例子 45 求

$$f(z) = \ln(1+z)$$

在 $z=0$ 的泰勒展开和收敛半径。

定理 27 (解析函数的零点孤立性定理) *isolatezero* 如果 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数且不恒为零，则 $f(z)$ 在 D 上的零点一定是孤立零点，即对 $f(z)$ 的任意零点 z_0，一定能找到一个邻域 $D_\varepsilon(z_0)$，使得 $f(z)$ 在 $D_\varepsilon(z_0)$ 上除了 z_0 外不再有零点。

证明：设 z_0 是 $f(z)$ 的零点，$f(z)$ 在 z_0 处有泰勒级数展开

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \,. \tag{5.62}$$

由于 $f(z)$ 不恒为零，故其展开系数 a_n 不能恒为零。不妨令第一个非零的 a_n 为 a_N，则

$$f(z) = (z-z_0)^N \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n} (z-z_0)^n \right) := (z-z_0)^N g(z) \,. \tag{5.63}$$

由于 $a_N \neq 0$，因此 $g(z_0) \neq 0$。由 $g(z)$ 的连续性可知一定存在 z_0 的某个邻域使得 $g(z_0) \neq 0$，因此在这个邻域内 $f(z) \neq 0$。证毕。

5.4 洛朗展开

泰勒展开对于解析函数在解析邻域内的计算非常有用，但实际情况中我们也会碰到解析函数在非解析邻域内的计算问题。一个简单的例子是

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

在 $z=0$ 处的展开。显然 $0 < |z| < 1$ 是这个函数的解析邻域，但这是一个复连通区域，$z=0$ 是函数的奇点。为了讨论解析函数在孤立奇点（关于孤立奇点的定义我们后面再讨论，此处只需从字面上理解）处的展开问题，我们需要洛朗展开。

定理 28 (洛朗级数展开定理) *Laurent* 设函数 $f(z)$ 在带形区域

$$D:\ r_1 < |z-z_0| < r_2$$

上解析，则 $f(z)$ 在该带形区域上可展开成如下无穷级数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \,, \tag{5.64}$$

或者统一写为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\,. \tag{5.65}$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

称作该洛朗级数的解析部分或正规部分，其收敛区域是 $|z-z_0|<r_2$。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

称作主要部分或奇异部分，其收敛区域是 $|z-z_0|>r_1$。洛朗级数的展开系数可由如下积分公式给出

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,\quad n\geq 0 \tag{5.66}$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-z_0)^{n-1}dz\,,\quad n\geq 1 \tag{5.67}$$

或者统一的

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,\quad -\infty<n<\infty\,. \tag{5.68}$$

其中 C 是在带形区域 $r_1<|z-z_0|<r_2$ 中绕 z_0 一周的简单封闭正定向围道。

证明:对于解析区域内的任意一点 z,选取如图**??**所示积分围道 $C_1\,,C_2\,,C_3\,,C_4\,$,其定向如图所示。有柯西积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+C_2+C_3+C_4}\frac{f(w)}{w-z}dw\,. \tag{5.69}$$

由于 C_2 和 C_4 互为相反围道，其贡献抵消，因此有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+C_3}\frac{f(w)}{w-z}dw\,. \tag{5.70}$$

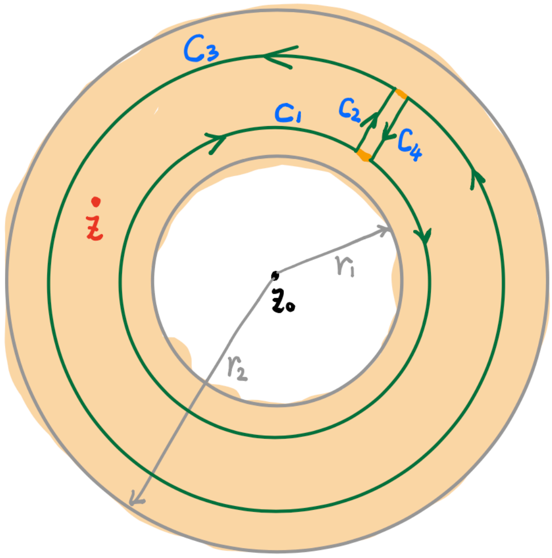

Figure 5.1: 计算洛朗级数的围道

我们分别计算这两个积分。对于 C_3 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{f(w)}{w-z}dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{f(w)}{w-z_0-(z-z_0)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{1}{w-z_0}\frac{f(w)}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n \qquad (5.71)\end{aligned}$$

