

# 理论力学

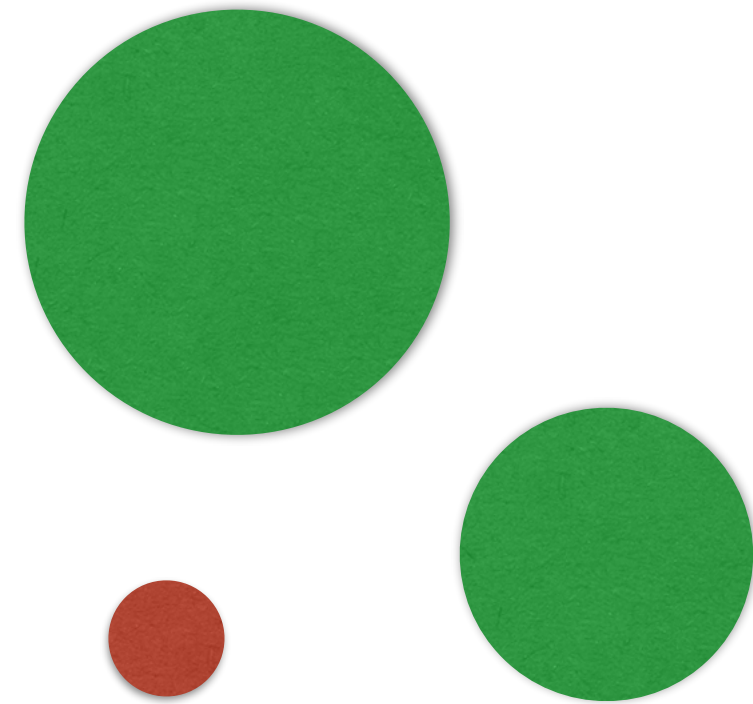
赵鹏巍

# 内容回顾

- 讨论对称性与守恒律  
广义动量  
体系的对称性  
—> 拉格朗日量的不变性  
—> 广义动量守恒  
定义“能量”函数，讨论了能量守恒
- 诺特定理

# 今日目标

- 受限三体问题



# 有心力问题

- 考虑一个质点在一个有心力作用下运动

力  $\mathbf{F}$  平行于位置向量  $\mathbf{r}$

- 假设  $\mathbf{F}$  为保守力  $\mathbf{F} = -\nabla V(r)$

若  $\mathbf{F}$  是有心力，则  $V$  是  $|r|$  的函数

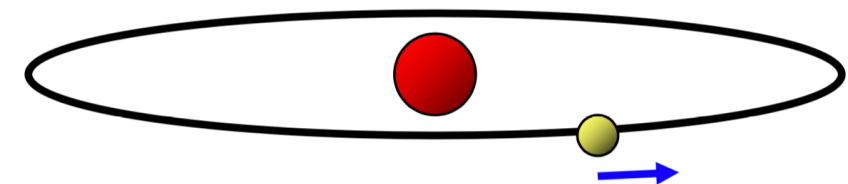
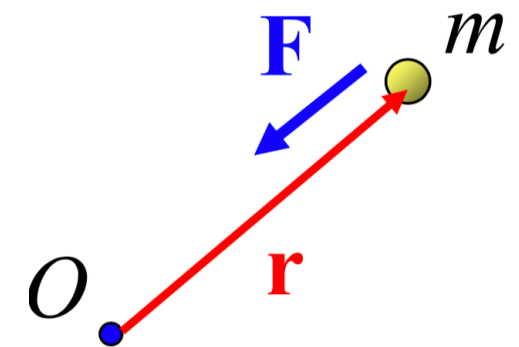
- 这样的系统是十分普遍的

地球绕着太阳转

卫星绕着地球转

电子绕着原子核转

当然，这些例子中假设处于中心的体系非常重，不会运动。



# 两体问题

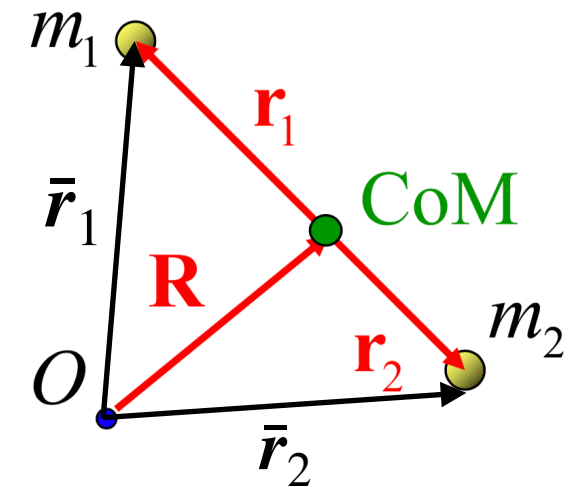
- 考虑无外力情形下由两个质点组成的系统

$\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  是相对于质心的位置矢量

- 拉格朗日量为

$$L = \underbrace{\frac{(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2}{2}}_{\text{质心运动}} + \underbrace{\sum_{i=1}^2 \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}}_{\text{相对于质心的运动}} - \underbrace{V(r)}_{\text{相互作用}}$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \bar{\mathbf{r}}_1 + m_2 \bar{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}$$



相互作用来源于一个有心势场

$$|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{R}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{R}$$



$$\sum_{i=1}^2 \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

# 两体问题 —> 有心力问题

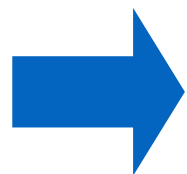
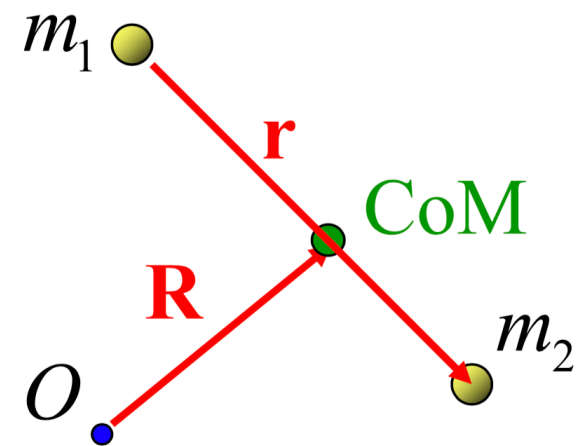
$$L = \frac{(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$$

