5.6 魏尔斯特拉斯因子化定理

我们知道，一个 n 次复系数多项式 $P_n(z)$ 如果有 n 个零点 $z_1, z_2, \ldots, z_n$（计入重数），那么它可以唯一地（除去一个非零常数因子 C）分解为线性因子的乘积：

$$P_n(z) = C(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = C\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$$

这个公式体现了多项式的零点决定了多项式（在一个常数因子内）的核心思想。

一个自然的问题是：如果一个函数（例如整函数，即在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上解析的函数）有无穷多个零点，我们是否也能类似地通过它的零点来“重建”这个函数呢？

伟大的数学家欧拉 (Euler) 在研究正弦函数时，给出了一个惊人的无穷乘积展开式：

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

这里的 $\sin(\pi z)$ 是一个整函数，它的零点位于 $z = k$ $(k \in \mathbb{Z})$。除去 $z = 0$ 处的零点（通过除以 πz 来处理，当 $z \to 0$ 时 $\sin(\pi z)/(\pi z) \to 1$），其余的零点成对出现在 $z = \pm n$ $(n = 1, 2, \ldots)$。欧拉的公式表明，$\sin(\pi z)/(\pi z)$ 可以表示为其非零零点 $z = \pm n$ 对应的因子 $(1-z/n)(1+z/n) = (1-z^2/n^2)$ 的无穷乘积。

讨论 6 (巴塞尔问题 Basel Problem) 欧拉的这个公式与著名的巴塞尔问题（求所有正整数平方的倒数之和）有着深刻的联系。考虑 $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ 的泰勒级数展开：

$$LHS = \frac{1}{\pi z}\left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \frac{\pi^4 z^4}{120} - \ldots$$

再考虑无穷乘积的展开：

$$\begin{aligned}
RHS &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \\
&= \left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)\ldots \\
&= 1 - \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)z^2 + O(z^4) \\
&= 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)z^2 + \ldots
\end{aligned}$$

比较两边 z^2 项的系数，欧拉石破天惊地得到了：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

这在当时是一个非常轰动的结果。

欧拉的工作启发我们，无穷乘积可能是处理具有无穷零点的函数的一种有力工具。但首先，我们需要明确无穷乘积的收敛性问题。

5.6.1 无穷乘积的收敛性

取自：https://www.math.ualberta.ca/ isaac/math324/s12/zeta.pdf

我们熟悉无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的概念。我们说一个无穷级数收敛，当且仅当其部分和序列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ 收敛到一个有限的极限。

类似地，对于无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$，我们可能会想定义它收敛，当且仅当其部分乘积序列 $p_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$ 收敛到一个有限的极限。

然而，这种简单的类比存在一个问题：如果乘积的因子中哪怕只有一个 $b_k = 0$，那么从第 k 项开始的所有部分乘积 p_n (对于 $n \geq k$) 都会是 0。这意味着，只要有一个零因子，部分乘积序列 p_n 就会收敛到 0，无论后面的因子如何变化（只要它们有定义）。这使得这种定义在很多情况下不够有用，因为它无法区分因一个零因子而得到 0 和因后续因子趋近于 0 而得到 0 的情况。

因此，数学家们采用了下面这个更精细和更有用的定义。

无穷乘积的收敛性定义

定义 18 (无穷乘积与部分乘积) *给定一个无穷乘积* $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$*，我们定义其* **第 n 个部分乘积** *(n-th partial product) 为：*

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$$

定义 19 (无穷乘积的收敛与发散) *对于无穷乘积* $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$*，我们根据其因子的性质和部分乘积序列* $\{p_n\}$ *的行为，定义其收敛性如下：*

(a) **发散到零（情况 *1*：无穷零因子）**
如果无穷多个因子 b_n *等于* 0*，我们称该无穷乘积* **发散到零** *(diverges to zero)*。

(b) **收敛（情况 *2*：无零因子）**
如果 **没有** *因子* b_n *等于 0，我们讨论部分乘积序列* p_n *的极限：*

- *如果* $p_n \to p$ *且* $p \neq 0$ *(当* $n \to \infty$*)，我们称该无穷乘积* **收敛** *(converges)，并且其* **值** *(value) 为* p。*我们记作：*

