理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 泊松括号运动方程：守恒量
- 无穷小正则变换：连续对称性
- 哈密顿力学中的对称性与守恒律

$$0=\delta H=\varepsilon\left[H,G\right]-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}=\varepsilon\left(\left[H,G\right]-\frac{\partial G}{\partial t}\right)=-\varepsilon\frac{dG}{dt}=0$$

对称性 **守恒量**

对称性与守恒律：拉格朗日VS哈密顿

力学体系	变换空间	不变量	守恒量
拉格朗日力学	n 维位形空间	拉格朗日 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$	诺特荷
哈密顿力学	$2n$ 维相空间	哈密顿量 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$	生成元

- 所谓对称性是指力学性质在特定“变换”下保持“不变”
- 拉格朗日力学中，“变换”在 n 维位形空间中进行，“不变”由拉格朗日量体现，“守恒量”表示为诺特荷

$$\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},t), \quad \underline{\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}$$

点变换

$$\delta L = 0, \quad \text{or} \quad \delta L = \frac{dF(\boldsymbol{q},t)}{dt}$$

$\dot{Q}$ 显含 $\ddot{q}$, 对称性依赖于运动方程；动力学对称性；隐式对称性

- 哈密顿力学中，“变换”在 2n 维相空间中进行，“不变”由哈密顿量体现，“守恒量”表示为生成元

主动正则变换

$$\delta H = 0$$

开普勒问题：角动量守恒

$$C_m = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j$$

- 在拉格朗日力学中，拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- 空间旋转对应变换 (以绕 z 轴转动为例，其他轴类似)

$$\delta x = -\varepsilon y, \quad \delta y = \varepsilon x, \quad \delta z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta L = 0$$

空间旋转对称性！

- 根据诺特定理，对称性对应的**诺特荷守恒**

$$C_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} Q_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} Q_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} Q_z = -m\dot{x}y + m\dot{y}x = L_z$$

- 其他方向类似，对应 L_x, L_y 守恒。(**练习**)

开普勒问题：LRL矢量守恒

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- 考虑到角动量守恒，构造如下变换

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为无穷小常矢量　非点对称性！

- 引起的拉格朗日量的变化为

$$\delta L = m\dot{\boldsymbol{r}}\delta\dot{\boldsymbol{r}} - \frac{k}{r^2}\delta r = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{L}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \big((\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{r}\big)$$

$$\delta L = -\frac{mk}{r^3}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \big(r^2\dot{\boldsymbol{r}} - (\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}\big) = -mk\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

相差一个规范项 *dF/dt*

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{r}/r)}{dt} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\boldsymbol{r}}{r^2} = \frac{r^2\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3} - \frac{r\dot{r}\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$$

- 上述变换生成了体系的对称性！

动力学对称性！隐式对称性！

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}Q_j - F = \boldsymbol{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \boldsymbol{L}) + mk\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = -\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \big[(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) - mk\hat{\boldsymbol{r}}\big]$$

non–Noether invariant

不对应点对称性

运动轨迹

- LRL 矢量垂直于角动量，故必在轨道平面内。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{mk\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{L} = 0$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} &= Ar\cos\theta \\ &= \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) - mkr \\ &= \boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) - mkr \\ &= l^2 - mkr\end{aligned}$$

θ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角

$$Ar\cos\theta = l^2 - mkr$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \frac{A}{mk}\cos\theta\right)$$

A 为常数，圆锥曲线！

$$e = \frac{A}{mk} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{mk}$$

*LRL*矢量的大小与偏心率有关

运动轨迹

- LRL 矢量垂直于角动量，故必在轨道平面内。

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \left(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\frac{mk\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\frac{mk\boldsymbol{r}}{r}\right)\\
&= (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})+m^2k^2-\frac{2mk\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\\
&= p^2l^2+m^2k^2-\frac{2mk}{r}l^2\\
&= \left(2mE+\frac{2mk}{r}\right)l^2+m^2k^2-\frac{2mk}{r}l^2\\
&= m^2k^2+2mEl^2
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\frac{mk\boldsymbol{r}}{r}
$$

