

### 第三章 静磁场

#### 3.1 矢势方程及边界条件

静磁场即恒定磁场，可以认为它是由恒定电流激发的，相应需要满足恒定电流条件

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.1.1)$$

而根据欧姆定律

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.1.2)$$

导体中的恒定电流场需要恒定电场来维持，恒定电场方程等同于静电场方程(2.1.1)，如此则方程(3.1.1) (3.1.2)经常要与方程(2.1.1)联立求解，并辅以相应的边界条件。不过经常遇到的情形是给定了恒定电流分布，这样恒定磁场方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

可以独立于电场方程而单独被求解。显然，(3.1.1)是方程(3.1.3)成立的必要条件。在介质中

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f \end{cases} \quad (3.1.4)$$

其中传导电流密度  $\mathbf{j}_f$  视为被给定。

##### 3.1.1 矢势方程

引入矢势  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$  来表示磁场

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.1.5)$$

其积分式对应于

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.6)$$

即矢势的环量即是磁通量。

对于静磁场问题，经常采用 Coulomb 规范固定条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.1.7)$$

如此，将(3.1.5)代入(3.1.3)中的第二个方程，并利用(3.1.7)，得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (3.1.8)$$

方程(3.1.7)和(3.1.8)构成静磁场用矢势描述的基本微分方程。显然

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (3.1.9)$$

为方程(3.1.8)在无界空间中的解。可以验证，(3.1.9)给出的解满足库仑规范条件(3.1.7)，这是因为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R} d^3\mathbf{r}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{R} d^3\mathbf{r}' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \right] d^3\mathbf{r}' \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。利用恒定电流条件  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ ，便有

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint_{S_\infty} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{R} = 0$$

此外，将(3.1.9)式代入(3.1.5)便可以得到 Biot-Savart 定律

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d^3\mathbf{r}' \quad (3.1.10)$$

#### ☞ 例题 3-1 螺线管磁矢势。

考虑半径为  $R$  的圆柱形无穷长直均匀密绕螺线管，匝电流为  $I$ 、匝密度为  $n$ ，求库仑

规范下的磁矢势分布。

**解答：**设螺线管轴线为  $z$ ，则内部圆柱区域匀强磁场为

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}$$

所以待求解的场方程为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{B}, & \rho < R \\ 0, & \rho > R \end{cases}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

其中  $\rho$  为场点到轴线的距离。这可以类比于均匀圆柱区域电流激发的磁场的结果，那里磁场满足方程

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mathbf{j}, & \rho < R \\ 0, & \rho > R \end{cases}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

所以螺线管磁矢势为

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{R^2}{2\rho^2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{R^2}{2\rho} B \hat{\boldsymbol{\phi}} & \rho > R \\ \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2} \rho B \hat{\boldsymbol{\phi}} & \rho < R \end{cases}$$

其中  $B = \mu_0 n I$ ， $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  为柱坐标的角向向量。

**例题 3-2** 空间匀强磁场  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  对应的矢势。

**解答：**对于无限大区域的匀强磁场，矢势的选取具有不定性

$$\mathbf{A} = -By\hat{\mathbf{x}} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = Bx\hat{\mathbf{y}} \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(Bx\hat{\mathbf{y}} - By\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (3)$$

均满足(3.1.5)及(3.1.7)。如果对照(3.1.9)式，则①②分别对应沿  $\hat{\mathbf{x}}$  和  $\hat{\mathbf{y}}$  方向的无穷大均匀面电流，而③可以对应于无穷大螺线管电流。

**例题 3-3** 互感的 Neumann 公式。

真空中给定两个线圈环路  $K_1$  和  $K_2$ ，试证它们之间的互感为

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (3.1.11)$$

其中  $d\mathbf{r}_{1,2}$  分别为  $K_{1,2}$  上（沿电流方向）的线元。

**证明：**设 1 线圈的电流为  $I_1$ ，它在 2 线圈上激发的磁场和矢势分别为

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_1} \frac{I_1 d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

相应的互感磁通量为

$$\Phi_{12} = \oint_{K_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

因此

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

### 3.1.2 静磁场能量

线性介质中，静磁场能量为

$$W_m = \iiint \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (3.1.12)$$

利用

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_f$$

得

$$W_m = \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} + \iiint \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_f dV = \iiint \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_f dV \quad (3.1.13)$$