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = p$$

- 如果 $p_n \to 0$ *(当* $n \to \infty$*)*，我们称该无穷乘积 **发散到零** *(diverges to zero)*。

简而言之，在没有零因子的情况下，乘积收敛当且仅当部分乘积趋于一个非零极限。

(c) **收敛（情况 *3*：有限零因子）**
如果 **只有有限个** 因子 b_n 等于 *0*，这意味着存在一个正整数 N，使得对于所有 $n > N$，都有 $b_n \neq 0$。在这种情况下，我们称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ **收敛**，**前提是** “尾部”乘积 $\prod_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 按照上述 *(b)* 的方式收敛（即，其部分乘积 $\prod_{k=N+1}^{m} b_k$ 当 $m \to \infty$ 时收敛到一个 **非零** 的极限）。

如果这个条件满足，则整个无穷乘积的值定义为：

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 \cdot b_2 \cdots b_N \cdot \left(\prod_{n=N+1}^{\infty} b_n \right)$$

注意：因为 $b_1, \ldots, b_N$ 中至少有一个是 0，所以这种情况下收敛的无穷乘积的值 **总是** 0。

(d) **发散（其他情况）**
如果一个无穷乘积不满足上述 *(b)* 或 *(c)* 中定义的收敛条件，我们就称它 **发散** *(divergent)*。这包括 p_n 趋于无穷、p_n 震荡不收敛，或者在情况 *(c)* 中“尾部”乘积发散或发散到零的情况。

讨论 7 (关于收敛值为零) 根据定义：

- 一个 **收敛** 的无穷乘积的值可以为 0。但这 **当且仅当** 乘积中有 **有限个** *(*至少一个*)* 因子为 0 时才会发生（即情况 *(c)*）。
- 如果乘积中有 **无穷多个** 因子为 0，则乘积 **发散到零** *(*情况 *(a))*。
- 如果乘积中 **没有** 因子为 *0*，但部分乘积的极限为 0，则乘积也 **发散到零** *(*情况 *(b)* 的一部分*)*。

区分“收敛到 0”（仅发生在情况 *(c)*）和“发散到 0”（发生在情况 *(a)* 或 *(b)* 的一部分）是很重要的。通常我们更关心乘积是否收敛到一个非零值。

定义 20 如果 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛，则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛。

定理 30 设有正项级数 a_n，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛。

证明 5 第一部分：证明 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛 $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。
定义部分和和部分乘积：

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \tag{5.91}$$

由于 $\{a_k\}$ 是正项序列 ($a_k > 0$)，因此 $\{s_n\}$ 和 $\{p_n\}$ 都是单调严格递增的正序列（$s_n > 0$ *for* $n \geq 1$, $p_n \geq 1 + a_1 > 1$）。根据单调收敛定理，一个单调递增序列收敛当且仅当它有上界。因此，级数 $\sum a_n$ 收敛当且仅当序列 $\{s_n\}$ 有上界。同样，无穷乘积 $\prod(1 + a_n)$ 收敛当且仅当序列 $\{p_n\}$ 有上界 (因为 p_n 单调增且 $p_n > 1$，若收敛则极限必大于 *1*，从而非零，满足收敛定义)。所以，我们只需证明 $\{s_n\}$ 有界与 $\{p_n\}$ 有界是等价的。

(⇒) 假设 $\{p_n\}$ 有界，即 $\prod(1 + a_n)$ 收敛。展开 $p_n = (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n)$。由于 $a_k > 0$，我们有：

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n$$

显然，$p_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + s_n$。因为 $\{p_n\}$ 有界，设 $p_n \leq M$ 对所有 n 成立。则 $1 + s_n \leq M$，即 $s_n \leq M - 1$。这表明 $\{s_n\}$ 是有上界的。由于 $\{s_n\}$ 单调递增，它必定收敛。因此，$\sum a_n$ 收敛。

(⇐) 假设 $\{s_n\}$ 有界，即 $\sum a_n$ 收敛。我们利用基本不等式 $1 + x \leq e^x$ 对所有实数 x 成立。特别地，对 $x = a_k > 0$ 成立。