- **$\mathbf{R}$  是一个循环变量**

质心以一个恒定的速度在运动

关于  $\mathbf{r}$  的运动方程不会含有质心位置  $\mathbf{R}$  或其时间导数  $\dot{\mathbf{R}}$

将原点  $O$  移至质心位置，不考虑质心运动



$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$$

两质点间的相对运动等价于一个质点在有心力势场下的运动

定义约化质量

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

# 球对称性

- 有心力系统是球对称的，即绕过原点的任意轴旋转不变

拉格朗日量不依赖于任意方向  $L = T(\dot{r}^2) - V(r)$

- 角动量守恒  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}$

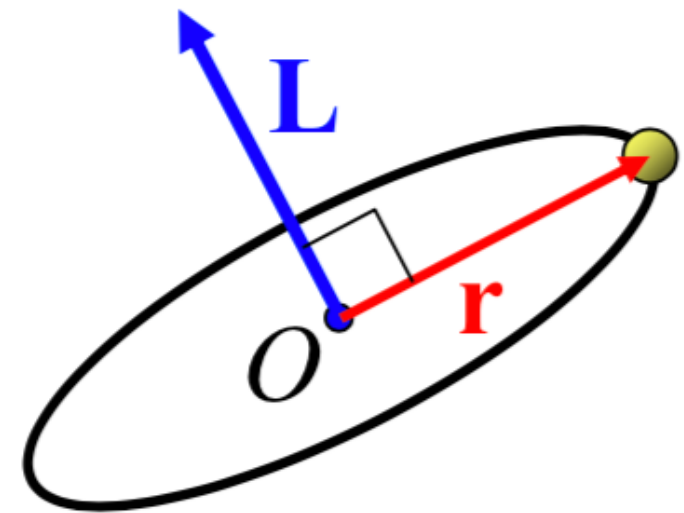
因为角动量的方向是固定的，且  $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}$ ，所以  $\mathbf{r}$  始终处于一个平面内

- 选择极坐标系

极轴方向为角动量  $\mathbf{L}$  的方向

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta, \psi) = \mathbf{r}(r, \theta)$$

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$



# 运动方程：角动量

- 可以消去  $\psi$ ，于是拉格朗日量可约化为

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

- $\theta$  是循环坐标，相应的共轭动量是守恒量，

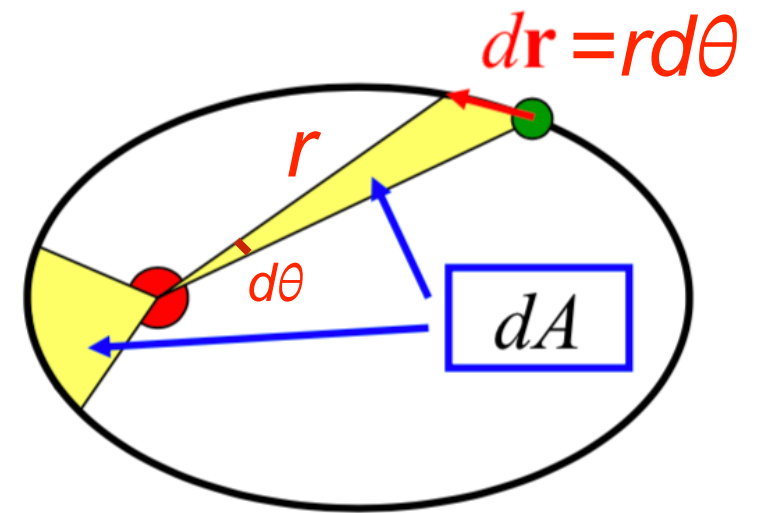
$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const} \equiv l$$

角动量大小

- 等价于，

掠面速度

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const}$$



$dA$  为矢径在  $dt$  时间内扫过的面积  $dA = \frac{1}{2}r(r d\theta)$

开普勒第二定律：行星与太阳的连线扫过的面积与时间成正比

对任意中心力场均成立，  
不局限于平方反比力场！



# 运动方程：径向运动

- 可以消去  $\psi$ ，于是拉格朗日量可约化为

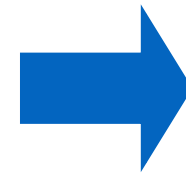
$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

中心力

$$f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

- 关于  $r$  的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$



$$m\ddot{r} = \boxed{mr\dot{\theta}^2} + \boxed{f(r)}$$

离心力    中心力

- 利用角动量

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + f(r)$$

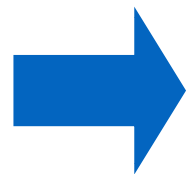
$$l = mr^2\dot{\theta}$$

引入两个积分常数，将此式积分即可，但是其实可以更简单

# 能量守恒

1. 约束方程是时间无关的; 2. 势场  $V$  是速度无关的; 3. 拉格朗日量不显含时间

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V(r) = \text{const}$$



$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}$$

关于  $r$  的一阶微分方程

这一项肯定非负!

- 原则上, 可以求解

$$t = \int_0^t dt = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}} = t(r)$$

- 求逆函数  $t(r) \rightarrow r(t)$

- 通过积分求  $\theta(t)$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

Done!

# 关于自由度的讨论

- 两体问题具有六个自由度，约去质心运动，简化为单体问题
- 一个质点具有三个自由度  
运动方程是二阶微分方程，所以产生6个积分常数
- 每个守恒定律量可约去一阶微分  
时间导数为零
- 我们可以使用角动量  $L$  和能量  $E$ ，共4个守恒常数  
余下2个积分常数，即  $r_0$  和  $\theta_0$
- 当然，我们也可以不使用守恒定律，那样直接求解拉格朗日方程时会更繁琐一些。
- 使用守恒量  $L$  和能量  $E$  更自然，可过渡至量子力学情形！

# 运动轨迹方程

- 我们已经尝试过解出  $r = r(t), \theta = \theta(t)$

现在，我们感兴趣的是轨迹的形状  $r = r(\theta)$

将  $dt$  换成  $d\theta$   $l = mr^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0 \rightarrow \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

从  $r$  到  $u \equiv 1/r$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d}{dr} = -u^2 \frac{d}{du}$$



$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2} \frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

求解这一方程将给出运动轨迹的形状  
先分析对称性总是有帮助的

# 运动轨迹的对称性

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2} \frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

- 方程关于  $\theta$  是对称的

将  $\theta$  替换为  $-\theta$  是不改变方程的

如果初始条件是对称的，则方程的解  $u(\theta)$  一定是对称的

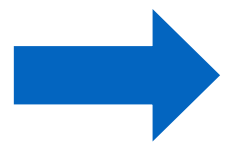
选择初始条件  $t = 0$  时， $\theta = 0$ ，于是  $\theta \rightarrow -\theta$  将有

$$u(0) \rightarrow u(0)$$

成立

$$\frac{du}{d\theta}(0) \rightarrow -\frac{du}{d\theta}(0)$$

OK if  $\frac{du}{d\theta}(0) = 0$



运动轨迹在角度  $\theta$  满足  $\frac{du}{d\theta} = 0$  处是对称的

# 运动轨迹的对称性

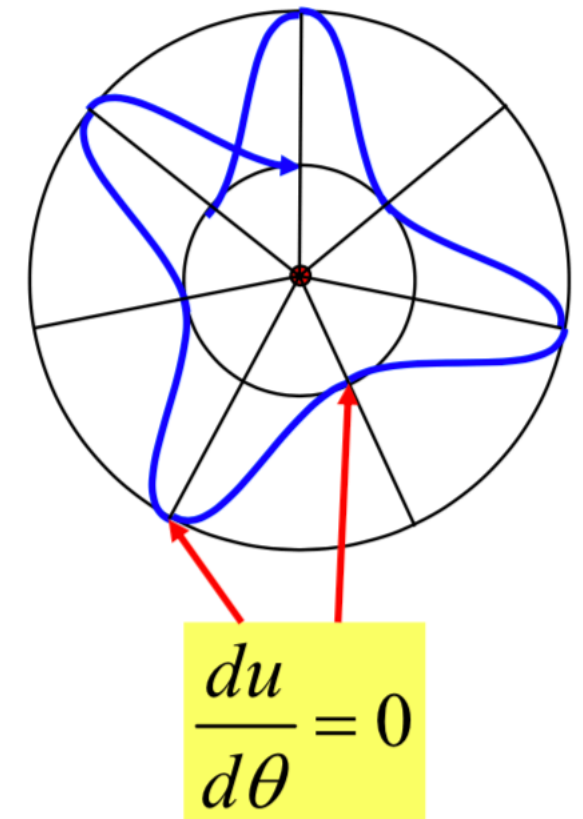
- 运动轨迹在每个转折点都是对称的 = 拱点

轨迹在绕拱点矢量的反射下保持不变！

所以我们不必太在意  $\dot{r}$  的符号

求得一对拱点之间的轨迹，即可得到全部轨迹

现在，我们可以求解方程了！



# 求解运动轨迹方程

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2} \frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

