16 柱函数

Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

在柱坐标系 (r, θ, z) 中为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \tag{2}$$

分离变量

$$u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

后, 可得三方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left(k^2 - \lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \mu\Theta = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} + \lambda Z = 0 \tag{5}$$

μ, λ 为常数.

对于径向方程, 如果 $k^2 - \lambda \neq 0$. 作变换

$$x = \sqrt{k^2 - \lambda}\, r$$
$$y(x) = R(r)$$

并令 $\mu = \nu^2$, 方程变为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0 \tag{6}$$

称为 ν 阶 Bessel 方程.

在“二阶线性常微分方程的幂级数解法”一章, 我们求解过方程:

1. $\nu \neq$整数时, Bessel 方程的两个正则解都不含对数项

$$J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k \pm \nu + 1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu} \tag{7}$$

   为 $\pm\nu$ 阶 Bessel 函数.

2. $\nu =$整数, 第一解 $J_n(x)$ 仍为 Bessel 函数, 这时

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

   第二解一定含有对数项, 为 Neumann 函数, 以后讨论.

16.1 Bessel 函数的基本性质

整数阶 Bessel 函数的性质.

1. 负整数阶 Bessel 函数

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{8}$$

2. 奇偶性

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \tag{9}$$

3. 生成函数 在幂级数展开一章, 我们得到

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n \tag{10}$$

此即整数阶 Bessel 函数的生成函数.

4. 生成函数中令 $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{11}$$

于是

$$\begin{aligned}
J_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)^*\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(x\sin\theta-n\theta)\\
&\qquad+\mathrm{i}\sin(x\sin\theta-n\theta)]\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned} \tag{12}$$

为 $J_n(x)$ 的积分表示.

5. 生成函数中令 $t=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\\
&=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}^nJ_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\mathrm{i}^{-n}J_{-n}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right]\\
&=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}^nJ_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\mathrm{i}^{-n}(-1)^nJ_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right]\\
&=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^nJ_n(x)\cos n\theta
\end{aligned} \tag{13}$$

平面波按柱面波展开 波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-v^2\nabla^2u=0$$

平面波解 ($\omega^2=v^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)$)

$$\begin{aligned}
u(\vec{r},t)&=u(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_yy}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}
\end{aligned}$$

柱面波解 ($\omega^2=v^2(k_r^2+k_z^2)$)

$$\begin{aligned}
u(\vec{r},t)&=u(r,\theta,z,t)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t)\\
&=J_n(k_rr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}
\end{aligned}$$

设平面波沿 x 轴垂直于 z 轴传播

$$e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_r r\cos\theta-\omega t)}$$

用柱面波表示

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_r r\cos\theta-\omega t)}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^n J_n(k_r r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\&=J_0(k_r r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n J_n(k_r r)\cos n\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

任意阶 Bessel 函数性质

6. Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right]=-x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{15}$$

很容易由 Bessel 函数的定义得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu)}\frac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}}\\&=x^\nu J_{\nu-1}(x)\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k-1}}{2^{2k+\nu-1}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!\Gamma(k+\nu+2)}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+\nu+1}}\\&=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

从这两个递推关系中消去 $J_\nu(x)$ 或 $J'_\nu(x)$, 可得

$$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_\nu(x) \tag{16}$$

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \tag{17}$$

由(17), 对于整数阶 Bessel 函数, 已知 $J_0(x)$, $J_1(x)$, 就可求得 $J_2(x)$, $J_3(x)$, ... 即 $J_n(x)$ 可用 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 表示.

由(16), $J'_n(x)$ 也可用 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 表示.

7. Bessel 函数的渐近展开 $x \to 0$ 时

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}) \tag{18}$$

$x \to \infty$

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg x| < \pi \tag{19}$$

8. Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的 Wronski 行列式

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix}$$

由 J_ν 满足方程 Bessel, 方程为二阶线性常微分方程

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = A\exp\left[-\int^x p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

对于 Bessel 方程, $p(x) = \frac{1}{x}$, 所以

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = A\exp[-\ln x + B] = \frac{C}{x}$$

令 $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
&W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] \\
=&\begin{vmatrix} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu & \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\frac{1}{2} & \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1}\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\right] \\
=&-\frac{2}{x}\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{x}\frac{\sin\pi\nu}{\pi}
\end{aligned}$$

所以, $C = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu$.