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a_k} = e^{s_n}$$

因为 $\sum a_n$ 收敛，序列 $\{s_n\}$ 是收敛的，并且由于 $a_k > 0$, s_n 单调递增，所以 $\{s_n\}$ 有界。设 $s_n \leq S$ 对所有 n 成立 (其中 $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$)。则 $p_n \leq e^{s_n} \leq e^S$。这表明 $\{p_n\}$ 是有上界的。由于 $\{p_n\}$ 单调递增，它必定收敛。因此，$\prod(1 + a_n)$ 收敛。

至此，第一部分证明完毕。

第二部分：证明 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ 收敛 $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

先证 ⇐。由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 知道 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ 绝对收敛。绝对收敛是更强的条件，因此 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ 收敛。

再证 ⇒。设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，要证 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ 也发散。令

$$p_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n), \qquad q_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \tag{5.92}$$

容易知道

$$p_n q_n = (1 - a_1^2)(1 - a_2^2)\cdots(1 - a_n^2) \leq 1 \tag{5.93}$$

因此 $p_n \leq 1/q_n$。由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散的条件，我们知道 $\lim_{n\to\infty} q_n \to \infty$。因此 $\lim_{n\to\infty} p_n \to 0$，即 p_n 发散至 0。

证毕。

例子 53 考虑无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})$。对应的级数是 $\sum_{n=1}^{\infty} |-\frac{z}{n}| = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$。由于调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，这个无穷乘积不绝对收敛，并且实际上它也是发散的 (除非 $z = 0$)。

考虑 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$。对应的级数是 $\sum_{n=1}^{\infty} | - \frac{z^2}{n^2}| = |z^2| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$。由于 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 收敛，这个无穷乘积绝对收敛。并且，它在任何有界区域 $|z| \leq M$ 上是一致收敛的，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2}$ 收敛。

问题 2 给定一个整函数 $f(z)$ 的无穷多个零点 z_n（假设 $z_n \neq 0$ 且 $|z_n| \to \infty$），是否总能写出 $f(z) = C\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n)$ 的形式呢？

从上面的例子 $\prod(1 - z/n)$ 可知，即使零点是 $z_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$，对应的无穷乘积也可能不收敛。原因在于 $|z_n|$ 增长得不够快，导致 $\sum 1/|z_n|$ 发散。

如何“拯救”这个乘积呢？我们需要引入“收敛因子”。考虑乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n})$。虽然它发散，但如果我们乘以一些不增加零点的因子，也许能使它收敛。例如，乘以 $e^{z/n}$：

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right)e^{z/n}$$

现在考虑这个乘积的对数项：

$$\log\left[\left(1 - \frac{z}{n}\right)e^{z/n}\right] = \log\left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n}$$

当 n 很大时，$w = z/n$ 很小。利用 $\log(1 - w) = -w - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \ldots$，我们得到

$$\log\left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n} = \left(-\frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2} - \frac{z^3}{3n^3} - \ldots\right) + \frac{z}{n} = -\frac{z^2}{2n^2} - \frac{z^3}{3n^3} - \ldots$$

这个级数的和 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{2n^2} - \frac{z^3}{3n^3} - \ldots\right)$ 的收敛性主要由首项决定。级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{2n^2} = \frac{z^2}{2}\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的。因此，通过添加指数因子 $e^{z/n}$，我们使得原来发散的乘积变得收敛了！

这种添加指数因子 $e^{p(z/z_n)}$（其中 p 是一个多项式）来确保收敛性的思想，是 Weierstrass 因子分解定理的核心。

5.6.2 Weierstrass 因子分解定理

这个定理精确地回答了如何从一个整函数的零点构造出这个函数。

定理 31 (Weierstrass 因子分解定理) 设 $f(z)$ 为整函数，$z = 0$ 为 $f(z)$ 的 m 重零点 (m 可以为 0)，其余零点为 $a_1, a_2, \cdots$，满足 $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \infty$，则存在非负整数序列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得任取 $R > 0$ 都有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(R/|a_n|)^{k_n+1}$ 收敛，此时 $f(z)$ 可以写为

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\mathrm{e}^{P_n(z)},$$

其中 $g(z)$ 为整函数，$P_n(z)$ 为多项式，定义为

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}.$$

特别地，若存在非负整数 k 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}1/|a_n|^{k+1}$ 收敛，则可以取所有的 $k_n = k$.