给定轨迹，可知受力！

- 为求运动轨迹，不直接积分二阶微分方程，而利用能量守恒可得

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V(r)$$



$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}$$

坐标变换

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{m} \frac{du}{d\theta}$$

$$l = mr^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2mV(1/u)}{l^2}}$$

将此式积分

并不总是可以解析积分的...

# 求解运动轨迹方程

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2mV(1/u)}{l^2}}$$

并不总是可以解析积分的...

取幂律力

$$f \propto r^n$$

$$V \propto r^{n+1}$$

解析解存在于以下情形：

$$n = 1, -2, -3;$$

简单函数

$$n = 1 \quad \text{简谐振子}$$

$$n = -2 \quad \text{开普勒问题}$$

伯特兰定理：对于所有被束缚的质点来讲，只有遵循平方反比律和胡克定律的两种有心力才能给出闭合轨道（证明不做要求~）

$$n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$$

椭圆函数



# 平方反比力

$$f = -\frac{k}{r^2}$$

$$V = -\frac{k}{r}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right) \quad \theta' = \text{const}$$

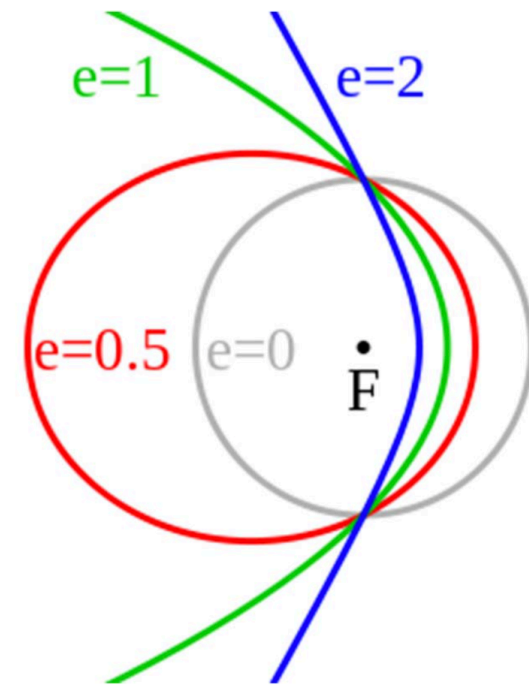
## ● 圆锥曲线

$$\frac{1}{r} = C (1 + e \cos(\theta - \theta'))$$

$$C = \frac{mk}{l^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \quad e \text{ 为偏心率}$$

$e > 1$	$E > 0$	双曲线
$e = 1$	$E = 0$	抛物线
$e < 1$	$E < 0$	椭圆
$e = 0$	$E = -\frac{mk^2}{2l^2}$	圆



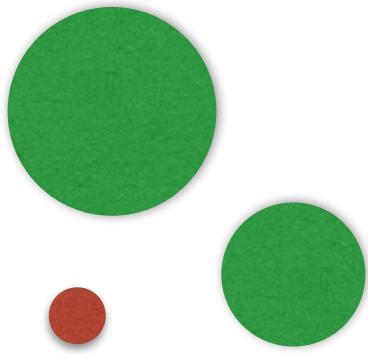
与前面的定性分析一致！

# 受限三体系统

- 给定一个三体系统，假设三个质点的质量存在很大差异

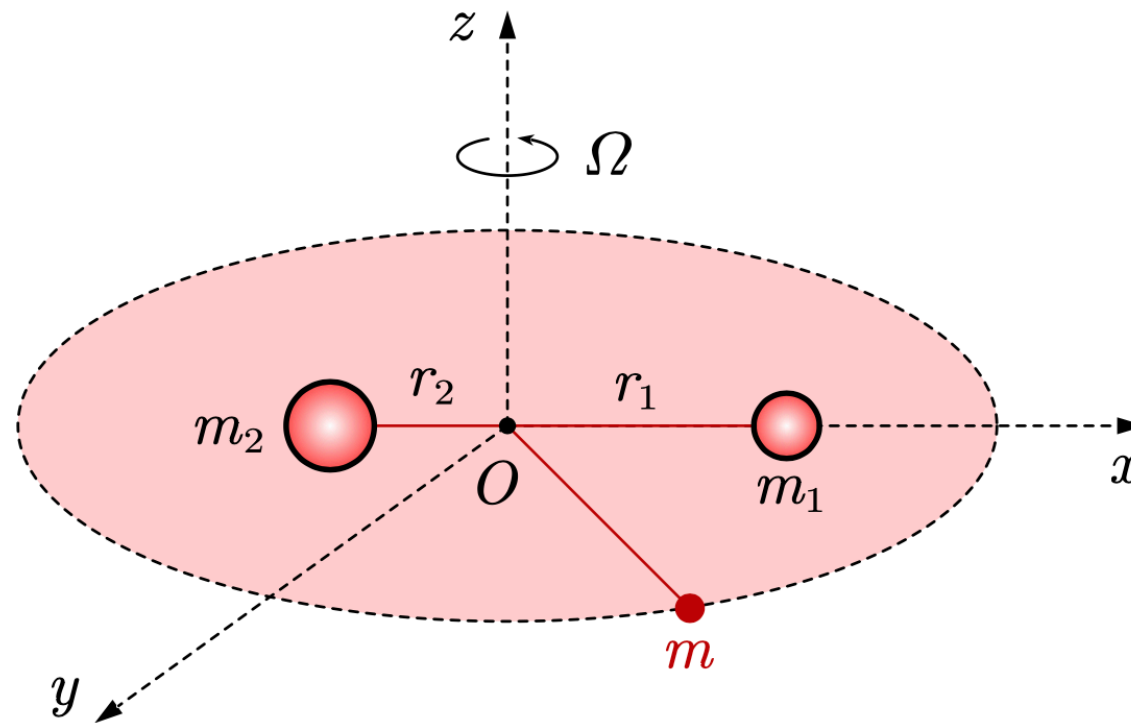
$$m_1 \gg m, \quad m_2 \gg m$$

- 两个大质量质点的相对运动应该由二者之间的万有引力决定，小质量质点的影响可以忽略
- 大质量质点的运动是简单的，但是小质量质点的运动却是复杂的
- 进一步限制一些简单情况：
  1. 将大质量质点的轨道近似为正圆。
  2. 三个质点在同一个平面内做二维运动。