同理对于 C_1 围道，有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}\frac{f(w)}{z-z_0-(w-z_0)}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}\frac{1}{z-z_0}\frac{f(w)}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}f(w)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}dw \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1}f(w)(w-z_0)^{n-1}dw\right]\frac{1}{(z-z_0)^n} \qquad (5.72)
\end{aligned}$$

有于 C_3 和 $-C_1$ 都是绕 z_0 的正定向围道，柯西定理的围道积分独立性告诉我们对于带形区域中的解析函数有

$$\int_C = \int_{C_3} = \int_{-C_1} \tag{5.73}$$

因此

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)(w-z_0)^{n-1}dw\right]\frac{1}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n . \tag{5.74}$$

此即我们要证明的定理。显然，一旦指定了洛朗级数的展开点和带形区域，其系数就是唯一确定的。在实际计算问题中，除了直接应用洛朗级数系数的积分表示外，通常有更简便的代数技巧能直接得到系数。

例子 46 计算

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)}$$

在 $z_0 = 1$ 处的洛朗展开，展开区域分别为环域 $0 < |z-1| < 3$ 和 $3 < |z-1|$。

例子 47 计算

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

在 $z_0 = 0$ 处的洛朗展开。

例子 48 讨论 $f(z) = \ln\frac{z-2}{z-1}$ 的洛朗展开，取割线为 $(1,2)$，割线上岸幅角 $Arg(z-1) = 0$，$Arg(z-2) = \pi$。

例子 49 计算 $\cot z$ 在原点的洛朗展开。

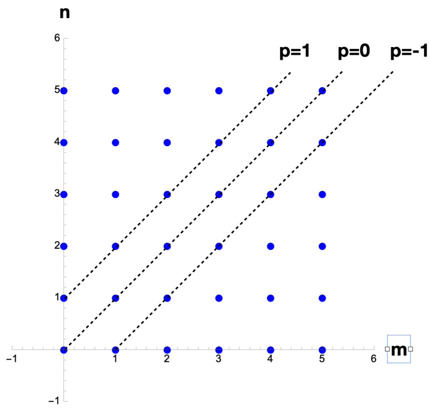

Figure 5.2: 求和格点。

例子 50 计算

$$f(r,z)=\exp\left(\frac{1}{2}r(z-1/z)\right)$$

在收敛环上的洛朗展开。

解 1 利用指数函数的展开式:

$$\exp\left(\frac{1}{2}rz\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(rz/2)^n}{n!},\quad \exp\left(-\frac{1}{2z}r\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-r/(2z))^m}{m!} \tag{5.75}$$

两式相乘得到:

$$f(r,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m r^{n+m}}{2^{n+m}n!m!}z^{n-m} \tag{5.76}$$

这是一个二维格点和，见图??. 令 $p=n-m$, 首先考虑求和中 $p\geq 0$ 的项,

$$f(r)\Big|_{p\geq 0}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m r^{2m+p}}{2^{2m+p}(m+p)!m!}z^p \tag{5.77}$$

而对于 $p<0$ 的项,

$$f(r,z)\Big|_{p<0}=\sum_{p=-1}^{-\infty}\sum_{m=-p}^{\infty}\frac{(-1)^m r^{2m+p}}{2^{2m+p}(m+p)!m!}z^p \tag{5.78}$$

将上述展开式写作

$$f(r,z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}J_p(r)z^p \tag{5.79}$$

