

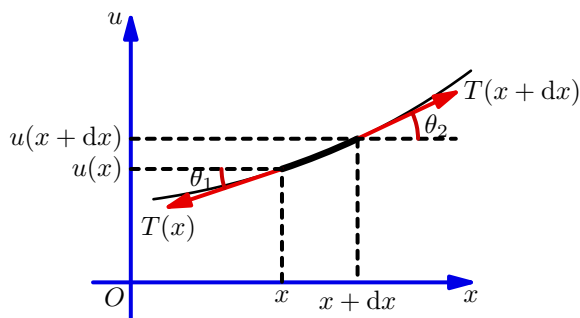
11 数学物理方程和定解条件

数学物理方程通常指从物理学及其它学科中所产生的偏微分方程.

如果处理的问题可以当成质点, 则质点的物理性质(如质点的位置, 速度等)完全可以用数来表示, 质点的物理性质随时间的变化则是时间的函数, 其变化的规律则为对时间的常微分方程(如牛顿定律). 但实际的问题常常是所谓介质, 它充满空间的每一个点. 我们用坐标(如直角坐标 (x, y, z)) 来表示介质的每一个点, 则介质的性质当然表示成为坐标的函数(如温度 $u(x, y, z)$). 介质的性质随时间的变化则表为坐标和时间的函数(如 $u(x, y, z, t)$), 其变化的规律就是偏微分方程.

11.1 振动和波

Example 11.1 (弦的横振动) 设有一个完全柔软的均匀的弦, 沿水平方向绷紧. 而后以某种方法激发, 使弦在同一平面上作横向小振动. 我们来求弦的横振动所满足的方程.



Solution 取弦的平衡位置为 x 轴, 且令一个端点为 $x = 0$, 另一个端点为 $x = l$. 设 $u(x, t)$ 是坐标为 x 的弦上一点在 t 时刻的横向位移.

在弦上隔离出一小段 dx . 这一小段弦在两个端点 x 及 $x + dx$ 处受到张力作用分别为 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$, 与水平方向的夹角 θ_1, θ_2 . 因为弦是完全柔软的, 故张力的方向沿着弦的方向. 列出运动方程

$$\text{水平方向: } T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{垂直方向: } T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

在小振动条件下

$$\theta \sim 0$$

$$\cos \theta \approx 1$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

由 (1)

$$T_1 = T_2 = T$$

代入 (2)

$$T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

其中 $dm = \rho dx$, ρ 为弦的线密度 (单位长度的质量). 定义

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

T 与 x 无关. 在小振动时, 还可以证明张力 T 与 t 无关. 因为这一段弦的伸长为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{du^2 + dx^2} - dx \\ &= \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right] dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

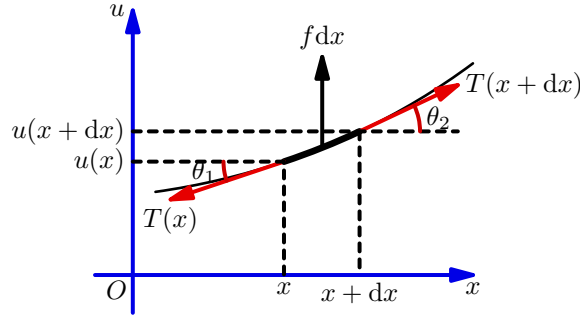
在小振动近似下, 准确到 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的一级项

$$ds \approx 0$$

因此按照 Hooke 定律, 长度不变, 则张力 T 不随时间变化. 所以在振动方程中, T 为常数, a 为常数. \square

弦的受迫横振动

如果弦在横向还受到外力作用, 设 \mathbf{f} 为单位长度所受到的外力.



仿照前面推导

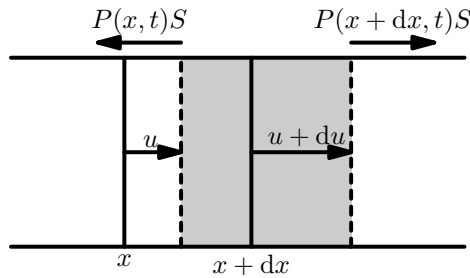
$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + f dx = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

这时, 方程含有非齐次项

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f}{\rho} \quad (4)$$

其中非齐次项 $\frac{f}{\rho}$ 是单位质量所受外力.

Example 11.2 (杆的纵振动) 考虑一均匀细杆, 沿杆长方向作小振动.