# 受限三体系统

- 选择两个大质量质点  $m_1$  和  $m_2$  的质心系，并转换到与之同步旋转的非惯性系



$$m_1 r_1 \Omega^2 = m_2 r_2 \Omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{R^2}$$

$$r_1 + r_2 = R$$

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}, \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

# 科里奥利效应

- 我们现在研究一个转动坐标系中物体运动的行为（非惯性系）

如，我们观察地球（在自转）上的一物体的运动

速度

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{\textcolor{red}{r 是地球上的r}}$$

参考系 = 坐标系+观察者  
(位于原点)

加速度

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_s &= \left( \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right)_s = \left( \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_s \\ &= \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_s = \left( \frac{d}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \times$$

令  $\boldsymbol{\omega}$  为一常数，不随时间变化

- 牛顿方程（空间参考系）  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_s$

牛顿方程（本体参考系）

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_{eff} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

有效力！

# 科里奥利效应

- 我们现在研究一个转动坐标系中物体运动的行为（非惯性系）

如，我们观察地球（在自转）上的一物体的运动

速度

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{r} \text{ 是地球上的 } \mathbf{r}$$

参考系 = 坐标系+观察者  
(位于原点)

拉氏量

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_s^2 - V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_r^2 + m \mathbf{v}_r \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_s = \left( \frac{d}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega} \times$$

令  $\boldsymbol{\omega}$  为一常数，不随时间变化

- 运动方程

$$m \dot{\mathbf{v}}_r + m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r - m \mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega} - m \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F}_{eff} = \mathbf{F} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

有效力！

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

# 受限三体系统

- 选择两个大质量质点  $m_1$  和  $m_2$  的质心系，并转换到与之同步旋转的非惯性系

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - V(\mathbf{x})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}}}_{\text{科里奥利力}} - \underbrace{\nabla V_{\text{eff}}(\mathbf{x})}_{\text{有效势}}, \quad V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = \underbrace{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2}_{\text{离心力}} + \underbrace{V(\mathbf{x})}_{\text{引力}}$$

$$\nabla V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = 0$$

拉格朗日点:

离心力与引力平衡；若质点  $m$  在该点处的速度恰好为零，则科里奥利力为零。于是，质点的加速度为零，从而将永远静止于该点。

# 拉格朗日点

- 在运动平面内, 令质点  $m$  的坐标  $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y$

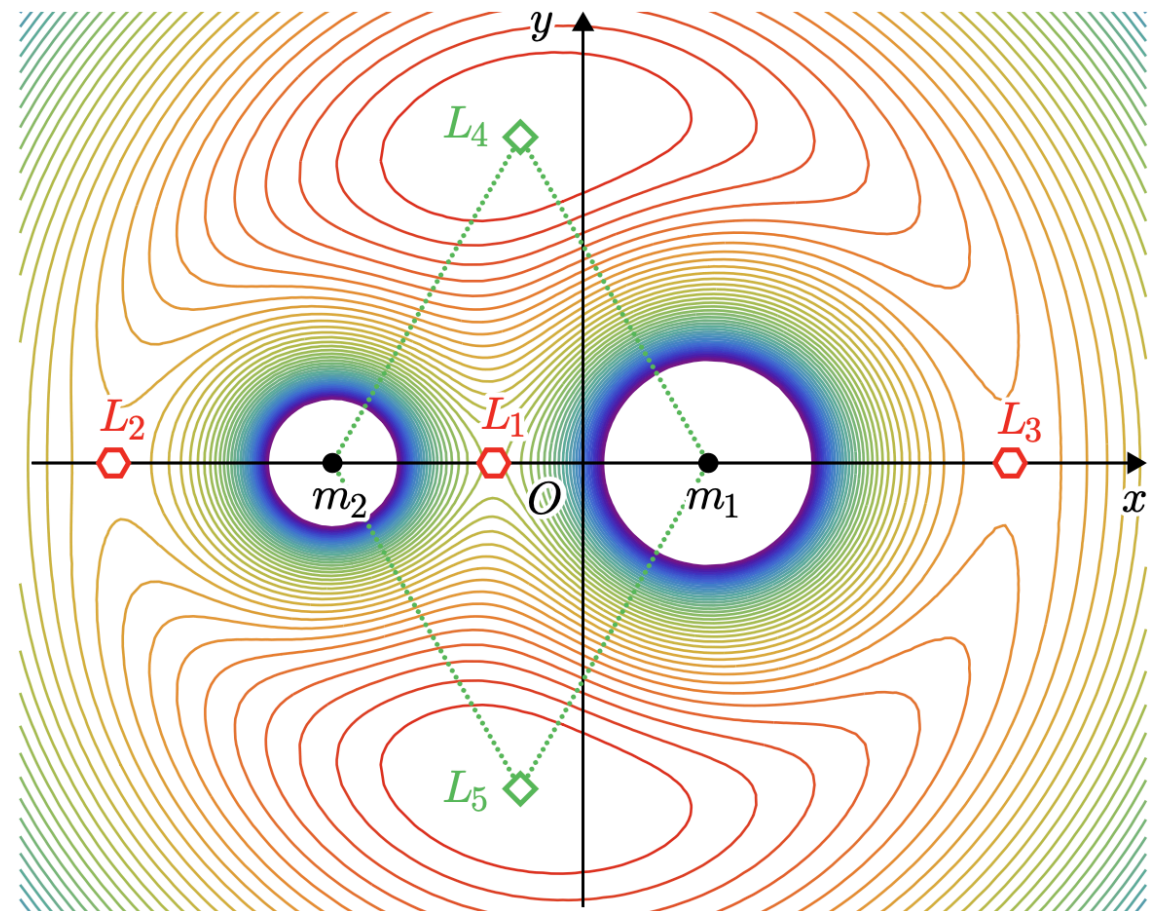
$$V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + V(\mathbf{x})$$

$$V_{\text{eff}}(x, y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x - r_1)^2 + y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x + r_2)^2 + y^2}}$$

$$\nabla V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{Gm_1(x_L - r_1)}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x_L + r_2)}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 x_L \\ \frac{Gm_1 y_L}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2 y_L}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 y_L \end{cases}$$