其中 $J_p(r)$ 称作第一类贝塞尔函数。

讨论 5 $f(r,z) = \exp\left(\frac{1}{2}r(z-1/z)\right)$ 称作贝塞尔函数的生成函数。贝塞尔函数常出现在具有柱对称性的物理问题中。例如，令 $z = ie^{i\phi}$，则

$$f(kr, ie^{i\phi}) = \exp\left(kr\frac{1}{2}i(e^{i\phi}+e^{-i\phi})\right) = \exp(ikr\cos\phi) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{5.80}$$

这是沿 $\vec{k}$ 方向的平面波。因此

$$\exp(ikr\cos\phi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p J_p(kr)e^{ip\phi} \tag{5.81}$$

是将平面波用圆柱波展开的公式。

从 $f(r,z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(r)z^p$ 出发，我们还能方便的得到 $J_p(r)$ 的积分表示。从洛朗级数的围道积分定义出发，取单位圆作为围道，

$$J_p(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(r,z)}{z^{p+1}} \tag{5.82}$$

取参数化 $z = e^{i\theta}$，则

$$J_p(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\frac{1}{2}r(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right)}{(e^{i\theta})^{p+1}} ie^{i\theta}\, d\theta \tag{5.83}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ir\sin\theta - ip\theta)\, d\theta \tag{5.84}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(r\sin\theta - p\theta) d\theta \tag{5.85}$$

其中最后一步我们应用了积分结果为实数的条件。

5.5 奇点的分类

洛朗展开适用于孤立奇点或非奇异点处的展开。为此我们需要定义何为孤立奇点。

定义 17 (孤立奇点) *isolated* z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则一定有 z_0 的某个充分小邻域内使得 z_0 是其中的唯一奇点。反之则称为非孤立奇点。

如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则一定存在某个 r，使得 $f(z)$ 在 $0 < |z-z_0| < r$ 上解析，并且有洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,. \tag{5.86}$$

此时奇点 z_0 又可以分为如下几类:

- **可去奇点**：如果所有 $b_n = 0$，则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点。另外还有一些等价的可去奇点表述
  - $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限。
  - $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$。
  - 存在一个邻域 $D_\varepsilon(z_0)$，使得 $f(z)$ 在 $D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ 有界。
- **极点**：如果只有有限个 b_n 不为零，则 z_0 是 $f(z)$ 的极点。如果 $b_n \neq 0$，$b_m = 0\,,\forall m > n$，则 z_0 是 n 阶极点。一阶极点又称为单极点。另外还有一些等价的 m 阶极点判断方法：
  - $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$，$g$ 在 z_0 解析，且 $g(z_0) \neq 0$。
  - $\frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 是 m 阶零点。
  - $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m+1}f(z) = 0$ 但 $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) \neq 0$
- **本性奇点**：如果有无穷多个 b_n 不为零，则 z_0 是本性奇点。另外一个判断方法是，如果一个奇点既非可去奇点也非极点，则肯定是本性奇点。
- **留数**：b_1（或 a_{-1}）称作 $f(z)$ 在 z_0 的留数，记作 $\mathrm{res}f(z_0)$。

关于本性奇点，一个重要的定理是

定理 29 (Casorati-魏尔斯特拉斯定理) 设 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，令 D 是 z_0 的某个邻域，使得 $f(z)$ 在 $U = D\backslash\{z_0\}$ 上解析。则 $f(z)$ 在 U 上的取值是在 $\mathbb{C}$ 中处处稠密的，即对于 $\mathbb{C}$ 中任何复数，$f(z)$ 在 U 上都可无限逼近。

证明：用反证法，设存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 及 $s > 0$，使得

$$|f(z) - \alpha| > s\,, \qquad \forall z \in U$$

定义函数

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha}\,, \tag{5.87}$$

显然 $g(z)$ 在 U 上是解析函数且有界，因此按照可去奇点的第三种定义，z_0 最多是 $g(z)$ 的可去奇点，因此可将 $g(z)$ 延拓成 D 上的解析函数。因此，可对 $g(z)$ 在 z_0 附近做泰勒展开，

$$g(z) = \sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n \tag{5.88}$$

因此

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + \alpha = \frac{1}{\sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n} + \alpha \tag{5.89}$$