理论力学

赵鹏巍

内容回顾

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 正则变换
- 标度变换
- 四类生成函数的基本型

今日目标

- 无穷小正则变换
- 直接条件
- 辛几何
- 正则变换的两种“绘景”

无穷小正则变换

- 无穷小正则变换是一种正则变换，但其中*p*，*q* 的改变量非常小

$$Q_i = q_i + \delta q_i \qquad P_i = p_i + \delta p_i$$

$\delta q_i, \delta p_i$ 代表很小的改变量，非变分！！

- 无穷小正则变换与恒等变换非常接近

相应的生成函数应为 $F_2(q,P,t) = \boxed{q_iP_i} + \boxed{\varepsilon} G(q,P,t)$

恒等变换的生成元

很小！

查生成函数表

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

由于ε很小，保留到一级无限小

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \approx -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial Q_i}$$

无穷小正则变换的生成元

- 无穷小正则变换的生成函数为 $F_2(q,P,t)=q_iP_i+\varepsilon G(q,P,t)$

$$Q_i=q_i+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial P_i}\qquad P_i=p_i-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

- G 被称为无穷小正则变换的生成元

虽然这一称呼并不完全准确，
因为生成函数是 F!

由于正则变换是无穷小的，G 可以表示为 q 或 Q，以及 p 或 P 的函数。

例如： $G=G(q,p,t)$ $\qquad Q_i=q_i+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}\qquad P_i=p_i-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}$

哈密顿量

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

- 令 $G = H(q, p, t)$

$$\Rightarrow \quad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} = \varepsilon \dot{q}_i \qquad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = \varepsilon \dot{p}_i$$

