数学物理方法(二)

第七章 特殊函数

---

1 Γ函数

Def Γ函数(积分表达式): $\mathrm{Re}z>0$时, 定义

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

> t^{z-1}当z不是整数时是t的多值函数, 这时应理解为$\arg t=0$.

- 积分表达式在右半平面$\mathrm{Re}z>0$代表z的一个解析函数
- Γ函数的解析延拓: 积分拆为

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

第二部分由$\mathrm{e}^{-t}<\frac{N!}{t^N}$, N可以任意大, 故在$\mathbb{C}$上闭一致收敛, 因此在全平面解析. 对第一部分

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} \quad (\mathrm{Re}z>0)
\end{aligned}
$$

右侧除去一阶极点$z=0,-1,-2\cdots$外收敛且解析，是左端积分表达式的解析延拓，则

$$
\Gamma(z)=\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}
$$

在全平面除极点外解析.

- $$
\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)
$$
$$
\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad \Longrightarrow \quad \Gamma(n+1)=n!
$$

- **互余宗量定理**

$$
\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}
$$

Cor 全平面无零点
proof $\Gamma(z_0)=0\Rightarrow\Gamma(1-z_0)=\infty$, 故$1-z_0=-n,n\in\mathbb{N}$, 这时$z_0=n!\neq 0$.

- **String公式(渐进行为)**
$|z|\to\infty,|\arg z|<\pi$时

$$
\begin{gathered}
\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi} \\
\ln\Gamma(z)\sim(z-\frac{1}{2})\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi \\
\ln n!=\ln\Gamma(n+1)\sim n\ln n-n
\end{gathered}
$$

proof 最陡下降法得到Γ函数的渐进展开(考虑实函数情形)

$$
\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^x\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-t+x\ln t}\mathrm{d}t,\quad x>0
$$

令$t=xu$:

$$
\Gamma(x+1)=x^{x+1}\int_0^{\infty}e^{-x(u-\ln u)}\,\mathrm{d}u
$$

被积函数的指数部分$f(u)=u-\ln u$在 $u=1$处取得极小值. 在$u=1$附近对$f(u)$作Taylor展开:

$$
f(u)\approx 1+\frac{(u-1)^2}{2}+\cdots.
$$

因此, 积分的主要贡献来自$u=1$附近的区间($x\to\infty$时为窄区间). 将积分近似为高斯积分:

$$
\Gamma(x+1)\approx x^{x+1}e^{-x}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{2}(u-1)^2}\,\mathrm{d}u
$$

对$x\to\infty$, 积分限可扩展至$(-\infty,\infty)$, 并利用高斯积分公式:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x}{2}(u-1)^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2\pi}{x}}
$$

于是得到$\Gamma(x+1)$的渐近表达式:

$$
\Gamma(x+1)\approx x^{x+1}e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}=x^xe^{-x}\sqrt{2\pi x}
$$

$\Gamma(x)$ 的渐近展开为:

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\approx x^{x-1/2}e^{-x}\sqrt{2\pi}$$

- **倍乘公式**

  $$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

  proof 考虑

  $$g(z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2z)}$$

  容易由Γ函数的性质证明$g(z+1)=g(z)$. 由string公式得到

  $$g(z)=\lim_{n\to\infty}g(z+n)=1$$

- **Gauss乘积公式**

  $$\begin{aligned}&\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})\Gamma(z+\frac{2}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n})\\&=(2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nz}\Gamma(nz)\end{aligned}$$

Γ函数的围道积分表达式

$$\Gamma\left(z\right)=-\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\pi z}\int_{C_1}\mathrm{e}^{-t}(-t)^{z-1}\mathrm{d}t,\quad |\arg(-t)|<\pi$$
$$\frac{1}{\Gamma\left(z\right)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\mathrm{e}^{t}t^{-z}\mathrm{d}t,\quad |\arg t|<\pi$$

积分围道分别绕正半轴割线和负半轴割线以及原点.

Γ函数的无穷乘积表达式

1. Euler乘积

   $$\Gamma\left(z\right)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\}$$

   对$z=-1,-2$之外的点成立

2. Weiestrass乘积

   $$\frac{1}{\Gamma\left(z\right)}=z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}\right]$$

   γ为Euler常数.

---

2 ψ函数

Def ψ函数

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$z=0,-1,-2,\cdots$是$\psi(z)$的一阶极点, 留数均为; 除了这些点以外, $\psi(z)$在全平面解析.

- 递推关系

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z},$$
$$\psi(z+n)=\psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1},\quad n=2,3,\cdots$$

互余宗量关系

$$\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z$$

相反宗量关系

$$\psi(z)-\psi(-z)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z$$

渐进行为

$$\psi(z)\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}-\frac{1}{252z^6}+\cdots,\quad z\to\infty,|\arg z|<\pi$$

倍乘关系

$$\psi(2z)=\frac{1}{2}\psi(z)+\frac{1}{2}\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+\ln 2$$

极限性质

$$\lim_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0$$

- 利用$\psi(z+n)$的递推关系和其极限性质可以得到$\psi(z)$的极限表达式

$$\psi(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}\right)\right]$$

特别地, $-\psi(1)$被称为Euler常数γ. $\psi(z)$可用于求裂项形式为$\frac{1}{a+n}$形式的级数和.