或令 $x \to \infty$, $|\arg x| < \pi$, 也得

$$\begin{aligned}
&W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = \\
&\begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{vmatrix} \\
&= -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu
\end{aligned}$$

9. 实数阶 (ν 实数) Bessel 函数的零点 当 $\nu > -1$时,

   (a) J_ν 有无穷多个零点,

   (b) 它们全部都是实数,

   (c) 对称地分布在实轴上.

   证明如下

(a) 无穷多个零点可由渐近表达式 $x \to \infty$

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

看出. Bessel 函数为振荡函数,

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

为零点的近似值.

(b) 先证明当 $\nu > -1$ 时

$$\begin{aligned}&(a^2 - b^2)\int_0^x tJ_\nu(at)J_\nu(bt)dt\\ =&x\left[J_\nu(ax)\frac{\mathrm{d}J_\nu(bx)}{\mathrm{d}x} - J_\nu(bx)\frac{\mathrm{d}J_\nu(ax)}{\mathrm{d}x}\right]\end{aligned} \tag{20}$$

由

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\frac{\mathrm{d}J_\nu(at)}{\mathrm{d}t}\right] + \left(a^2 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)J_\nu(at) = 0\\ \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\frac{\mathrm{d}J_\nu(bt)}{\mathrm{d}t}\right] + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)J_\nu(bt) = 0\end{aligned}$$

分别以 $tJ_\nu(bt)$ 和 $tJ_\nu(at)$ 乘两式, 相减, 再积分

$$\begin{aligned}&(a^2 - b^2)\int_0^x tJ_\nu(at)J_\nu(bt)dt\\ =&\left[tJ_\nu(at)\frac{\mathrm{d}J_\nu(bt)}{\mathrm{d}t} - tJ_\nu(bt)\frac{\mathrm{d}J_\nu(at)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}^{t=x}\end{aligned}$$

利用 $J_\nu(z)$ 的级数表达式, 当 $\nu > -1$ 时, 右方括号在 $t = 0$ 之值为 0.
由于 $J_\nu(z)$ 的级数表达式中的系数都是实数, 故

$$J_\nu^*(z) = J_\nu(z^*) \tag{21}$$

今设 α 为 $J_\nu(z)$ 的复数零点,

$$J_\nu(\alpha^*) = J_\nu^*(\alpha) = 0$$

所以, α^* 也是 $J_\nu(z)$ 的零点, 取 $a = \alpha$, $b = \alpha^*$, $x = 1$, 得

$$(\alpha^2 - \alpha^{*2})\int_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\alpha^* t)dt = 0$$

而

$$\begin{aligned}&\int_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\alpha^* t)dt\\ =&\int_0^1 t\left|J_\nu(\alpha t)\right|^2 dt > 0\end{aligned}$$

故

$$\alpha^2 = \alpha^{*2} \qquad \alpha = \pm\alpha^*$$

所以 α 只能是实数或纯虚数.

但零点不能为纯虚数, 因为

$$\begin{aligned}J_\nu(\mathrm{i}\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= \left(\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}\end{aligned}$$

若 $\nu > -1$, 则 求和 > 0.

(c) 同样, 由级数表达式可得 $J_\nu(\alpha) = 0$, 则 $J_\nu(-\alpha) = 0$, 所以 $J_\nu(x)$ 的零点对称地分布在实轴上.

进一步, 由

Rolle 罗尔定理 若

(a) $f(x)$在$[a,b]$上连续.

(b) $f(x)$在(a,b)内可导.

(c) $f(a) = f(b)$.

则存在$\xi \in (a,b)$, 使$f'(\xi) = 0$.

和递推关系可知道, $J_\nu(x)$ 的相邻两个零点之间必定有 $J_{\nu\pm1}(x)$ 的一个零点.

16.2 Neumann 诺伊曼函数

当 ν 不等于整数时, $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 是 Bessel 方程的两个线性无关的解, 这时

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu$$

当 ν 为整数时,

$$W[J_n(x), J_{-n}(x)] = 0$$

说明它们线性相关, 第二解一定含有对数项. 定义 Neumann 函数

$$N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

它也是 Bessel 方程的解, 且

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = \frac{2}{\pi x}$$

Neumann 函数当 $n \to$ 整数 时, 为 $\frac{0}{0}$ 的极限. 所以整数阶的 Neumann 函数为

$$\begin{aligned}N_n(x) &= \lim_{\nu\to n}\frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \\ &= \frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)] \\ &\qquad \times\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\end{aligned} \tag{22}$$

其中对数函数中, 辐角 $|\arg x| < \pi$.

