数学物理方法（上）第三次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1]北京大学物理学院

2025 年 3 月 13 日

题 1. 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1} |z-1||\mathrm{d}z|. \tag{1}$$

解. 设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$，于是得到

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} |z-1||\mathrm{d}z| &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 8.\end{aligned}$$ □

题 2. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析且处处满足 $|f(z)-1|<1$. 证明对 D 中的任意封闭曲线 C 有

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2}$$

（假设 $f'(z)$ 连续）.

证明. (方法 1) 由 $|f(z)-1|<1$ 有 $f(z)$ 在 D 上无零点，根据 $f'(z)$ 连续有 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 可积. 设 $F(z)=\ln f(z)$，由于 $f(z)$ 在 D 内满足 $|f(z)-1|<1$，因此 $F(z)$ 可在 D 上单值定义，由 $F'(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 有 $F(z)$ 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的原函数，因此命题成立. □

证明. (方法 2) 由 $f(z)$ 在 D 上解析有 $f'(z)$ 也在 D 上解析，由 $|f(z)-1|<1$ 有 $f(z)$ 在 D 上无零点，于是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 也在 D 上解析，因此命题成立. □

注. 方法 1 利用的定理是：若函数 $g(z)$ 在区域 D 内连续，则积分 $\int_C g(z)\,\mathrm{d}z$ 对 D 中任意分段可微闭曲线 C 都为零的充要条件是 $g(z)$ 存在原函数，这个定理不需要 $g(z)$ 解析. 方法 2 利用的是 *Cauchy* 公式导数的推论，这可以直接得到被积函数解析.

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

题 3. 证明当 $|a|<r<|b|$ 时

$$\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{a-b},\tag{3}$$

其中积分围道取正定向.

证明. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z-b}$，根据 Cauchy 积分公式有

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z,$$

因此得到

$$\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{a-b}.$$

□

题 4. 计算

$$\int_{|z|=r}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2},\qquad |a|\neq r.\tag{4}$$

解. 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$，于是 $|\mathrm{d}z|=\dfrac{r}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z$，再利用 $zz^*=r^2$ 有

$$|z-a|^2=(z-a)(z^*-a^*)=(z-a)(r^2/z-a^*)=\frac{a^*}{z}(z-a)(r^2/a^*-z),$$

于是可以得到

$$\int_{|z|=r}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}=-\frac{r}{\mathrm{i}a^*}\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-r^2/a^*)},$$

根据题 3 中的结论有

$$\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-r^2/a^*)}=\begin{cases}\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{a-r^2/a^*}, & |a|<r,\\[2ex] \dfrac{2\pi\mathrm{i}}{r^2/a^*-a}, & |a|>r,\end{cases}$$

由此得到

$$\int_{|z|=r}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}=\begin{cases}\dfrac{2\pi r}{r^2-|a|^2}, & |a|<r,\\[2ex] \dfrac{2\pi r}{|a|^2-r^2}, & |a|>r.\end{cases}$$

□

题 5. 证明 *Fresnel* 积分公式

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.\tag{5}$$

证明. 设 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$，取积分围道如图 1 所示，根据 Cauchy 定理有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

将两段直线积分分别参数化为 $z=x$ 和 $z=x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$，得到

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{C_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_R^0\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=0,$$

将圆弧积分参数化为 $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta}$，可以得到估计

$$\left|\int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{C_R} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}||\mathrm{d}z| = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta,$$

根据 Jordan 不等式 $\sin\theta \geqslant \dfrac{2}{\pi}\theta, \left(0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 有

$$R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4R}(1 - \mathrm{e}^{-R^2}),$$

于是可以得到

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = 0,$$

在 Cauchy 定理式中取 $R \to +\infty$ 的极限就有

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},$$

分别取实部和虚部得到

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \qquad \square$$

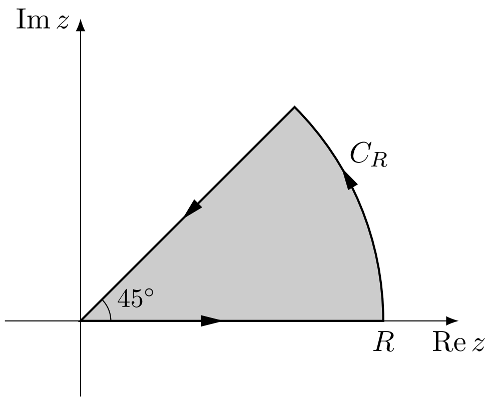

图 1: 题 5 积分围道示意图

题 6. 计算

$$\int_{|z|=r} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^4}, \quad |a| \neq r. \tag{6}$$