如上选取了库仑规范, 故对于有限电流分布体系,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{H}$  在无穷远处快速衰减, 以至于表面项积分为零。

对于空间  $N$  个电流分别为  $I_i$  的恒定电流线圈  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 相应电流元  $\mathbf{j}_f dV \rightarrow I_i d\mathbf{r}_i$ , 而其感受的矢势为

$$\mathbf{A}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_j} \frac{I_j d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$$

因此, 系统磁能为

$$W_m = \sum_{i,j=1}^N L_{ij} I_i I_j \quad (3.1.14)$$

其中电感系数

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_i} \oint_{K_j} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = L_{ji} \quad (3.1.15)$$

其中  $L_{ii} = L_i$  为线圈  $i$  的自感系数。

### 3.1.3 边值关系

考虑 1 和 2 的介质分界面上场的边值关系 ( $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$ )

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3.1.16)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f \quad (3.1.17)$$

如果用矢势场书写, 则

$$\mathbf{n} \cdot ((\nabla \times \mathbf{A})_2 - (\nabla \times \mathbf{A})_1) = 0 \quad (3.1.18)$$

$$\mathbf{n} \times \left( \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \mathbf{A})_2 - \frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \mathbf{A})_1 \right) = \mathbf{K}_f \quad (3.1.19)$$

这里我们假定 1 和 2 均为线性介质, 它们的磁导率分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ 。考虑到(3.1.6)和(3.1.7), 在跨越边界面时, 矢势的切向分量和法向分量分别连续, 即有边界面上

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (3.1.20)$$

(3.1.20)已经涵盖了(3.1.18), 因此(3.1.19)和(3.1.20)构成了一组静磁场中矢势满足的边值关系。

### 3.1.4 静磁场的唯一性定理

静磁场方程组(3.1.4)或矢势方程组(3.1.7)(3.1.8)是完备的, 对应静磁场的唯一性定理。

对于给定解域  $V$  及其边界  $\partial V = S$ , 如下均为唯一磁场解对应的唯一性边界条件

1) 给定  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}|_S$

2) 给定  $\mathbf{n} \times \mathbf{A}|_S$

证明: 设  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  分别为满足场方程和相应的边界条件的解。则差值分布  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$  及其对应的  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$  及  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$  满足

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0|_S = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{A}_0|_S = \mathbf{0}$$

因此<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S (\mathbf{A}_0 \times \mathbf{H}_0) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{A}_0 \times \mathbf{H}_0) dV = \iiint_V [(\nabla \times \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{H}_0 - \mathbf{A}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_0] dV \\ &= \iiint_V \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0 dV \end{aligned}$$

最后一个等式利用了解域内  $\nabla \times \mathbf{H}_0 \equiv 0$ 。因此  $\mathbf{B}_0 \equiv 0$ ，即磁场解唯一。

### 3.1.5 二维静磁场问题

矢势的方程及边值关系（如(3.1.19)式），比静电势的要复杂，但两者之间也有很大的相似之处。接下来，我们来考查几何位形比较简单的二维磁场问题。

考虑电流沿  $z$  方向流动且沿  $z$  方向具有平移不变性

$$\mathbf{j}_f = j_f(x, y)\hat{\mathbf{z}}$$

库仑规范下，自然有

$$\mathbf{A} = A(x, y)\hat{\mathbf{z}}$$

相应

$$\nabla^2 A = -\mu j_f(x, y) \quad (3.1.20)$$

在 1 和 2 介质的边界面上（边界面的法向  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$  与  $z$  方向垂直）， $A(x, y)$  满足的边值关系为

$$A_1 = A_2 \quad (3.1.21)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \partial_n A_2 - \frac{1}{\mu_1} \partial_n A_1 = -K_f \quad (3.1.22)$$

其中  $K_f$  为（沿  $z$  方向的）面电流密度<sup>2</sup>。

**例题 3-4** 如图，半径为  $R$  的无穷长圆柱面将空间分成内外两个区域，外部磁导率为  $\mu_1$ ，内部磁导率为  $\mu_2$ 。空间有垂直于圆柱轴线的匀强背景磁场  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{x}}$ ，求空间的磁场分布及磁化电流分布。

