslash\{a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $f(z)$ 在 D 上的孤立奇点。则对于 D 上的任意不经过奇点的简单封闭正定向围道 C，有

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f, a_k) . \tag{6.3}$$

其中求和遍历在 C 所包裹的区域内的奇点 a_k。6.1。

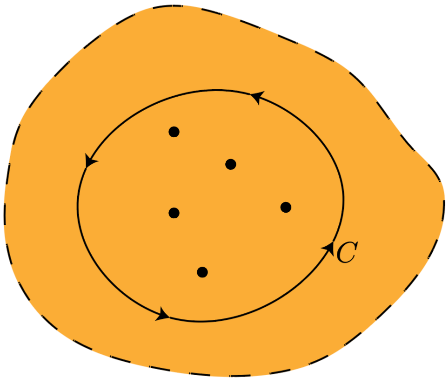

Figure 6.1: 留数定理

证明：绕 C 包裹区域中的奇点 a_k 作一小正定向圆围道 C_k，使得 a_k 是 C_k 包裹的唯一奇点。则由复连通区域上的柯西定理可知，

$$\int_{C-C_1-C_2-\cdots-C_m} f(z)dz = 0\,, \tag{6.4}$$

其中 m 是 C 包裹奇点的个数。有

$$\int_{C-C_1-C_2-\cdots-C_k} f(z)dz = \int_C f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \cdots - \int_{C_m}$$

即

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(z)dz\,. \tag{6.5}$$

由于 C_k 仅包含孤立奇点 a_k，我们可以对 $f(z)$ 在 a_k 处作洛朗展开，

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{k,n}}{(z-a_k)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}(z-a_k)^n\,. \tag{6.6}$$

因此有

$$\int_{C_k} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C_k} \frac{b_{k,n}}{(z-a_k)^n} dz + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}(z-a_k)^n dz = b_{k,1} = \mathrm{Res}(f, a_k)\,. \tag{6.7}$$

得证。

通过留数定理计算围道积分的问题就转化为了更简单的计算留数的问题。

- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$。
- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的单极点，则计算其留数的一个有用公式是

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)\,. \tag{6.8}$$

例子 54 求

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)(z-2)}$$

在单极点处的留数。

对于单极点，另一个有用的公式如下。如果 z_0 是 $g(z)$ 的单零点，则 z_0 是 $1/g(z)$ 的单极点，其留数为

$$\mathrm{Res}(1/g, z_0) = \frac{1}{g'(z_0)}\,. \tag{6.9}$$

为了证明这一点，注意到由于 z_0 是 $g(z)$ 的单零点，因此

$$g(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{6.10}$$

且 $a_1 = g'(z_0) \neq 0$。因此

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{a_1(1-z)\Big[1 + a_2(1-z) + \cdots\Big]} = \frac{1}{a_1(1-z)} + \text{正规部分} \tag{6.11}$$

得证。

例子 55 求

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

的所有单极点并求其留数。

例子 56 求

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

的所有单极点并求其留数。

- 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $k > 1$ 阶极点，则

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z)\right]\,. \tag{6.12}$$

为了证明这一点，注意到

$$f(z) = \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \text{正规部分}$$
$$(z-z_0)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{k-1} + \text{正规部分} \tag{6.13}$$

因此得证。

例子 57 求

$$f(z) = \frac{z+2i}{z^5+4z^3}$$

的极点和留数。

但更多时候，对于高阶极点直接计算洛朗展开是求留数的更简便方法。

例子 58 求

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^5}$$

在 $z_0 = 0$ 的留数。

例子 59 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

例子 60 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin(1/z) dz\,.$$

例子 61 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{az^2+2z+a} dz\,, \qquad (0<a<1)$$

另一个有用的概念是无穷远处的留数。设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上除了有限个奇点 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 外是解析的。C 是包含所有这些奇点的一个正定向大圆，则按留数定理

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k)\,. \tag{6.14}$$

我们定义 $f(z)$ 在无穷远处的留数为

$$\mathrm{Res}(f,\infty) := -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\,. \tag{6.15}$$

因此无穷远处的留数与有限远处的留数有关系

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0\,. \tag{6.16}$$

为了使得这个概念有用，我们必须有直接求无穷远处留数的方法，否则就只是一个概念的替换而已。我们有如下定理

定理 32 (无穷远处留数) 如果定义在 $\mathbb{C}$ 上的解析函数只有有限个奇点，则

$$Res(f, \infty) = -Res\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \tag{6.17}$$

证明：我们从定义出发，令 $w = 1/z$，则

$$\mathrm{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{-w^2}\,. \tag{6.18}$$

其中 $\tilde{C}$ 在 w 平面成为了反定向的围道，$f(1/w)$ 的所有的奇点都在 C 外，唯一的奇点来自因子 $1/w^2$。因此我们有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{-w^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{w^2} = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \tag{6.19}$$

其中 $-\tilde{C}$ 具有正定向因而可用留数定理。证毕。

例子 62 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz\,.$$

6.2 利用留数计算定积分和无穷级数

留数定理使得计算一大类定义在实变量上的定积分和无穷级数求和转化为留数求和问题，而这是一个相对简单的问题。我们下面讨论几类典型的可以通过留数定理解决的问题。

6.2.1 三角函数积分

复围道积分和三角函数的关联来自于极坐标表示，**对于模长为 1 的复数** $z = e^{i\phi}$，注意到

$$\begin{aligned} dz &= ie^{i\phi}d\phi\,, \qquad \Rightarrow d\phi = \frac{dz}{iz}\,, \\ \cos\phi &= \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z+1/z}{2}\,, \\ \sin\phi &= \frac{z-1/z}{2i}\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$