数学物理方法（上）第九次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 5 月 5 日

题 1. 设 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/N}$，令 $(\boldsymbol{u}_k)_n = \omega^{kn}$，即

$$\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}} = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \cdots, \omega^{k(N-1)}), \tag{1}$$

证明

$$\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l \rangle \equiv \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (\boldsymbol{u}_k)_n (\boldsymbol{u}_l)_n^* = \delta_{kl}. \tag{2}$$

证明. 根据 $\omega^* = \omega^{-1}$ 计算得到

$$\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l \rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (\boldsymbol{u}_k)_n (\boldsymbol{u}_l)_n^* = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{kn}(\omega^*)^{ln} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{(k-l)n},$$

当 $k = l$ 时有

$$\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l \rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1,$$

当 $k \neq l$ 时有

$$\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l \rangle = \frac{1}{N}\frac{1-\omega^{(k-l)N}}{1-\omega^{k-l}} = 0,$$

综上有 $\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l \rangle = \delta_{kl}$ 成立. □

题 2. 对于定义在 $[0, 2\pi]$ 的函数 $f(x)$，我们可以将其分立化为

$$f_n = f\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{3}$$

定义向量

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

离散 *Fourier* 变换（*DFT*）可以写为

$$\boldsymbol{y}=\sum_{n=0}^{N-1}\hat{y}_n\boldsymbol{u}_n,\quad \hat{y}_n=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}_n\rangle, \tag{5}$$

DFT 的一个重要应用是过滤高频噪声．本题请使用 *Mathematica* 等计算机代数系统解答．

滤波：设函数 $f(t)$ 为：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t^2/10}[\sin(2t)+2\cos(4t)+a\sin(t)\sin(50t)], \tag{6}$$

1. 分别画出 $a=0$ 和 $a=0.4$ 时 $f(t)$ 的图像．可以看出 $\sin(50t)$ 为高频噪音．
2. 将 f 离散化，令 $y_k=f\left(\dfrac{2k\pi}{256}\right)$，其中 $k=0,\cdots,255$．计算 *DFT* 系数 $\hat{y}_k$，其中 $0\leqslant k\leqslant 255$．
3. 假设低频系数为 $\hat{y}_0,\cdots,\hat{y}_{m-1}$ 和 $\hat{y}_{256-m},\cdots,\hat{y}_{255}$，对于某个较小的 m，通过设置 $\hat{y}_k=0$（当 $m\leqslant k\leqslant 255-m$ 时），滤除高频分量，选取你认为合理的 m．对新的 $\hat{y}_k$ 应用逆 *DFT*，计算滤波后的 y_k．绘制新的 y_k 值，并与原始函数进行比较．尝试其他 m 值并观察结果．

压缩：设容差 $tol=0.01$．若满足 $|\hat{y}_k|<tol\times M$，其中 $M=\max_{0\leqslant k\leqslant 255}|\hat{y}_k|$，则将 $\hat{y}_k$ 置为零．

1. 对新的 $\hat{y}_k$ 应用逆 *DFT*，计算对应的 y_k．绘制新的 y_k 值，并与原始函数进行比较．尝试其他 tol 值并观察结果．

将这个方法推广到二维图像（为了简便起见，可以选取二维黑白图像，如图 1 所示）．

图 1: 题 2 图像

解. 经处理后的图像如图 2 和图 3 所示，具体算法见 ipynb 文件． □

(a) 未处理过的图像

(b) 经滤波后的图像

图 2: 经滤波处理前后的图像对比

(a) 未处理过的图像

(b) 经压缩后的图像

图 3: 经压缩处理前后的图像对比

题 3. *Fourier* 级数可以用来计算某些重要的求和，且方式多样.