- 根据$\psi(z+n)$的递推关系和$\psi(z)$的渐进行为得到

$$\psi(z)-\psi(1)=\psi(z+N+1)-\psi(N+2)-\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{1+k}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{1+k}\right)$$

设 $z=p/q, p,q$ 为正整数, $0<p<q$. 则

$$\psi(p/q)-\psi(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{q}{p+nq}\right)$$

由Abel第二定理

$$\psi(p/q)-\psi(1)=\lim_{t\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{q}{p+nq}\right)t^{p+nq}\equiv\lim_{t\to 1^-}s(t)$$

利用Simpson’s dissection和$-\ln(1-t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}$, 设$\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{q}}$, 可以求得级数和

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi p}{q}\right)-\ln q+\sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi kp}{q}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3,\quad\psi\left(\frac{2}{3}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}-3\ln 2,\quad\psi\left(\frac{3}{4}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2}-3\ln 2$$

- 导数性质:
  由递推性质求导

$$
\begin{aligned}
&\psi'(z+1)=\psi'(z)-\frac{1}{z^2}\\
&\psi'(z+n)=\psi'(z)-\left[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+n-1)^2}\right],\quad n=2,3,\cdots
\end{aligned}
$$

  由极限表达式求导

$$\psi'(z)=\left[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+n-1)^2}+\cdots\right]$$

  对比得到

$$\lim_{n\to\infty}\psi'(z+n)=0.$$

  互余宗量关系求导并令$z=\frac{1}{2}$得到

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

  倍乘关系求导并令$z=\frac{1}{2}$得到

$$\psi'(1)=\frac{1}{3}\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

  $\psi'(z)$可用于求裂项形式为$\frac{1}{(a+n)^2}$形式的级数和.

ψ函数的积分表达式

$$\psi(z)=-\gamma+\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t$$

proof

$$
\begin{aligned}
\psi(z)&=-\frac{1}{z}+\lim_{m\to\infty}\left(\ln m-\sum_{n=1}^m\frac{1}{z+n}\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^\infty(e^{-t}-e^{-mt})\frac{\mathrm{d}t}{t}-\sum_{n=0}^m\int_0^\infty e^{-(z+n)t}\mathrm{d}t\right\}\\
&=\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}-e^{-mt}\left[\frac{1}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}+e^{-zt}\right]\right\}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$\gamma=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right\}e^{-t}\mathrm{d}t$, 故$\psi(z)=-\gamma+\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t$.

ψ函数的渐进展开式

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}\quad\Longrightarrow\quad\frac{t}{1-e^{-t}}=1+\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}$$

代入$\psi(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\}\mathrm{d}t(\mathrm{Re}z>0)$, 得到

$$\psi(z)\sim\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{t}-\frac{1}{2}e^{-zt}\right\}\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{(2k)!}\int_0^\infty t^{2k-1}e^{-zt}\mathrm{d}t$$

$$\psi(z)\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^\infty\frac{B_{2k}}{2k}z^{-2k},\quad|\arg z|<\pi$$

3 B函数

Def 在$\mathrm{Re}\,p>0,\mathrm{Re}\,q>0$时定义

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$$

令$t=\sin^2\theta$, 还可以得到B函数的另一个表达式

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta$$

- 显然的对称性$B(p,q)=B(q,p)$
- B函数可以用Γ函数表示出来

  $$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

  从而把B函数延拓到p和q的全平面.
  可以通过这一表达式得到Γ函数的互余宗量定理, 以及倍乘公式的另证
  proof 对于$\Gamma(p)$, 令$t=x^2$, $\Gamma(q)$同理

  $$\Gamma(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x$$
  $$\Gamma(q)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{q-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}x$$
  $$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\sin\theta)^{2p-1}(r\cos\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\cos^{2q-1}\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\end{aligned}$$

  proof (互余宗量定理)

  $$B(z,1-z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}=\Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

  $1>\mathrm{Re}z>0$时

  $$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t$$

  令$x=\frac{t}{1-t}$

  $$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

4 ζ函数

> **Def** 素数计数函数
>
> $$\pi(x)=\#\{p\le x\mid p\text{ 是素数}\}$$
>
> **Thm** 素数定理

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$$

- 一种更好的近似是$\mathrm{li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$.

Def von Mangoldt Function: 对$n\geq 1, n\in\mathbb{Z}$

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p & \text{若}n=p^k\text{ 对于某个素数}p\text{ 和整数}k\geq 1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

Def Second Chebyshev Function

$$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\sum_{p^k\leq x}\ln p$$

Def Riemann ζ 函数(初始定义为Dirichlet级数的收敛部分)

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad Re(s)>1$$

- **Euler乘积公式**

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},\quad Re(s)>1$$
$$\Longrightarrow \ln\zeta(s)=-\sum_{p\in\mathbb{P}}\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

可以归纳证明$\left(\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)\zeta(s)=1$, 每一次相乘都移除了含因子$p$的项; 以及

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

和von Mangoldt Explicit Formula(对$x>1$且不是素数幂)

$$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=x-\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho}-\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(1-x^{-2})$$

其中$\sum_\rho$遍历$\zeta(s)$的所有非平凡零点, 通常$\rho,\bar{\rho}$成对并按$|\mathrm{Im}(\rho)|$递增的顺序排列, 最后一项与平凡零点有关.

- 解析延拓后的ζ函数对$s\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$满足函数方程

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

令完备zeta函数$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$, 有对称的函数方程

$$\xi(s)=\xi(1-s)$$

- **ζ函数的零点**
    1. Trivial zeros: $s=-2,-4,-6,\cdots$
    2. Non-trivial zeros: in the critical strip($0<\mathrm{Re}(s)<1$)
        - $\mathrm{Re}(s)>1$, 无零点; $\mathrm{Re}(s)=1$, 无零点(后者等价于素数定理)
        - 关于实轴和critical line($\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$)对称

Prop The Riemann Hypothesis: $\zeta(s)$的所有非平凡零点位于critical line上.

