2 解析函数

2.1 导数

可导和可微 设 $w = f(z)$ 是区域 G 内的单值函数, 若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z 点***可导 (可微)***. 极限值称为 $f(z)$ 的***导数(微商)***, 记为

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{2}$$

相对实变函数, 可导即 $f'(z)$ 存在是一个更强的限制, 这是因为

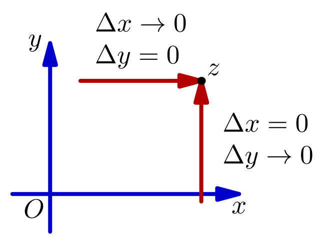
$$\begin{aligned} f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) &\Longrightarrow \Delta w = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v \\ z = x + \mathrm{i}y &\Longrightarrow \Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y \end{aligned}$$

所以

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} \tag{3}$$

函数在 z 点可导, 就意味着 $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$ 以任意方式趋向于零, 上式右边的极限都趋于同样的有限值, 即该点导数值 $f'(z)$.

在 z 平面上有无限条线路使 $\Delta z \to 0$, 我们选取如下两条路线:



1. $\Delta x \to 0$ 但 $\Delta y = 0$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

2. $\Delta y \to 0$ 但 $\Delta x = 0$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{5}$$

Theorem 2.1 (Cauchy-Riemann 方程[1]) *若 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 z 点可导*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{6}$$

Note *C-R 方程是函数可导的必要条件, 但不是充分条件. 它只是保证了 Δz 以平行于实轴和虚轴这两种特殊方式趋于 0 时, $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 逼近于同一个值.*

[1] 简记为 C-R 方程

Example 2.1 设 $f(z)$ 在 x- 和 y- 轴上等于 1, 在其它位置等于 0. 在 $z=0$ 点

1. *$f(z)$ 满足 C-R 方程.*
2. *$f'(0)$ 不存在.*

Solution 1. $u(x,0)=1$, $u(0,y)=1$, $v(x,y)=0$. 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=0$$

满足 C-R 方程.

2. $f(z)$ 在 $z=0$ 点显然不连续.

□

Theorem 2.2 *若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 z 点满足C-R方程, 且函数的四个偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 在 z 点连续. 则函数在 z 点可导.*

Proof 由数学分析可知, 偏导数连续则多元函数可微

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{7}$$
$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{8}$$

于是 $\Delta z\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\Delta w&=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y\end{aligned}$$

由 C-R 方程

$$\begin{aligned}\Delta w&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z\end{aligned}$$

于是

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9}$$

□

求导运算

和实数情形一样,

1. 如果函数 $f(z)$ 在 z 点可导, 则在 z 点必连续

$$\lim_{\Delta z\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\cdot\Delta z=f'(z)\cdot 0=0$$

2. 高等数学中实变函数的各种求导公式都适用于复变函数, 如四则运算规则、复合函数规则及各种初等函数的导数. 如

$$(z^n)'=nz^{n-1},\quad (\sin z)'=\cos z,\quad \cdots$$

2.2 解析函数

解析函数 若 $f(z)$ 在区域 G 内每一点都可导, 并且 $f'(z)$ 连续, 则称 $f(z)$ 为 G 内的**解析函数**.

Note 下章将证明: 任何函数 $f(z)$ 在区域内可导, 则 $f'(z)$ 一定连续.

Example 2.2 z^n 是全平面上的解析函数.

Theorem 2.3 函数为区域 G 内的解析函数的充分必要条件是函数在区域 G 内满足 C-R 条件且四个偏导数连续.

函数解析性的限制

解析性是很严格的要求

1. 解析函数的实部和虚部不是独立的. 知道了其中之一, 根据 C-R 方程, 就可以唯一地确定另一个, 最多相差一个任意常数.

2. 不是任意的二元函数都可以作为解析函数的实部或虚部, 它们必须是调和函数. 即 u 和 v 满足二维 *Laplace* 方程

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{aligned}} \tag{10}$$

Example 2.3 已知实部 $u(x,y)$, 求虚部 $v(x,y)$.