因为 Wronski 行列式总不为零, 所以 $N_n(x)$ 为与 $J_n(x)$ 线性无关的第二解.

渐近行为

$x \to 0$ 时

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\nu > 0 && N_\nu(x) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \\ &\nu = 0 && N_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \end{aligned}$$

所以 $x=0$ 为 Neumann 函数的奇点. $x \to \infty$ 时

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg x| < \pi$$

递推关系

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu N_\nu(x)\right] &= x^\nu N_{\nu-1}(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} N_\nu(x)\right] &= -x^{-\nu} N_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

Neumann 函数的递推关系的形式与 Bessel 函数完全相同. Bessel 函数又称为第一类柱函数, Neumann 函数称为第二类柱函数.

16.3 柱函数

凡是满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu C_\nu(x)\right] = x^\nu C_{\nu-1}(x) \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} C_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} C_{\nu+1}(x) \tag{24}$$

的函数 $\{C_\nu(x)\}$, 统称为柱函数. 前面介绍的 Bessel 函数和 Neumann 函数都是柱函数. 可以证明, 柱函数一定是 Bessel 函数的解:

Proof (23)改写为

$$C'_\nu(x) + \frac{\nu}{x}C_\nu(x) = C_{\nu-1}(x) \tag{25}$$

(24)改写为

$$C'_\nu(x) - \frac{\nu}{x}C_\nu(x) = -C_{\nu+1}(x)$$

即

$$C'_{\nu-1}(x) - \frac{\nu-1}{x}C_{\nu-1}(x) = -C_\nu(x)$$

再将(25)代入, 消去 $C_{\nu-1}(x)$

$$\begin{aligned} C''_\nu(x) + \frac{\nu}{x}C'_\nu(x) - \frac{\nu}{x^2}C_\nu(x) - \frac{\nu-1}{x}C'_\nu(x) \\ -\frac{(\nu-1)\nu}{x^2}C_\nu(x) = -C_\nu(x) \end{aligned}$$

即

$$C''_\nu(x) + \frac{1}{x}C'_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)C_\nu(x) = 0$$

□

16.4 含 Bessel 函数的积分

在应用 Bessel 函数求解定解问题时, 自然会涉及的计算含 Bessel 函数的积分.

1. 被积函数为幂函数与 Bessel 函数的乘积.
$$\int x^{\mu} J_{\nu}(x) \mathrm{d} x$$
2. Bessel 函数的模方计算
$$\int x J_{\nu}^{2}(x) \mathrm{d} x$$
注意 Bessel 方程为 Sturm-Liouvelle 方程, 权重函数为 $\rho(x)=x$ (见下章).

幂函数与 Bessel 函数之积

$$\int x^{\mu} J_{\nu}(x) \mathrm{d} x$$

由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}\left(x^{\nu} J_{\nu}\right)=x^{\nu} J_{\nu-1}$$

得

$$\begin{aligned}
&\int x^{\mu} J_{\nu}(x) \mathrm{d} x \\
=&\int x^{\mu-\nu-1} x^{\nu+1} J_{\nu}(x) \mathrm{d} x \\
=&x^{\mu-\nu-1} x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \\
&-(\mu-\nu-1) \int x^{\mu-\nu-2} x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \mathrm{d} x \\
=&x^{\mu} J_{\nu+1}(x)-(\mu-\nu-1) \int x^{\mu-1} J_{\nu+1}(x) \mathrm{d} x
\end{aligned}$$

所以, 分部积分一次, 积分换成 $\int x^{\mu-1} J_{\nu+1}(x) \mathrm{d} x$, ..., 分部积分 n 次, 积分换成 $\int x^{\mu-n} J_{\nu+n}(x) \mathrm{d} x$.

若 $(\mu-n)=(\nu+n)+1$, 则此时积分可积出,

$$\int x^{(\nu+n)+1} J_{\nu+n}(x) \mathrm{d} x=x^{\nu+n+1} J_{\nu+n+1}(x)$$

所以, 当 $\mu-\nu=2 n+1$ 时, 积分可通过 n 次分部积分积出.

