数学物理方法（上）第十四次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 6 月 5 日

题 1. 对于如下二阶线性齐次常微分方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+2(1-2z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-2y=0, \tag{1}$$

验证 $y_1=1/z$ 是一个解，利用 *Wronski* 行列式求第二个独立解.

解. 代入 $y_1=1/z$ 可以得到

$$\frac{2z(1-z)}{z^3}-\frac{2(1-2z)}{z^2}-\frac{2}{z}=\frac{2}{z^2}-\frac{2}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z}-\frac{2}{z}=0,$$

因此 $y_1=1/z$ 是一个解，根据 Wronski 行列式满足的方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}z}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z}\right)+2(1-2z)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}z}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z}\right)=0,$$

可以解得 Wronski 行列式为

$$y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}z}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}z}=\frac{d_1}{z^2(1-z)^2},$$

由此得到方程的通解为

$$y_2=\frac{d_1}{z(1-z)}+\frac{d_0-d_1}{z}=\frac{d_1}{1-z}+\frac{d_0}{z},$$

于是第二个解可以取为

$$y_2=\frac{1}{1-z}.$$

□

题 2. 证明：在延展复平面上，不存在没有奇点的二阶线性齐次常微分方程.

证明. 设二阶线性齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+q(z)y=0,$$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

在延展复平面上没有奇点，于是 $p(z)$ 和 $q(z)$ 是整函数，作变换 $z=1/t$ 有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}p\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)y=0,$$

于是 $z=\infty$ 是 $2z-z^2p(z)$ 和 $z^4q(z)$ 的可去奇点，这要求

$$\lim_{z\to\infty}p(z)=0,\quad \lim_{z\to\infty}q(z)=0,$$

根据 Liouville 定理有 $p(z)\equiv 0$ 和 $q(z)\equiv 0$，但这同时要求

$$\lim_{z\to\infty}zp(z)=2,$$

因此矛盾，这样的方程不存在. □

题 3. 证明：在延展复平面上仅有一个奇点，且是正则奇点的二阶线性齐次常微分方程一定能写成

$$y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)=0, \tag{2}$$

求出这个方程的通解.

证明. 设二阶线性齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+q(z)y=0,$$

在延展复平面上仅有一个正则奇点，不妨设这个正则奇点为 $z=0$，于是有

$$p(z)=\frac{A}{z}+p_1(z),\quad q(z)=\frac{B+Cz}{z^2}+q_1(z),$$

其中 $p_1(z)$ 和 $q_1(z)$ 是整函数，由于 $z=\infty$ 是 $2z-z^2p(z)$ 和 $z^4q(z)$ 的可去奇点，根据 Liouville 定理有 $p_1(z)\equiv 0$ 和 $q_1(z)\equiv 0$，且

$$A=2,\quad B=0,\quad C=0,$$

因此这个方程只能是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\frac{2}{z}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=0,$$

积分一次可以得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-\frac{c_0}{z^2},$$

由此得到通解为

$$y=\frac{c_0}{z}+c_1.$$

□

题 4. 证明：在延展复平面上，奇点位于 0 和 ∞，且均为正则奇点的二阶线性齐次常微分方程一定能写成

$$z^2y''(z)+p_0zy'(z)+q_0y(z)=0, \tag{3}$$

求出这个方程的通解.

证明. 设二阶线性齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+q(z)y=0,$$

在延展复平面上仅有正则奇点 $z=0$ 和 $z=\infty$，于是有

$$p(z)=\frac{A}{z}+p_1(z),\quad q(z)=\frac{B+Cz}{z^2}+q_1(z),$$

其中 $p_1(z)$ 和 $q_1(z)$ 是整函数，由于 $z=\infty$ 是 $zp(z)$ 和 $z^2q(z)$ 的可去奇点，同样可以根据 Liouville 定理有 $p_1(z)\equiv 0$ 和 $q_1(z)\equiv 0$，且

$$A=p_0,\quad B=q_0,\quad C=0,$$

因此这个方程只能是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\frac{p_0}{z}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\frac{q_0}{z^2}y=0,$$

这是 Euler 方程，令 $z=\mathrm{e}^t$ 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p_0-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+q_0y=0,$$

相应特征多项式的根为

$$\lambda=\frac{1-p_0\pm\sqrt{(1-p_0)^2-4q_0}}{2},$$

因此当 $(1-p_0)^2\neq 4q_0$ 时，方程的通解为

$$y=c_1z^{\frac{1-p_0+\sqrt{(1-p_0)^2-4q_0}}{2}}+c_2z^{\frac{1-p_0-\sqrt{(1-p_0)^2-4q_0}}{2}},$$

当 $(1-p_0)^2=4q_0$ 时，方程的通解为

$$y=c_1z^{\frac{1-p_0}{2}}+c_2z^{\frac{1-p_0}{2}}\ln z.$$ □

题 5. *证明：在延展复平面上，奇点位于 a 和 b，且均为正则奇点的二阶线性齐次常微分方程一定能写成*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\frac{2z+\mu}{(z-a)(z-b)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\frac{\nu}{(z-a)^2(z-b)^2}y=0,\tag{4}$$

其中 μ 和 ν 是常数.