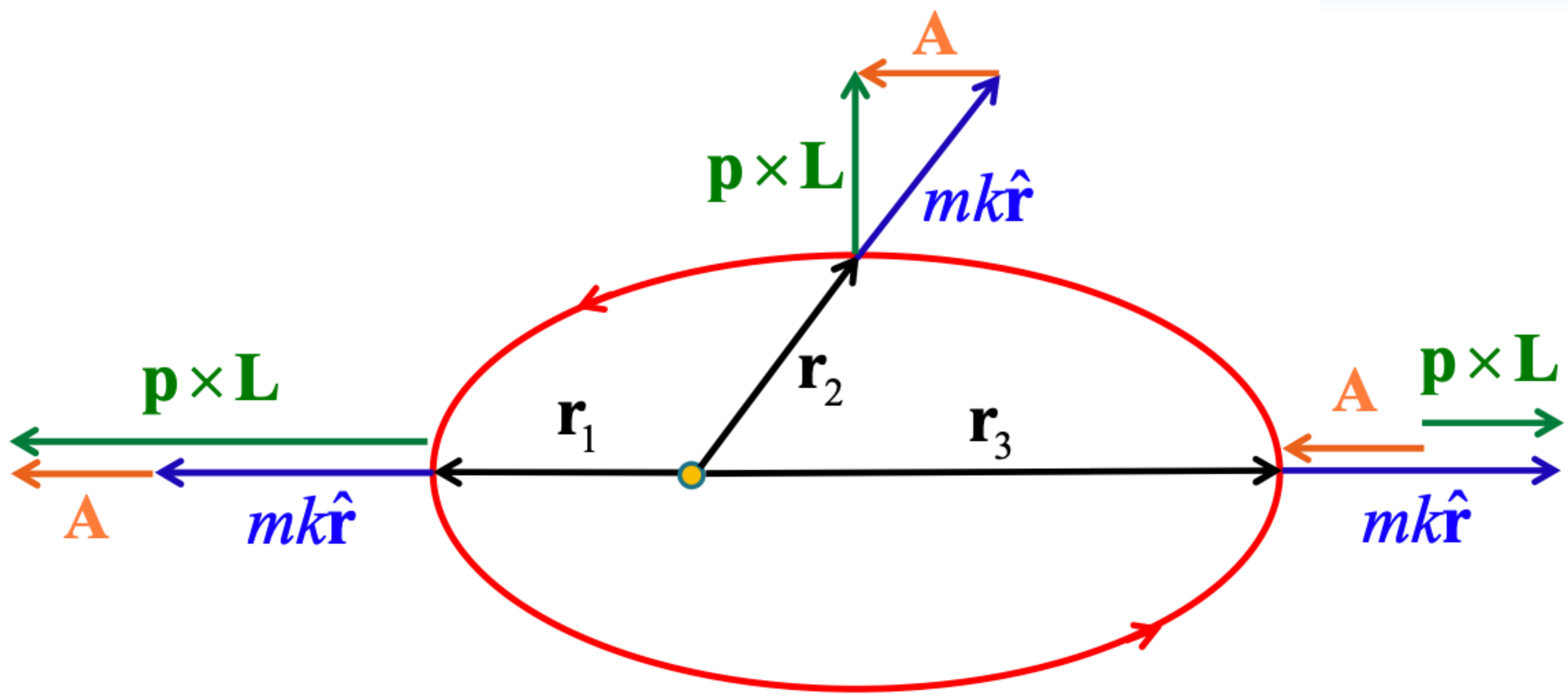
$$
H=\frac{p^2}{2m}-\frac{k}{r}
$$

$$
e=\frac{A}{mk}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{mk}=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}
$$