又由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}\left(x^{-\nu} J_{\nu}\right)=-x^{-\nu} J_{\nu+1}$$

得

$$\begin{aligned}
&\int x^{\mu} J_{\nu}(x) \mathrm{d} x \\
=&\int x^{\mu+\nu-1} x^{-\nu+1} J_{\nu}(x) \mathrm{d} x \\
=&-x^{\mu+\nu-1} x^{-\nu+1} J_{\nu-1}(x) \\
&+(\mu+\nu-1) \int x^{\mu+\nu-2} x^{-\nu+1} J_{\nu-1}(x) \mathrm{d} x \\
=&-x^{\mu} J_{\nu-1}(x)+(\mu+\nu+1) \int x^{\mu-1} J_{\nu-1}(x) \mathrm{d} x
\end{aligned}$$

所以, 分部积分一次, 积分换成 $\int x^{\mu-1}J_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x$, ..., 分部积分 n 次, 积分换成 $\int x^{\mu-n}J_{\nu-n}(x)\mathrm{d}x$.

若 $(\mu-n)=-(\nu-n)+1$, 则此时积分可积出,

$$\int x^{-(\nu-n)+1}J_{\nu-n}(x)\mathrm{d}x=-x^{-(\nu-n)+1}J_{\nu-n-1}(x)$$

所以, 当 $\mu+\nu=2n+1$ 时, 积分也可通过 n 次分部积分积出.

Bessel 函数的模方计算

$$\int xJ_\nu^2(x)\mathrm{d}x$$

由 Bessel 方程

$$\frac{1}{x}(xJ_\nu')'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu=0$$

乘以 x^2J_ν'

$$\frac{1}{2}(xJ_\nu')^{2\prime}+\frac{1}{2}x^2(J_\nu^2)'-\frac{\nu^2}{2}(J_\nu^2)'=0$$

积分, 并对第二项作一次分部积分

$$\frac{1}{2}(xJ_\nu')^2-\frac{\nu^2}{2}J_\nu^2+\frac{1}{2}x^2J_\nu^2-\int xJ_\nu^2\mathrm{d}x+C=0$$

所以

$$\int xJ_\nu^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(xJ_\nu')^2+\frac{1}{2}(x^2-\nu^2)J_\nu^2+C$$

利用递推关系$(x^{-\nu}J_\nu)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$, 消去$J_\nu'=\frac{\nu}{x}J_\nu-J_{\nu+1}$, 还可得到

$$\int xJ_\nu^2\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}(J_\nu^2+J_{\nu+1}^2)-\nu xJ_\nu J_{\nu+1}+C$$

16.5 Bessel 方程的本征值问题

Example 16.1 (求四周固定的圆形薄膜的振动问题) 取平面极坐标系, 偏微分方程为

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}\right]=0$$

c 代表波速. 边界条件和初始条件

$$u|_{r=0}\text{有界}\qquad u|_{r=a}=0$$

$$u|_{\phi=0}=u|_{\phi=2\pi}\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

$$u|_{t=0}=f(r,\phi)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r,\phi)$$

Solution 分离变量

$$u(r,\phi,t)=R(r)\Phi(\phi)T(t)$$

得

$$
\begin{aligned}
&\Phi''(\phi)+m^2\Phi(\phi)=0\\
&\Phi(0)=\Phi(2\pi)\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\\
&\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0\\
&R(0)\text{有界}\qquad R(a)=0\\
&T''(t)-c^2k^2T(t)=0
\end{aligned}
$$

Φ 本征值问题解, 采用复本征函数

$$
\begin{array}{ll}
\text{本征值} & m^2\qquad m=0,\pm1,\pm2,...\\
\text{本征函数} & \Phi_m(\phi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}
\end{array}
$$

R 本征值问题, 令 $x=kr$, $y(x)=R(r)$, 则方程化为 Bessel 方程, 所以方程通解

$$R(r)=CJ_m(kr)+DN_m(kr)$$

$R(0)$ 有界, $D=0$. $R(a)=0$, 而 $C\neq0$, 得

$$J_m(ka)=0$$

设 $\mu_i^{(m)}$ 是 m 阶 Bessel 函数 $J_m(x)$ 的第 i 个正零点.