1. 在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上计算 x 的 *Fourier* 展开，利用 *Parseval* 公式计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{7}$$

2. 在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上计算 $f(x) = x^2$ 的 *Fourier* 级数，并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{8}$$

3. 在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上计算 $f(x) = x^4$ 的 Fourier 级数，并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \tag{9}$$

解. 1. 由于 $f(x) = x$ 是奇函数，只需计算正弦项的系数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

于是有 Fourier 展开

$$x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积，根据 Parseval 公式有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2,$$

由此解得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. 由于 $f(x) = x^2$ 是偶函数，只需计算余弦项以及常数项的系数

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin nx \, \mathrm{d}x\right] = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad n \neq 0, \end{aligned}$$

这里 $n = 0$ 项需要特别计算

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2,$$

于是有 Fourier 展开

$$x^2 \sim \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调（或分段可微），根据逐点收敛定理有

$$\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = f(0) = 0, \quad \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} = \pi^2,$$

由此解得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. 由于 $f(x)=x^4$ 是偶函数，只需计算余弦项以及常数项的系数

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[x^4 \sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 4x^3 \sin nx\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\left[x^3 \cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 3x^2 \cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \frac{(-1)^n(8n^2\pi^2-48)}{n^4}, \quad n\neq 0,
\end{aligned}
$$

这里 $n=0$ 项需要特别计算

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\pi^4,$$

于是有 Fourier 展开

$$x^4 \sim \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(8n^2\pi^2-48)}{n^4}\cos nx, \quad x\in[-\pi,\pi],$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调（或分段可微），根据逐点收敛定理有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(8n^2\pi^2-48)}{n^4} &= f(0) = 0, \\
\frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(8n^2\pi^2-48)}{n^4} &= \frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2} = \pi^4,
\end{aligned}
$$

由此解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{7\pi^4}{720}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

题 4. *对于如下定义在 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上的函数，计算其 Fourier 级数：*

1. $f(x)=|\sin x|$.

2. $f(x)=|x|$.

3. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

4. $f(x)=x\cos x$.

解. 1. 由于 $f(x)$ 是偶函数，只需计算余弦项以及常数项的系数

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\,\mathrm{d}x = -\frac{2[1+(-1)^n]}{(n^2-1)\pi}, \quad n\neq 1,
\end{aligned}
$$

这里 $n=1$ 项需要特别计算

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0,$$

于是有 Fourier 展开

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\cos 2nx, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

2. 由于 $f(x)$ 是偶函数，只需计算余弦项以及常数项的系数

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}, \quad n\neq 0, \end{aligned}$$

这里 $n=0$ 项需要特别计算

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi,$$

于是有 Fourier 展开

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

3. 计算正弦项的系数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]\,\mathrm{d}x = 0, \quad n\neq 1, \end{aligned}$$

这里 $n=1$ 项需要特别计算

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

计算余弦项以及常数项的系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1+(-1)^n}{(n^2-1)\pi}, \quad n\neq 1,$$

这里 $n=1$ 项需要特别计算

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0,$$

于是有 Fourier 展开

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\cos 2nx, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

4. 由于 $f(x)$ 是奇函数，只需计算正弦项的系数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n n}{n^2-1}, \quad n\neq 1, \end{aligned}$$

这里 $n=1$ 项需要特别计算

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2},$$

于是有 Fourier 展开

$$x \sim -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx, \quad x\in[-\pi,\pi]. \qquad \square$$

题 5. 证明三维函数 *Fourier* 变换的求导和卷积定理：

1. $\mathcal{F}[\nabla f(\boldsymbol{r})](\boldsymbol{k}) = \mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{f}(\boldsymbol{k})$.
2. $\mathcal{F}[\nabla^2 f(\boldsymbol{r})](\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{k}^2\hat{f}(\boldsymbol{k})$.
3. $\mathcal{F}[f\star g(\boldsymbol{r})](\boldsymbol{k}) = \hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k})$，其中 $f\star g(\boldsymbol{r}) \equiv \int f(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3r'$.

证明.（方法 1）

1. 根据 Fourier 变换的定义有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\nabla f(\boldsymbol{r})](\boldsymbol{k}) &= \int \mathrm{d}^3r\ \nabla f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= -\int \mathrm{d}^3r\ f(\boldsymbol{r})\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{i}\boldsymbol{k}\int \mathrm{d}^3r\ f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{f}(\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

2. 根据 Fourier 变换的定义有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\nabla^2 f(\boldsymbol{r})](\boldsymbol{k}) &= \int \mathrm{d}^3r\ \nabla^2 f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= -\int \mathrm{d}^3r\ f(\boldsymbol{r})\nabla^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{k}^2\int \mathrm{d}^3r\ f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{k}^2\hat{f}(\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