开普勒问题 E < 0， e < 1

LRL 矢量守恒

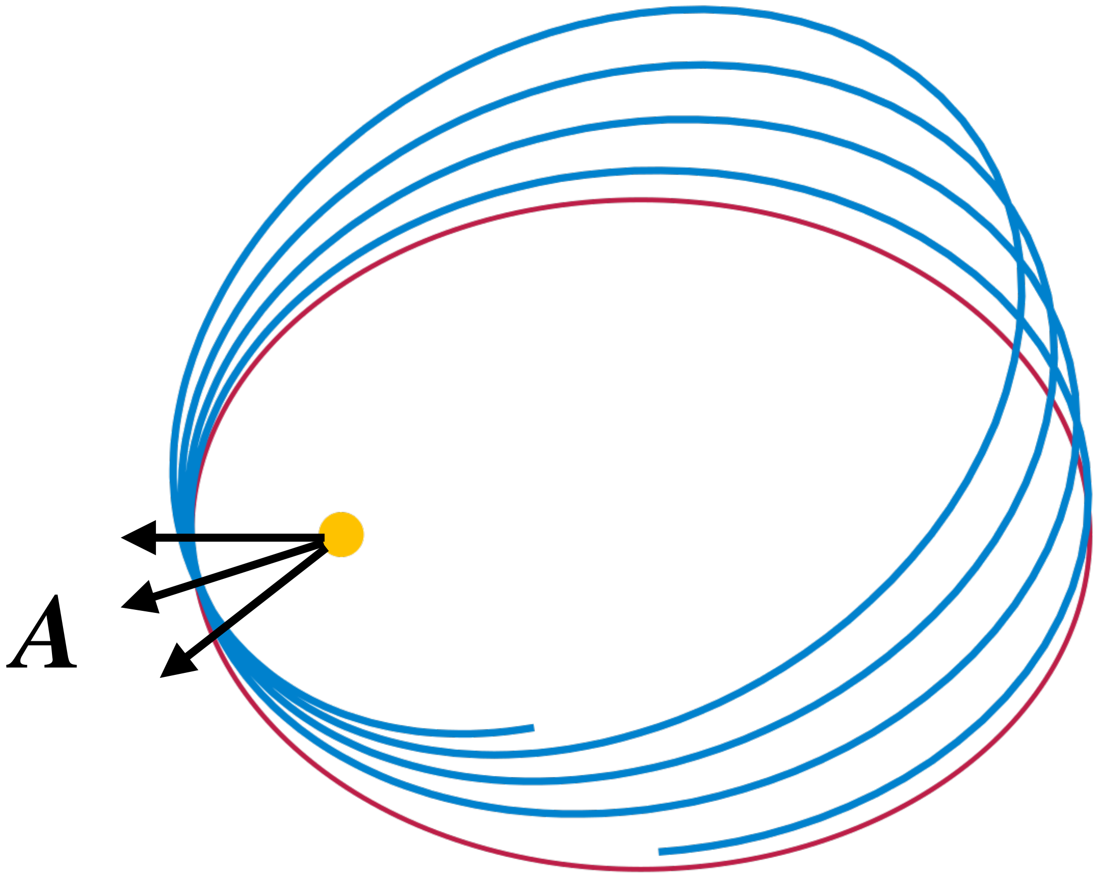
$$A = p \times L - \frac{mkr}{r}$$

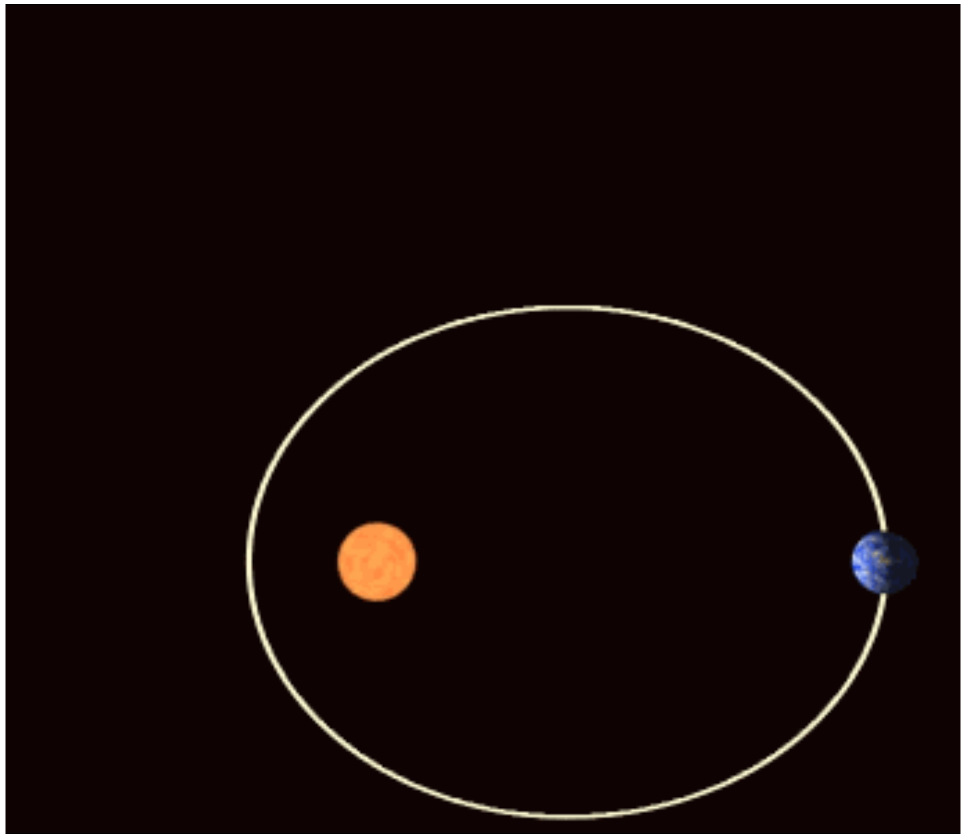


- LRL 矢量始终由力心指向近拱点方向 —〉 近拱点固定 —〉 有界轨道闭合

偏离平方反比力

- LRL 矢量不再守恒，近拱点移动 —〉轨道不再闭合　行星轨道的进动

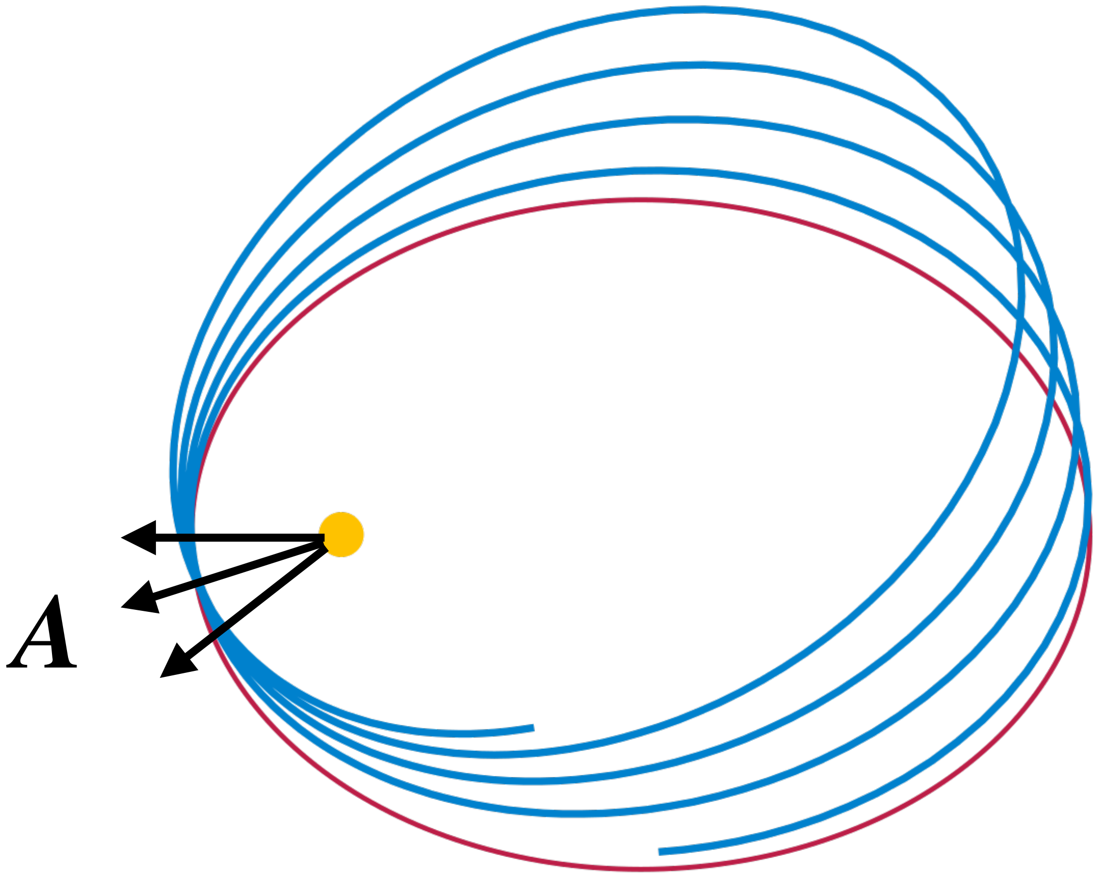


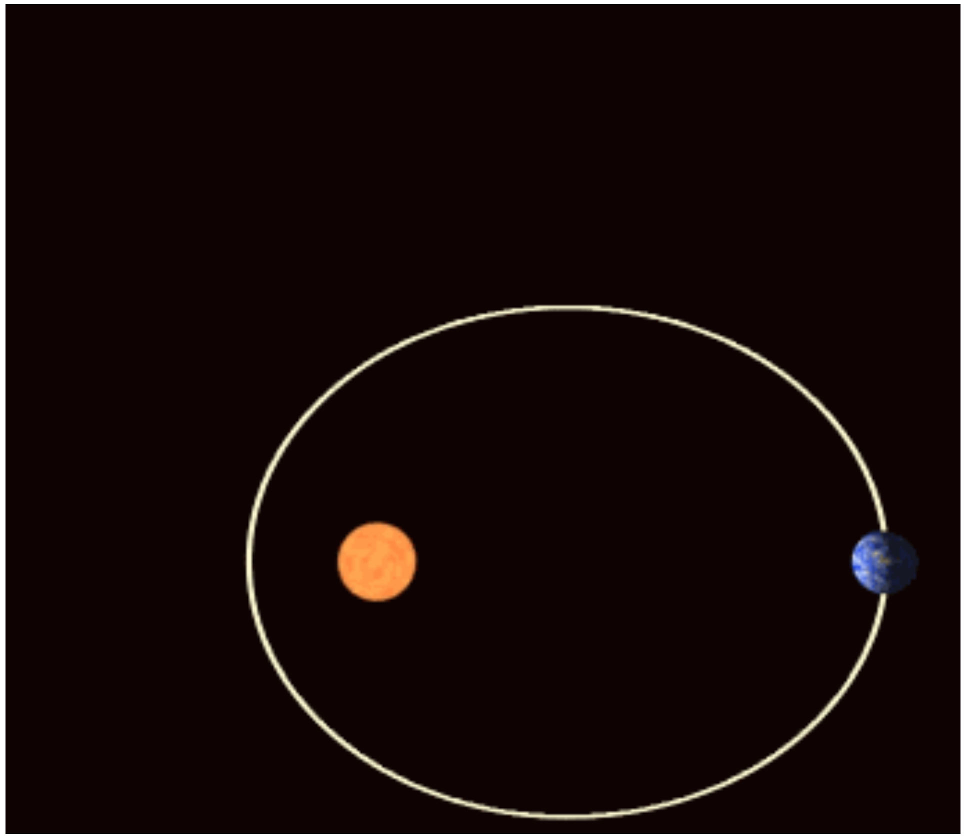


水星进动的解释：来自所有其他行星（大部分）以及广义相对论的修正（小部分）

偏离平方反比力

- LRL 矢量不再守恒，近拱点移动 —〉轨道不再闭合　行星轨道的进动





水星进动的解释：来自所有其他行星（大部分）以及广义相对论的修正（小部分）

开普勒问题：角动量守恒

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- 在哈密顿力学中，哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$\delta H = \varepsilon \left[H, G\right] - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

- 角动量与哈密顿量的泊松括号

$$[L_i, H] = [H, L_i] = 0$$

角动量守恒！　　空间旋转对称性！

- 鉴于角动量的重要性，我们展开分析角动量相关的泊松括号。

无穷小转动

$$\delta u = \varepsilon\left[u, G\right] + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t$$

- 转动的无穷小正则变换生成元为 $G = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}$

  我们之前已经学过无穷小转动