Solution 已知实部 $u(x,y)$, 则虚部 $v(x,y)$ 满足

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{11}$$

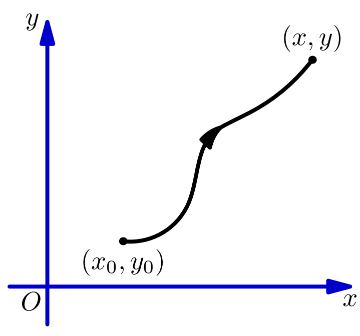
由 C-R 方程

$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \tag{12}$$

积分

$$\begin{aligned}v(x,y)=\int_{\text{参考点}(x_0,y_0)}^{(x,y)}&\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)\\&+\text{常数 } v(x_0,y_0)\end{aligned} \tag{13}$$

任取积分路径:



□

Example 2.4 设 $u(x,y)=x^2-y^2$, 求 $v(x,y)$ 和 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$.

Solution 由上例[2]

$$\mathrm{d}v = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y = 2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)=(0,0)}^{(x,y)} 2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + C \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} 2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + C \\ &= 0 + 2\int_0^y x\mathrm{d}y + C = 2xy + C \end{aligned}$$

相应解析函数

$$f(z) = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy + C)$$

最后应表为 z 的函数

$$f(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 + \mathrm{i}C = z^2 + \mathrm{i}C$$

□

Proof 以后我们会学到, 解析函数的实部和虚部 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的二阶偏导数一定存在并且连续. 于是可以对 C-R 方程求导

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

交换微商次序, 得 u 和 v 满足*二维Laplace方程* 即为调和函数. □

Example 2.5 *例如: 上例中的 $u(x,y) = x^2 - y^2$ 即为满足 Laplace 方程的调和函数, 所以可以作为解析函数的实部或虚部. 相反, $x^2 + y^2$ 就不能作为解析函数的实部或虚部.*

可见函数的解析性, 是一个很高的要求. 正因为要求高, 解析函数具有一系列的重要性质. 实际上解析函数是复变函数部分的中心课题.

点解析性

函数的解析性, 总是和一定的区域联系在一起. 但有时我们也说函数在某点解析。

解析点和奇点 *如果函数在某点的某一个邻域内解析, 则称函数在该点解析, 该点则称为函数的* ***解析点****. 如果函数在某点不解析, 则称该点为函数的* ***奇点****.*

Example 2.6 (奇点) *奇点有很多情况. 函数在某一点不解析, 可以是:*

- *函数在某点 z_0 无定义. 例如: $w = 1/z$*
- *函数在 z_0 虽有定义但不可导. 例如: $w = \sqrt{z}$*
- *函数在 z_0 虽可导, 仍可不解析. 例如: $w = z^{3/2}$*
  因为还可以在其任意邻域内都有点无定义、不可导, ...

[2]或可直接看出全微分为

$$\mathrm{d}v = 2\mathrm{d}(xy)$$

也得

$$v = 2xy + C$$

2.3 初等函数

本节介绍一些基本的解析函数, 它们都是实函数在复数域中的推广

1. 幂函数 z^n (整数幂次)
2. 指数函数 e^z
3. 三角函数 $\sin z$, $\cos z$
4. 双曲函数

幂函数 z^n (整数幂次)

$n=0,1,2,\ldots$ z^n 在全平面解析

$n=-1,-2,-3,\ldots$ 除 $z=0$ 奇点外处处解析

幂函数为无界函数, 其导数为

$$(z^n)' = nz^{n-1} \tag{14}$$

由幂函数可以定义 (n 次) **多项式**(函数)

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{z-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

和**有理函数**

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

其中 $P_n(z)$ 和 $Q_m(z)$ 分别是 n 次多项式和 m 次多项式.

指数函数 e^z

$$\mathrm{e}^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{15}$$

于是

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x e^{\mathrm{i}y}$$

由 Euler 公式, 得[3]

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \tag{16}$$

显然 e^z 是无界函数.

Theorem 2.4 *e^z 在全平面解析, 其导数为*

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z \tag{17}$$

Proof 由

$$u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$$
$$v(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$$

求 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏微商, 分别得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x \cos y.$$

[3] 可作为指数函数的定义.