- 这时，ε 事实上可以看作是无穷小时间 δt

$$\delta q_i = \dot{q}_i \delta t \qquad \delta p_i = \dot{p}_i \delta t$$

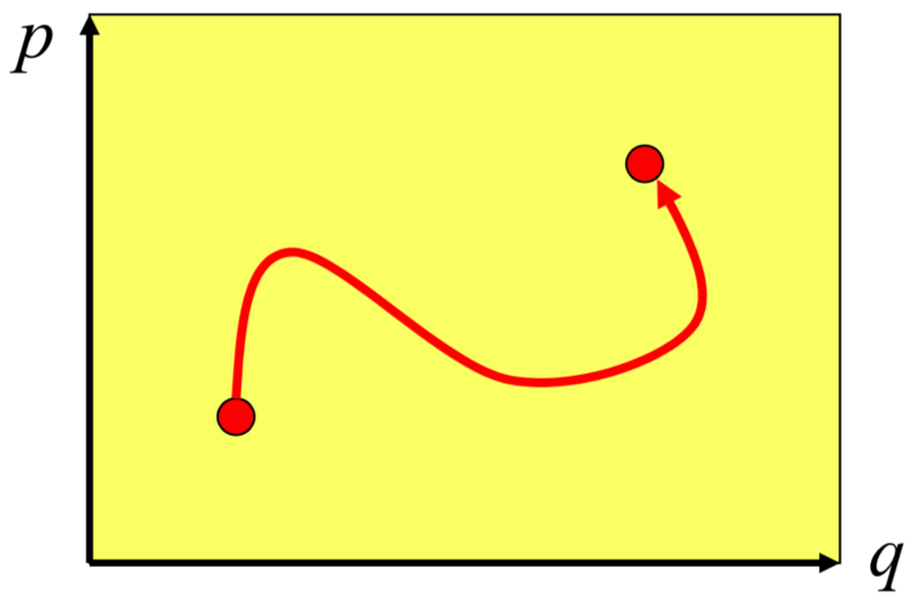
- 哈密顿量是系统随时间所做无穷小正则变换的生成元

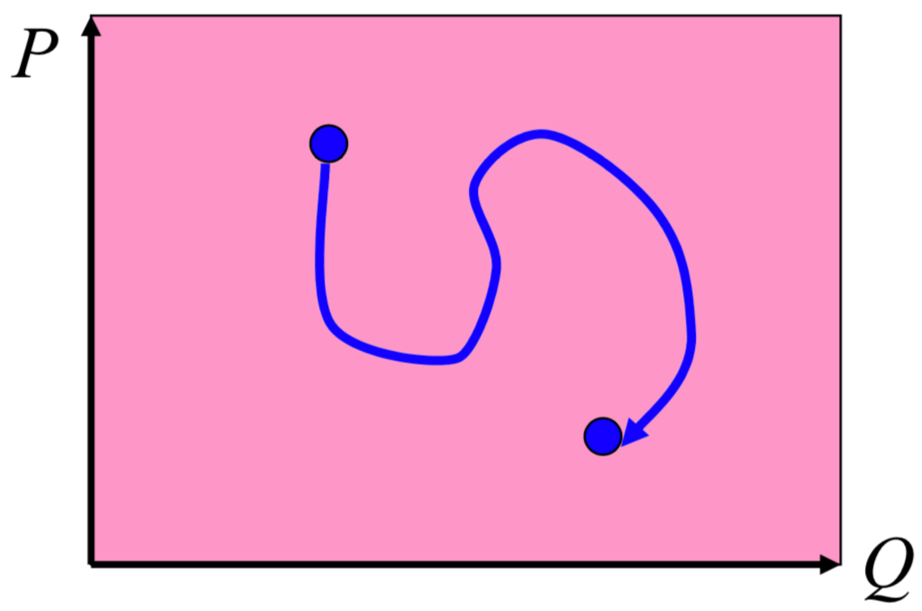
在量子力学中，哈密顿量表征时间演化的算符

两种绘景

- 正则变换允许我们利用多种“坐标/动量”来描述同一体系

  不同相空间中的同一系统





- 这是 “静态” 绘景 (static view)

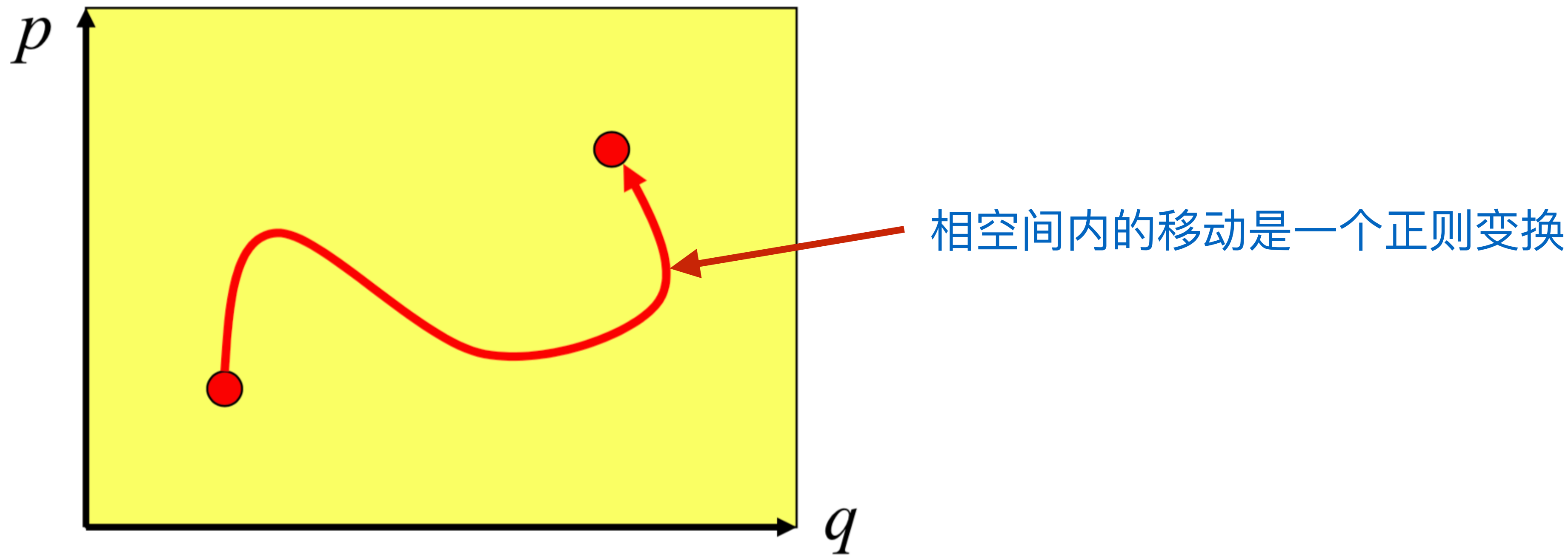
  体系本身没有发生变化

正则变换的“动态” 绘景 (dynamic view)

