数学物理方法上
00432108
2024-2025 学年第二学期

作业

姓名：XXX
学号：ZZZ
成绩：____

题 1. 考虑课堂上讲过的欧拉积分：

$$I(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}dt\,,\qquad x>0$$

1. 将 $I(x)$ 写成级数求和的形式，

$$I(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

求出 a_n 和级数的收敛半径。

2. 定义部分和

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n x^n$$

证明余项

$$R_{N+1}(x)\equiv I(x)-S_N(x)\le (N+1)!x^{N+1}$$

题 2. 定义如下积分：

$$I(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2-\lambda x^4}dx$$

利用计算机工具，计算 $I(\lambda)$ 的级数表示

$$I(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n$$

的前 20 项系数 a_n。定义部分和 $S_N(\lambda)=\sum_{n=0}^{N}a_n\lambda^n$，通过画图或列表的形式，比较当 $\lambda=0.01$ 时部分和 $S_N(\lambda)$ 与 $I(\lambda)$ 的差异。

题 3. 计算如下积分的渐近展开的领头项：

$$I(x)=\int_x^\infty e^{-t^4}dt\,,\qquad x\to+\infty$$

题 4. 计算如下积分的渐近展开的领头项：

$$F_\pm(\lambda)=\int_0^1 e^{\pm\lambda(t-t^2)}dt\,,\qquad \lambda\to+\infty$$

题 5. 令

$$y(x)=\int_0^\infty \exp\left(-t-\frac{x}{\sqrt{t}}\right)dt$$

计算 $x\to+\infty$ 极限下 $y(x)$ 的渐近展开的领头项。

题 6. 计算如下积分的渐近展开的领头项：

$$I(x)=\int_0^\infty e^{-x\sinh^2 t}dt\,,\qquad x\to+\infty$$