证明 6 先证 k_n 的存在性．任取 $R>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$，存在充分大的 N 使得对任意的 $n>N$ 都有 $|a_n|>2R$，此时

$$\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n<\frac{1}{2^n},\quad \forall n>N,$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(R/|a_n|)^n$ 收敛，因此 $k_n=n-1$ 是一组解．设

$$Q_n(z)=\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z),\quad E_n(z)=\mathrm{e}^{Q_n(z)},$$

根据 $\ln(1-z)$ 在 $z=0$ 处的 *Taylor* 展开有

$$\begin{aligned}|Q_n(z)|&=\left|\frac{1}{k_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n+1}+\frac{1}{k_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n+2}+\cdots\right|\\&\leqslant\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1}+\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+2}+\cdots\\&=\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1}\frac{1}{1-R/|a_n|}<2\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1},\quad \forall n>N,|z|\leqslant R,\end{aligned}$$

于是级数 $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}Q_n(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上绝对一致收敛，从而有 $\prod\limits_{n=N+1}^{+\infty}E_n(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 上一致收敛，在 $|z|\leqslant R$ 上非零解析，由此得到

$$h(z)=z^m\prod_{n=1}^{+\infty}E_n(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\mathrm{e}^{P_n(z)},$$

在 $|z|\leqslant R$ 上解析，由于 R 是任取的，因此 $h(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析．由于 $h(z)$ 与 $f(z)$ 具有相同的零点，补充在可去奇点上的定义后有 $f(z)/h(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上非零解析，于是存在整函数 $g(z)$ 使得 $f(z)/h(z)=\mathrm{e}^{g(z)}$，由此得到

$$f(z)=z^m\mathrm{e}^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\mathrm{e}^{P_n(z)}.$$

例子 54 ($\sin\pi z$ 的 Weierstrass 乘积) 设 $f(z)=\sin\pi z$，有 $f(z)$ 是整函数，零点为 $z=n,n\in\mathbb{Z}$，由 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛有

$$f(z)=z\mathrm{e}^{g(z)}\prod_{n\neq0}\left(1-\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n}},$$

其中 $g(z)$ 是整函数，计算 $f'(z)/f(z)$ 可以得到

$$\pi\cot\pi z=g'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n\neq0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right),$$

由 $g'(z)=0$ 得到 $g(z)\equiv C$，计算 $f(z)/z$ 在 $z=0$ 处的极限可以定出常数

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}=\pi z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

例子 55 ($\cos\pi z$ 的 Weierstrass 乘积) 设 $f(z)=\cos\pi z$，有 $f(z)$ 是整函数，零点为 $z=n+\dfrac{1}{2}, n\in\mathbb{Z}$，由 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n+1/2)^2}$ 收敛有

$$f(z)=\mathrm{e}^{g(z)}\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+1/2}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n+1/2}},$$

其中 $g(z)$ 是整函数，计算 $f'(z)/f(z)$ 可以得到

$$-\pi\tan\pi z=g'(z)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-1}{z-(n+1/2)}+\frac{-1}{n+1/2}\right],$$

由 $g'(z)=0$ 得到 $g(z)\equiv C$，计算 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的极限可以定出常数

$$\cos\pi z=\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+1/2}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n+1/2}}=\prod_{n=0}^{+\infty}\left[1-\frac{z^2}{(n+1/2)^2}\right].$$

这两个例子里，$g'(z)=0$ 可以从下面的 *Mittag-Leffler* 定理看出。

5.6.3 Mittag-Leffler 定理

Weierstrass 定理处理的是整函数（只有零点）。而 Mittag-Leffler 定理处理的是亚纯函数（Meromorphic function），即在 $\mathbb{C}$ 上除了孤立极点外处处解析的函数。

