作业

题 1. 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1} |z-1| \cdot |dz| \,.$$

题 2. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析且处处满足 $|f(z)-1|<1$。证明对 D 中的任意封闭曲线 C 有

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 \,.$$

（假设 $f'(z)$ 连续）。

题 3. 证明当 $|a|<r<|b|$ 时，

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b} \,,$$

其中积分围道取正定向。

题 4. 计算

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2} \,.$$

且 $r \neq |a|$。提示：由方程 $z\bar{z}=r^2$ 有

$$|dz| = -ir\frac{dz}{z} \,.$$

题 5. 证明菲涅尔积分公式：

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \,.$$

题 6. 计算积分

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^4} \,, \qquad |a| \neq r \,.$$

题 7. (a) $f(z)$ 在包含半径为 R_0，圆心在原点的圆盘的某个区域上解析。证明当 $R<R_0$，且 $|z|<R$ 时，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right) d\varphi \,.$$

(b) 证明

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\theta}+r}{Re^{i\theta}-r}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2} \,.$$

设 $u(r,\varphi)$ 是单位圆盘上的调和函数，因此是某个单位圆盘上解析的复函数的实部（或虚部）。

(c) 用柯西积分公式证明其具有如下积分表示：

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi) u(1,\varphi) d\varphi$$

其中

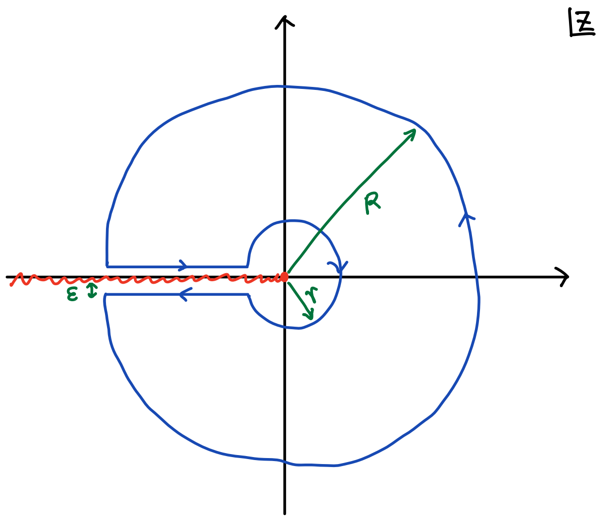
$$P_r(\gamma) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2} \,.$$

这个积分表示称为泊松积分表示。

题 8. 在 $\ln z$ 的任意一个主值分支内，从复线积分的定义出发计算如下围道积分：

$$\int_C \ln z \, dz$$

其中围道 C 如下图所示，$R>r>0$，$\varepsilon \to 0_+$.


z
R
r
ε