第八章 $\text{Fourier Transformation}$和$\delta$函数

1 Fourier级数

Def Fourier级数分解

对实数域内的周期函数$f(x)$, 不妨设$f(x)=f(x+2\pi)$, 若在一个周期内只有有限极值和不连续点, 则可以写成无穷级数的形式

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\mathrm{i}nx},\qquad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x$$

在x处收敛于$\lim_{\varepsilon\to0_+}\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2}$.

- 在间断点对应的是逐点收敛而非一致收敛.
- 令$c_0=a_0$. 对于$n>0$, 令

$$c_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}$$

  得到另一种常见形式

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\quad a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)\mathrm{d}x,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(mx)\mathrm{d}x$$

推广到一般周期T:

1. 周期函数$f(x+T)=f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)],\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x,\qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x$$

   或者记作

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\mathrm{i}n\omega x},\qquad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x$$

2. 非周期函数: 认为$T\to+\infty$, 由三角函数的正交性得出频谱

$$f(x)=\int_0^{\infty}[a(\omega)\cos(\omega x)+b(\omega)\sin(\omega x)]\,\mathrm{d}\omega$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x,\qquad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x$$

   或者记作

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega,\quad \hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

2 Fourier变换

Def Fourier变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

逆变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$\hat{f}(\omega)$在实轴上有奇点时, 逆变换理解为主值积分.

- n阶导(微分定理I)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=(\mathrm{i}\omega)^n\hat{f}(\omega)$$

- 乘积(微分定理II)

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^n f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{i}^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\hat{f}(\omega)$$

- 位移定理I/II

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\epsilon t}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\hat{f}(\omega-\epsilon)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=e^{-\mathrm{i}\omega\tau}\hat{f}(\omega)$$

- 伸缩定理/相似定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

- 卷积定理

$$(f\star g)(t):=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

  卷积的Fourier变换为

$$\mathcal{F}[(f\star g)(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}(f\star g)(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

- Plancherel定理: 对平方可积函数$f(t),g(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega)\mathrm{d}\omega$$

  从而可以得到Parseval定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

  说明Fourier保持平方范数和内积不变

  > 若一个函数既是平方可积函数又是可积函数, 则平均值、$x=0$的一次矩、$x=0$的二次矩分别为

> $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x,\quad D_0(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$$

- 不确定性原理: 如果$f(t), tf(t), \omega\hat{f}(\omega)$均为平方可积函数, 则

$$D_0(|f|)D_0(|\hat{f}|) \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^2$$

- 不动点: 对函数$f(\mathbf{x})=\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4m^2}}$, 不计常数的意义下可以验证其为不动点:

$$\hat{f}(\mathbf{k})=\int\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\ \mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{4m^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}=2^n\pi^{n/2}m^n\mathrm{e}^{-m^2|\mathbf{k}|^2}$$

- 乘法公式:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x})\ \mathrm{d}^n\mathbf{x}=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\ \mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

  可以得到广义函数的Fourier变换性质

$$\langle\mathcal{F}[f],\phi\rangle=\langle f,\mathcal{F}[\phi]\rangle$$

  例如

$$\langle\mathcal{F}[\delta^{(n)}],\phi\rangle=\langle\delta^{(n)},\mathcal{F}[\phi]\rangle=\hat{\phi}(\mathbf{0})=\langle 1,\phi\rangle$$

---

3 利用Fourier变换解常微分方程

令$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 考虑形如

$$P(D)y(t)=f(t)$$

的常微分方程, 两侧Fourier变换后得到

$$P(\mathrm{i}\omega)\hat{y}(\omega)=\hat{f}(\omega)\quad\Longrightarrow\quad\hat{y}(\omega)=\frac{1}{P(\mathrm{i}\omega)}\hat{f}(\omega)$$

则逆变换给出解

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

---

4 δ函数(分布)

如果一个函数的傅立叶级数系数的渐近行为是$\frac{1}{n}$, 则这个函数是不连续的; 如果是$\frac{1}{n^2}$, 则这个函数的导数是不连续的; 如果是$\frac{1}{n^3}$,则这个函数的二阶导数是不连续的. 当系数以指数$\frac{1}{r^n}$衰减时, 就是所有阶可导且连续, 因而一般是(实)解析的.

对于Fourier变换趋于非0常数的情况, 其二次矩无穷大, 则原函数应无穷窄, 由此定义

Def Dirac δ函数(广义函数定义): 设函数序列$\{\delta_n(x)\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta_n(x)=f(0)$$

则记

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x\equiv\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta_n(x)=f(0)$$

> 广义函数语言定义:
>
> $$\delta^{(n)}:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\quad \phi(\mathbf{x})\mapsto\langle\delta^{(n)},\phi\rangle=\phi(\mathbf{0})$$
>
> 从而不可以用局部可积函数直接表示, 可以用局部可积函数的弱*极限表示, 例如
>
> $$\delta_m^{(n)}(\mathbf{x})=\frac{m^n}{\pi^{n/2}}\mathrm{e}^{-m^2\mathbf{x}^2},\quad\Longrightarrow\quad\lim_{m\to\infty}\langle\delta_m^{(n)},\phi\rangle=\langle\delta^{(n)},\phi\rangle,\quad\forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$
>
> - 导数定义:
>
> $$\langle\delta',\phi\rangle=-\langle\delta,\phi'\rangle=-\phi'(\mathbf{0})$$
>
> - 函数乘法:
>
> $$\langle\psi\cdot\delta,\phi\rangle=\langle\delta,\psi\cdot\phi\rangle=\psi(\mathbf{0})\phi(\mathbf{0})$$
>
> 两者结合可以得到
>
> $$\psi(\mathbf{x})\partial^n\delta(\mathbf{x})=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m n!}{m!(n-m)!}\partial^m\psi(\mathbf{0})\partial^{n-m}\delta(\mathbf{x})$$
>
> - 换元运算: 设$\psi(\mathbf{x})$是$\mathbb{R}^n$上Jacobi行列式非0(保证反函数存在性)的无穷阶连续可微函数, 有
>
> $$\int\delta^{(n)}(\psi(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}=\int\delta^{(n)}(\mathbf{u})\frac{\phi(\psi^{-1}(\mathbf{u}))}{|\det J(\psi^{-1}(\mathbf{u}))|}\mathrm{d}^n\mathbf{u}$$
>
> 由此得到
>
> $$\int\delta^{(n)}(\psi(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^n\mathbf{x}=\sum_{\psi(\mathbf{x})=0}\frac{\phi(\mathbf{x})}{|\det J(\mathbf{x})|}$$