$$y_L = 0 \quad \text{or} \quad y_L \neq 0$$



# 拉格朗日点L1, L2, L3

令  $y_L = 0$

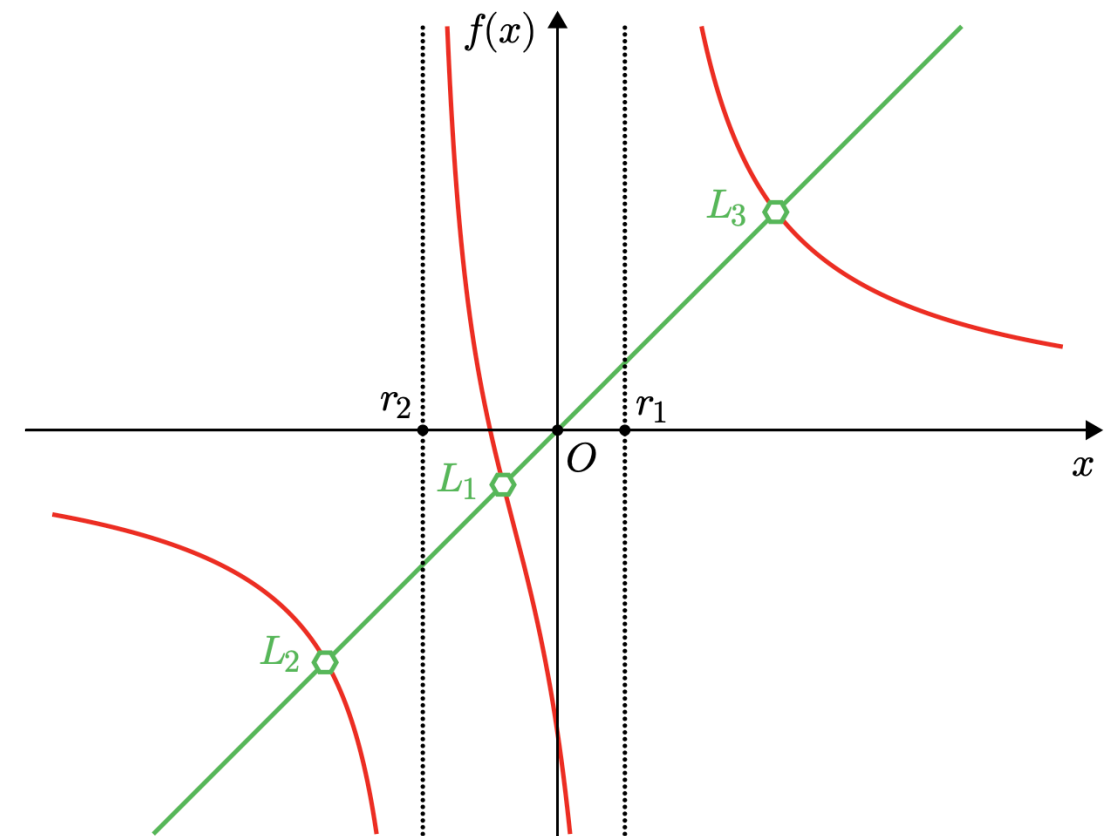
$$\begin{cases} \frac{Gm_1(x_L - r_1)}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x_L + r_2)}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 x_L \\ \frac{Gm_1 y_L}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2 y_L}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 y_L \end{cases}$$

$$r_2 \frac{R^2(x_L - r_1)}{|x_L - r_1|^3} + r_1 \frac{R^2(x_L + r_2)}{|x_L + r_2|^3} = x_L$$

取长度单位为  $R=1$ ，即可约去  $R$

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}, \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

通常约定，两质点中间的拉格朗日点为L1，两侧的拉格朗日点分别记为 L2 和 L3。





# 拉格朗日点L4, L5

令  $y_L \neq 0$

将第二式两边同时除以  $y_L$ ，并乘以  $x_L$  与第一式相减，

$$\begin{cases} \frac{-Gm_1 r_1}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2 r_2}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ \frac{Gm_1}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 \end{cases}$$

$$(x_L - r_1)^2 + y_L^2 = 1,$$

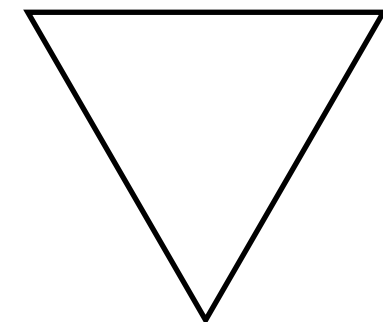
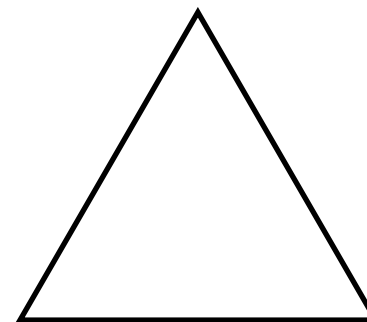
$$(x_L + r_2)^2 + y_L^2 = 1$$

取长度单位为  $R=1$ ，即可约去  $R$

$$\begin{cases} \frac{Gm_1(x_L - r_1)}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x_L + r_2)}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 x_L \\ \frac{Gm_1 y_L}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2 y_L}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 y_L \end{cases}$$

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}, \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

两组解：三个质点的坐标构成一个等边三角形。  
此时，两个拉格朗日点分别记为 L4 和 L5。



# 极限条件下的拉格朗日点

当  $m_2/m_1 \rightarrow 0$ , 有  $r_1 \rightarrow 0$ ,  $r_2 \rightarrow R$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}R$$

L1, L2, L3 满足

$$r_2 \frac{(x_L - r_1)}{|x_L - r_1|^3} + r_1 \frac{(x_L + r_2)}{|x_L + r_2|^3} = \mp \frac{1}{x_L^2} = x_L$$

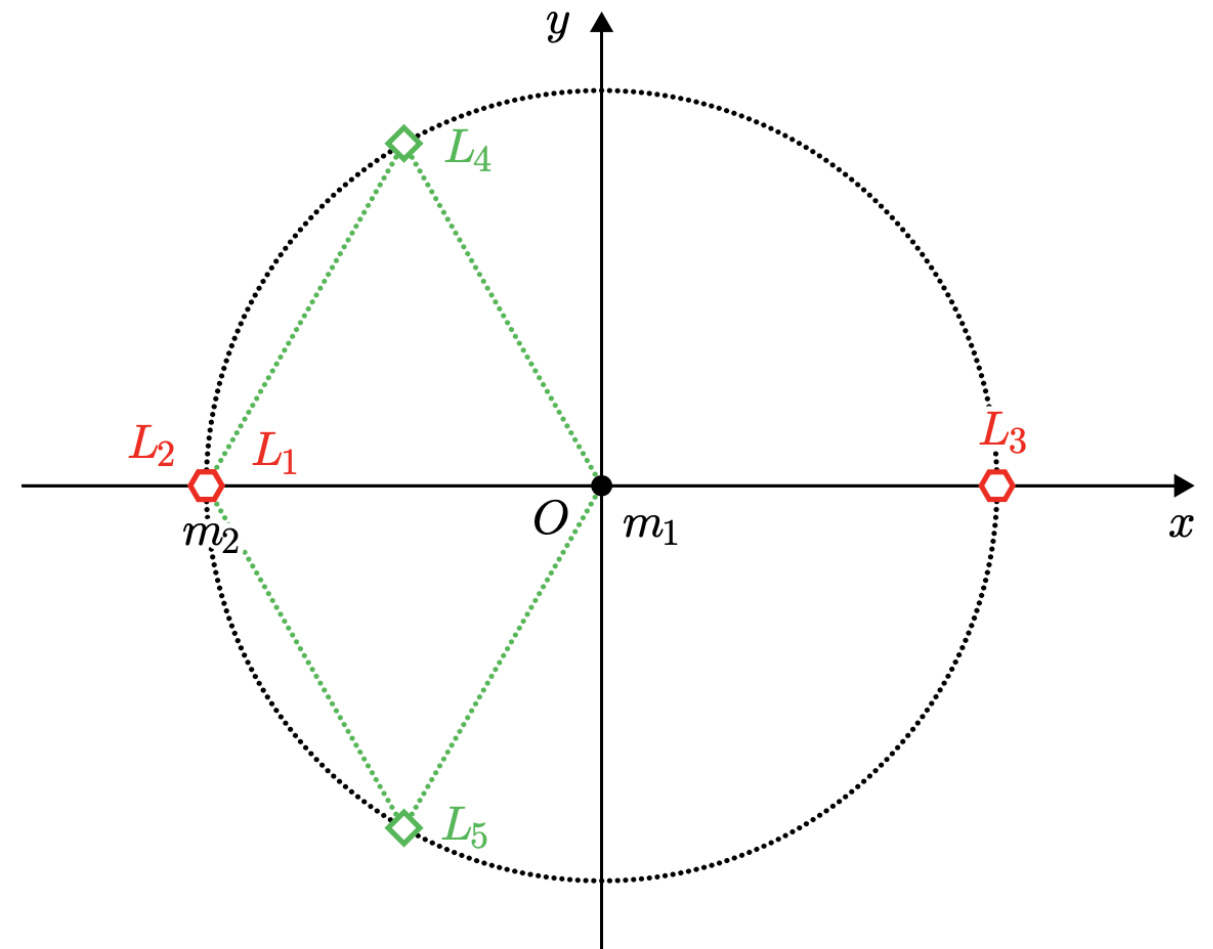
$$r_2 \frac{(x_L - r_1)}{|x_L - r_1|^3} + r_1 \frac{(x_L + r_2)}{|x_L + r_2|^3} = x_L$$