思考：有理函数 $R(z)=P(z)/Q(z)$ 可以通过部分分式分解 (partial fraction decomposition) 表示为极点处的项（形式为 $\sum c_{jk}/(z-a_k)^j$）加上一个多项式（如果 $R(z)$ 在无穷远处有极点）。例如：

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)$$

问题：如果一个亚纯函数有无穷多个极点，我们是否能类似地从它的极点位置 a_k 和对应的主要部分 (principal part) $P_k(1/(z-a_k))$（即函数在 a_k 附近的 Laurent 展开中 $1/(z-a_k)$ 的负幂次项之和）来重建这个函数呢？

直接将所有主要部分加起来 $\sum_k P_k(1/(z-a_k))$ 未必收敛。例如：设 $f(z)$ 在 $z=n$ $(n=1,2,3,\dots)$ 处有单极点，留数为 n。即 $P_n(1/(z-n))=n/(z-n)$。级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z-n}$ 对于 $z\notin\{1,2,\dots\}$ 是否收敛？当 n 很大时，$n/(z-n)\approx n/(-n)=-1$。级数项不趋于 0，因此级数发散。

我们需要添加“收敛项”，类似于 Weierstrass 定理中的指数因子，但这里添加的是多项式 $g_k(z)$，它们不引入新的极点，但能改善级数的收敛性。

定理 32 (Mittag-Leffler 定理) 设亚纯函数 $f(z)$ 的单极点位于 $\{a_k\}$, 设 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}$ 中一列互不相同的复数，满足 $0 < |a_1| \le |a_2| \le \dots$ 且 $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty$。并且在每个极点 a_k 处的留数为 b_k。则该函数可以写为

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k} \right)$$

证明 7 令 $g(w) = f(w)/(w(w-z))$。考虑积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} \frac{f(w)}{w(w-z)}dw$。其中 C_N 是半径为 R 的圆，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 在园内。留数定理给出：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} g(w)dw = Res(g, w=0) + Res(g, w=z) + \sum_{|a_k|<R_N} Res(g, w=a_k)$$

$$Res(g, w=0) = \frac{f(0)}{-z}$$

$$Res(g, w=z) = \frac{f(z)}{z}$$

$$Res(g, w=a_k) = \frac{Res(f, a_k)}{a_k(a_k-z)} = \frac{b_k}{a_k(a_k-z)}$$

假设左边积分随 $N \to \infty$ 趋于 *0*。这个假设依赖于 $|f(w)|$ 在 C_N 上有界。则留数和为 *0*:

$$-\frac{f(0)}{z} + \frac{f(z)}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k(a_k-z)} = 0$$

解出 $f(z)$:

$$f(z) = f(0) - z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k(a_k-z)}$$

利用部分分式 $\frac{z}{a_k(z-a_k)} = \frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k}$，得到

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k} \right)$$

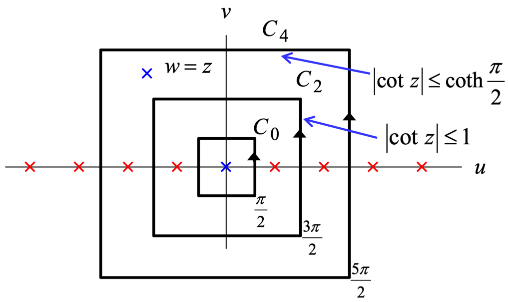
这个形式表明，我们需要从主要部分 $b_k/(z-a_k)$ 中减去一个“修正项” $g_k(z) = -b_k/a_k$ 来保证收敛。这里的 $g_k(z)$ 恰好是 $P_k(1/(z-a_k)) = b_k/(z-a_k)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开的常数项。

例子 56 ($\cot(\pi z)$ 的 Mittag-Leffler 展开) 函数 $f(z) = \pi\cot(\pi z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$。极点：$\sin(\pi z) = 0 \implies \pi z = n\pi \implies z = n$ *for* $n \in \mathbb{Z}$。留数：$Res(f, n) = \lim_{z\to n}(z-n)\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$。令 $w = z-n$, $z = w+n$。

$$\lim_{w\to 0} w\pi\frac{\cos(\pi(w+n))}{\sin(\pi(w+n))} = \lim_{w\to 0} w\pi\frac{(-1)^n\cos(\pi w)}{(-1)^n\sin(\pi w)} = \lim_{w\to 0} \pi w\frac{1}{\pi w} = 1$$