$$J_m(\mu_i^{(m)})=0\qquad \mu_i^{(m)}>0\qquad i=1,2,3,...$$

则 $ka=\mu_i^{(m)}$, 所以

$$
\begin{array}{ll}
\text{本征值} & k_{mi}^2=\left(\dfrac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2\qquad i=1,2,3,...\\
\text{本征函数} & R_{mi}(r)=J_m(k_{mi}r)=J_m\left(\dfrac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right)
\end{array}
$$

代入 T 方程得

$$T_{mi}(t)=A_{mi}\cos\omega_{mi}t+B_{mi}\sin\omega_{mi}t$$

其中

$$\omega_{mi}=ck_{mi}=\frac{c\mu_i^{(m)}}{a}$$

称为圆形薄膜的固有频率.

特解

$$
\begin{aligned}
u_{mi}(r,\phi,t)=J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}&\\
\times\left(A_{mi}\cos\omega_{mi}t+B_{mi}\sin\omega_{mi}t\right)&
\end{aligned}
$$

一般解

$$
\begin{aligned}
u(r,\phi,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)}r}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}&\\
\times\left(A_{mi}\cos\omega_{mi}t+B_{mi}\sin\omega_{mi}t\right)&
\end{aligned}
$$

代入初始条件

$$
\begin{aligned}
u|_{t=0} &= f(r,\phi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= g(r,\phi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_{mi} B_{mi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}
\end{aligned}
$$

写出正交关系

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\right)^* \mathrm{d}\phi = 2\pi\delta_{mn} \\
&\int_0^a J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) J_m\left(\frac{\mu_j^{(m)} r}{a}\right) r\mathrm{d}r \\
&\quad = \left\| J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\|^2 \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

注意权重 $\rho(r) = r$.

利用上节公式计算模方

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a J_m^2\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) r\mathrm{d}r \\
=&\left\{\frac{1}{2} r^2 J_m'^2\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right. \\
&\left.+\ \frac{1}{2}\left[r^2 - m^2\left(\frac{a}{\mu_i^{(m)}}\right)^2\right] J_m^2\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\}_0^a \\
=&\frac{1}{2} a^2 J_m'^2\left(\mu_i^{(m)}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
A_{mi} &= \frac{1}{2\pi\left\|J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\|^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \\
&\quad \times f(r,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \\
B_{mi} &= \frac{1}{2\pi\left\|J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\|^2 \omega_{mi}}\int_0^a\int_0^{2\pi} J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right) \\
&\quad \times g(r,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
2\pi\left\|J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\|^2 &= \pi a^2 J_m'^2\left(\mu_i^{(m)}\right) \\
2\pi\left\|J_m\left(\frac{\mu_i^{(m)} r}{a}\right)\right\|^2 \omega_{mi} &= \pi a c \mu_i^{(m)} J_m'^2\left(\mu_i^{(m)}\right)
\end{aligned}
$$

□

下面讨论一个具体问题.

Example 16.2 圆柱体的冷却. 设有一个无穷长的圆柱体, 半径为 a. 采用柱坐标系, z 轴即为圆柱体的对称轴. 如果柱体的表面温度维持为 0, 初温为 $u_0 f(r)$, 试求柱体内温度的分布和变化.

Solution 显然, 温度 u 与 ϕ, z 无关

$$u = u(r,t)$$

定解问题为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \\ &u|_{r=0}\text{有界} \qquad u|_{r=a} = 0 \\ &u|_{t=0} = u_0 f(r) \end{aligned}$$

分离变量

$$u(r,t) = R(r)T(t)$$

...

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right] + k^2 R(r) = 0 \\ &R(0)\text{有界} \qquad R(a) = 0 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} &\text{本征值} && k_i^2 = \left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 \\ &\text{本征函数} && R_i(r) = J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &J_0(\mu_i) = 0 \qquad i = 1,2,3,... \\ &T' + \kappa k_i^2 T = 0 \end{aligned}$$

所以

$$T_i(t) = c_i \exp\left[-\kappa\left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$$

特解

$$u_i(r,t) = c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\exp\left[-\kappa\left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$$

一般解

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\exp\left[-\kappa\left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right]$$

代入初条件

$$u(r,t)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) = u_0 f(r)$$

所以

$$c_i = \frac{1}{\left\|J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\right\|^2}\int_0^a u_0 f(r) J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) r\mathrm{d}r$$