解. 根据题 4 中的计算有

$$\int_{|z|=r} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2} = \frac{r}{\mathrm{i}(a^*)^2} \int_{|z|=r} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-a)^2(z - r^2/a^*)^2},$$

当 $|a| < r$ 时，设 $f(z) = \dfrac{z}{(z - r^2/a^*)^2}$，根据 Cauchy 积分公式有

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,\mathrm{d}z,$$

于是可以得到

$$\int_{|z|=r} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-a)^2(z-r^2/a^*)^2} = -2\pi\mathrm{i}\frac{a+r^2/a^*}{(a-r^2/a^*)^3},$$

同理当 $|a|>r$ 时有

$$\int_{|z|=r} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-a)^2(z-r^2/a^*)^2} = -2\pi\mathrm{i}\frac{r^2/a^*+a}{(r^2/a^*-a)^3},$$

由此得到

$$\int_{|z|=r} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^4} = \begin{cases} 2\pi r\dfrac{r^2+|a|^2}{(r^2-|a|^2)^3}, & |a|<r, \\ 2\pi r\dfrac{|a|^2+r^2}{(|a|^2-r^2)^3}, & |a|>r. \end{cases}$$ □

题 7. (a) 设 $f(z)$ 在包含半径为 R_0，圆心在原点的圆盘的某个区域上解析. 证明当 $R<R_0$ 且 $|z|<R$ 时

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\right)\mathrm{d}\varphi. \tag{7}$$

(b) 证明

$$\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+r}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}. \tag{8}$$

(c) 设 $u(r,\varphi)$ 是单位圆盘上的调和函数，因此是某个单位圆盘上解析的复函数的实部（或虚部）. 用 *Cauchy* 积分公式证明其具有如下积分表示

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)u(1,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{9}$$

其中

$$P_r(\gamma) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}. \tag{10}$$

这个积分表示称为 *Poisson* 积分表示.

证明. (a) 根据 Cauchy 积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\zeta=|R|}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

设 $\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，有 $\mathrm{d}\zeta=\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$，于是得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\,\mathrm{d}\varphi,$$

由 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-R^2/z^*}$ 在 $|\zeta|\leqslant R$ 上解析，根据 Cauchy 定理有

$$0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\zeta=|R|}\frac{f(\zeta)}{\zeta-R^2/z^*}\,\mathrm{d}\zeta,$$

同理可以得到

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-R^2/z^*}\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\frac{z^*}{R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-z^*}\,\mathrm{d}\varphi,$$

将两式相减，直接计算有

$$\begin{aligned}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}+\frac{z^*}{R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-z^*}&=1+\frac{z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}+\frac{z^*}{R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-z^*}\\&=\mathrm{Re}\left(1+\frac{2z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\right),\end{aligned}$$

因此得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\right)\mathrm{d}\varphi.$$

(b) 直接计算有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\right)=\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}+\frac{z^*}{R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}-z^*}=\frac{R^2-|z|^2}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z|^2},$$

于是得到

$$\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+r}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r}\right)=\frac{R^2-r^2}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r|^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}.$$

(c) 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 并取 $R=1$，有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\right)=\frac{R^2-|z|^2}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2},$$

将 (a) 结论取实部就得到

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$ □

注. 在教材中有上半平面的 *Poisson* 积分公式：设 $f(z)$ 在上半平面解析，若 z 在上半平面趋于 ∞ 时 $f(z)$ 趋于 0，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

可以看出此时只需添加一项

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}\,\mathrm{d}\zeta,$$

即可得到相应的实部（或虚部）积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\zeta)\,\mathrm{Re}\left(\frac{2}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\zeta)\,\mathrm{Im}\left(\frac{2}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta.$$

而上半平面可以通过分式线性变换共形映射到圆盘，例如 $g(z)=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}R$，因此相应的 *Poisson* 积分公式也应具有相似的形式，此时对称点变为 z 和 R^2/z^*，例如可以通过计算 $g(z)(g(z^*))^*=R^2$ 验证.