满足 Cauchy-Riemann 方程, 且各偏微商连续, 所以 e^z 在全平面可导和解析. 其导数计算如下

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^z\end{aligned}$$

□

三角函数 $\sin z, \cos z$

$$\sin z \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{18}$$

$$\cos z \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{19}$$

可得 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z \tag{20}$$

及

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z \tag{21}$$

于是[4]

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \tag{22}$$

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \tag{23}$$

显然, $\sin z$, $\cos z$ 在全平面解析. 但和实三角函数不同, $\sin z$, $\cos z$ 为无界函数, 其模可以大于 1, 例如

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\sin\mathrm{i} &= \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{1}}{2} \approx -1.175 \\ \cos\mathrm{i} &= \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{1}}{2} \approx 1.543\end{aligned}$$

但仍有

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \tag{24}$$

Note 事实上, 所有的全平面解析的复变函数, 或者是一个常数, 否则一定是无界函数 (见后章).

导数为

$$(\sin z)' = \cos z \tag{25}$$

$$(\cos z)' = -\sin z \tag{26}$$

其它的三角函数还有

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \ldots$$

[4] 可作为三角函数的定义

双曲函数

$$\text{双曲正弦}\ \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} \tag{27}$$

$$\text{双曲余弦}\ \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} \tag{28}$$

导数为

$$(\sinh z)' = \cosh z \tag{29}$$

$$(\cosh z)' = \sinh z \tag{30}$$

双曲函数和三角函数可以互化

$$\sinh z = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z \tag{31}$$

$$\cosh z = \cos \mathrm{i}z \tag{32}$$

同样

$$\sin z = -\mathrm{i} \sinh \mathrm{i}z \tag{33}$$

$$\cos z = \cosh \mathrm{i}z \tag{34}$$

2.4 多值函数

解析函数必须是单值函数, 即给定一个自变量的值, 只有一个函数值与之对应. 但实际工作中往往会遇到多值函数. 例如上述初等函数的反函数都是多值函数.

对于多值函数, 可以限制函数值的取值范围, 对每一个自变量的值指定某一个函数值与之对应, 将之化为单值函数, 然后讨论其解析性质.

1. 对数函数 $\ln z$
2. 根式函数 $\sqrt[n]{z}$
3. 幂函数z^α

对数函数 $\ln z$

$w = \ln z$ 即 $z = \mathrm{e}^w$. 由

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$$

得

$$w = \ln z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z \tag{35}$$

可见, 函数的多值性来源于自变量幅角的多值性.

多值函数单值化

为了将多值函数化为单值函数, 可规定自变量的幅角变化范围, 从而限制函数值的取值范围. 例如规定

$$0 \le \arg z < 2\pi$$

这时对于正实轴上的点 $x_0 > 0$

$$\lim_{z \to x_0} \ln z = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{r=x_0 \\ \theta \to 0}} (\ln r + \mathrm{i}\theta) = \ln x_0 \\ \lim\limits_{\substack{r=x_0 \\ \theta \to 2\pi}} (\ln r + \mathrm{i}\theta) = \ln x_0 + 2\pi\mathrm{i} \end{cases}$$

所以函数在正实轴上 (包括原点) 不连续、不解析.

Theorem 2.5 函数

$$w = \ln z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z \qquad 0 \le \arg z < 2\pi$$

的解析区域为

$$\text{全平面}\mathbb{C} \setminus \text{正实轴 } [0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{z | \arg z = 0\}$$

在解析区域, 导数为

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \tag{36}$$

Proof 在极坐标表示下

$$u(r, \theta) = \ln r, \quad v(r, \theta) = \theta$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

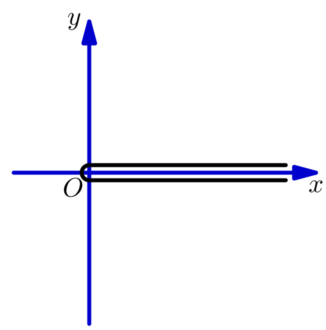
满足极坐标下的 C-R 方程, 且偏微商连续, 所以在区域 $\mathbb{C} \setminus \{z | \arg z = 0\}$ 内函数可导和解析. 其导数为

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ &= \frac{r}{z} \frac{1}{r} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

□

割线

不连续点的集合为射线 $[0, +\infty)$ 称为**割线**. 当 z 由上方趋于割线时 $\arg z \to 0$, 当 z 由下方趋于割线时 $\arg z \to 2\pi$. $\arg z = 0$ 称为**割线上岸**, $\arg z = 2\pi$ 称为**割线下岸**.



