因此无穷远处的留数与有限远处的留数有关系

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0\,. \tag{6.16}$$

为了使得这个概念有用，我们必须有直接求无穷远处留数的方法，否则就只是一个概念的替换而已。我们有如下定理

定理 32 (无穷远处留数) 如果定义在 $\mathbb{C}$ 上的解析函数只有有限个奇点，则

$$Res(f, \infty) = -Res\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \tag{6.17}$$

证明：我们从定义出发，令 $w = 1/z$，则

$$\mathrm{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{-w^2}\,. \tag{6.18}$$

其中 $\tilde{C}$ 在 w 平面成为了反定向的围道，$f(1/w)$ 的所有的奇点都在 C 外，唯一的奇点来自因子 $1/w^2$。因此我们有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{-w^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\tilde{C}} f(1/w)\frac{dw}{w^2} = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{w^2} f(1/w), 0\right) \tag{6.19}$$

其中 $-\tilde{C}$ 具有正定向因而可用留数定理。证毕。

例子 62 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz\,.$$

6.2 利用留数计算定积分和无穷级数

留数定理使得计算一大类定义在实变量上的定积分和无穷级数求和转化为留数求和问题，而这是一个相对简单的问题。我们下面讨论几类典型的可以通过留数定理解决的问题。

6.2.1 三角函数积分

复围道积分和三角函数的关联来自于极坐标表示，**对于模长为 1 的复数** $z = e^{i\phi}$，注意到

$$\begin{aligned} dz &= ie^{i\phi}d\phi\,, \qquad \Rightarrow d\phi = \frac{dz}{iz}\,, \\ \cos\phi &= \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z+1/z}{2}\,, \\ \sin\phi &= \frac{z-1/z}{2i}\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

例子 63 计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{1+a^2-2a\cos\phi}$$

其中 $|a|\neq 1$。这个条件保证被积函数不发散。

按照(6.20)中的替换规则，我们有

$$\begin{aligned}I&=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\frac{1}{1+a^2-a(z+1/z)}\\&=\int_{|z|=1}\frac{dz}{i}\frac{1}{z(1+a^2)-az^2-a}\end{aligned}\tag{6.21}$$

令

$$f(z)=-\frac{1}{i}\frac{1}{az^2-z(1+a^2)+a}$$

则

$$I=2\pi i\sum_i\mathrm{Res}(f,z_i)\tag{6.22}$$

其中求和求遍单位圆内的留数。令

$$az^2-(1+a^2)z+a=0$$

解得两个根为

$$z_\pm=\frac{(1+a^2)\pm\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2}}{2a},$$

即

$$z_+=1/a\,,\qquad z_-=a\,.$$

由于 $|a|\neq 1$，显然 z_+ 和 z_- 中一个在单位圆内一个在单位圆外，而

$$f(z)=\frac{i}{a(z-z_+)(z-z_-)}\,.\tag{6.23}$$

当 $|a|<1$ 时，z_- 在园内，因此

$$\mathrm{Res}(f,z_-)=\frac{i}{a(a-1/a)}$$

当 $|a|>1$ 时，z_+ 在园内，因此

$$\mathrm{Res}(f,z_+)=\frac{i}{a(1/a-a)}$$

因此积分结果为

$$I=\begin{cases}-\frac{2\pi}{a^2-1} & |a|<1\\ -\frac{2\pi}{1-a^2} & |a|>1\end{cases}\tag{6.24}$$

事实上，容易证明关于三角函数积分的一般结果。如果

$$R(\cos\phi, \sin\phi)$$

是关于 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 的有理函数，且对于任意 $\phi \in [0, 2\pi]$ 没有奇点，则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi) d\phi = 2\pi i \sum_m \text{Res}\left(\frac{1}{iz} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right), z_m\right) \tag{6.25}$$

其中求和取遍单位圆内的留数。

6.2.2 实轴上的有理型积分

一类常见的积分是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 是有理函数。为了用留数定理计算这一类积分，我们需要如下引理