  将矢量 $\boldsymbol{r}$ 绕 $\boldsymbol{n}$ 轴转$d\theta$ 可得 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}d\theta\times\boldsymbol{r}$

  比较两式可得：

$$d\boldsymbol{r} = d\theta[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}d\theta\times\boldsymbol{r} \Rightarrow [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$$

此式对任意随系统转动的 $\boldsymbol{r}$ **均成立！**
非常有用的一个表达式！

标量积

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$$

- 考虑两矢量的标量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

  将之转动

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] &= \boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] + \boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] \\ &= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}) \\ &= 0\end{aligned}$$

  显然，转动不改变标量积；

  显然，转动也不改变任一矢量的长度

$$\delta u = \varepsilon\left[u, G\right] + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t$$

角动量

- 考虑角动量 $\boldsymbol{L}$ → $[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{L}$

$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$

各分量为

$[L_x, L_x] = 0$ $[L_x, L_y] = L_z$ $[L_x, L_z] = -L_y$

$[L_y, L_x] = -L_z$ $[L_y, L_y] = 0$ $[L_y, L_z] = L_x$

$[L_z, L_x] = L_y$ $[L_z, L_y] = -L_x$ $[L_z, L_z] = 0$

推导要注意“矢量 = 矢量”!

→ $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

三维转动群

这与量子力学中角动量的对易关系完全一致!

$[p_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} p_k$ $[x_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} x_k$ 练习证明

$$[p_i, L_j] = \varepsilon_{lmj}[p_i, x_l p_m] = \varepsilon_{lmj}[p_i, x_l]p_m = -\varepsilon_{lmj}\delta_{il}p_m = \varepsilon_{ijm}p_m$$

角动量

- 考虑两个守恒量 *A* 和 *B*

$$[A, H] = [B, H] = 0$$

[A, B] 如何随时间变化呢?

$$[[A, B], H] = -[[B, H], A] - [[H, A], B] = 0$$

推导用到 Jacobi 恒等式!

两个守恒量的泊松括号也是守恒量!

泊松定理

- 考虑 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

如果角动量 ***L*** 的两个分量是守恒的，则第三个分量必然也守恒

—〉 总角动量 ***L*** 是守恒的!

角动量

- 回想一下基本泊松括号

$$[q_i, q_j] = \underline{[p_i, p_j]} = 0 \qquad [q_i, p_j] = -[p_i, q_j] = \delta_{ij}$$

两个正则动量的泊松括号始终为零

现在，我们有 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

角动量 ***L***的任意两个分量之间的泊松括号均是非零的

角动量三个分量之中只有一个分量可作为正则动量!