所有极点 $a_n = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ 都是单极点，留数 $b_n = 1$。极点集合是 $\{n\}_{n\in\mathbb{Z}}$。$a_0 = 0$ 是一个极点。

按照定理，我们需要找一个围道序列使得 $|f(z)|$ 在其上有界。可以选取如下图所示矩形围道：在这个围道上，



$$
|\cot z|^2 = \left|\frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)}\right|^2
$$

$$
= \left|\frac{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}\right|^2 = \frac{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} \tag{5.94}
$$

$$
\le \begin{cases} \tanh^2 y \le 1, \quad x = \pm(2N-1)\pi/2 \\ \frac{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \cosh^2 y}{\sin^2 x \sinh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} = \coth^2 y \le \coth^2 \pi/2, \quad y = \pm(2N-1)\pi/2 \end{cases} \tag{5.95}
$$

为了去掉零点处的极点，我们考虑函数

$$
\pi \cot \pi z - \frac{1}{z}
$$

Mittag-Leffler 定理给出：

$$
\pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)
$$

将 $n > 0$ 和 $n < 0$ 的项分开：

$$
\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-(-n)} + \frac{1}{-n}\right)
$$

$$
\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)
$$

$$
\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+n)+(z-n)}{(z-n)(z+n)}
$$

$$
\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}
$$

5.7 应用实例：量子谐振子 (选读)

Mittag-Leffler 定理的思想可以应用于物理问题，例如求解量子谐振子的能级。考虑一维谐振子的定态薛定谔方程：

$$H\psi = E\psi, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

引入一个量 $p(x)$，它与波函数的对数导数有关（类似于动量）：

$$p(x) = -i\hbar\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$$

（注意：笔记中使用 $p = \frac{\hbar}{i}\frac{\psi'}{\psi}$，结果应该是一样的）。对 $p(x)$ 求导：

$$p'(x) = -i\hbar\left(\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} - \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2\right)$$

从薛定谔方程得到 $\psi''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x)$。代入 p' 的表达式：

$$p'(x) = -i\hbar\left(-\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) - \left(\frac{p(x)}{-i\hbar}\right)^2\right)$$

$$p'(x) = \frac{2im}{\hbar}(E - V(x)) - i\hbar\frac{p(x)^2}{-\hbar^2} = \frac{2im}{\hbar}(E - V(x)) + \frac{i}{\hbar}p(x)^2$$

整理得到一个关于 $p(x)$ 的 Riccati 方程：

$$-i\hbar p'(x) + p(x)^2 = 2m(E - V(x))$$

(这与笔记中的方程一致)。

现在考虑 $p(x)$ 的性质。如果 $\psi(x)$ 是一个物理上可接受的波函数（束缚态），它在 $x \to \pm\infty$ 时应趋于 0。这意味着 $\psi(x)$ 在实轴上可能有有限个零点 x_k。在这些零点处，$p(x) = -i\hbar\psi'/\psi$ 具有单极点，留数为 $-i\hbar \times \mathrm{Res}(\psi'/\psi, x_k) = -i\hbar \times$ (零点x_k 的阶数)。对于简单零点，留数为 $-i\hbar$。

考虑 $x \to \infty$ 时的渐近行为。$V(x) \to \infty$。方程近似为 $p(x)^2 \approx 2m(-V(x)) = -m^2\omega^2x^2$。所以 $p(x) \sim \pm im\omega x$。为了使 $\psi(x) = C\exp(\int \frac{ip(x)}{\hbar}dx)$ 在 $x \to +\infty$ 时衰减，我们需要 $p(x) \sim +im\omega x$。（因为 $\int im\omega x dx = \frac{1}{2}im\omega x^2$, $i/\hbar \times (im\omega x^2/2) = -m\omega x^2/(2\hbar)$, $\exp(-m\omega x^2/(2\hbar))$ 衰减）。