规定自变量的变化范围, 也就是规定割线 (包括割线的位置和上下岸的自变量的取值).

Note 必须指出, 规定自变量的变化范围 (作割线), 有很大的任意性. 如, 可规定

$$\theta \le \arg z < 2\pi + \theta \qquad \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

由于割线上下岸的辐角相差 2π, 所以只需给出割线上岸或割线下岸的辐角取值.

枝点

- 我们看到, 绝大部分割线上的点的不解析 (不连续) 性都可以通过重新规定割线位置消除, 即它们的不解析是因为割线规定造成.
- 但割线的端点处 (这里是原点和无穷远点) 的不解析(不连续)性无法通过重新规定割线位置消除, 称为**枝点**.
- 枝点总是多值函数的奇点.
- $\ln z$ 的枝点为 $0, \infty$.

根式函数 $\sqrt[n]{z}$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right) \tag{37}$$

同样为多值函数. 可规定

$$0 \le \arg z < 2\pi, \ldots$$

化为单值函数. 由

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{(\ln z)/n}$$

其解析区域仍为

$$\text{全平面}\mathbb{C} \setminus \{z | \arg z = 0\}$$

函数在 $\{z | \arg z = 0\}$ 上非解析, 是为函数的割线.
$0, \infty$ 为函数的枝点.
在解析区域内, 由 $z = w^n$, 对 z 求导得

$$1 = nw^{n-1}w' = nw^n w'/w = nzw'/w$$

所以

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz} \tag{38}$$

幂函数z^α

$$z^\alpha \equiv \mathrm{e}^{\alpha \ln z} \tag{39}$$

解析区域, 割线和枝点匀与 $\ln z$ 相同.
在解析区域, 其导数为

$$(z^\alpha)' = z^\alpha \cdot \alpha(\ln z)' = \frac{\alpha z^\alpha}{z} \tag{40}$$

单值分枝

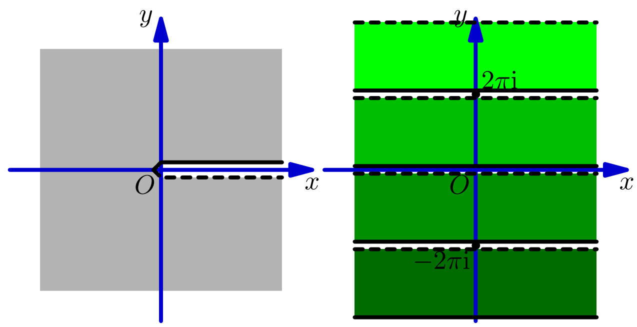
对于对数函数

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

限制

$$2k\pi \le \arg z < 2(k+1)\pi$$

即化为单值函数. 显然, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ 取不同的值, 会得到不同的单值函数.



我们把每个不同的的单值函数, 称为多值函数的一个**单值分枝**. 每个单值分枝都是单值函数, 而整个多值函数就是它的各个单值分枝的总和.

Riemann 面

割线有一定的人为性. 在割线上, 单值化后的函数值不连续. 这是上述单值化方法的一个缺点.

Question

是否可以定义对数函数, 而无需人为地引入割线和单值分枝?

1851年, George Riemann 在他的博士论文中引入了 Riemann 面. 在 Riemann 面上定义多值函数无需引入割线, 也就不需要规定单值分枝.

