* 解析延拓：

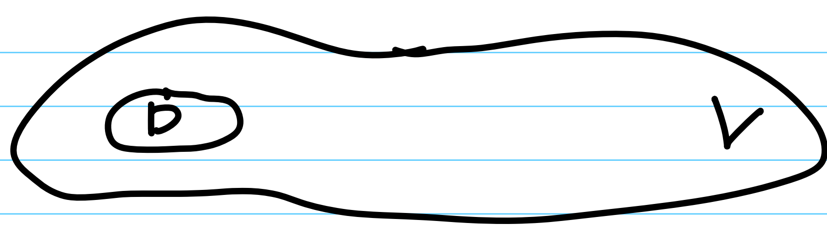
定义：$f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上连通区域 D 解析。

$V \supset D$ 是 $\mathbb{C}$ 上更大的连通区域。$F(z)$ 定义在 V 上，且 $\forall z \in D$，$f(z) = F(z)$。则称 $F(z)$ 是 f 在 V 上的解析延拓。

解析延拓具有唯一性。例如，设 $F(z)$ 和 $G(z)$ 是两个不同的解析延拓，

$g(z) = F(z) - G(z)$ 是解析函数，且在 D 上恒为零，与解析函数零点孤立性矛盾。

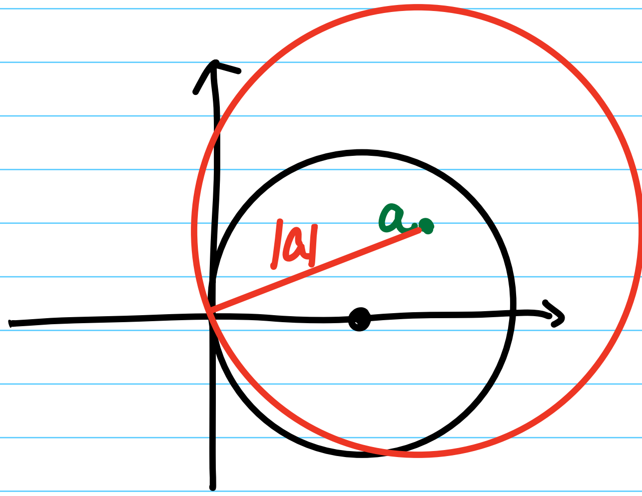
解析延拓的神奇性：不管 V 多大，F 唯一确定。



例：幂级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$$

收敛半径：$R=1$.



如何解析延拓到更大区域？

方法一：注意到在 $|z-1|<1$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{z}$$ ✓

方法二：选取 $|z-1|<1$ 内一点 a，$|a|>1$.

在 a 处作新的泰勒展开，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

$C: \quad z = re^{it} + a \quad 0 \leq t < 2\pi$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k(-1)^k}{(z-a)^{n+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(a-1+re^{it})^k(-1)^k}{(re^{it})^{n+1}} \cdot ire^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty}(a-1+re^{it})^k(-1)^k(re^{it})^{-n}\,dt$$

二项式定理

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(a-1)^{k-p}(-1)^k(re^{it})^{-n}\,dt$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}(a-1)^{k-n}(-1)^k \quad , \quad |a-1|<1$$

$$= \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}$$

收敛半径: $R = |a| > 1$

例：Gap 级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1+z^2+z^4+z^8+\cdots$$

收敛半径 $R=1$，

取 $z^*=\sqrt[2]{1}=\pm 1$，$f(z^*)=1+1+1+\cdots$ 发散.

取 $z^*=\sqrt[4]{1}=\{1, i, -1, -i\}$.

$f(z^*)=1+(z^*)^2+(z^*)^4+1+1+1\cdots$ 发散.

$\Rightarrow$ 在收敛圆上奇点稠密，无法延拓！

* 伽马函数 $\Gamma(z)$

哥德巴赫：阶乘函数 $f(n+1)=n!$ 如何解析延拓？

$$f(n+1)=n f(n) \quad \text{递推关系}$$
$$f(1)=1$$

欧拉：$f(z)=\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$

当 $z=n$ 时,

$$f(n)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{n-1}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}\,\frac{dt^n}{n}$$

$$=0+\frac{1}{n-1}\int_0^\infty t^n\,e^{-t}dt$$

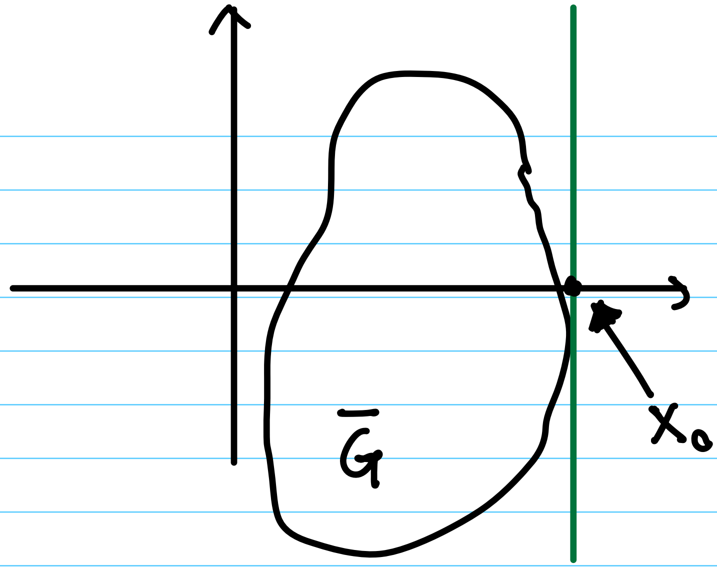
$$=\frac{1}{n}f(n+1)$$ 递推关系

且 $f(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$

* $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数,极点位于 $0,-1,-2,\cdots$, $z=-n$ 的留数 $\frac{(-1)^n}{n!}$