题 8. 在 $\ln z$ 的任意一个主值分支内，从复线积分的定义出发计算如下围道积分

$$\int_C \ln z\,\mathrm{d}z, \tag{11}$$

其中围道 C 如图 *2* 所示，$R>r>0$，$\varepsilon\to0^+$.

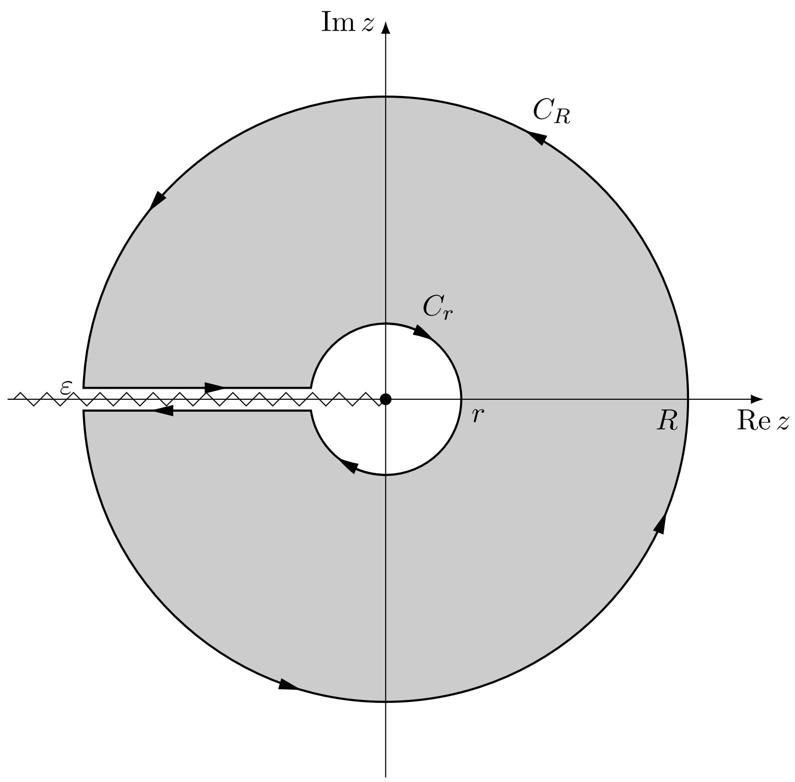

图 2: 题 8 积分围道示意图

解. 选定 $k \in \mathbb{Z}$ 并取单值分支

$$-\pi + 2k\pi < \arg z < \pi + 2k\pi,$$

先计算在大圆弧上的积分，设 $z = Re^{\mathrm{i}\theta}$，有 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$，于是得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_R}\ln z\,\mathrm{d}z &= \mathrm{i}R\int_{-\pi+2k\pi}^{\pi+2k\pi}(\ln R+\mathrm{i}\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= R(\ln R+\mathrm{i}\theta-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big|_{\theta=-\pi+2k\pi}^{\theta=\pi+2k\pi} = -2\pi\mathrm{i}R,\end{aligned}$$

同理在小圆弧上的积分有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{C_r}\ln z\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}r,$$

对于在割线上下岸的积分，分别设 $z = -x \pm \mathrm{i}\varepsilon$，可以得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_r^R[\ln(-x+\mathrm{i}\varepsilon)-\ln(-x-\mathrm{i}\varepsilon)]\,\mathrm{d}x\\ =&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{i}\int_r^R[\arg(-x+\mathrm{i}\varepsilon)-\arg(-x-\mathrm{i}\varepsilon)]\,\mathrm{d}x\\ =&\,\mathrm{i}\int_r^R[(\pi+2k\pi)-(-\pi+2k\pi)]\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}(R-r),\end{aligned}$$

综上有

$$\int_C \ln z\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}R + 2\pi\mathrm{i}r + 2\pi\mathrm{i}(R-r) = 0.$$

□