- 几种可行的极限序列

$$\delta_n(x)=n\mathrm{rect}(nx),\quad\sqrt{\frac{n^2}{\pi}}e^{-n^2x^2},\quad\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$$

- 可以检验其Fourier变换

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=e^{-\mathrm{i}k0}=1$$

从而得到Fourier表示

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

> 换积分域为$-n$到n即得到$\delta_n(x)=\frac{\sin nx}{\pi x}$, 仍是可行的函数序列, 但是不满足Dirac的原始定义:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

- 定义高维δ函数:

$$\delta^n(\vec{x}):=\delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$$

  - 考虑对于不同的坐标, 为保证

$$\int\delta^n(\mathbf{x}(\mathbf{u})-\mathbf{x}_0)f(\mathbf{u})Jd^n\mathbf{u}=f(\mathbf{u}_0)$$

应有

$$\delta^n(\mathbf{x}(\mathbf{u})-\mathbf{x}_0)=\frac{\delta^n(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)}{J},\quad J=\left|\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\right|$$

- δ函数的性质必须在积分意义下理解:
  1. 由其极限定义可以看出$\delta(x)$为偶函数, 从而

     $$x\delta(x)=0,\quad \delta(x)=\delta(-x),\quad \delta'(-x)=-\delta'(x)$$

  2. 与阶跃函数有关系:

     $$\delta(x)=\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x},\quad H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

     可通过对此导数积分证明.

  3. 对光滑函数$f(x)$有

     $$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)\ ,\quad a<0<b$$

     $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}\delta(x)\\&=[f(x)\delta(x)]|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x\\&=-f'(0)\end{aligned}$$

  4. 对$a\neq 0$有,

     $$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

     由积分性质容易证明.

  5. 若实函数$g(x)=0$在(a,b)有n个不同单根$\{x_i\}$, 有

     $$\delta(g(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

> Dirac δ函数严格来讲不是函数, 而是一个广义函数(分布), 在分布理论(Schwartz分布)中被严格定义, 是一个线性泛函, 属于连续对偶空间, 作用于测试函数空间, 提取测试函数在0点的值.

---

5 利用δ函数计算无穷积分

利用δ函数的常用积分表达式:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\quad\text{or}\quad\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos kx\mathrm{d}k$$

Example

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$

Solution 引入辅助积分

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

通过辅助积分可以得到

$$-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda)$$

$\lambda=0$时, $\delta(\lambda)=0$, 方程齐次; $\lambda=0$, $F(\lambda)$连续, 即$\lim_{\epsilon\to+0}[F(0-\epsilon)-F(0+\epsilon)]=0$, 而$F'(\lambda)$不连续. 由

$$\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon}\left[F''(\lambda)+\mathrm{i}F'(\lambda)-F(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda=-2\pi\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon}\delta(\lambda)\mathrm{d}\lambda=-2\pi$$

考虑到$F(\lambda)$连续, 可以得到$\lim_{\epsilon\to+0}F'(\lambda)|_{0-\epsilon}^{0+\epsilon}=-2\pi$.

由$\lambda\neq0$时$\delta(\lambda)=0$, 则

$$F(\lambda)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}}+B\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}}, & \lambda>0\\ C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}}+D\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}}, & \lambda<0\end{cases}$$

为保证无穷积分$F(\lambda)$有界, $A=D=0$. 又由$F(\lambda)$在$\lambda=0$连续, 则$B=C$; 又由$F'(\lambda)$在$\lambda=0$的跃变性质, 得到

$$\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}B-\frac{-\mathrm{i}+\sqrt{3}}{2}C=-2\pi\quad\Longrightarrow\quad B=C=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

从而得到积分结果

$$F(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda>0\\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda<0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad I=\mathrm{Im}F(2)=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}\sin 1$$

6 常微分方程初值问题的Green函数

7 常微分方程边值问题的Green函数

第九章 Laplace变换

1 Laplace变换

Def Laplace变换: 记原函数$f(t)$经Laplace变换得到像函数(s为复数)

$$F(p)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$$

> 约定$f(t)$理解为$f(t)H(t)$, 即在$t<0$时规定为0.

- **Thm** Laplace 变换存在的充分条件: 若$f(t)$满足
    1. $f(t)$和$f'(t)$在区间$0\leq t<\infty$上分段连续, 在任何有限区间内的不连续点的数目是有限的;
    2. $f(t)$有有限的增长指数, 即存在正数$M>0$及实数B(增长指数), 使$\forall t\geq0$, $|f(t)|<M\mathrm{e}^{Bt}$.