证明: $$f(z)=\underbrace{\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt}_{\mathrm{II}}$$

先证 II 是 $\mathbb{C}$ 上的整函数。为此,首先对于任意有界区域 G, II 绝对一致收敛。



$$|t^{z-1}| < t^{x_0-1},$$

取正整数 N，$x_0-1-N<-1$

$$e^t \geqslant \frac{t^N}{N!}, \quad e^{-t} \leqslant N!\, t^{-N}$$

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt \leqslant \int_1^{+\infty} N!\, t^{x_0-1-N}\,dt}_{\text{有界}}$$

因此 $\left(\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt\right)' = \int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{d}{dz} t^{z-1}\right) dt$

同样可证导数在$\bar{G}$上存在，因此 II 是整函数。

对于 I，展开指数，

$$I = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z-1+n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z+n)}$$

因此 I 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，极点位于

$0, -1, -2, \cdots,$ 留数 $\frac{(-1)^n}{n!}$

伽马函数常见的还有几种表示.

(1) 利用 $e^{-t} = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{t}{n})^n$

定义 $F(z,n) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} F(z,n)$$

令 $t = un$, 则

$$F(z,n) = \int_0^1 (1-u)^n n^z u^{z-1} du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{z} (1-u)^n n^z du^z$$

$$\overset{\to 0}{= (1-u)^n \frac{n^z}{z} u^z \Big|_0^1}$$

$$+ \int_0^1 \frac{n}{z}(1-u)^{n-1} n^z u^z du$$

$$= \int_0^1 \frac{n\cdot(n-1)}{z\cdot(z+1)}(1-u)^{n-2} n^z u^{z+1} du$$

$$\vdots$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdots\times 1}{z\cdot(z+1)\cdots(z+n-1)} n^z \int_0^1 u^{z+n-1} du$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{z\cdot(z+1)\cdots (z+n)} n^z$$

$$= \frac{1}{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})} n^z$$

(3) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 是整函数，零点位于 $0, 1, 2, \cdots$

由魏式无穷乘积公式可得

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

事实上由 (2) 可以得到 $g(z)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(z,n)}=\lim_{n\to\infty} n^{-z} z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}e^{\frac{z}{k}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{-z\ln n+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)z}$$

$$\times z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$$

$$g(z)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right]z$$

$$=\gamma z,$$

$\gamma\approx 0.57721\cdots$ 欧拉常数

特殊值：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^{\frac{1}{2}-1}\,dt$$

$$\overset{t=u^2}{=}\int_0^{\infty}e^{-u^2}\,u^{-1}\,2u\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

余元公式：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

证明： $\frac{\sin\pi z}{\pi}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ 欧拉乘积

利用 $\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$，则

而 $$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

$$\times\left(\frac{-1}{z}\right)e^{-\gamma z}(-z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

$$=\frac{\sin\pi z}{\pi}$$ 得证.

伽马函数在物理学中几乎无处不在，最不特殊的特殊函数.

例：高斯积分的矩：

$$\langle x^{2s}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2s}e^{-x^2}dx$$

$$=2\int_0^{\infty}x^{2s}e^{-x^2}dx$$

令 $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, $dx = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$

$$\langle x^{2s}\rangle = \int_0^\infty u^s e^{-u} u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \Gamma(s-\tfrac{1}{2})$$

例: n 维球体积公式

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le R^2$$

利用 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_n\, e^{-x_1^2 - \cdots - x_n^2} = \pi^{n/2}$

球坐标

$$I = \int_0^\infty e^{-r^2} A_{n-1}(r)\,dr$$

$$= \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr\, A_{n-1}(1)$$

$$\overset{u=r^2}{=} \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{2} u^{\frac{n}{2}-1}\,du\, A_{n-1}(1)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{n}{2}) A_{n-1}(1)$$

$$A_{n-1}(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

$$\Rightarrow V_n(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^R r^{n-1} dr$$

$$= \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} R^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$$

从伽马函数的连乘积表示看出取对数是一个可能有用的操作.

双伽马函数:

$$\psi(z) \equiv \frac{d \ln\Gamma(z)}{dz}$$

$$= -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \ln\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$$= -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{n}}$$

$$= -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{z}$$

当z取正整数时，

$$\psi(J+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{J} \frac{1}{n}$$

递推关系：

$$\psi(z+1) = \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}$$

$$\psi(z+n) - \psi(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi(z+n) - \ln n = 0$$

证明：$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[-\gamma - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n+k} - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{z+n} - \ln n \right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \ln n \right]$$

$$= 0$$

ψ函数可以用来求和无穷级数.

例: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})(n+1)}=S$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot 2$$

注意到 $\psi(a)=-\gamma-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{n}\right]-\frac{1}{a}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+n}=-\psi(a)-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{a}$$

$$\therefore\ S=\left[-\psi(\tfrac{1}{2})-\frac{1}{\frac{1}{2}}+\psi(1)+1\right]\cdot 2$$

$$=[\ln 4-1]\cdot 2$$

例: $$\psi'(z)=+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\frac{1}{z^2}$$

$$\therefore\ \psi'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\psi'(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^2}$$