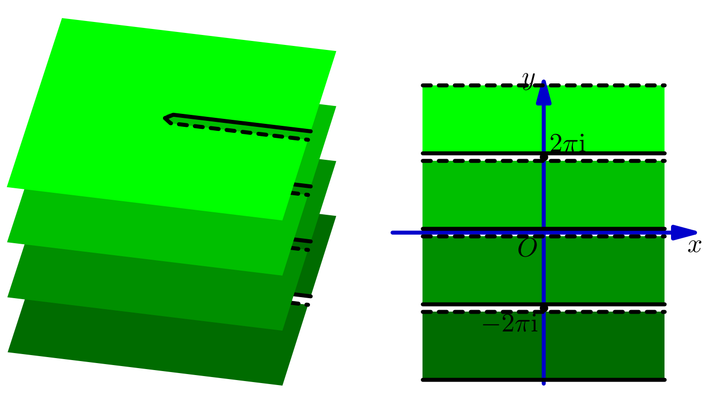
Riemann 面的构造

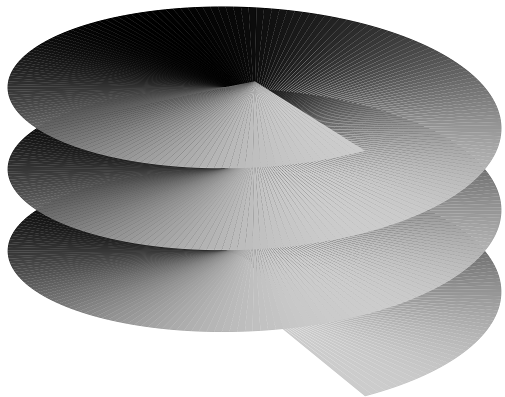
我们可以给复数面贴上不同的标签 ($k = 0, \pm1, \pm2, ...$). 或更直观地, 涂上不同的颜色以区别辐角的不同取值范围

$$2k\pi \le \arg z < 2(k+1)\pi$$

这样就得到了 $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ 许多个的复平面. 对数函数将每个复平面映射到不同的单值分枝.

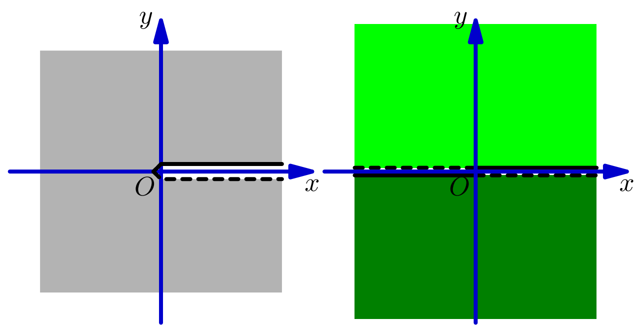
然后我们再将这些复平面按函数的连续性粘接在一起, 就得到了对数函数的 **Riemann 面**. 每个复平面称为 Riemann 面的一**叶或叶面**. 对数函数则为 Riemann 面上的单值函数.





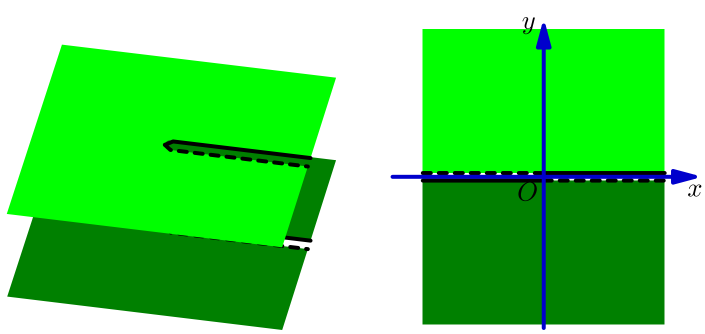
对数函数的 Riemann 面如同围绕原点的旋转楼梯.

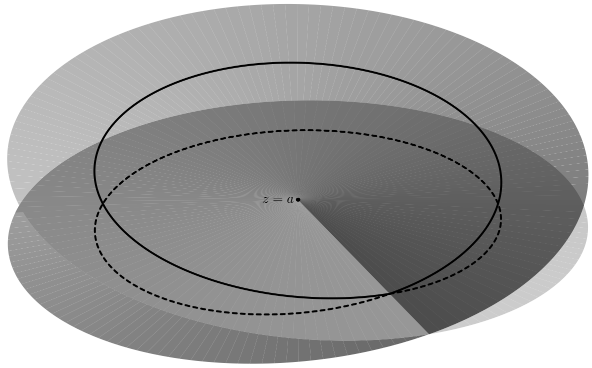
根式函数 $w=\sqrt{z}$ 有两个单值分枝, 分别是 w 的上半平面和下半平面:



$$0 \le \arg z < 2\pi \text{给出单值分枝I: } 0 \le \arg w < \pi$$
$$2\pi \le \arg z < 4\pi \text{给出单值分枝II: } \pi \le \arg w < 2\pi$$

这时, 在几何图形上应将两个割开的 z 平面粘接起来, 第一个面的割线下岸 ($\arg z = 2\pi$) 和第二个面的割线上岸 ($\arg z = 2\pi$) 相连, 同时, 第一个面的割线上岸 ($\arg z = 0$) 和第二个面的割线下岸 ($\arg z = 4\pi$) 相连. 这就构成了二叶 Riemann 面.