推论 3 (大圆弧引理) 如果对于充分大的 $|x|$，存在 $M > 0$，$\alpha > 1$，使得

$$|f(x)| < \frac{M}{|x|^\alpha}$$

则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \,,$$

如果 $f(z)$ 在上半平面有定义，则 C_R 是上半平面的大圆弧，$C_R = Re^{i\phi}$，$0 \le \phi \le \pi$。反之，如果如果 $f(z)$ 在下半平面有定义，则 C_R 是下半平面的大圆弧，$C_R = Re^{i\phi}$，$\pi \le \phi \le 2\pi$。

证明：不妨设 $f(z)$ 在上半平面有定义，则

$$\begin{aligned} |\int_{C_R} f(z) dz| &= |\int_0^\pi f(Re^{i\phi}) Rie^{i\phi} d\phi| \\ &\le \int_0^\pi |f(Re^{i\phi})| R d\phi \\ &< \int_0^\pi \frac{M}{R^{\alpha-1}} d\phi \\ &= \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}} \end{aligned} \tag{6.26}$$

由于 $\alpha > 1$，因此

$$\lim_{R\to 0} \frac{M\pi}{R^{\alpha-1}} = 0 \,.$$

得证。

利用这个引理，我们可以求解一大类积分。

例子 64 计算积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx\,.$$

令 $f(z)=1/(1+z^4)$，显然满足大圆弧引理的条件。令 $C_R=Re^{i\phi}\,,0\le\phi\le\pi$ 为上半圆弧，则由留数定理

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz\right]=2\pi i\sum_m \mathrm{Res}(f,z_m) \tag{6.27}$$

其中求和取遍上半圆弧和实轴包裹区域的奇点。由大圆弧引理知道上式左边第二项为零。函数 $f(z)$ 的极点为

$$e^{i\pi/4}\,,\qquad e^{i3\pi/4}\,,\qquad e^{i5\pi/4}\,,\qquad e^{i7\pi/4} \tag{6.28}$$

均为单极点，其中前两个极点位于积分围道内，其留数分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,e^{i\pi/4}) &= \lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{z-e^{i\pi/4}}{1+z^4}\\ &= \lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{1}{4z^3}\qquad \text{洛必达法则}\\ &= \frac{1}{4e^{i3\pi/4}}=\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,e^{i3\pi/4}) &= \lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\frac{z-e^{i3\pi/4}}{1+z^4}\\ &= \lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\frac{1}{4z^3}\qquad \text{洛必达法则}\\ &= \frac{1}{4e^{i9\pi/4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned} \tag{6.30}$$

因此

$$I=2\pi i\frac{(-i\sqrt{2})}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \tag{6.31}$$

6.2.3 震荡型积分

另一类常见积分是

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos x dx\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin x dx\,.$$

为了处理这一类积分，我们需要如下引理

推论 4 (约当引理) 考虑一个定义在半圆弧上的复值连续函数 f:

$$C_R = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\}$$

其中 R 是圆弧半径，且位于上半平面。如果函数 f 的形式为:

$$f(z) = e^{iaz} g(z), \quad z \in C,$$

其中 a 是一个正参数，则约当引理给出了该圆弧积分的上界:

$$\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi}{a} M_R, \quad \text{其中} M_R := \max_{\theta \in [0,\pi]} \left| g(Re^{i\theta}) \right|. \tag{6.32}$$

当 g 在整个区域上恒为零时，等号成立，此时两边均为零。对于下半平面中的半圆弧，类似的结果在 $a < 0$ 时成立。如果 f 在所有足够大的 R 的半圆弧 C_R 上连续，并且

$$\lim_{R \to \infty} M_R = 0,$$

那么根据约当引理，

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0.$$

证明 5 根据复线积分的定义，有:

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \int_0^\pi g(Re^{i\theta}) e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)} iRe^{i\theta}\, d\theta = R\int_0^\pi g(Re^{i\theta}) e^{aR(i\cos\theta - \sin\theta)} ie^{i\theta}\, d\theta.$$

现在考虑不等式:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

它给出:

$$I_R := \left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \leq R\int_0^\pi \left| g(Re^{i\theta}) e^{aR(i\cos\theta - \sin\theta)} ie^{i\theta} \right| d\theta = R\int_0^\pi \left| g(Re^{i\theta}) \right| e^{-aR\sin\theta} d\theta.$$