3. 根据 Fourier 变换的定义有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f\star g(\boldsymbol{r})](\boldsymbol{k}) &= \int \mathrm{d}^3r\int \mathrm{d}^3r'\ f(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= \int \mathrm{d}^3r\int \mathrm{d}^3r'\ f(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} = \hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$ □

证明.（方法 2）

1. 根据 Fourier 逆变换的定义有

$$\begin{aligned}\nabla f(\boldsymbol{r}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\hat{f}(\boldsymbol{k})\nabla\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{f}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{f}(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

2. 根据 Fourier 逆变换的定义有

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(\boldsymbol{r}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\hat{f}(\boldsymbol{k})\nabla^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{k}\hat{f}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\mathcal{F}^{-1}[\boldsymbol{k}^2\hat{f}(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

3. 根据 Fourier 逆变换的定义有

$$\begin{aligned}f\star g(\boldsymbol{r}) &= \int \mathrm{d}^3r'\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\hat{f}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\hat{g}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\hat{f}(\boldsymbol{k})\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\hat{g}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{r}).\end{aligned}$$ □

题 6. *计算双边指数衰减函数的 Fourier 变换*

$$f(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}, \quad a > 0, \tag{10}$$

并计算其逆变换.

解. 根据 Fourier 变换的定义有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \\ &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \frac{1}{a-\mathrm{i}k} + \frac{1}{a+\mathrm{i}k} = \frac{2a}{a^2+k^2},\end{aligned}$$

根据 Fourier 逆变换的定义有

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \frac{2a}{a^2+k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

当 $t = 0$ 时取上半平面半圆围道，根据大圆弧引理和留数定理有

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)] = \mathrm{i}\,\mathrm{Res}(\hat{f}, \mathrm{i}a) = 1,$$

当 $t > 0$ 时取上半平面半圆围道，根据 Jordan 引理和留数定理有

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)] = \mathrm{i}\,\mathrm{Res}(\hat{f}, \mathrm{i}a) = \mathrm{e}^{-at},$$

当 $t < 0$ 时取下半平面半圆围道，根据 Jordan 引理和留数定理有

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)] = \mathrm{i}\,\mathrm{Res}(\hat{f}, -\mathrm{i}a) = \mathrm{e}^{at},$$

综上有 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)] = \mathrm{e}^{-a|t|}$ 成立. □

题 7. *定义矩形函数*

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \dfrac{1}{2}, \\ 1, & |t| \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{11}$$

计算平移矩形函数的 Fourier 变换

$$f(t) = \mathrm{rect}(t-1). \tag{12}$$

解. 根据 Fourier 变换的定义有

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{1/2}^{3/2} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k/2} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}k/2}}{\mathrm{i}k} = \frac{2}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}\sin\frac{k}{2}.$$ □

题 8. *求三角脉冲的 Fourier 变换*

$$f(x) = \begin{cases} (1-a|x|)h, & |x| < \dfrac{1}{a}, \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{a}, \end{cases} \quad a > 0. \tag{13}$$

解. 根据 Fourier 变换的定义有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-1/a}^{1/a} \mathrm{d}x(1-a|x|)h\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\ &= 2\int_0^{1/a} \mathrm{d}x(1-ax)h\cos(kx) \\ &= \frac{2}{k}\left[(1-ax)h\sin(kx)\Big|_0^{1/a} + \int_0^{1/a} \mathrm{d}x\ ah\sin(kx)\right] = \frac{2ah}{k^2}\left(1-\cos\frac{k}{a}\right).\end{aligned}$$ □

题 9. 计算汤川势的 *Fourier* 变换：

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{e}^{-ar}}{r}\right](\boldsymbol{k}) \equiv \int \frac{\mathrm{e}^{-ar}}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}^3 r, \quad a>0. \tag{14}$$

解. 作球坐标变换可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{e}^{-ar}}{r}\right](\boldsymbol{k}) &= \int \frac{\mathrm{e}^{-ar}}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}^3 r \\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\ \frac{\mathrm{e}^{-ar}}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\theta}r^2\sin\theta \\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}r\ \frac{2\pi}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-ar}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}) = \frac{4\pi}{a^2+k^2}.\end{aligned}$$ □