Solution 取杆长方向为 x 轴方向, 杆上各点均用其平衡位置的 x 坐标标记. 在时刻 t , x 点偏离平衡位置的位移为 $u(x, t)$. 在杆上隔离出一小段 $(x, x + dx)$. 设 $P(x, t)$ 为 x 点在 t 时刻, 单位面积所收到的弹性力 (应力), 则

$$P(x + dx, t)S - P(x, t)S = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$dm = \rho S dx$, ρ 为杆的密度. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} S dx &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} S dx \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\end{aligned}$$

小振动时, 根据 Hooke 定律, 应力 P 与应变 (单位长度的伸长) $\frac{\partial u}{\partial x}$ 成正比

$$P = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

E 为杆的 Young 模量. 可得杆的纵振动方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ a &= \sqrt{\frac{E}{\rho}}\end{aligned}$$

□

我们看到横振动和纵振动满足的方程为偏微分方程, 它们的形式完全一样, 这类方程统称为**波动方程**. 更一般地, 在三维空间中的波动方程 (例如电磁波满足的方程) 为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0 \quad (5)$$

其中

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

称为 Laplace 算符.

11.2 传导和扩散

Example 11.3 (热传导方程) 设有一块连续介质, 如果温度不均匀, 在介质中有一定的温度差, 就一定会会有热量从高温部分传递到低温部分. 通过热量传递使各处温度趋于一致, 最终达到热平衡.

Solution 取定一直角坐标系, 并用 $u(x, y, z, t)$ 表示介质内坐标为 (x, y, z) 的点在 t 时刻的温度. 实验表明, 单位时间内通过垂直于 x 方向单位面积的热量 q_x 与温度在 x 方向的变化率 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 成正比

$$q_x = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

同理

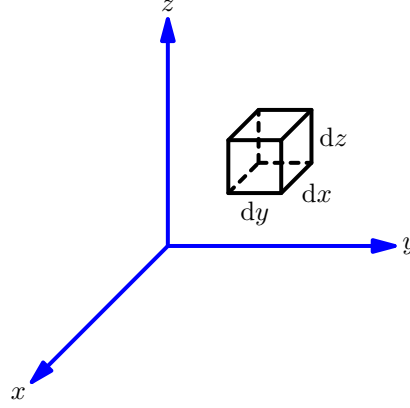
$$\begin{aligned}q_y &= -k \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}$$

k 为介质的导热率. 此即 Fourier 定律. 或写成矢量形式

$$\boxed{\mathbf{q} = -k \nabla u} \quad (7)$$

热流密度矢量 \mathbf{q} 与温度梯度 ∇u 成正比.

现推导热传导方程. 设想在介质中隔离出一个小立方体, 立方体的边长分别为 dx , dy , dz , 六条边分别与坐标轴平行.



先看 dt 时间内沿 x 方向流入立方体的热量

$$\begin{aligned} & [(q_x)_x - (q_x)_{x+dx}] dy dz dt \\ &= \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] dy dz dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz dt \end{aligned}$$

对于均匀介质, k 为一常数

$$[(q_x)_x - (q_x)_{x+dx}] dy dz dt = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz dt$$

同理, dt 时间内沿 y 方向流入立方体的热量

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dz dt$$

dt 时间内沿 z 方向流入立方体的热量

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx dy dz dt$$

如果立方体内没有其它的热量来源或消耗, 则净流入的热量应等于立方体温度升高所需要的热量

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz dt = dm \cdot c \cdot du$$

c 为比热. $dm = \rho dx dy dz$, ρ 是介质的密度. 所以

$$k \nabla^2 u dx dy dz dt = \rho c dx dy dz du$$

令

$$\kappa = \frac{k}{\rho c}$$

则有热传导方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0} \quad (8)$$

κ 称为温度扩散率. □

同样, 如果介质内存在别种不均匀状况, 例如物质浓度的不均匀, 会发生分子的扩散. 扩散方程和热传导方程有相同的形式. 此时 κ 换成 D , 称为扩散率.