- 一个随时间演化的系统 $q(t_0), p(t_0)$ ➡ $q(t), p(t)$

  任一时刻，q 和 p 都满足哈密顿正则方程

  时间演化必须是一个正则变换



- “静态” 绘景：坐标系在变换，“被动”观点

  “动态” 绘景：物理系统在运动，“主动”观点

从正则方程出发构建正则变换

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 考虑一个受限正则变换，即生成函数不显含时间

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Rightarrow K(Q,P) = H(q,p)$$

哈密顿量不发生变化！

- Q 和 P 仅依赖于 q 和 p，而不依赖于t

$$Q_i = Q_i(q,p) \qquad P_i = P_i(q,p)$$

利用正则方程！

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

直接条件

- 另一方面，直接写出Q、P 满足的正则方程

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

正则变换的直接条件！

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

这里下标是为了提醒我们自变量是什么 …

直接条件

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

- 直接条件是一个时间无关的正则变换的充分必要条件！

  可以用来检验一个时间无关的变换是否正则！

- 事实上，对于所有的(包括含时的)正则变换，直接条件都是充分必要条件。　怎么证明呢？　(用到无穷小正则变换)

无穷小正则变换

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \approx -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial Q_i}$$

- 无穷小正则变换满足直接条件吗？试试！

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial (q_i + \delta q_i)}{\partial q_j} = \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial q_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial p_j}{\partial P_i} = \frac{\partial (P_j - \delta p_j)}{\partial P_i} = \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial q_j}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial (q_i + \delta q_i)}{\partial p_j} = \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial p_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial q_j}{\partial P_i} = \frac{\partial (Q_j - \delta q_j)}{\partial P_i} = -\varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial p_j}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = \frac{\partial (p_i + \delta p_i)}{\partial q_j} = -\varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial q_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial (P_j - \delta p_j)}{\partial Q_i} = \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial q_j}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial (p_i + \delta p_i)}{\partial p_j} = \delta_{ij} - \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial p_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial (Q_j - \delta q_j)}{\partial Q_i} = \delta_{ij} - \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial p_j}$$

满足！

连续正则变换

- 两个正则变换接连作用等价于一个正则变换

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} = p_i\dot{q}_i - H \quad + \quad Y_i\dot{X}_i - M + \frac{dF_2}{dt} = P_i\dot{Q}_i - K$$

$$\Rightarrow \quad Y_i\dot{X}_i - M + \frac{d(F_1+F_2)}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

对任意正则变换（包括含时的）均成立！

- 相应的直接条件也有类似规则，如

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \quad + \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial Q_j}\right)_{Q,P} = \left(\frac{\partial P_j}{\partial Y_i}\right)_{X,Y}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial Y_i}\right)_{X,Y}$$

这真的很容易证明！

非受限正则变换

- 现在，我们考虑一个一般的，含时的正则变换

$Q_i = Q_i(q,p,t)$　　$P_i = P_i(q,p,t)$　　$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$

- 这个变换可以分两步进行：

$$q,p \xrightarrow{\text{时间无关的正则变换}} Q(q,p,t_0),P(q,p,t_0) \xrightarrow{\text{时间依赖的正则变换}} Q(q,p,t),P(q,p,t)$$

固定时间

- 第一步是时间无关的，所以满足直接条件

现在，我们需要证明，第二步也满足直接条件。

非受限正则变换

- 我们关注一个只依赖于时间的正则变换 $Q(t_0), P(t_0)$ ➡ $Q(t), P(t)$

  将 t - t_0 分成许多无穷小的时间间隔 dt

  $Q(t_0), P(t_0)$ ➡ $Q(t_0+dt), P(t_0+dt)$ ➡➡➡ $Q(t), P(t)$

  每一步都是一个无穷小正则变换，所以满足直接条件

  从 $Q(t_0), P(t_0)$ 到 $Q(t), P(t)$ 的变换是随时间 t 连续演变的连续变换

  因此，可看成是由许多步长为dt 的无穷小正则变换相继进行所构成。

所有正则变换均满足直接条件，反之亦然！

正则方程的结构与直接条件

- 正则方程的**辛结构**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

为什么有一个负号呢?