解. 设二阶线性齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+q(z)y=0,$$

在延展复平面上仅有正则奇点 $z=a$ 和 $z=b$，于是有

$$p(z)=\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{z-b}+p_1(z)=\frac{Az+D}{(z-a)(z-b)}+p_1(z),$$
$$q(z)=\frac{B_1+C_1(z-a)}{(z-a)^2}+\frac{B_2+C_2(z-b)}{(z-b)^2}+q_1(z)=\frac{Cz^3+Bz^2+Ez+F}{(z-a)^2(z-b)^2}+q_1(z),$$

其中 $p_1(z)$ 和 $q_1(z)$ 是整函数，由于 $z=\infty$ 是 $2z-z^2p(z)$ 和 $z^4q(z)$ 的可去奇点，根据 Liouville 定理有 $p_1(z)\equiv 0$ 和 $q_1(z)\equiv 0$，且

$$A=2,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=\mu,\quad E=0,\quad F=\nu,$$

因此这个方程只能是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\frac{2z+\mu}{(z-a)(z-b)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\frac{\nu}{(z-a)^2(z-b)^2}y=0. \qquad \square$$

题 6. *对于二阶线性齐次常微分方程*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\frac{2z+2}{z(z-1)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\frac{2}{z^2(z-1)^2}y=0, \tag{5}$$

寻找 Möbius 变换，将该方程的正则奇点映射到 0 和 ∞，从而通过 Euler 方程的一般解求解该方程.

解. 根据题 5 中的结论，设 Möbius 变换

$$w=\frac{z-a}{z-b},$$

此时方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}w^2}+\frac{2a+\mu}{(a-b)w}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w}+\frac{\nu}{(a-b)^2w^2}y=0,$$

于是根据题 4 中的结论，相应特征多项式的根为

$$\lambda=\frac{-a-b-\mu\pm\sqrt{(a+b+\mu)^2-4\nu}}{2(a-b)},$$

因此当 $(a+b+\mu)^2\neq 4\nu$ 时，方程的通解为

$$y=c_1\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\frac{-a-b-\mu+\sqrt{(a+b+\mu)^2-4\nu}}{2(a-b)}}+c_2\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\frac{-a-b-\mu-\sqrt{(a+b+\mu)^2-4\nu}}{2(a-b)}},$$

当 $(a+b+\mu)^2=4\nu$ 时，方程的通解为

$$y=c_1\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{-\frac{a+b+\mu}{2(a-b)}}+c_2\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{-\frac{a+b+\mu}{2(a-b)}}\ln\frac{z-a}{z-b},$$

此时 $a=0,b=1,\mu=2,\nu=2$，代入得到方程的通解为

$$y=c_1\left(\frac{z}{z-1}\right)+c_2\left(\frac{z}{z-1}\right)^2. \qquad \square$$

题 7. *在延展复平面上奇点位于 $0,1$ 和 ∞，且均为正则奇点的方程是超几何方程*

$$z(1-z)y''(z)+[c-(1+a+b)z]y'(z)-aby(z)=0, \tag{6}$$

其一个解可以写为 ${}_2F_1(a,b,c;z)$. 数学物理中一类仅具有三个正则奇点的二阶线性齐次常微分方程是连带 Legendre 方程

$$y''(z)-\frac{2z}{1-z^2}y'(z)-\left[\frac{t}{1-z^2}+\frac{m^2}{(1-z^2)^2}\right]y(z)=0, \tag{7}$$

其中 m 是整数，t 是复数. 我们要做的是将该方程化成超几何方程的形式.

1. 寻找适当的变量替换 $w=f(z)$，将奇点映射到 $0,1$ 和 ∞. 求出变换后的方程

$$y''(w)+P(w)y'(w)+Q(w)y(w)=0, \tag{8}$$

的 P 和 Q 的形式.

2. 定义一个新的函数 $y(w)=w^A(1-w)^Bv(w)$，选取 A 和 B 使得 $v(w)$ 所满足的方程具有超几何方程的形式，定出参数 a,b,c.