或者说 角动量任意两个分量都不可能同时作为正则变量!

- 然而，注意到 $\overset{\text{标量积}}{[L^2, L_i] = 0}$ ，故 |*L*| 可以为正则变量，或者说 ***L*** 的任何一个分量及其量值 *L* 可同时选作正则变量。

- 量子力学中，可以同时测量|*L*|和如L_z, 但不能同时测量L_x和 L_y!

共同本征态!

开普勒问题的守恒量

- 哈密顿量

$$H=\frac{p^2}{2m}-\frac{k}{r}$$

$$[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}]=0$$

- 角动量守恒

$$[\boldsymbol{L},H]=0$$

$$[V(r),\boldsymbol{L}]=0$$

转动不影响径向函数

- 分析如下变换，易知其不满足正则变换

$$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}$$

$$[\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}']=[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}]+[\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{L},\boldsymbol{p}]=[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}]+\boldsymbol{\varepsilon}\times[\boldsymbol{L},\boldsymbol{p}]+[\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{p}]\times\boldsymbol{L}\neq[\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}]$$

- 哈密顿力学中可用无穷小正则变换生成正则变换

需要给出一个生成元 G

$$\delta q_i=\varepsilon\left[q_i,G\right]$$

$$\delta p_i=\varepsilon\left[p_i,G\right]$$

开普勒问题的守恒量

- 分析 LRL 矢量，取其为生成元，易得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\frac{mk\boldsymbol{r}}{r}$$

$$H=\frac{p^2}{2m}-\frac{k}{r}$$

$$[\boldsymbol{L},H]=0$$

$$\begin{aligned}
[A_k,H] &= \left[\varepsilon_{ijk}p_iL_j-\frac{mkx_k}{r},H\right]\\
&= \varepsilon_{ijk}\left[p_iL_j,H\right]-mk\left[\frac{x_k}{r},H\right]\\
&= \varepsilon_{ijk}\left[p_i,H\right]L_j-mk\left[\frac{x_k}{r},H\right]\\
&= -k\varepsilon_{ijk}\left[p_i,\frac{1}{r}\right]L_j-\frac{k}{2}\left[\frac{x_k}{r},p_ip_i\right]\\
&= -k\varepsilon_{ijk}\left[p_i,\frac{1}{r}\right]L_j-k\left[\frac{x_k}{r},p_i\right]p_i\\
&= k\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{lmj}\frac{x_i}{r^3}x_lp_m+k\left(\frac{x_ix_k}{r^3}-\frac{1}{r}\delta_{ik}\right)p_i\\
&= k\left(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl}\right)\frac{x_i}{r^3}x_lp_m+k\left(\frac{x_ix_k}{r^3}-\frac{1}{r}\delta_{ik}\right)p_i\\
&= k\left(\cancel{\frac{x_ix_i}{r^3}p_k}-\cancel{\frac{x_ix_k}{r^3}p_i}\right)+k\left(\cancel{\frac{x_ix_k}{r^3}p_i}-\cancel{\frac{1}{r}p_k}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\left[p_i,\frac{1}{r}\right]=-\frac{\partial(r^{-1})}{\partial x_i}=r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r^3}$$

$$\left[p_i,\frac{x_k}{r}\right]=\left[p_i,\frac{1}{r}\right]x_k+\left[p_i,x_k\right]\frac{1}{r}=\frac{x_ix_k}{r^3}-\frac{1}{r}\delta_{ik}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

$$[\boldsymbol{A},H]=0$$

LRL 矢量守恒

开普勒问题的对称性

- LRL矢量守恒和角动量守恒可以统一用正则变换给出

- 这时，我们还可以通过计算泊松括号来理解体系的对称性

由 $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$　　易证 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}L_k$　　$[A_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}A_k$

练习证明 $[A_i, A_j] = -2mE\varepsilon_{ijk}L_k$

$$\begin{aligned}\left[A_i, A_j\right] &= \left[X_i - Y_i, X_j - Y_j\right] \\ &= \boxed{\left[X_i, X_j\right]} - \boxed{\left[X_i, Y_j\right] - \left[Y_i, X_j\right]}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \frac{mk\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$$