如果介质内有热量产生, 例如有化学反应发生或通有电流等等. 设单位时间内在单位体积内产生的热量为 $F(x, y, z, t)$, 则应有

$$k\nabla^2 u dx dy dz dt + F(x, y, z, t) dx dy dz dt = \rho c dx dy dz du$$

这时的方程又是含有非齐次项

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = \frac{1}{\rho c} F(x, y, z, t) \equiv f(x, y, z, t) \quad (9)$$

11.3 稳定问题

波动方程包含对时间的二次偏导数, 热传导或扩散方程则包含对时间的一次偏导数, 它们都是描写连续介质的物理状态随时间的变化. 当介质达到稳恒的物理状态, 即物理状态不随时间改变时, 稳恒的物理状态满足的偏微分方程不包含时间变量. 此即**稳定问题**.

例如, 物体温度达到稳定, 不随时间变化时

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z)$$

则

$$-\kappa \nabla^2 u = f$$

$$\boxed{\nabla^2 u = -\frac{f}{\kappa}} \quad (10)$$

为 Poisson 方程. 特别地, 如果 $f = 0$

$$\boxed{\nabla^2 u = 0} \quad (11)$$

为 Laplace 方程.

相同的方程, 出现在波动方程的稳定问题中. 例如静电场的电势 $u(x, y, z)$ 不随时间改变, 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ρ 为电荷密度, ϵ_0 为真空介电常数. 若 $\rho = 0$, 则静电势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0$$

此外, 如果波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

如果 $u(x, y, z, t)$ 随时间周期地改变

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

ω 为频率. 则 $v(x, y, z)$ 满足 Helmholtz 方程

$$\boxed{\nabla^2 v(x, y, z) + k^2 v(x, y, z) = 0} \quad (12)$$

$k = \frac{\omega}{a}$ 为波数.

11.4 边界条件与初始条件

初始条件

研究质点的性质时, 单由微分方程, 并不能求出质点性质随时间的变化— 即任何时刻质点的性质. 例如, 根据 Newton 定律并不能确定质点的运动— 它在任意时刻的位置和速度, 我们还需要知道质点的初始位置和初始速度.

对于描述介质运动的偏微分方程, 同样需要给出介质的初始状态, 才能决定介质以后任意时刻的物理状态. 介质的初始状态即由**初始条件**给出.

对于波动方程, 它是关于时间的二阶偏微分方程, 所以应该给出介质初始时刻各点的位移

$$u|_{t=0} = \phi(x, y, z)$$

和初始时刻各点的速度, 即对时间的一阶偏导数

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z)$$

对于热传导方程, 由于方程中只出现对 t 的一阶偏导数, 所以初始条件只需给出初始时刻各点温度 $u(x, y, z)$ 的值

$$u|_{t=0} = \phi(x, y, z)$$

稳定问题与时间无关, 则没有初始条件.

边界条件

对于介质, 情况比质点还要复杂: 除了初始条件, 还需要有 **边界条件**. 这是因为介质有内部和表面. 在推导介质满足的数理方程时, 只考虑了介质内部的点. 介质表面的点与介质内部的点不同: 首先, 它只在一侧与介质内其它点相互作用; 其次, 在另一侧与外界有相互作用. 因此介质表面所满足的方程与介质内部所满足的方程不同, 应另外推导. 我们把介质表面各点满足的方程称为**边界条件**.

先以一维振动为例, 其边界由两端点组成.

Example 11.4 弦的横振动

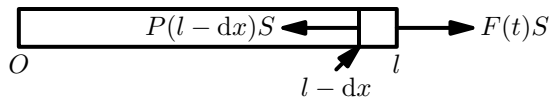
Solution 如果弦的两端 (由外界) 固定, 那么边界条件就是

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

□

Example 11.5 杆的纵振动

Solution 如果 $x = 0$ 端固定, 而另一端 $x = l$ 受 (x 方向的) 外力作用, 设单位面积上的力是 $F(t)$



$x = 0$ 端边界条件仍是

$$u|_{x=0} = 0 \quad (13)$$

$x = l$ 这一端的边界条件并不能直接看出. 模仿推导方程的方法, 在端点 $x = l$ 处截取一小段杆, 长度为 dx . 根据 Newton 定律

$$F(t)S - P(l-dx, t)S = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

因为 $dx \rightarrow 0$

$$F(t) = P(l, t)$$

根据 Hooke 定律

$$P = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

所以

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{1}{E} F(t) \quad (14)$$

如果 $x = l$ 端是自由的, $F(t) = 0$, 则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (15)$$

如果外力为弹簧提供的弹性力,

$$F(t) = -k[u(l, t) - u_0]$$

u_0 为端点的平衡位移, 则

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k}{E} u \right]_{x=l} = \frac{k}{E} u_0 \quad (16)$$

□

再举一个三维例子, 其边界为一闭合曲面.