利用 M_R 的定义 ((6.32)) 以及对称性 $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$，我们得到:

$$I_R \leq RM_R \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}\, d\theta = 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta.$$

由于 $\sin\theta$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上是凹函数，其图像位于连接两端点的直线之上，因此:

$$\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad \forall \theta \in [0, \pi/2],$$

这进一步推出:

$$I_R \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\cdot\frac{2\theta}{\pi}}\, d\theta = \frac{\pi}{a}(1 - e^{-aR})M_R \leq \frac{\pi}{a} M_R.$$

综上所述，约当引理的结论得证。

例子 65 计算积分

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+b^2}dx\,, \qquad b>0$$

由被积分函数的对称性可以知道

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+b^2}dx \tag{6.33}$$

令

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+b^2}\,.$$

显然 $f(z)$ 满足约当引理的条件。取上半圆弧 C_R，则由留数定理

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^R f(z)e^{iz}dz+\int_{C_R} f(z)e^{iz}dz\right]=2\pi i\sum_m \mathrm{Res}(f(z)e^{iz},z_m) \tag{6.34}$$

上式左侧第二项由约当引理结果为零。$f(z)$ 在上半平面的奇点为

$$ib \tag{6.35}$$

且为单极点，其留数为

$$\mathrm{Res}(fe^{iz},ib)=\frac{e^{-b}}{4ib} \tag{6.36}$$

因此

$$I=2\pi i\frac{e^{-b}}{4ib}=\frac{e^{-b}\pi}{2b}\,. \tag{6.37}$$

6.3 实轴上的奇异积分的问题

在我们研究积分时，经常会遇到瑕积分（improper integrals）。一类瑕积分涉及无穷大的积分限。另一类则涉及被积函数在积分区间内部的一个或多个点上变为无穷大。

考虑积分：

$$I=\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

如果我们试图用标准的黎曼积分意义来计算它，我们会遇到问题，因为被积函数 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处发散，而 $x=0$ 位于区间 $[-1,1]$ 内部。

像上面这样的积分在物理背景中出现的频率惊人地高，例如：

- 电磁学或量子力学中的格林函数 (Green's functions)。
- 色散关系 (Dispersion relations)，例如 Kramers-Kronig 关系。

- 散射理论 (Scattering theory)。
- 分布（distributions）的主部，例如 $\frac{1}{x}$。

在这些物理情境中，我们常常需要从这类看似发散的表达式中提取一个有意义的、有限的值。这种发散通常源于物理模型中的理想化。

关键思想是，如果我们对称地逼近奇点，奇点处的发散或许能够“抵消”。观察 $\frac{1}{x}$，这个函数是奇函数。对于 $x > 0$ 的正发散似乎可以与 $x < 0$ 的负发散抵消，只要我们小心地逼近。

柯西主值提供了一种特殊的方法，通过使用对称的极限过程来处理积分区间内的奇点。

定义 19 *设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，并假设 $f(x)$ 在点 $c \in (a,b)$ 处有一个奇点。积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的柯西主值定义为：*

$$P.V. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx \right] \tag{6.38}$$

前提是该极限存在且有限。

记号： 柯西主值通常用 P.V.、P、$\mathcal{P}$ 表示。我们这里主要使用 P.V.。

核心思想： 我们围绕奇点 c 挖掉一个小的、对称的区间 $(c-\epsilon, c+\epsilon)$，在剩余的部分上进行积分，然后取这个被排除的区间尺寸缩减到零的极限 $(\epsilon \to 0^+)$。

例子 66 *让我们重新审视积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$。奇点在 $c = 0$。应用定义 (6.38)：*

$$\begin{aligned}
P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx \right] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[[\ln|x|]_{-1}^{-\epsilon} + [\ln|x|]_{\epsilon}^1 \right] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[(\ln|-\epsilon| - \ln|-1|) + (\ln|1| - \ln|\epsilon|) \right] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[(\ln\epsilon - \ln 1) + (\ln 1 - \ln\epsilon) \right] \quad (\text{因为}\epsilon > 0) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} [\ln\epsilon - 0 + 0 - \ln\epsilon] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} [0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以，$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ 的柯西主值是 0。这正是被积函数的奇对称性所预期的抵消。