龙格楞次矢量变换的生成函数不属于基本型，事实上也不是点变换。

只有在扩展的相空间才可能将之写为点变换。

LRL 矢量的泊松括号

$$\left[A_i, A_j\right] = \left[X_i - Y_i, X_j - Y_j\right]$$
$$= \boxed{\left[X_i, X_j\right]} - \left[X_i, Y_j\right] - \left[Y_i, X_j\right]$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{mk\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$$

$$[X_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} X_k$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\left[X_i, X_j\right] = \varepsilon_{lmj}\left[X_i, p_l L_m\right]$$
$$= \varepsilon_{lmj}\left(p_l\left[X_i, L_m\right] + \left[X_i, p_l\right] L_m\right)$$
$$= \varepsilon_{lmj}\left(p_l \varepsilon_{imn} X_n + (\delta_{il} p^2 - p_i p_l) L_m\right)$$
$$= \varepsilon_{ljm}\varepsilon_{inm} p_l X_n + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - \varepsilon_{lmj} p_i p_l L_m$$
$$= (\delta_{li}\delta_{jn} - \delta_{ln}\delta_{ji}) p_l X_n + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - \varepsilon_{lmj} p_i p_l L_m$$
$$= p_i X_j - \delta_{ji} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{X} + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - \varepsilon_{lmj} p_i p_l L_m$$
$$= p_i X_j + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - p_i X_j$$
$$= -\varepsilon_{ijm} p^2 L_m$$

$$\left[X_i, p_j\right] = \varepsilon_{lmi}\left[p_l L_m, p_j\right]$$
$$= \varepsilon_{lmi} p_l \left[L_m, p_j\right]$$
$$= \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkm} p_l p_k$$
$$= \delta_{ij}\delta_{lk} p_l p_k - \delta_{ik}\delta_{lj} p_l p_k$$
$$= \delta_{ij} p^2 - p_i p_j$$

LRL 矢量的泊松括号

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{mk\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$$

$$[L_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k$$

$$\left[p_i, \frac{x_k}{r}\right] = \left[p_i, \frac{1}{r}\right] x_k + [p_i, x_k] \frac{1}{r} = \frac{x_i x_k}{r^3} - \frac{1}{r}\delta_{ik}$$

$$\begin{aligned}
\left[A_i, A_j\right] &= \left[X_i - Y_i, X_j - Y_j\right] \\
&= \left[X_i, X_j\right] - \boxed{\left[X_i, Y_j\right] - \left[Y_i, X_j\right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[X_i, Y_j\right] + \left[Y_i, X_j\right] = \varepsilon_{lmi}\left[p_l L_m, Y_j\right] + \varepsilon_{lmj}\left[Y_i, p_l L_m\right] \\
&= \varepsilon_{lmi}\varepsilon_{mjk} Y_k p_l + \varepsilon_{lmi}\left[p_l, Y_j\right] L_m - (i \leftrightarrow j) \\
&= (\delta_{lk}\delta_{ij} - \delta_{lj}\delta_{ik}) Y_k p_l + mk\varepsilon_{lmi}\left(\frac{x_l x_j}{r^3} - \frac{1}{r}\delta_{lj}\right) L_m - (i \leftrightarrow j) \\
&= \delta_{ij} Y_k p_k - Y_i p_j + mk\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{osm}\frac{x_l x_j}{r^3} x_o p_s - mk\varepsilon_{ijm}\frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\
&= \delta_{ij} Y_k p_k - Y_i p_j + mk(\delta_{io}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{lo})\frac{x_l x_j}{r^3} x_o p_s - mk\varepsilon_{ijm}\frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\
&= \delta_{ij} Y_k p_k - Y_i p_j + mk\frac{x_l x_j}{r^3} x_i p_l - mk\frac{x_l x_j}{r^3} x_l p_i - mk\varepsilon_{ijm}\frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\
&= \cancel{\delta_{ij} Y_k p_k} - \cancel{Y_i p_j} + \cancel{mk\frac{x_l x_j}{r^3} x_i p_l} - \cancel{Y_j p_i} - mk\varepsilon_{ijm}\frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\
&= -2mk\varepsilon_{ijm}\frac{1}{r} L_m
\end{aligned}$$

LRL 矢量的泊松括号

$$
\begin{aligned}
\left[A_i, A_j\right] &= \left[X_i - Y_i, X_j - Y_j\right] \\
&= \left[X_i, X_j\right] - \left[X_i, Y_j\right] - \left[Y_i, X_j\right] \\
&= -\varepsilon_{ijm} p^2 L_m + 2mk\varepsilon_{ijm}\frac{1}{r}L_m \\
&= \boxed{-\varepsilon_{ijm}\left(p^2 - \frac{2mk}{r}\right)L_m}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \frac{mk\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}
$$

$$
\left[X_i, X_j\right] = -\varepsilon_{ijm} p^2 L_m
$$

$$
\left[X_i, Y_j\right] + \left[Y_i, X_j\right] = -2mk\varepsilon_{ijm}\frac{1}{r}L_m
$$

$$
\begin{aligned}
\left[D_i, D_j\right] &= -\varepsilon_{ijm} L_m \left(p^2 - \frac{2mk}{r}\right)\frac{1}{2m|E|} \\
&= -\varepsilon_{ijm} L_m \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}\right)\frac{1}{|E|} \\
&= -\varepsilon_{ijm} L_m \frac{E}{|E|}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{2m|E|}}
$$