Example 11.6 热传导问题

Solution 第一种类型是边界上各点的温度已知 (由外界给定)

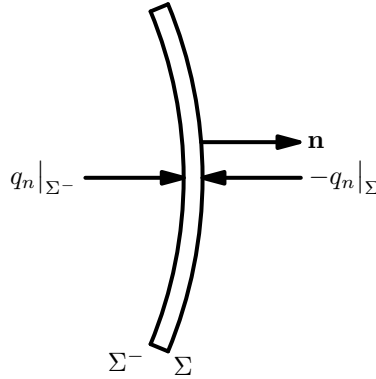
$$u|_{\Sigma} = \phi(\Sigma, t) \quad (17)$$

这里, 我们用 Σ 表示边界上的各点, 同时也表示相应点的坐标.

第二种类型是介质与外界通过表面(边界)有热量的交换, 单位时间内, 通过单位面积的边界面流入的热量已知, 为 $\psi(\Sigma, t)$, 由外界给定

$$-q_n|_{\Sigma} = \psi(\Sigma, t)$$

n 为表面的法向, 负号表示方向与法向相反.



这时, 我们可在边界 Σ 的内侧截取一小薄层的介质, 它的另一个底面在介质内部, 其上的点用 Σ^- 表示. 当介质薄层的厚度 $d \rightarrow 0$ 时, 则两底面的面积相等, 而侧面面积可忽略. 所以流入介质薄层的热量为两底面流入热量之和. 根据能量守恒定律, 应该等于这一块介质薄层温度升高所需要的热量. 假设薄层的底面积为单位面积

$$q_n|_{\Sigma^-} - q_n|_{\Sigma} = \text{热容量} \times \text{温度升高}$$

但介质薄层的厚度 $\rightarrow 0$ 时, 显然其热容量 $\rightarrow 0$, 所以

$$q_n|_{\Sigma^-} - q_n|_{\Sigma} = 0$$

即通过介质表面流入的热量, 应当全部通过薄层的另一底面流向介质内部.

由 Fourier 定律, 热流密度矢量

$$\mathbf{q} = -k\nabla u$$

而

$$q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -k\mathbf{n} \cdot (\nabla u) = -k \frac{\partial u}{\partial n}$$

其中法向导数定义为

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$$

所以

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma^-} - q_n|_{\Sigma} &= 0 \\ -k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma^-} + \psi(\Sigma, t) &= 0 \end{aligned}$$

$\Sigma^- \rightarrow \Sigma$, 故

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \frac{1}{k} \psi(\Sigma, t) \quad (18)$$

如果边界绝热, $\psi = 0$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (19)$$

第三种类型则是介质通过边界散热. 散热按 Newton 冷却定律: 单位时间通过单位面积的表面和外界交换的热量, 和介质表面温度 $u|_{\Sigma}$ 与外界温度 u_0 之差成正比

$$\psi(\Sigma, t) = -H(u|_{\Sigma} - u_0)$$

H 为比例系数. 边界条件就是

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right]_{\Sigma} = hu_0 \quad (20)$$

$$h = \frac{H}{k}$$

□

总结

在上面的讨论中出现的边界条件有一个共同特点: 就未知函数而言, 它们都是线性的. 再进一步细分, 可以分成三类:¹

第一类边界条件 给出边界上各点的函数值

$$u|_{\Sigma} = \phi(\Sigma, t) \quad (21)$$

第二类边界条件 给出边界上各点函数的法向导数值

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \psi(\Sigma, t) \quad (22)$$

第三类边界条件 给出边界上各点函数值与法向导数值之间的线性关系

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right]_{\Sigma} = \psi(\Sigma, t) \quad (23)$$

¹ 另外还有周期性边界条件, 它是做数学处理时人为引进的.

边界条件和初始条件统称为**定解条件**. 在处理实际的数学物理方程时, 归结为在一定的定解条件下求解一定的偏微分方程.

定解问题必须是适当的, 应使问题求解满足: 解的存在性—问题一定有解; 解的唯一性—问题的解是唯一的; 以及解的稳定性.

如果在求解数理方程的过程中 (假设方程是合理的), 解不存在, 则可能是定解条件过多. 若解出几个解, 则可能是定解条件太少.