则$f(t)$的Laplace变换在$\operatorname{Re} p > B$上存在. 且在此半平面内, 像函数$F(p)$是解析函数. B的下界称绝对收敛横标

Lemma Laplace积分$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$在$p=p_0$处收敛, 则它在开的半平面$\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}p_0$上亦收敛, 且在此半平面上等于绝对收敛积分

$$(p-p_0)\int_0^\infty g(t;p_0)\mathrm{e}^{-(p-p_0)t}\mathrm{d}t,$$

其中

$$g(t;p_0)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-p_0\tau}\mathrm{d}\tau$$

- **Def** 设$f(t)$满足Laplace变换的充分条件, 则存在实数s_0, 使得

  $$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t\begin{cases}\text{收敛,若}\mathrm{Re}p > s_0\\ \text{发散,若}\mathrm{Re}p < s_0\end{cases}$$

  s_0称为收敛横标, $F(p)$在$\mathrm{Re}p > s_0$解析, 且

  $$F'(p)=-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}tf(t)\mathrm{d}t\quad p > s_0$$

- **Def** 正则横标

  设$F(p)$在区域 $\mathrm{Re}p > \gamma$解析, 在$\mathrm{Re}p=\gamma$上有奇点, γ称为该Laplace变换的正则横标.

Laplace变换的性质

- 线性变换

  $$\begin{aligned}&\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\}\\=&\alpha_1\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\alpha_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}\\=&\alpha_1 F_1(p)+\alpha_2 F_2(p)\end{aligned}$$

- p-位移(Substitution)(位移定理I)

  $$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{p_0 t}f(t)\right\}=F(p-p_0)$$

- t-位移(Translation/Heaviside Shifting Theorem)(延迟定理/位移定理II)

  $$\mathcal{L}\{f(t-\tau)H(t-\tau)\}=\mathrm{e}^{-p\tau}F(p),\quad \tau > 0$$

> 推论:
>
> $$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}f(t-na)H(t-na)\right]=\frac{\mathcal{F}(s)}{1-\mathrm{e}^{-sa}},\quad \operatorname{Re}s > 0$$
> $$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(t-na)H(t-na)\right]=\frac{F(s)}{1+\mathrm{e}^{-sa}},\quad \operatorname{Re}s > 0$$

- 相似定理

  $$\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\quad a > 0$$

- 导数的Laplace变换(微分定理I): 若$f(t)$, $f'(t)$都满足Laplace变换存在的充分条件, 则

  $$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(p)\quad\Longrightarrow\quad\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=pF(p)-f(0)$$

  同理, 对于高阶导数

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

> 可以用于通过Laplace变换求解微分方程.

- 积分的Laplce变换(积分定理I): 若$f(t)$满足Laplace变换存在的充分条件, 则$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$的变换也存在, 为

  $$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\frac{F(p)}{p}$$

  proof

  $$F(p)=p\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}-\int_0^0 f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- Derivative of a transform(微分定理II):
  当$f(t)$至少是分段连续的, 且p的选择使得$e^{-pt}f(t)$对大的p呈指数收敛时, 积分

  $$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$$

  是一致收敛的, 并且可以(在积分号下)对p微分. 那么

  $$F'(p)=\int_0^\infty(-t)e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t=\mathcal{L}\{-tf(t)\}$$

  同理得到

  $$\mathcal{L}\{(-t)^nf(t)\}=F^{(n)}(p)$$

- Integration of transform(积分定理II):
  当$F(t)$至少是分段连续的, 且s的选择使得$e^{-pt}f(t)$对大的p呈指数收敛时, 积分

  $$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t$$

  关于p是一致收敛的, 则可以交换积分顺序:

  $$\begin{aligned}\int_s^b F(p)\mathrm{d}p&=\int_s^b\mathrm{d}p\int_0^\infty\mathrm{d}te^{-pt}f(t)\\&=\int_0^\infty f(t)\left[\int_s^b e^{-pt}\mathrm{d}p\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty f(t)\left[-\frac{1}{t}e^{-pt}\right]_s^b\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\left(e^{-st}-e^{-bt}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

  下限s的选择要足够大, 以使得$F(s)$在一致收敛区域内, 令$b\to\infty$, 得到

  $$\int_s^\infty F(p)dp=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-st}\mathrm{d}t=\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

  要求$\frac{f(t)}{t}$在$t=0$有限或发散程度弱于t^{-1}, 保证积分存在.

  > 推论:
  >
  > $$\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty F(p)\,\mathrm{d}p$$
  > $$\mathcal{L}\left[\int_t^{+\infty}\frac{f(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}\int_0^s F(p)\,\mathrm{d}p$$

- 卷积定理: 取

$$F_1(p)=\mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\} \quad \text{和} \quad F_2(p)=\mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\}$$

  相乘得到

$$\begin{aligned}F_1(p)F_2(p)&=\int_0^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau\int_0^{\infty} f_2(\nu)\mathrm{e}^{-p\nu}\mathrm{d}\nu\\&=\int_0^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^{\infty} f_2(\nu)\mathrm{e}^{-p(\tau+\nu)}\mathrm{d}\nu\\&=\int_0^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\int_\tau^{\infty} f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\int_0^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

  即

$$F_1(p)F_2(p)=\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$$

常见变换

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\{1\}=\int_0^{\infty} e^{-st}dt=\frac{1}{s},\quad s>0\\\mathcal{L}\left\{e^{kt}\right\}=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{kt}dt=\frac{1}{s-k},\quad s>k\\\mathcal{L}\{\cosh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)=\frac{s}{s^2-k^2},\quad s>|k|\\\mathcal{L}\{\sinh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}-\frac{1}{s+k}\right)=\frac{k}{s^2-k^2},\quad s>|k|\\\mathcal{L}\{\cos kt\}=\frac{s}{s^2+k^2},\qquad \mathcal{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2}\\\mathcal{L}\left\{t^n\right\}=\int_0^{\infty} e^{-st}t^n dt=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}},\quad s>0,n>-1\end{gathered}$$

---

2 普遍反演公式

反演的唯一性问题 设$f_1(t)$, $f_2(t)$为连续函数, 若

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\}$$

则$f_1(t)\equiv f_2(t)$.