$$x_L = \mp 1$$

L4, L5 始终与两个大质量质点的坐标构成一个等边三角形, 不受该比值的影响

所有拉格朗日点都处于以质点  $m_1$  的坐标为圆心, 且  $R$  为半径的圆周上。



# 希尔半径

考虑  $m_2/m_1$  为一小量  $\epsilon$ , L1, L2 分别向两侧移动一个小量

$$x_{L\pm} = -r_2 + \delta_{\pm}$$

$$r_1 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \quad r_2 = \frac{1}{1+\epsilon}$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

$$r_2 \frac{(x_{L\pm} - r_1)}{|x_{L\pm} - r_1|^3} + r_1 \frac{(x_{L\pm} + r_2)}{|x_{L\pm} + r_2|^3} = -\frac{r_2}{(1 - \delta_{\pm})^2} \pm \frac{r_1}{\delta_{\pm}^2} = -r_2 + \delta_{\pm}$$

展开至  $\delta_{\pm}, \epsilon$  的最低次

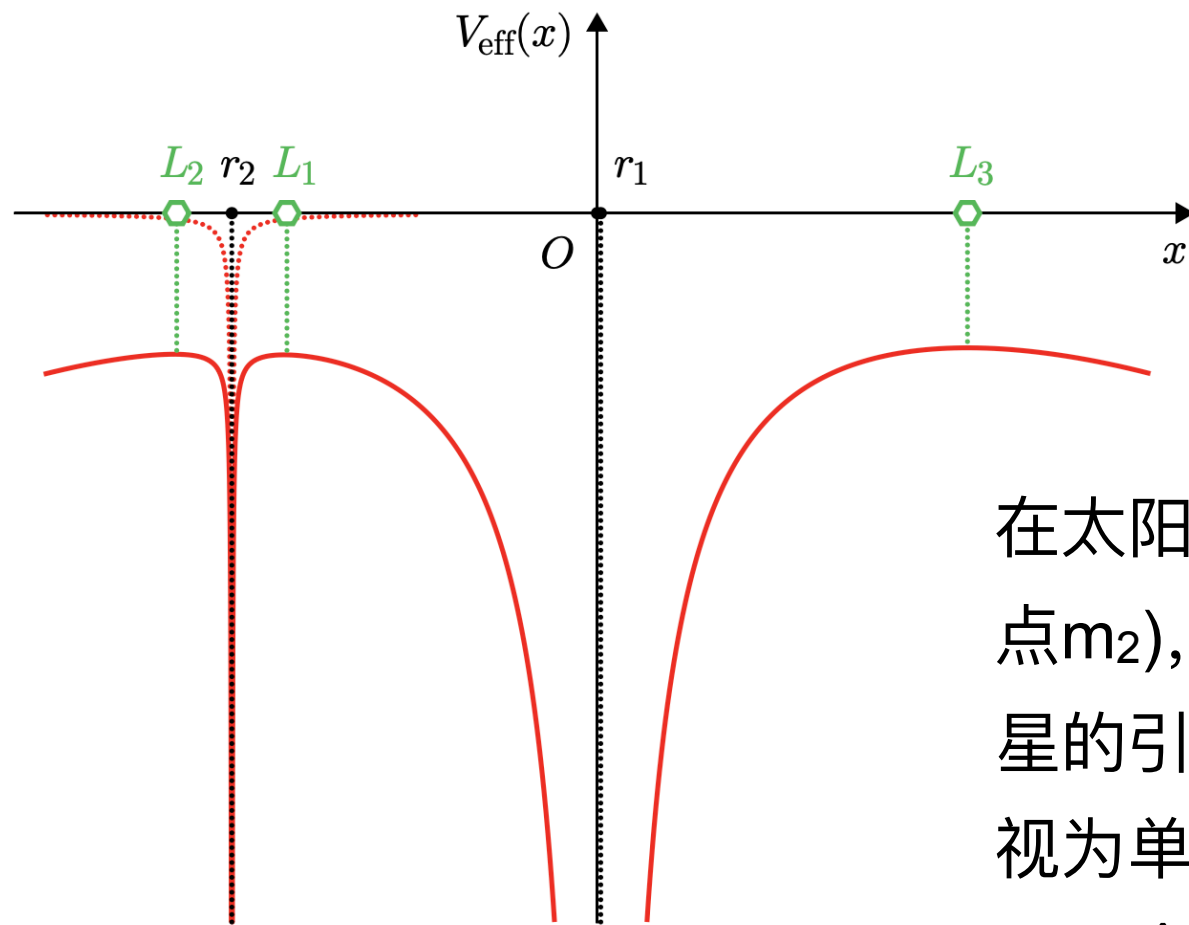
$$-2r_2\delta_{\pm} \pm \frac{r_1}{\delta_{\pm}^2} = \delta_{\pm} \Rightarrow -2\delta_{\pm} \pm \frac{\epsilon}{\delta_{\pm}^2} = \delta_{\pm} \Rightarrow \delta_{\pm} = \pm \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{1/3}$$

$$r_H = R \left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}$$

希尔半径

$$r_2 \frac{(x_L - r_1)}{|x_L - r_1|^3} + r_1 \frac{(x_L + r_2)}{|x_L + r_2|^3} = x_L$$

# 希尔半径



$$r_H = R \left( \frac{m_2}{3m_1} \right)^{1/3}$$

在太阳系中(太阳为大质量质点  $m_1$ 、行星为小质量质点  $m_2$ )，虽然任何小质量卫星  $m$  都同时受到太阳和行星的引力作用，但是若处于行星的希尔球内，则可以视为单独受到行星的引力作用。在希尔球内，除平移了一个常量外，有效势  $V_{\text{eff}}$  与质点  $m_2$  单独产生的势能形状几乎完全一致。

$$V_{\text{eff}}(x, y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x - r_1)^2 + y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x + r_2)^2 + y^2}}$$