根式函数的 Riemann 面是在高维空间中拼接的. 上图为其在三维空间中的投影. 两叶 Riemann 叶面看上去相交, 其实不然.

对于更复杂的多值函数, 例如 $w=\sqrt[3]{z-a}$ 或 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 等, 也可以类似地讨论. 将各单值分枝对应于不同的复平面 z (即为 Riemann 面的各个叶面, 上有一些割线), 并将各叶面上的割线按函数连续性粘接起来, 就是相应的 Riemann 面.

原则上, 对于任意的多值函数, 都可以构造一个 Riemann 面作为自变量 z 平面的扩展.

Riemann 面的一叶

可以想像, 复杂多值函数的 Riemann 面会变得非常复杂. 在实际运用时,我们仍像以前的作法, 在复平面上通过割线来表示多值函数的单值化. 不过现在的带割线的复平面只是 Riemann 面的一叶!

- 当 z 在复平面上连续变化时, 函数值连续变化.
- 而当 z 通过割线时, 则进入相邻的 Riemann 面, 多值函数在另一个单值分枝取值, 仍然连续地改变.

找枝点与作割线

确定多值函数的单值分枝, 限制自变量辐角的取值, 首先应找到多值函数的枝点并做割线.

找枝点

若 z 点绕枝点一周回到原处, 函数值并不还原 (进入 Riemann 面的另一叶), 由此可确定多值函数的枝点.

再将枝点用割线连接, 这样就确定多值函数的单值分枝.

另一种确定单值分枝的函数值的方法

通过规定割线上下岸的辐角值, 即可确定多值函数的单值分枝.

另一种确定单值分枝上的函数值的方法是:

规定函数 w 在某一点 z_0 的值, 并通过 z 的连续变化路线来确定函数在其它各点的值—当 z 沿曲线连续变化时, w 也随之连续变化.

Example 2.7 *多值函数 $w=\sqrt{z^2-1}$.*

1. *确定函数的枝点并作割线.*
2. *规定当 $w(0)=\mathrm{i}$, 求 $w(\mathrm{i})$ 之值.*

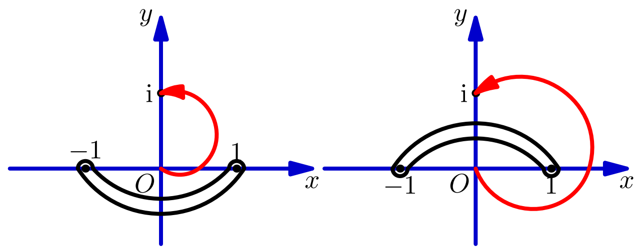
Solution 首先求出所以的函数值. 设 $z-1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z+1=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 则

$$w=\sqrt{r_1r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

枝点为 1 和 -1, 而 ∞ 不是枝点.

割线的划分有任意性. 接下来, 我们按如图所示的两种不同方法作割线连接两枝点.

$\sqrt{z^2-1}$ 单值化



下一步, 求 $z=0$ 处的辐角值. 要求

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\theta_1=\pi+2k_1\pi \qquad \theta_2=0+2k_2\pi$$

所以取 $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$ 来计算. 当 z 沿不同路径到达 i 点时, 在 $z=\mathrm{i}$ 处, $r_1=r_2=\sqrt{2}$

1. $\theta_1=\frac{3\pi}{4}$, $\theta_2=\frac{\pi}{4}$
$$w(\mathrm{i})=\sqrt{2}\mathrm{i}$$

2. $\theta_1=2\pi+\frac{3\pi}{4}$, $\theta_2=\frac{\pi}{4}$
$$w(\mathrm{i})=-\sqrt{2}\mathrm{i}$$

□