Bromwich积分 若函数$F(p)=F(s+\mathrm{i}\sigma)$在区域$\mathrm{Re}p>s_0$内满足:

1. $F(p)$解析(即$F(p)$的所有奇点在s_0左侧)
2. 当$|p|\to\infty$时, $F(p)$一致地趋于0
3. $\forall \mathrm{Re}p=s>s_0$, 沿直线$L:\mathrm{Re}p=s$的无穷积分

$$\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}|F(p)|\mathrm{d}p \quad (s>s_0)$$

   收敛.

则$F(p)$的原函数可以表示为Bromwich积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\sum\mathrm{res}\left\{\mathrm{e}^{pt}F(p)\right\}\quad(s>s_0)$$

> 上述条件是公式成立的充分条件, 而非必要条件. 例如$0<\alpha<1$时:
>
> $$\mathcal{L}\left\{t^\alpha-1\right\}=\frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}$$
>
> 上述条件是对$F(p)$而言. 就$f(t)$而言, 有相应的定理:

Thm 设$f(t)$在$[0,\infty)$的任意有限区间上只有有限个极大极小和有限个第一类间断点.Laplace积分

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

在直线$\mathrm{Re}p=s$上绝对收敛. 则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{f(0+)}{2}, & t=0\\ \frac{f(t+)+f(t-)}{2}, & t>0\end{cases}$$

> 更一般地, 积分应理解为积分主值
>
> $$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{R\to\infty}\int_{s-\mathrm{i}R}^{s+\mathrm{i}R}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$
>
> 例如: $F(p)=\frac{1}{p}$时,
>
> $$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2} & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

第十章 二阶线性常微分方程的幂级数解法

1 二阶线性常微分方程的常点和奇点

2 常点邻域内的解

3 正则奇点邻域内的解

4 Bessel方程

Appendix

1 渐进级数的计算

> 重述渐进级数的定义如下(数理笔记(1)内容):
>
> **Def** 渐近序列
> 设函数序列$\{\phi_n(z)\}$在z_0点的邻域内有定义, 且$\phi_n(z)\neq 0$(z_0点可以除外), 若对于所有的n, 有
>
> $$\phi_{n+1}(z)=o\left(\phi_n(z)\right),\quad z\to z_0$$
>
> 则称函数序列$\{\phi_n(z)\}$为$z\to z_0$时的一个渐近序列.
>
> **Def** 渐近级数
> 若在z的某个范围内
>
> $$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)-\sum_{n=0}^{N}a_n\phi_n(z)\right]=o\left(\phi_N(z)\right),\quad \forall N\in\mathbb{N}$$
>
> 则称$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(z)$是函数$f(z)$相对于$\{\phi_n(z)\}$的渐近级数, 记为
>
> $$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(z),\quad \text{as } z\to z_0$$
>
> - z越接近z_0, 有限和$\sum_{n=0}^{N}a_n\phi_n(z)$(称为$z\to z_0$时$f(z)$的渐近近似)越逼近于$f(z)$.
>   它区别于通常的级数展开，例如幂级数展开
>
> $$f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_nz^n+\cdots$$
>
>   后者是z点固定, 而级数的项数越多越准确, 即
>
> $$\lim_{N\to\infty}\left[f(z)-\sum_{n=0}^{N}u_n(z)\right]=0.$$
>
> - 在渐近级数的定义中, 并未要求级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(z)$收敛. 渐近展开级数可以(而且常常)不是收敛级数.
>   因此, 对于一定的z, 并不能通过多取项数(即增大N)来改善近似程度(存在某个N能最佳地逼近原函数).
> - 不同的趋近方式可能会产生完全不同的极限行为, 在$\arg z$的一定范围内, 渐进展开如果存在即是唯一的, 系数
>
> $$a_m=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\phi_m(z)}\left[f(z)-\sum_{n=0}^{m-1}a_n\phi_n(z)\right]$$
>
> 渐进级数在收敛级数失效的情况下特别有用, 例如在微扰展开或积分近似中.

1.1 分部积分法

第一类:

$$I(x)=\int_x^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{g(t)}\mathrm{d}t\quad x\to\infty$$

$g(t)$是区间(a,b)上的单调函数(<u>这一条能否作为判定待议</u>)

Example不完备Γ函数

$$\Gamma(-p,x)=\int_x^{\infty}e^{-t}t^{-p-1}\mathrm{d}t,\quad x\to\infty$$

Solve 直接进行分部积分

$$\Gamma(-p,x)=\frac{e^{-x}}{x^{p+1}}-(p+1)\int_x^{\infty}t^{-p-2}e^{-t}\mathrm{d}t$$

以此类推得到

$$\Gamma(-p,x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{p+1}}-\frac{(p+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^{p+2}}+\mathcal{O}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{p+3}}\right)$$

仅保留领头项得到

$$\Gamma(-p,x)\sim\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{p+1}}$$

第二类:

$$I(\lambda)=\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\lambda g(t)}\mathrm{d}t\quad \lambda\to\infty$$

由$g(t)$的单调行为, $\lambda\to+\infty$时, 主要贡献来自端点邻域(<u>也不一定非要单调才能使贡献来自端点邻域(恼)</u>). 使用分部积分得到端点贡献:

$$I(\lambda)=\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\lambda g(t)}\mathrm{d}t=\left[\frac{f(t)}{\lambda g'(t)}\mathrm{e}^{\lambda g(t)}\right]_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b\mathrm{e}^{\lambda g(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f(t)}{g'(t)}\right)\mathrm{d}t$$

提取领头项得到

$$I(\lambda)\sim\left[\frac{f(t)}{\lambda g'(t)}\mathrm{e}^{\lambda g(t)}\right]_a^b$$

> 分部积分法要求渐进展开的各项自然形成递减的高阶修正项, 对于某些类型的$g(t)$, 没有自然的递减序列, 仍需要通过局部展开(结合尺度变换)提取主要贡献区域的主项, 与极值是否位于边界无关.