假设波函数 $\psi(x)$ 有 N 个简单零点 $x_1, \ldots, x_N$。那么 $p(x)$ 是一个亚纯函数，极点在 x_k，留数为 $-i\hbar$。根据 Mittag-Leffler 定理的思想，我们可以猜测 $p(x)$ 的形式：

$$p(x) = (\text{整函数部分}) + \sum_{k=1}^{N}\frac{-i\hbar}{x - x_k}$$

整函数部分由 $x \to \infty$ 的行为决定，应该是 $im\omega x$ (可能加上一个常数，但对于大 x 的主项是 $im\omega x$)。所以我们假设：

$$p(x) \approx im\omega x + \sum_{k=1}^{N} \frac{-i\hbar}{x - x_k}$$

当 x 非常大时，$x \gg |x_k|$:

$$\frac{1}{x - x_k} = \frac{1}{x(1 - x_k/x)} \approx \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x_k}{x} + \dots\right) = \frac{1}{x} + O(1/x^2)$$

$$p(x) \approx im\omega x + \sum_{k=1}^{N} \frac{-i\hbar}{x} = im\omega x - \frac{i\hbar N}{x}$$

将这个渐近形式代入 Riccati 方程 $-i\hbar p' + p^2 = 2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)$：$p'(x) \approx im\omega + \frac{i\hbar N}{x^2}$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &\approx -i\hbar\left(im\omega + \frac{i\hbar N}{x^2}\right) + \left(im\omega x - \frac{i\hbar N}{x}\right)^2 \\
&= m\omega\hbar + \frac{\hbar^2 N}{x^2} + (im\omega x)^2 + 2(im\omega x)\left(-\frac{i\hbar N}{x}\right) + \left(-\frac{i\hbar N}{x}\right)^2 \\
&= m\omega\hbar + \frac{\hbar^2 N}{x^2} - m^2\omega^2 x^2 + 2m\omega\hbar N - \frac{\hbar^2 N^2}{x^2} \\
&\approx -m^2\omega^2 x^2 + (2N+1)m\omega\hbar \quad (\text{忽略}1/x^2\text{ 项})
\end{aligned}$$

$$\text{RHS} = 2mE - m^2\omega^2 x^2$$

比较两边：x^2 项自动匹配。比较常数项：

$$(2N+1)m\omega\hbar = 2mE$$

$$E = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

其中 N 是波函数零点的个数 ($N = 0, 1, 2, \dots$)。这正是量子谐振子的分立能级！这个推导虽然不严格，但展示了亚纯函数理论（特别是极点和留数结构）如何能够揭示物理系统的深刻性质。

5.8 辐角原理

辐角原理 (Argument Principle) 是复分析中一个非常有用的定理，它将函数在一个闭合围道内部的零点和极点数目与函数值沿该围道的辐角变化联系起来。

定理 33 (辐角原理) 设 C 是一条分段光滑的简单闭合围道（按逆时针方向）。设函数 $f(z)$ 在 C 上及其内部是亚纯函数，并且在 C 上没有零点和极点。令 Z 为 $f(z)$ 在 C 内部的零点数目（计入重数），P 为 $f(z)$ 在 C 内部的极点数目（计入阶数）。则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$$

讨论 8 $f'(z)/f(z)$ 被称为 $f(z)$ 的对数导数，因为 $d(\log f(z))/dz = f'(z)/f(z)$。积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_C d(\log f(z))$。$\log f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z)$。当 z 沿 C 走一圈回到起点时，$\ln|f(z)|$ 的值不变，所以 $\oint_C d(\ln|f(z)|) = 0$。因此，积分等于 $\oint_C d(i\arg f(z)) = i\Delta_C \arg f(z)$，其中 $\Delta_C \arg f(z)$ 是 $f(z)$ 的辐角沿 C 变化的总量。所以定理也可以写成：

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = Z - P$$

这表明 $f(C)$ 这条曲线（z 跑遍 C 时 $f(z)$ 跑出的曲线）围绕原点 $w=0$ 旋转的圈数（称为卷绕数 *Winding Number*）等于 $Z-P$。这就是“辐角原理”名称的由来。