# L3 的移动

考虑  $m_2/m_1$  为一小量  $\epsilon$ , L3 向外移动一个小量

$$x_{L_3} = 1 + \delta_3$$

$$r_1 = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}, \quad r_2 = \frac{1}{1 + \epsilon}$$

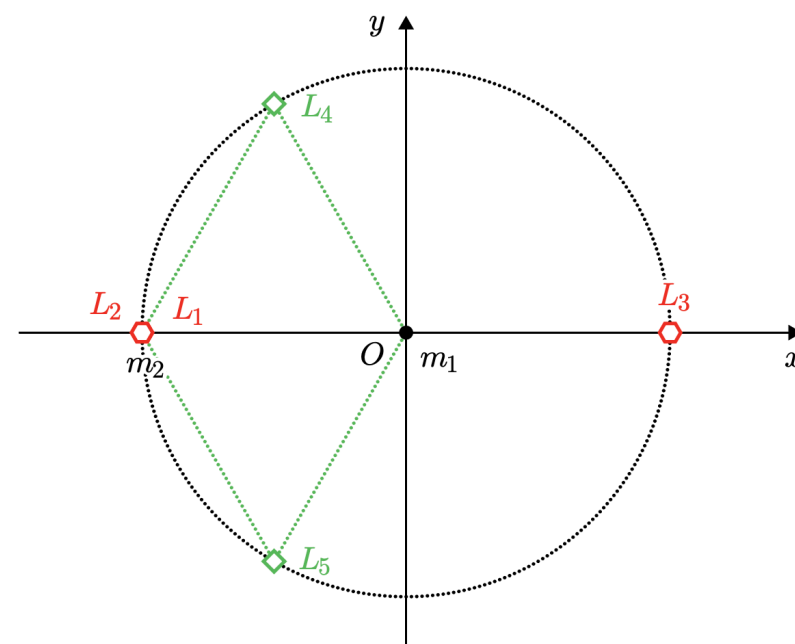
$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

$$r_2 \frac{(x_{L_3} - r_1)}{|x_{L_3} - r_1|^3} + r_1 \frac{(x_{L_3} + r_2)}{|x_{L_3} + r_2|^3} = \frac{r_2}{(r_2 + \delta_3)^2} + \frac{r_1}{(1 + r_2 + \delta_3)^2} = 1 + \delta_3$$

展开至  $\delta_{\pm}$ ,  $\epsilon$  的最低次

$$\frac{1}{r_2} - \frac{2\delta_3}{r_2^2} + \frac{r_1}{(1 + r_2)^2} = 1 + \delta_3$$

$$-2\delta_3 + \frac{5\epsilon}{4} = \delta_3 \Rightarrow \delta_3 = \frac{5\epsilon}{12}$$



# 拉格朗日点附近的运动

## 有效势的二次微分

$$\begin{cases} V_{\text{eff}}^{xx} = \frac{Gm_1[y^2 - 2(x - r_1)^2]}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{Gm_2[y^2 - 2(x + r_2)^2]}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{yy} = \frac{Gm_1[(x - r_1)^2 - 2y^2]}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{Gm_2[(x + r_2)^2 - 2y^2]}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{xy} = \frac{3Gm_1y(r_1 - x)}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{3Gm_2y(r_2 + x)}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} \end{cases}$$

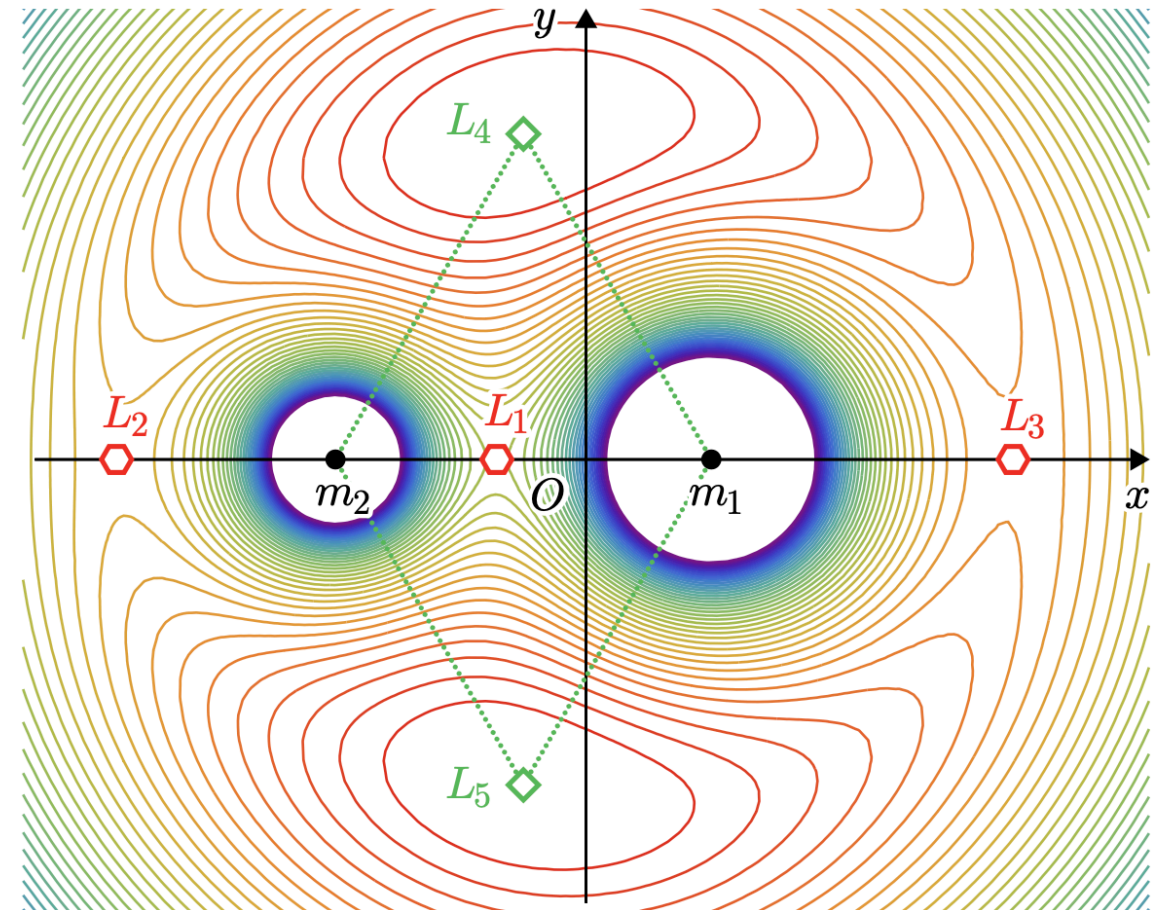
对于  $L_1, L_2, L_3$  ( $y=0$ )

$$\begin{cases} V_{\text{eff}}^{xx} = -\Omega^2 \left( 1 + \frac{2r_2}{|x_L - r_1|^3} + \frac{2r_1}{|x_L + r_2|^3} \right) < 0 \\ V_{\text{eff}}^{yy} = -\Omega^2 \left( 1 - \frac{r_2}{|x_L - r_1|^3} - \frac{r_1}{|x_L + r_2|^3} \right) > 0 \\ V_{\text{eff}}^{xy} = 0 \end{cases}$$