1.2 Laplace方法

$$I(\lambda)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{e}^{\lambda g(x)}\mathrm{d}x$$

假定$g(x)$的最大值出现在内部点$c(g'(c)=0,g''(c)<0)$, 则积分贡献主要来自于$x=c$处的峰, 宽度为$O(\lambda^{-\frac{1}{2}})$. 作尺度变换: $x=c+\lambda^{-\frac{1}{2}}y$将$f(x),\varphi(x)$在$c$处展开:

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{\sqrt{\lambda}}y+\frac{f''(c)}{2\lambda}y^2+\cdots$$

$$g(x)=g(c)+\frac{g'(c)}{\sqrt{\lambda}}y+\frac{g''(c)}{2\lambda}y^2+\frac{g'''(c)}{6\lambda^{\frac{3}{2}}}y^3\cdots$$

$$I(\lambda)=[\int_{x_1}^{c-\epsilon}+\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon}+\int_{c+\epsilon}^{x_2}][f(c)e^{\lambda g(c)}\cdot e^{\frac{1}{2}g''(c)y^2}+\mathcal{O}(\lambda^{-\frac{1}{2}})]\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\lambda}}$$

由于远离c的贡献迅速衰减, 我们可以将积分限延伸至$\pm\infty$:

$$I(\lambda)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(c)e^{\lambda g(c)}}{\sqrt{\lambda}}e^{\frac{1}{2}g''(c)y^2}\mathrm{d}y=f(c)e^{\lambda g(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{-xg''(c)}},\quad\lambda\to\infty$$

Example String公式

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^x\mathrm{d}x,\quad x\to\infty$$

Solve

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t+x\ln t}\mathrm{d}t$$

极值点位于$t=x$处, 再做一次变量替换$t=xs$得到固定的极值点$s=1$:

$$\Gamma(x+1)\sim xe^{x\ln x}\int_0^{\infty} e^{-xs+x\ln s}\mathrm{d}s=\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}$$

1.3 Fourier型积分

对于震荡积分

$$I(\omega)=\int_a^b \mathrm{d}t\, f(t)e^{\mathrm{i}\omega\phi(t)},\quad \text{as } |\omega|\to\infty$$

(1)若$\phi(t)$连续且$\phi'(t)$在区域内始终非0,

$$I(\omega)=\int_a^b f(t)\frac{1}{\mathrm{i}\omega\phi'(t)}\mathrm{d}e^{\mathrm{i}\omega\phi(t)}\sim\left.\frac{f(t)}{\mathrm{i}\omega\phi'(t)}e^{\mathrm{i}\omega\phi(t)}\right|_a^b$$

(2)若在内部c点$\phi'(c)=0$, 认为c在邻域之外, 积分快速震荡, 由Riemann-Lebesgue引理可以估计有

$$I(\omega)=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\phi(t)}\,\mathrm{d}t+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

在c点附近展开$f(t),\phi(t)$:

$$I(\omega)\sim\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c)e^{\mathrm{i}\omega(\phi(c)+\frac{1}{2}(t-c)^2\phi''(c))}\mathrm{d}t\sim f(c)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\phi(c)}\left(\frac{2}{\omega\phi''(c)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s^2}\,\mathrm{d}s$$

将被积部分视作复积分, 则全平面无奇点, 可以将积分路径整体绕$s=0$旋转45°得到Gauss型积分, 得

$$I(\omega)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{\omega|\phi''(c)|}}f(c)e^{\mathrm{i}(\omega\phi(c)+\frac{\pi}{4})}$$

1.4 最陡下降法

对于复变积分(辐角信息归入$g(z)$以保证$\lambda>0$)

$$I(\lambda)=\int_C f(z)\mathrm{e}^{\lambda g(z)}\mathrm{d}z,\quad \text{as } \lambda\to\infty$$

主要贡献仍应在$g'(z)=0$附近, 由于解析函数的限制, 解析区域内无法找到最大值点, 因此$g'(c)=0$处为鞍点, 希望通过路径变形使得其沿最陡下降方向经过鞍点.

设$g''(z)=\rho e^{\mathrm{i}\theta}, z-z_0=se^{\mathrm{i}\phi}$, 考察指数部分:

$$\lambda g(z_0)+\frac{\lambda}{2}g''(z_0)(z-z_0)^2=\lambda g(z_0)+\frac{\lambda}{2}\rho s^2e^{\mathrm{i}(\theta+2\phi)}$$

最陡下降要求指数部分的实部变化最快, 即$\theta+2\phi=\pi\pmod{2\pi}$(上升/下降最快), 合理取$\phi$使得沿其一即可. 鞍点近似下可以将积分区域延拓到$\pm\infty$

$$
\begin{aligned}
I(\lambda) &\sim f(z_0)\mathrm{e}^{\lambda g(z_0)}\int_C \mathrm{e}^{\lambda g''(z_0)(z-z_0)^2/2}\mathrm{d}z \\
&\sim e^{\mathrm{i}\phi} f(z_0)\mathrm{e}^{\lambda g(z_0)}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda|g''(z_0)|(x-x_0)^2/2}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} f(z_0)\mathrm{e}^{\lambda g(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|g''(z_0)|}}\left[1+o\left(\lambda^{-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

保留领头项得到

$$
I(\lambda) \sim f(z_0)\mathrm{e}^{\lambda g(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|g''(z_0)|}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \quad \phi = \frac{\pi - \arg[g''(z_0)]}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
$$

这种方法对于评估无法通过实变量技术处理的复积分特别有效. 其关键思想是将积分路径变形, 使其沿着积分值减小最快的路径穿过鞍点, 从而使主要贡献来自这些点的邻域.