证明 8 考虑函数 $g(z) = f'(z)/f(z)$。$g(z)$ 的极点只能出现在 $f(z)$ 的零点或极点处。

- 设 z_k 是 $f(z)$ 的一个 a_k 阶零点。在 z_k 附近，$f(z) = (z-z_k)^{a_k}h(z)$，其中 $h(z_k) \neq 0$ 且 $h(z)$ 解析。

  $$f'(z) = a_k(z-z_k)^{a_k-1}h(z) + (z-z_k)^{a_k}h'(z)$$

  $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{a_k}{z-z_k} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

  由于 $h'(z)/h(z)$ 在 z_k 附近解析，$f'(z)/f(z)$ 在 z_k 处有一个单极点，留数为 a_k。

- 设 z_m 是 $f(z)$ 的一个 b_m 阶极点。在 z_m 附近，$f(z) = (z-z_m)^{-b_m}\phi(z)$，其中 $\phi(z_m) \neq 0$ 且 $\phi(z)$ 解析。

  $$f'(z) = -b_m(z-z_m)^{-b_m-1}\phi(z) + (z-z_m)^{-b_m}\phi'(z)$$

  $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-b_m}{z-z_m} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

  $f'(z)/f(z)$ 在 z_m 处有一个单极点，留数为 $-b_m$。

根据留数定理，

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum_{z_k, z_m\ inside\ C} Res\left(\frac{f'}{f}, pole\right)$$

$$= 2\pi i \left(\sum_k Res(z_k) + \sum_m Res(z_m) \right)$$

$$= 2\pi i \left(\sum_k a_k + \sum_m (-b_m) \right)$$

$$= 2\pi i (Z - P)$$

其中 $Z = \sum a_k$ 是内部零点总阶数，$P = \sum b_m$ 是内部极点总阶数。

例子 57 设 $f(z) = z^n$。在单位圆 $|z| = 1$ 内部，$Z = n$ *(*在 $z = 0$ 有 n 阶零点*)*，$P = 0$。$f'(z) = nz^{n-1}$。$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{nz^{n-1}}{z^n} = \frac{n}{z}$。

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{n}{z} dz = \frac{n}{2\pi i} (2\pi i \times Res(1/z, 0)) = n \times 1 = n$$

结果 $n = Z - P = n - 0$。

设 $f(z) = z^{-n}$ *(*$n > 0$*)*。在单位圆 $|z| = 1$ 内部，$Z = 0$，$P = n$ *(*在 $z = 0$ 有 n 阶极点*)*。$f'(z) = -nz^{-n-1}$。$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-nz^{-n-1}}{z^{-n}} = -\frac{n}{z}$。

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} -\frac{n}{z} dz = -\frac{n}{2\pi i} (2\pi i \times 1) = -n$$

结果 $-n = Z - P = 0 - n$。

讨论 9 (应用：寻找零点) 辐角原理是许多数值算法（如基于卷绕数计算的寻根算法）的基础。通过计算函数 $f(z)$ 沿一个小方框或圆周的辐角变化，可以判断该区域内 $Z - P$ 的值。如果知道区域内没有极点 *(*$P = 0$*)*，则可以直接得到零点的数目。通过不断细分区域，可以定位零点。它也是 *Rouché* 定理等更高级工具的基础，这些工具用于估计特定区域内零点的数量。

5.9 解析延拓

不管是泰勒级数还是洛朗级数，它们一个共同的特征是在收敛圆或收敛环上必定存在至少一个奇点。但奇点并不一定在收敛圆或收敛换上处处存在。一个自然的问题是，如果在收敛圆或收敛环上存在解析邻域，能否在这个解析邻域处进一步进行泰勒展开从而延拓该函数的定义域？这就是我们这一节要研究的问题。

定理 34 (解析延拓) *analyticContinuation* 如果 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的某个连通区域 D 上解析。如果 V 是 $\mathbb{C}$ 上包含 D 的连通区域，$V \supset D$，$F(z)$ 是定义在 V 上的解析函数，且当 $z \in D$ 时，$F(z) = f(z)$，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 V 上的解析延拓。