其中

$$\left\|J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2}a^2 J_0'^2(\mu_i)$$

由递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

得

$$J_0'(\mu_i) = -J_1(\mu_i)$$

所以

$$\left\|J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2}a^2 J_1^2(\mu_i)$$

设 $f(r) = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2$

$$c_i = \frac{2u_0}{a^2 J_1^2(\mu_i)} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) r\mathrm{d}r$$

令 $\frac{r}{a} = x$

$$c_i = \frac{2u_0}{J_1^2(\mu_i)} \int_0^1 (1-x^2) J_0(\mu_i x) x\mathrm{d}x$$

x的幂次$-J$的幂次 $=$ 奇数, 积分可递推求出

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-x^2) J_0(\mu_i x) x\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 (1-x^2) \frac{1}{\mu_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(\mu_i x)]\mathrm{d}x \\
=&(1-x^2)\frac{1}{\mu_i}xJ_1(\mu_i x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu_i}\int_0^1 x^2 J_1(\mu_i x)\mathrm{d}x \\
=&\frac{2}{\mu_i^2}x^2 J_2(\mu_i x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\mu_i^2}J_2(\mu_i)
\end{aligned}$$

由递推关系

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

令$\nu = 1$

$$J_0(\mu_i) + J_2(\mu_i) = J_2(\mu_i) = \frac{2}{\mu_i}J_1(\mu_i)$$

所以

$$\int_0^1 (1-x^2) J_0(\mu_i x) x\mathrm{d}x = \frac{4}{\mu_i^3}J_1(\mu_i)$$

$$c_i = \frac{2u_0}{J_1^2(\mu_i)}\frac{4}{\mu_i^3}J_1(\mu_i) = \frac{8u_0}{\mu_i^3 J_1(\mu_i)}$$

□

16.6 Hankel 函数

$J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 的渐近展开分别为

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

电磁学常用这两个函数的线性组合作成的一种复的柱函数

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu(x) + \mathrm{i}N_\nu(x) \tag{26}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{27}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \equiv J_\nu(x) - \mathrm{i}N_\nu(x) \tag{28}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{29}$$

称为第一类和第二类 Hankel 函数. 它们都是柱函数, 称为第三类柱函数.

16.7 球 Bessel 函数

在球坐标系下考虑Helmholtz方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

分离变量

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)S(\theta,\phi) = R(r)Y_l^m(\theta,\phi)$$
$$l = 0,1,2,...,m = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

R 方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0$$

作变换 $x = kr$, $y(x) = R(r)$, 方程变为

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]y = 0$$

称为球 Bessel 方程. 球 Bessel 方程作变换 $y(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}$ 可化为 Bessel 方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + \left[1 - \frac{(l+1/2)^2}{x^2}\right]v = 0$$

半奇数 $l+1/2$阶的 Bessel 方程的解为

$$J_{l+1/2}(x)$$
$$J_{-l-1/2}(x) = (-1)^{l+1}N_{l+1/2}(x)$$

球 Bessel 方程的解则为

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+l} \\ n_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-l-1/2}(x) \\ &= (-1)^{l+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-l+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-l-1} \end{aligned}$$

分别称为 l 阶球 Bessel 函数和球 Neumann 函数.

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(3/2)}{n!\Gamma(n+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!(n+1/2)(n-1/2)\cdots(3/2)\cdot 2^n} \\
&\quad \times x^{2n} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

同理

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

由 Bessel 函数递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu) = x^\nu J_{\nu-1}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{l+1} j_l) = x^{l+1} j_{l-1}$$

由 Bessel 函数递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu} J_\nu) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-l} j_l) = -x^{-l} j_{l+1}$$

以上公式对 n_l 也成立.

递推关系允许我们由 $j_0(n_0)$ 求任意阶球函数的表达式.

$$\begin{aligned}
j_1(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} j_0(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x) \\
j_l(x) &= x^l \left(-\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^l \left\{\frac{\sin x}{x}\right\}
\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}
n_1(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} n_0(x) = -\frac{1}{x^2}(\cos x + x\sin x) \\
n_l(x) &= x^l \left(-\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^l \left\{-\frac{\cos x}{x}\right\}
\end{aligned}$$

类似地, 也可定义球 Hankel 函数

$$\begin{aligned}
h_l^{(1)} &= j_l(x) + \mathrm{i} n_l(x) \\
h_l^{(2)} &= j_l(x) - \mathrm{i} n_l(x)
\end{aligned}$$