- **P.V. 不是标准收敛：** 如果一个积分在标准（黎曼或勒贝格）意义下收敛，那么它的值等于其柯西主值。然而，即使一个积分在标准意义下发散，它也可能有一个有限的柯西主值（正如我们的例子 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ 所示）。

- **存在性：** P.V. 定义中的极限必须存在，P.V. 才有定义。例如，P.V. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ 不存在（它发散到 $+\infty$）。

- **与复分析的联系：** 在使用复围道积分计算实积分时，柯西主值会自然出现，特别是当极点位于围道上（通常是实轴）时。在这种情况下，留数定理 (Residue Theorem) 通常会包含 P.V. 项。

例子 67 我们想要计算函数 $\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2}$ (其中 $k = |\vec{k}|$) 的三维傅立叶变换 $F(\vec{r})$。变换定义为：

$$F(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2}$$

被积函数在 $\vec{k} = \vec{0}$ 处有一个奇点，此时 $k^2 = 0$。在三维空间中，原点附近的体积元行为类似于 $k^2 dk$，因此积分 $\int (1/k^2) k^2 dk = \int dk$ 在 $k = 0$ 附近看起来是发散的。在物理学中，这类积分通常在主值意义下或作为分布来理解。我们可以通过排除原点周围的一个小球并取极限来正式定义该积分：

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|\vec{k}|\geq\epsilon} d^3k \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2}$$

令 $r = |\vec{r}|$。

我们转换到 $\vec{k}$ 的球坐标系：(k, θ, ϕ)。我们将向量 $\vec{r}$ 对准 z 轴，因此 $\vec{r} = (0, 0, r)$。那么 $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$。体积元为 $d^3k = k^2 \sin\theta\, dk\, d\theta\, d\phi$。积分限为 $k \in [\epsilon, \infty)$，$\theta \in [0, \pi]$，$\phi \in [0, 2\pi]$。

$$\begin{aligned}
F(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, (k^2 \sin\theta) \frac{e^{-ikr\cos\theta}}{k^2} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta}
\end{aligned}$$

对 ϕ 的积分得到 2π：

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^\infty dk \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta}$$

现在我们计算 θ 积分。令 $u = \cos\theta$，则 $du = -\sin\theta\, d\theta$。当 $\theta = 0$ 时 $u = 1$。

当 $\theta=\pi$ 时 $u=-1$。

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta}\, d\theta &= \int_1^{-1} e^{-ikru}(-du)\\ &= \int_{-1}^{1} e^{-ikru}\, du\\ &= \left[\frac{e^{-ikru}}{-ikr}\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{e^{-ikr}-e^{ikr}}{-ikr}\\ &= \frac{-(e^{ikr}-e^{-ikr})}{-ikr}\\ &= \frac{2i\sin(kr)}{ikr} = \frac{2\sin(kr)}{kr}\end{aligned}$$

将此结果代回 $F(\vec{r})$ 的表达式：

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^\infty dk\, \frac{2\sin(kr)}{kr} = \frac{4\pi}{r}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^\infty \frac{\sin(kr)}{k}\, dk$$

剩下的积分是 $\int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{k}dk$。注意被积函数 $\frac{\sin(kr)}{k}$ 在 $k\to 0$ 时是有限的（其极限为 r）。

注意到 $\sin(x)/x$ 是偶函数，所以 $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$。我们使用 $e^{iz}=\cos(z)+i\sin(z)$ 将其与复积分联系起来：

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = Im\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx\right)$$

积分 $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx$ 由于在 $x=0$ 处的极点，在标准意义下不收敛。然而，它的柯西主值存在。如前例所示（或通过在上半平面围绕 $z=0$ 缩进围道），我们发现：

$$P.V.\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx = i\pi$$

展开写：

$$P.V.\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{x}dx = 0+i\pi$$

取虚部相等：

$$P.V.\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \pi$$

由于 $\sin(x)/x$ 在 $x=0$ 处行为良好（极限存在），其主值积分等于标准瑕积分的值。因此：

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\left(P.V.\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx\right) = \frac{1}{2}(\pi) = \frac{\pi}{2}$$