$E < 0$ → $[D_i, D_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

$E > 0$ → $[D_i, D_j] = -\varepsilon_{ijk} L_k$

开普勒问题的对称性

- LRL矢量守恒和角动量守恒可以统一用正则变换给出
- 这时，我们还可以通过计算泊松括号来理解体系的对称性

由 $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$

易证 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}L_k$ $[A_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}A_k$

练习证明 $[A_i, A_j] = -2mE\varepsilon_{ijk}L_k$

- 角动量 L 的泊松括号，形成封闭的代数，LRL矢量自身不封闭，但与角动量 L 一起构成一个封闭的代数。

龙格楞次矢量变换的生成函数不属于基本型，事实上也不是点变换。
只有在扩展的相空间才可能将之写为点变换。

对称性与守恒律

- 对称性对应守恒量，守恒量也对应对称性。
- 在有心力系统中，三维空间旋转对称性 对应角动量守恒。
- 所有三维空间旋转操作构成一个对称群SO(3)，保持三维向量的长度不变。
- 其生成元为角动量，其各分量满足代数 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$
- LRL矢量守恒呢?

对称性与守恒律

- LRL矢量守恒 只对平方反比力系统成立，这意味着该系统满足更高的对称性。
- 事实上，LRL矢量守恒对应四维空间的旋转对称性。在束缚系统中，对应对称群SO(4)，保持欧氏四维向量的长度不变。定义 LRL矢量 $\boldsymbol{D}$，可得SO(4)的生成元，满足代数

练习证明

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k \qquad [D_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} D_k \qquad [D_i, D_j] = \varepsilon_{ijk} L_k \qquad \boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{2m|E|}}$$

- 对于非束缚系统，对应对称群SO(1, 3)，保持闵氏四维向量的长度不变。

练习证明 $$[D_i, D_j] = -\varepsilon_{ijk} L_k$$ 与洛仑兹群相同，但与相对论无关！！

- 这些对称群是六维相空间内保持哈密顿量不变的正则变换组成的群。

对称性与守恒律

- 对于束缚轨道，将角动量与LRL矢量线性组合，可得

$$\boldsymbol{A}^{\pm} = \frac{\boldsymbol{L} \pm \boldsymbol{D}}{2}$$

$$[D_i, D_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[D_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} D_k$$

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

- 相应的泊松括号为

$$\left[A_i^{\pm}, A_j^{\pm}\right] = \varepsilon_{ijk} A_k^{\pm} \qquad \left[A_i^{+}, A_j^{-}\right] = 0$$

类似角动量 L 的SO(3) 代数

- 很明显，这是两个独立的SO(3)代数，组合在一起，对应SO(4)群。

- 四维转动对称性在三维空间中不易理解，但容易在六维相空间中理解。

$\boldsymbol{A}^{\pm}$ 构成了 SO(4) 群在六维相空间中的四维表示。

$$\left[A_i^{+}, A_j^{-}\right] = \frac{1}{4}\left(\left[L_i, L_j\right] - \left[L_i, D_j\right] + \left[D_i, L_j\right] - \left[D_i, D_j\right]\right) = 0$$

$$\left[A_i^{\pm}, A_j^{\pm}\right] = \frac{1}{4}\left(\left[L_i, L_j\right] \pm \left[L_i, D_j\right] \pm \left[D_i, L_j\right] + \left[D_i, D_j\right]\right) = \frac{1}{4}\left(2\varepsilon_{ijk} L_k \pm 2\varepsilon_{ijk} D_k\right) = \varepsilon_{ijk} A_k^{\pm}$$

运动常数

- 开普勒问题有三个自由度，在六维相空间中，最多只能有 5 个运动常数。
- 我们已有 角动量守恒，LRL矢量守恒，能量守恒，共7个运动常数。
- 显然，这个7个常数不是完全独立的。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}=0 \qquad A^2=m^2k^2+2mEl^2$$

- 考虑以上两个条件，我们有 5 个独立的运动常数。
- 一个 n 自由度系统，最多有 2n-1 个运动常数，称为最大可积系统；可得到 n 个独立运动常数，则称为可积系统（这个名称并不是完全贴切，**不一定真“可积”**）。
- 开普勒系统是最大可积系统。

总结

- 开普勒问题的守恒量
- 开普勒问题的对称性
- 力学系统的对称群