渐近行为 $x\to\infty$

$$\begin{aligned} j_l(x) &\sim \frac{1}{x}\sin(x-\frac{l\pi}{2}) \\ n_l(x) &\sim -\frac{1}{x}\cos(x-\frac{l\pi}{2}) \\ h_l^{(1)}(x) &\sim \frac{1}{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\frac{l\pi}{2})} \\ h_l^{(2)}(x) &\sim \frac{\mathrm{i}}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\frac{l\pi}{2})} \end{aligned}$$

Example 16.3 将函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$ 按 *Legendre* 多项式展开

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

Solution 展开系数为

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}P_l(x)\mathrm{d}x$$

将指数函数做 Taylor 展开

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^n}{n!}\int_{-1}^{1}x^nP_l(x)\mathrm{d}x.$$

利用上章结果

$$\begin{aligned} c_l(kr) =& \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1}x^{l+2n}P_l(x)\mathrm{d}x \\ =& \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n} \\ &\times\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+l+3/2)} \\ =& \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n} \\ =&(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr). \end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

□

球面波

球面波为波动方程 (设时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 省略)

$$\nabla^2u+k^2u=0$$

的球坐标系下的解

$$j_l(kr)Y_l^m(\theta,\phi)$$

$m=0$ 时, 与 ϕ 无关的球面波

$$\sim j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 可用球面波展开. 设 $\vec{k}$ 沿 z 轴方向

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

Example 16.4 一均匀球, 半径为 a, 初始温度分布为 $f(r)\cos\theta$. 若球面温度保持为零度, 求球内各处温度变化的情况.

Solution 问题有对称性

$$u = u(r,\theta,t)$$

所以定解问题为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right] = 0 \\ &u|_{r=0}\text{有界} \qquad u|_{r=a} = 0 \\ &\ldots \\ &u|_{t=0} = f(r)\cos\theta\end{aligned}$$

令

$$u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda\Theta = 0 \\ &\Theta(0)\text{有界} \qquad \Theta(\pi)\text{有界}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_l = l(l+1) \\ &\Theta_l(\cos\theta) = P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0 \\ &R(0)\text{有界} \qquad R(a) = 0\end{aligned}$$

方程的解

$$R(r) = Aj_l(kr) + Bn_l(kr)$$

$$R(0)\text{有界} \Rightarrow B = 0$$

$$R(a) = 0\&\&A \neq 0 \Rightarrow j_l(ka) = 0$$

所以

$$\begin{aligned}&k_{li} = \frac{\mu_i^{(l)}}{a} \\ &R_{li}(r) = j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)}r}{a}\right)\end{aligned}$$

其中

$$j_l(\mu_i^{(l)}) = 0 \qquad i = 1, 2, 3, ...$$

$$T' + \kappa k^2 T = 0$$
$$T_{li}(t) = A_{li}\mathrm{e}^{-\kappa k_{li}^2 t}$$

特解

$$u_{li}(r, \theta, t) = A_{li} j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)} r}{a}\right) P_l(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\kappa k_{li}^2 t}$$

一般解

$$u(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} A_{li} j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)} r}{a}\right) P_l(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\kappa k_{li}^2 t}$$

代入初始条件

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t)|_{t=0} &= f(r)\cos\theta = f(r)P_1(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} A_{li} j_l\left(\frac{\mu_i^{(l)} r}{a}\right) P_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

所以, $A_{li} = A_{1i}\delta_{l1}$

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{1i} j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)} r}{a}\right)$$

正交关系 (权重 $\rho(r) = r^2$)

$$\int_0^a j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)} r}{a}\right) j_1\left(\frac{\mu_j^{(1)} r}{a}\right) r^2 \mathrm{d}r = \left\| j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)} r}{a}\right)\right\|^2 \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} \left\| j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)} r}{a}\right)\right\|^2 &= \int_0^a j_1^2\left(\frac{\mu_i^{(1)} r}{a}\right) r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{a}{\mu_i^{(1)}}\int_0^a J_{3/2}^2\left(\frac{\mu_i^{(1)} r}{a}\right) r\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{a}{\mu_i^{(1)}}\frac{a^2}{2} J_{3/2}'^2(\mu_i^{(1)}) \\ &= \frac{a^3}{2\mu_i^{(1)}}\left(\sqrt{x} j_1(x)\right)'^2\Big|_{x=\mu_i^{(1)}} \\ &= \frac{a^3}{2} j_1'^2(\mu_i^{(1)}) \end{aligned}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{l+1} j_l) = x^{l+1} j_{l-1}$$