所以，尽管原始三维积分中的 $1/k^2$ 奇点与体积元中的 k^2 相消，导致了一个在 $k=0$ 处有限的径向积分 $\int \sin(kr)/k\,dk$，但用于计算该径向积分的标准复分析方法从根本上依赖于计算相关积分 $\int e^{ix}/x\,dx$ 的柯西主值。

将径向积分的值代回 $F(\vec{r})$ 的表达式：

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4\pi r}$$

因此，$1/k^2$ 的三维傅立叶变换（在奇点处进行适当解释后）为 $\frac{1}{4\pi r}$。这是一个著名的结果。

6.3.1 带有枝点和割线的积分

对于这一类积分需要在围道选取上有一定的创造性。我们以具体例子演示。

例子 68 计算积分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx$$

令

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{1+z^2}$$

将 $f(z)$ 的割线取在 $(-\infty,0]$ 上，并选取主值分支 $-\pi < \arg(z) \le \pi$。选取如图所示围道，其中大圆弧的半径为 R，小圆弧的半径为 r。由留数定理在

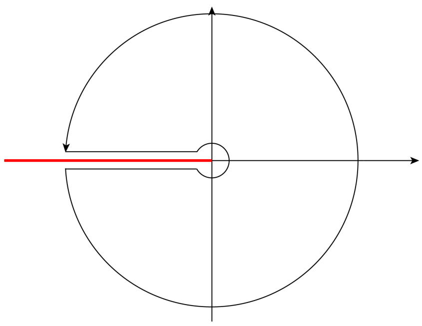

Figure 6.2: 带割线的围道积分

整个围道上的积分可以写为

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_m \mathrm{Res}(f, z_m) \tag{6.39}$$

被积函数的极点在 $e^{i\pi/2}$ 和 $e^{-i\pi/2}$，留数分别为

$$\frac{e^{i\pi/6}}{2i}, \qquad \frac{e^{-i\pi/6}}{-2i} \tag{6.40}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_C f(z)dz = 2\pi i\sin(\pi/6) = i\pi \tag{6.41}$$

另外有

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_C f(z)dz = \int_{\text{小圆弧}} f(z)dz + \int_{\text{大圆弧}} f(z)dz + \int_\infty^0 \frac{\rho^{1/3}e^{i\pi/3}}{1+\rho^2}e^{i\pi}d\rho + \int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}e^{-i\pi/3}}{1+\rho^2} \tag{6.42}$$

易知在大圆弧和小圆弧上的积分趋于零。因此

$$i\pi = (e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})\int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}}{1+\rho^2}d\rho \tag{6.43}$$

因此我们求得

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{1/3}}{1+\rho^2}d\rho = \frac{i\pi}{2\sin(\pi/3)i} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tag{6.44}$$

这个题目里更自然的是让割线取在 $[0,+\infty)$ 上。

例子 69 计算积分

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

我们要计算以下积分：

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

为了利用留数定理，我们将该实积分转化为复平面上的围道积分，并选择适当的多值函数分支和割线。考虑复变函数：

$$f(z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}},$$

其中 $\sqrt{z^2-1}$ 是一个多值函数，支点为 $z_a = -1$，$z_b = 1$。我们选择其单值分支，使得在割线 $[1,\infty)$ 的上岸，$z - z_a = \rho e^{i0_+}$，$z - z_b = \rho' e^{i0_+}$。

我们选取如下围道（称为“键孔围道”）6.3。

按照留数定理，各部分积分之和为：

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,0),$$

其中 $I_1,\cdots,I_4$ 是四段水平半直线积分，C_1 和 C_2 是两段小圆弧。容易看出当小圆弧半径 $\delta\to 0$ 时，$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = 0$。另外当大圆弧半径 $R\to\infty$ 时 $\int_{C_R} f(z)dz = 0$。