- 从哈密顿原理来看，应该与辛势有关

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\boxed{p_i dq_i}}_{\text{辛势}} - H(q,p,t)dt = 0$$

- 辛势 Θ 是一个 1-形式, 其外微分是辛形式，也是一个2-形式，记为 ω

$$\Theta = p_i dq^i \qquad \omega = d\Theta = dp_i \wedge dq^i$$

流形上的微分形式

- 考虑一个二元函数的二重积分，坐标变换后要多乘一个雅可比行列式

$$A = \int\int f(x,y)dxdy = \int\int f(x,y)\left|M\right| dx'dy'$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix}$$

- 将积分元写为 $dx \wedge dy$，定义一种巧妙的外代数乘法 $\wedge$，即外积，满足

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

交换反对称!

- 显然，

$$dx \wedge dx = -dx \wedge dx = 0$$

$$dy \wedge dy = -dy \wedge dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \int f(x,y)dx \wedge dy$$

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\frac{\partial x}{\partial x'}dx' + \frac{\partial x}{\partial y'}dy') \wedge (\frac{\partial y}{\partial x'}dx' + \frac{\partial y}{\partial y'}dy') \\ &= \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}dx' \wedge dy' + \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'}dy' \wedge dx' \\ &= (\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'})dx' \wedge dy' \\ &= |M|\, dx' \wedge dy'. \end{aligned}$$

雅可比行列式!

k-形式

- 推广到 n 元函数的 n 重积分，实际上是对 n 重微分形式 ω 的积分。

$$A = \int f(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int \omega$$

简称 n-形式！

- 针对 n 个变量，推广n-形式的概念，可定义 k 重微分形式, 即 k-形式 α

$$\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} .$$

上下指标求和约定；α的k个指标能取1到n，且两两不同，代表α的一个分量；任何 $k > n$ 的k-形式都必定为零；α的k个指标两两交换反对称

2-形式

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

$$\alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j = \alpha_{ji} dx^i \wedge dx^j = -\alpha_{ji} dx^j \wedge dx^i = -\alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j = 0$$

关于i, j 对称的部分贡献为零，
只有反对称的部分有贡献

$$\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$$

三维空间中的微分形式

- 三维空间有 3 个变量，所以有 0-，1-，2-，3- 形式。

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

- 0-形式是一个三元标量函数 $f(x, y, z)$;

  由于反称性，3-形式只有一个独立的非零分量 $f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$

- 1-形式可以写成 $a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz = \boldsymbol{a}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{x}$

  3个独立分量恰好组成一个3维矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$

- 2-形式可以写成 $a = \frac{1}{2}a_{ij} dx^i \wedge dx^j = a_{12} dx \wedge dy + a_{23} dy \wedge dz + a_{31} dz \wedge dx$

  也只有3个独立非零分量，对应一个3维矢量场

  可与1-形式一一映射 0（叉乘）

- k-形式和 n-k形式之间的一一映射关系：霍奇（Hodge）对偶。

外微分

- 外微分是一种巧妙地将微分运算与外代数运算结合在一起的运算。
- 对于 n 维空间的一个 k-1 形式

$$\alpha = \frac{1}{(k-1)!}\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

可以定义其外微分为

$$d\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

- 显然，$d\alpha$ 是一个 k-形式，且满足

$$d^2\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\underline{\partial_i \partial_j} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} = 0$$

任何微分形式的两阶外微分为零!