得$(x^2 j_1)' = x^2 j_0$

$$j_1'(\mu_i^{(1)}) = j_0(\mu_i^{(1)})$$

故

$$\left\| j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)\right\|^2 = \frac{a^3}{2}j_0^2(\mu_i^{(1)})$$

所以

$$A_{1i} = \frac{\int_0^a f(r)j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)r^2\mathrm{d}r}{\frac{a^3}{2}j_0^2(\mu_i^{(1)})}$$

$$u(r,\theta,t) = \frac{2}{a^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)P_1(\cos\theta)}{j_0^2(\mu_i^{(1)})}\mathrm{e}^{-\kappa\left(\frac{\mu_i^{(1)}}{a}\right)^2 t}$$
$$\times\int_0^a f(r)j_1\left(\frac{\mu_i^{(1)}r}{a}\right)r^2\mathrm{d}r$$

$j_1(\mu_i^{(1)}) = 0$ 即

$$\frac{1}{\mu_i^{(1)2}}\left[\sin\mu_i^{(1)} - \mu_i^{(1)}\cos\mu_i^{(1)}\right] = 0$$

$$\mu_i^{(1)} = \tan\mu_i^{(1)}$$

□

16.8 合流超几何函数

容易看出, 超几何级数

$$y = {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,...,a_p\\ b_1,...,b_q\end{matrix};x\right) \tag{30}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{31}$$

是如下微分方程的形式解

$$\big\{\delta(\delta+b_1-1)\cdots(\delta+b_q-1) \tag{32}$$

$$-x(\delta+a_1)\cdots(\delta+a_p)\big\}y = 0 \tag{33}$$

其中

$$\delta = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

当 $p>2$ 或 $q>1$, 上述方程的阶数为 $\max(p,q+1)>2$, 所得方程不如二阶常微分方程有用. 若只考虑二阶常微分方程, 则有如下两种可能

1. $p=2$

   这时, 必须 $q=1$, 否则, 超几何级数处处发散. 而${}_2F_1$ 就是我们上一章介绍过的超几何函数.

2. $q=1$ 和 $p=0,1$

   二阶常微分方程具有一个正则奇点 $x=0$, 另外还有一个非正则奇点在 $x=\infty$ 处.

合流超几何函数

我们来考虑 $p=q=1$ 的情形. 这时方程是

$$\left\{x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\gamma-1\right)-x\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\alpha\right)\right\}y=0$$

或

$$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0 \tag{34}$$

称为*合流超几何方程*. 这一方程可以由超几何方程的两个正则奇点合流而得到. 超几何方程

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta w=0$$

作变换 $x\to x/b$

$$x(1-x/b)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x/b]y'-\alpha\beta w/b=0$$

这个方程的奇点当然就是 0, b 和 ∞. 令 $b=\beta\to\infty$, 就得到上述合流超几何方程.

合流超几何方程在正则奇点 $z=0$ 处的指标为 $\rho=0$ 和 $\rho=1-\gamma$, 当 $\gamma\neq$整数时, 用级数解法可以求得方程的两个线性无关解为

$$y_1(x)=F(\alpha;\gamma;x) \tag{35}$$

$$y_2(x)=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;x) \tag{36}$$

其中

$$\begin{aligned}F(\alpha;\gamma;x)&={}_1F_1\left(\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\end{matrix}\;;x\right)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}x^n\end{aligned} \tag{37}$$

在全平面解析, 称为*合流超几何函数*.

有许多特殊函数都能用合流超几何函数表示. 例如:

- Bessel 函数

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu F(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2\mathrm{i}z)$$

- Hermite 多项式

$$H_{2n}(z)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}F(-n;\frac{1}{2};z^2)$$

$$H_{2n+1}(z)=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}F(-n;\frac{3}{2};z^2)$$

- Laguerre 多项式

$$L_n(z)=F(-n;1;z)$$

- 广义 Laguerre 多项式

$$L_n^\mu(z)=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}F(-n;\mu+1;z)$$