解. 1. 由于连带 Legendre 方程的奇点分别为 $-1,1$ 和 ∞，设 Möbius 变换

$$w=\frac{1+z}{2},$$

此时方程化为

$$y''(w)+\frac{1-2w}{w(1-w)}y'(w)-\left[\frac{t}{w(1-w)}+\frac{m^2}{4w^2(1-w)^2}\right]y(w)=0,$$

由此可以得到

$$\begin{aligned}
P(w)&=\frac{1-2w}{w(1-w)}=\frac{1}{w}-\frac{1}{1-w},\\
Q(w)&=-\left[\frac{t}{w(1-w)}+\frac{m^2}{4w^2(1-w)^2}\right]\\
&=-\left(t+\frac{m^2}{2}\right)\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{1-w}\right)-\frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\right].
\end{aligned}$$

2. 设二阶线性齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+q(z)y=0,$$

作变换 $y(z)=f(z)u(z)$，此时方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\frac{2f'(z)+p(z)f(z)}{f(z)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\frac{f''(z)+p(z)f'(z)+q(z)f(z)}{f(z)}u=0,$$

取 $f(z)$ 满足 $2f'(z)+p(z)f(z)=0$，可以解得

$$f(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}p(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right\},$$

此时方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\left[q(z)-\frac{1}{2}p'(z)-\frac{1}{4}p^2(z)\right]u=0,$$

其中 u 的系数 $I(z)$ 称为这个方程的不变式. 对于连带 Legendre 方程，作变换

$$y(w)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{w_0}^{w}\frac{1-2z}{z(1-z)}\,\mathrm{d}z\right\}u(w)=w^{-1/2}(1-w)^{-1/2}u(w),$$

相应的不变式为

$$I(w)=-\left(t+\frac{m^2-1}{2}\right)\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{1-w}\right)-\frac{m^2-1}{4}\left[\frac{1}{w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\right],$$

对于超几何方程，作变换

$$v(w)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{w_0}^{w}\frac{c-(1+a+b)z}{z(1-z)}\,\mathrm{d}z\right\}u(w)=w^{-c/2}(1-w)^{(c-1-a-b)/2}u(w),$$

相应的不变式为

$$\begin{aligned}I(w)=&-\left[ab+\frac{c}{2}(c-1-a-b)\right]\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{1-w}\right)\\&-\frac{c(c-2)}{4}\frac{1}{w^2}-\frac{(c-a-b)^2-1}{4}\frac{1}{(1-w)^2},\end{aligned}$$

由此可以确定

$$\begin{aligned}&a+b=1, && ab=t, && c=1+m, && y(w)=w^{m/2}(1-w)^{-m/2}v(w),\\&a+b=1, && ab=t, && c=1-m, && y(w)=w^{-m/2}(1-w)^{m/2}v(w),\\&a+b=1+2m, && ab=t+m^2+m, && c=1+m, && y(w)=w^{m/2}(1-w)^{m/2}v(w),\\&a+b=1-2m, && ab=t+m^2-m, && c=1-m, && y(w)=w^{-m/2}(1-w)^{-m/2}v(w),\end{aligned}$$

任一解对应的变换都可以将连带 Legendre 方程变换为超几何方程. □

注. 对于不同的 *Möbius* 变换有不同的解，例如对于 $w=\dfrac{2}{z+1}$ 有

$$\begin{aligned}P(w)&=-\frac{1}{1-w},\\Q(w)&=\frac{t}{w^2(1-w)}-\frac{m^2}{4(1-w)^2}=\frac{t}{w}+\frac{t}{w^2}+\frac{t}{1-w}-\frac{m^2}{4(1-w)^2},\end{aligned}$$

作变换 $y(w)=(1-w)^{-1/2}u(w)$ 得到相应的不变式为

$$I(w)=\frac{t}{w}+\frac{t}{w^2}+\frac{t}{1-w}-\frac{m^2-1}{4(1-w)^2},$$

由此可以确定可能的解为

$$\begin{aligned}&c=1+\sqrt{1-4t}, && a+b=c+m, && ab=\frac{1}{2}(1+m)c-t, && y(w)=w^{c/2}(1-w)^{m/2}v(w),\\&c=1+\sqrt{1-4t}, && a+b=c-m, && ab=\frac{1}{2}(1-m)c-t, && y(w)=w^{c/2}(1-w)^{-m/2}v(w),\\&c=1-\sqrt{1-4t}, && a+b=c+m, && ab=\frac{1}{2}(1+m)c-t, && y(w)=w^{c/2}(1-w)^{m/2}v(w),\\&c=1-\sqrt{1-4t}, && a+b=c-m, && ab=\frac{1}{2}(1-m)c-t, && y(w)=w^{c/2}(1-w)^{-m/2}v(w).\end{aligned}$$