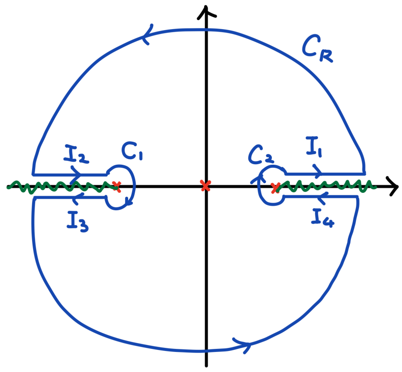

Figure 6.3: 键孔围道

在 I_1 上岸（$1 < x < R$），通过分析幅角，有：

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

因此 $I_1 = I$。

在 I_4 下岸（$1 < x < R$），有：

$$f(x) = \frac{1}{x(-\sqrt{x^2-1})}.$$

从而：

$$I_4 = \lim_{R\to\infty}\int_R^1 \frac{dx}{x(-\sqrt{x^2-1})} = I_1$$

类似的，在 I_2 上岸，作变量替换 $x = -t$，有

$$f(-t) = \frac{1}{(-t)(-\sqrt{t^2-1})}.$$

因此

$$I_2 = \int_{-R}^{-1} f(x)dx = \int_R^1 \frac{-dt}{(-t)(-\sqrt{t^2-1})} = I$$

类似的还有 $I_3 = I$。因此

$$4I = 2\pi i \mathrm{Res}(f,0)$$

而原点处的留数为

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}} = \frac{1}{\sqrt{(1\cdot e^{i0+})(1\cdot e^{i\pi})}} = \frac{1}{i} = -i$$

因此

$$I = \frac{\pi}{2}$$

例子 70 计算积分

$$I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+a^2)}dx$$

6.3.2 无穷级数求和

利用留数定理求和无穷级数的思想在于找到一个函数，使其留数与所求级数的每一项一一对应。这样求和留数就等于求和级数。而另一方面留数之和可通过围道积分得到。因此把无穷级数求和问题转化为围道积分问题。最常用的两个函数为

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,,\qquad \pi\cot(\pi z)$$

$\frac{(1-\frac{1}{2}\pi^2 z^2)}{z^2\ z\ (1-\frac{1}{6}\pi^2 z^2)}$

这两个函数在所有整数点上均有留数，分别为

$$\mathrm{Res}(\frac{\pi}{\sin(\pi z)},n)=(-1)^n\,,\qquad \mathrm{Res}(\pi\cot(\pi z),n)=1$$

$\frac{1}{z^3}(1-\frac{1}{2}\pi^2 z^2)(1+\frac{1}{6}\pi^2 z^2)$

$\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}$

例子 71 巴塞尔问题。求和级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

$\frac{1}{z^3}[-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}]\pi^2 z^2$

$\frac{\pi\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}$

$-\frac{\pi^2}{3z}$

$(1-2^{1-2})\zeta(2)$

我们考虑如下围道积分，

$$I=\lim_{k\to\infty}\int_{C_k}\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}dz \tag{6.45}$$

$a_{-1}=-\frac{\pi^2}{3}$

$\frac{1}{2}\zeta(2)$

其中围道取作连接如下四点的正定向矩形，

$$\pi(k+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\,,\quad \pi(-k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\,,\quad \pi(-k-\frac{1}{2},-k-\frac{1}{2})\,,\quad \pi(k+\frac{1}{2},-k-\frac{1}{2}) \tag{6.46}$$

。由留数定理我们有

$\frac{3}{(2n)^2}$ [

$$I=2\pi i\sum_m \mathrm{Res}(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2},z_m) \tag{6.47}$$

$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}=0$

其中留数取遍 C_k 所包裹区域内的奇点。注意到

$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+$ 5

$$\mathrm{Res}(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2},n)=\frac{1}{n^2}\,,\qquad n\neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(2n)^2}$

$$\mathrm{Res}(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2},0)=-\frac{\pi^2}{3}\,,\qquad n=0 \tag{6.48}$$

因此我们得到

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^2}$

$\frac{\pi}{\sin\pi z}\cdot\frac{1}{z^2}$ $\quad z=n$

$$I=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}\,. \tag{6.49}$$

$\frac{(z-n)\ \pi}{\sin\pi z\cdot z^2}\qquad \frac{1\ \pi}{\pi\cos\pi n\cdot z^2}=\boxed{\frac{(-)^n}{n^2}}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$

$\frac{\pi}{z^2\ \pi z\ (1-\frac{1}{6}\pi^2 z^2)}$

$\frac{1}{z^3}(1+\frac{1}{6}\pi^2 z^2)$

$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^2}+\frac{1}{6}\pi^2=0$