Example Airy函数: 线性微分方程

$$
\Psi''(x) - x\Psi(x) = 0
$$

的解.

Solve 设

$$
\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}kx}\Phi(k)\mathrm{d}k
$$

代入得到

$$
k^2\Phi(k) + \mathrm{i}\Phi'(k) = 0
$$

通解为$\Phi(k) = Ae^{-\mathrm{i}k^3/3}$, 因此解为

$$
\Psi(x) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}(kx-k^3/3)}\mathrm{d}k = A\sqrt{x}\int_C e^{|x|^{\frac{3}{2}}(\frac{x}{|x|}u-\frac{u^3}{3})}\mathrm{d}u
$$

其中作代换$k = -\mathrm{i}\sqrt{x}u$复平面上无奇点.

(1)对$x \to \infty$, 鞍点位于$u_0 = \pm 1$:

$$
\Psi(x) = A\sqrt{x}\int_C e^{|x|^{\frac{3}{2}}(u-\frac{u^3}{3})}\mathrm{d}u
$$

$u_0 = -1$起主要贡献, 最速下降辐角$\theta = \frac{\pi}{2}$. 鞍点近似得到

$$
\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{|x|^{\frac{1}{4}}}Ae^{-\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}}}
$$

(2)对$x \to -\infty$, 鞍点位于$u_0 = \pm\mathrm{i}$:

$$
\Psi(x) = A\sqrt{x}\int_C e^{|x|^{\frac{3}{2}}(-u-\frac{u^3}{3})}\mathrm{d}u
$$

最速下降方向分别为$\theta = \frac{\pi}{4} / \frac{3\pi}{4}$, 鞍点近似得到

$$
\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{|x|^{\frac{1}{4}}}A\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}|x|^{\frac{2}{3}}\right)
$$

2 广义函数概念补充

Def 支集
设$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, 函数$\phi(\mathbf{x})$的支集定义为函数值不为0的点构成的集合的闭包, 即

$$\mathrm{supp}\ \phi=\overline{\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n|\phi(\mathbf{x})\neq 0\}}$$

若ϕ的支集是一个紧集(在这里等价于有界闭集), 就称函数$\phi(\mathbf{x})$具有紧支集.

Def 检验函数
定义为$\mathbb{R}^n$上无穷阶连续可微的紧支集函数, 例如

$$j(\mathbf{x})=\begin{cases}C_n\exp\left(-\dfrac{1}{1-|\mathbf{x}|^2}\right), & |\mathbf{x}|<1\\ 0, & |\mathbf{x}|\geq 1\end{cases}$$

C_n为归一化因子, 保证$j(\mathbf{x})$在$\mathbb{R}^n$的积分值为1.

- 检验函数空间记作$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, 是一个线性空间. 若进一步规定收敛性还可以得到拓扑线性空间.

Def 磨光函数

$$j_\delta(\mathbf{x})=\frac{1}{\delta^n}j\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right),\quad \delta>0$$

设$\phi(x)$, 是$\mathbb{R}^n$上可积的紧支集函数, 可以证明函数

$$\phi_\delta(\mathbf{x})=(j_\delta\star\phi)(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^n}j_\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})\mathrm{d}^n\mathbf{y}$$

无穷阶连续可微, 因此化为检验函数.

Def 广义函数: 连续线性映射

$$f:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\quad \phi(\mathbf{x})\mapsto\langle f,\phi\rangle$$

- 连续性要求$\lim_{k\to\infty}\phi_k=\phi$时有

$$\lim_{k\to\infty}\langle f,\phi_k\rangle=\langle f,\phi\rangle$$

- 可以对广义函数规定加法和数乘得到线性空间($\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$的拓扑对偶空间)

广义函数的例子
设$f(x)$在$\mathbb{R}^n$的任一紧子集上可积, 可以定义对应的广义函数f为

$$f:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\quad \phi(\mathbf{x})\mapsto\langle f,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

从而可以将广义函数视作局部可积函数的推广, 从而可以类似地定义广义函数的运算:

- 设$f(\mathbf{x})$的偏导数存在且局部可积, 由

$$\int_{\mathbb{R}^n}\partial_i f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}=-\int_{\mathbb{R}^n}f(\mathbf{x})\,\partial_i\,\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

  可以定义**广义函数的偏导**

$$\langle\partial_i f,\phi\rangle=-\langle f,\partial_i\phi\rangle$$

  由于检验函数的偏导也是检验函数, 保证了广义函数的定义.

- 设$\psi(\mathbf{x})$是$\mathbb{R}^n$上的无穷阶连续可微函数, 由

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\psi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})] \phi(\mathbf{x}) \mathrm{d}^n \mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) [\psi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})] \mathrm{d}^n \mathbf{x}$$

可以定义**广义函数的乘法**

$$\langle \psi \cdot f, \phi \rangle = \langle f, \psi \cdot \phi \rangle$$

检验函数和无穷阶连续可微函数的乘积也是检验函数, 保证了广义函数的定义.

- 对广义函数序列$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, 若存在广义函数f使得

$$\lim_{m \to \infty} \langle f_m, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

就称$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$弱$*$收敛于f, f为$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$的弱$*$极限.