极大

极小

$$V_{\text{eff}}(x, y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x - r_1)^2 + y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x + r_2)^2 + y^2}}$$



$$M = \begin{bmatrix} V_{\text{eff}}^{xx} & 0 \\ 0 & V_{\text{eff}}^{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_x^2 & 0 \\ 0 & \omega_y^2 \end{bmatrix}$$



# 拉格朗日点附近的运动

## 有效势的二次微分

$$\begin{cases} V_{\text{eff}}^{xx} = \frac{Gm_1[y^2 - 2(x - r_1)^2]}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{Gm_2[y^2 - 2(x + r_2)^2]}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{yy} = \frac{Gm_1[(x - r_1)^2 - 2y^2]}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{Gm_2[(x + r_2)^2 - 2y^2]}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{xy} = \frac{3Gm_1y(r_1 - x)}{[(x - r_1)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{3Gm_2y(r_2 + x)}{[(x + r_2)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} \end{cases}$$

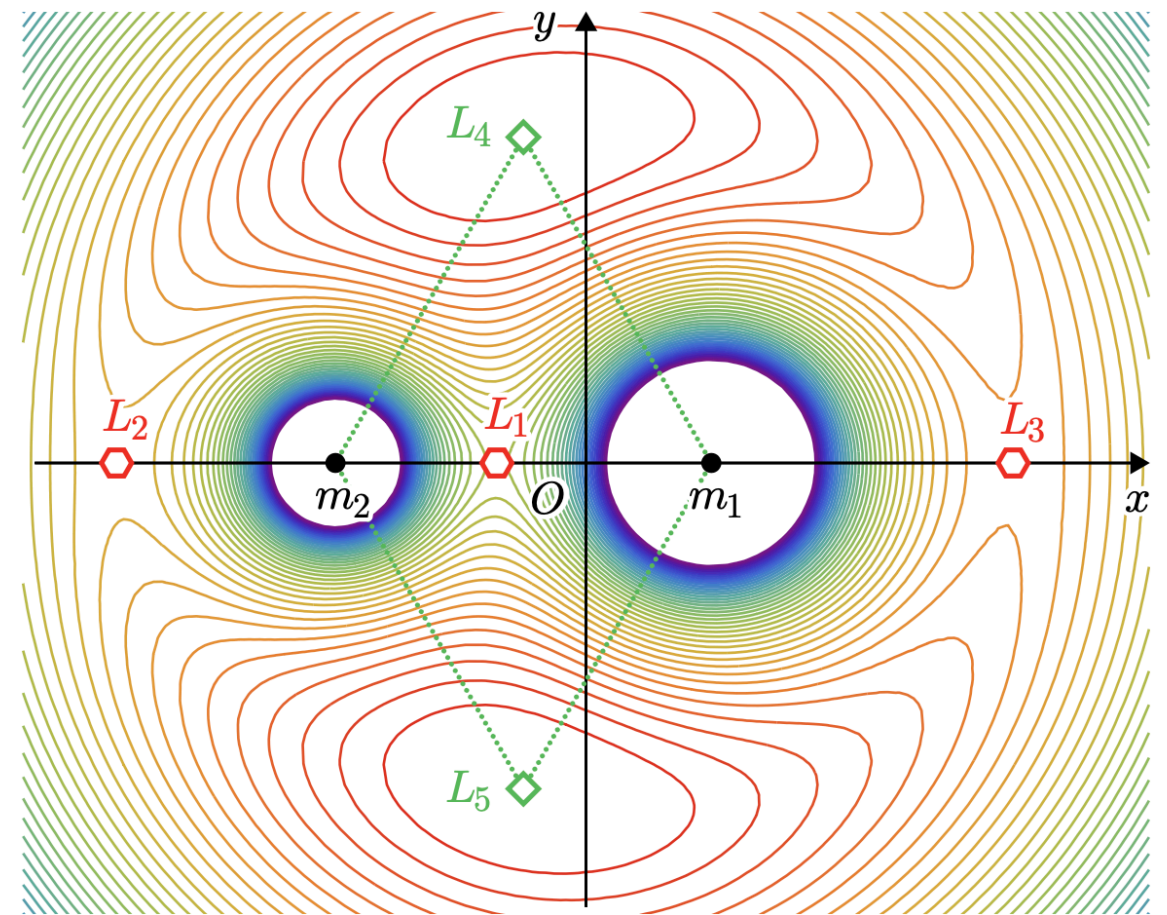
对于 L4, L5  $x_L = r_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - r_2, \quad y_L = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\mathbf{M} = -\frac{3\Omega^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & \pm\sqrt{3}\lambda \\ \pm\sqrt{3}\lambda & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

由于  $0 < \lambda < 1$ , 可知  $\mathbf{M}$  是一个负定矩阵 (所有本征值为负) **极大**

**验证!**

$$V_{\text{eff}}(x, y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x - r_1)^2 + y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x + r_2)^2 + y^2}}$$



# 拉格朗日点附近的运动方程

- 在拉格朗日点附近，质点  $m$  的坐标  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}$

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = V_{\text{eff}}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\nabla V_{\text{eff}}(\mathbf{x}_0) = 0$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}} - \nabla V_{\text{eff}}(\mathbf{x})$$

$$\cancel{\dot{\mathbf{x}}_0} + \ddot{\boldsymbol{\delta}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \cancel{\dot{\mathbf{x}}_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\delta}} - \cancel{\nabla V_{\text{eff}}(\mathbf{x}_0)} - \frac{1}{2} \nabla(\boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\delta})$$

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\delta} = 0$$



# 拉格朗日点附近的运动方程

试探解

$$\delta(t) = \mathbf{v} e^{\kappa t}$$

$$\ddot{\delta} + 2\mathbf{\Omega} \times \dot{\delta} + \mathbf{M} \cdot \delta = 0$$

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \kappa^2 & -2\kappa\mathbf{\Omega} \\ 2\kappa\mathbf{\Omega} & \kappa^2 \end{bmatrix} + \mathbf{M}$$

线性方程组

$$|\mathbf{M}'| = 0$$



$$\begin{cases} \kappa^4 + \kappa^2(4\Omega^2 - \omega_x^2 + \omega_y^2) - \omega_x^2\omega_y^2 = 0 \\ \kappa^4 + \kappa^2\Omega^2 + \frac{27}{16}(1 - \lambda^2)\Omega^4 = 0 \end{cases}$$

L1, L2, L3

L4, L5

$$\kappa^4 + b\kappa^2 + c = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L1, L2, L3 有发散解

L4, L5, 只有稳定解  $\kappa^2 < 0$

有效势极大点，但由于科氏力的作用，可以有稳定解！

小行星云

# 总结

- 两体有心运动的轨迹方程
- 圆锥曲线
- 有心运动的稳定性
- 受限三体运动
- 拉格朗日点
- 接下来：哈密顿力学