斯托克斯公式

- 考虑2维空间的1-形式 $a = a_x dx + a_y dy$，其外微分为

$$da = da_x \wedge dx + da_y \wedge dy$$

$$d\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

- 具体地，

$$\begin{aligned} da &= da_x \wedge dx + da_y \wedge dy \\ &= (\partial_x a_x dx + \partial_y a_x dy) \wedge dx + (\partial_x a_y dx + \partial_y a_y dy) \wedge dy \\ &= \partial_y a_x dy \wedge dx + \partial_x a_y dx \wedge dy \\ &= (\partial_x a_y - \partial_y a_x) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

- 显然，da 只有一个分量，刚好是两维矢量 **a** 的旋度。

二维旋度定理：格林公式

闭合环路积分等于旋度的区域面积积分！

$$\oint_{\partial D} \left(a_x dx + a_y dy \right) = \int_D \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x \right) dx\, dy$$

斯托克斯公式:

可推广至 n维空间

$$\int_{\partial D} a = \int_D da$$

微分形式的语言理解保守力

- 保守力是一个1-形式，且是另一个微分形式（0-形式）的外微分

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i = -\,dV \qquad F_\mu dx^\mu = -\,dV(x^1,\ldots,x^{3N})$$

- 两阶外微分为零，可知

$$dF = 0 = (\partial_\mu F_\nu)dx^\mu \wedge dx^\nu = \left[\underline{\frac{1}{2}(\partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu)} + \cancel{\frac{1}{2}(\partial_\mu F_\nu + \partial_\nu F_\mu)}\right] dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

旋度为零

- 根据斯托克斯公式，

$$\int_{\partial D} F = \int_D dF = 0$$

保守力1-形式在坐标空间任何闭合回路上的积分都为零！

保守力做功与路径无关！

正则方程的辛结构

- 正则方程的**辛结构**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

为什么有一个负号呢?

- 从哈密顿原理来看，应该与辛势有关

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\boxed{p_i dq_i}}_{\text{辛势}} - H(q, p, t) dt = 0$$

- 辛势 Θ 是一个 1-形式, 其外微分是辛形式，也是一个2-形式，记为 ω

$$\Theta = p_i dq^i \qquad \omega = d\Theta = dp_i \wedge dq^i$$

交换 p, q 出一个负号!

有辛结构的相空间

- 将 q 和 p 集合在一个变量中：

$$\eta^j = q^j, \quad j = 1,\cdots,n,$$
$$\eta^j = p_{j-n}, \quad j = n+1,\cdots,2n\,.$$

$$\boldsymbol{\omega} = dp_a \wedge dq^a \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j$$

- 这时正则方程可写为： **一列 = 矩阵 * 一列**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{\eta}^j = \omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$\omega^{-1} = \{\omega_{jk}\} = -\omega = \omega^T$$

故，亦可表为

$$\omega_{jk}\dot{\eta}^k = \frac{\partial H}{\partial \eta^j},$$

正则变换作为相空间坐标变换

- 考虑一个正则变换 $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\xi}$

$$\dot{\eta}^j = \omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k},$$

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\dot{\eta}^j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\omega^{jk}\frac{\partial \xi^l}{\partial \eta^k}\frac{\partial H}{\partial \xi^l} = M^i{}_j\omega^{jk}(M^T)_k{}^l\frac{\partial H}{\partial \xi^l}$$

$$M^i{}_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}$$

$$\Rightarrow \quad M\omega M^T = \omega$$

验证：这实际上就是直接条件！

正则变换是一个保辛的坐标变换

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

正则变换作为相空间的微分同胚映射

- 微分同胚意味着微分流形之间可通过光滑函数建立一一映射。
- 正则变换是相空间映射到其自身的、保持辛结构的微分同胚。
- 考虑一个自同胚映射 g，将相空间的 $\boldsymbol{\eta}$ 点映射到 $\boldsymbol{\xi}$ 点

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j$$

保辛

$\omega' = \omega$

$$\boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$$

ω_{ij} 是常系数，不变

$$\boldsymbol{\omega}_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j = \boldsymbol{\omega}_{mn} d\xi^m \wedge d\xi^n = \boldsymbol{\omega}_{mn} \frac{\partial \xi^m}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^n}{\partial \eta^j} d\eta^i \wedge d\eta^j$$

$$\omega_{ij} = \boldsymbol{\omega}_{mn} \frac{\partial \xi^m}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^n}{\partial \eta^j}$$

这就是直接条件！

$$\omega^{ij} = \omega^{mn} \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^n}$$

总结

- 无穷小正则变换
- 直接条件
- 辛几何
- 正则变换的两种“绘景”