**解答：**采用柱坐标，设

$$\mathbf{A} = A(r, \varphi)\hat{\mathbf{z}}$$

在圆柱内外矢势满足拉普拉斯方程

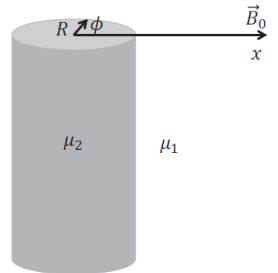
$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r A) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 A = 0$$

其由（角向）本征函数构造的一般解形式为

$$\begin{aligned} A(r, \varphi) &= (a_0 + b_0 \ln r) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [r^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) + r^{-m} (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi)] \end{aligned}$$

渐进条件为

$$A_2(0, \varphi) \text{ 有限}$$



<sup>1</sup> 如果解域内存在介质分界面，跨越界面时  $\mathbf{H}$  切向连续，则  $(\mathbf{A} \times \mathbf{H})$  法向连续，这保证了下式中高斯积分公式是成立的。

<sup>2</sup> 可以认为(3.1.22)来自于泊松方程(3.1.20)，也可以认为它等价于(3.1.19)。因为此时

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \nabla A \times \hat{\mathbf{z}}$$

因此

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \cdot \nabla A) \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{\mu} \partial_n A \hat{\mathbf{z}}$$

$$A_1(r, \varphi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} B_0 r \sin \varphi (= B_0 y)$$

由此得

$$A_1(r, \varphi) = B_0 r \sin \varphi + \sum_{m=1}^{\infty} r^{-m} (c_{1m} \cos m\varphi + d_{1m} \sin m\varphi)$$

$$A_2(r, \varphi) = a_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_{2m} \cos m\varphi + b_{2m} \sin m\varphi)$$

代入界面处的边值关系

$$A_2(R^-, \varphi) = A_1(R^+, \varphi)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \partial_r A_2(R^-, \varphi) = \frac{1}{\mu_1} \partial_r A_1(R^+, \varphi)$$

得到

$$a_{20} = 0$$

$$\begin{cases} B_0 R + \frac{d_{11}}{R} = R b_{21} \\ \frac{1}{\mu_1} \left( B_0 - \frac{d_{11}}{R^2} \right) = b_{21} \frac{1}{\mu_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{c_{1m}}{R^m} = a_{2m} R^m, & -m \frac{c_{1m}}{R^{m+1}} = m a_{2m} R^{m-1}, & m = 1, 2, \dots \\ \frac{d_{1m}}{R^m} = b_{2m} R^m, & -m \frac{d_{1m}}{R^{m+1}} = m b_{2m} R^{m-1}, & m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

解得

$$A_1(r, \varphi) = B_0 r \sin \varphi + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{B_0 R^2}{r} \sin \varphi$$

$$A_2(r, \varphi) = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} B_0 r \sin \varphi$$

相应内外磁场为

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{B}_0 \quad (r < R)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \nabla A_1 \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{B}_0 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{B_0 R^2}{r^2} (\cos \varphi \hat{\mathbf{r}} + \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \quad (r < R)$$

圆柱内为被部分屏蔽（如果圆柱内介质相对“抗磁”  $\mu_2 < \mu_1$ ）的匀强场，圆柱外为匀强外场叠加上二维的偶极场<sup>3</sup>。相应磁化面电流密度为

$$\mathbf{K}_m = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B}_1^{R^+} - \mathbf{B}_2^{R^-}) = \frac{2B_0}{\mu_0} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \sin \varphi \hat{\mathbf{z}}$$

## 3.2 磁标势 等效磁荷

### 3.2.1 磁标势的引入

如果存在一个区域  $V$ ，使得对于区域内任何闭合有向曲线  $L$ ，均有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.2.1)$$

则在  $V$  内， $\mathbf{H}$  的路径积分仅依赖于初末位置，而与中间路径无关，如此便可以引入磁标势

<sup>3</sup> 二维偶极场的典型例子为偶极线（相互平行的等量异号均匀带电线系统）在垂直平面上激发的远场，它正比于

$$-\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^2} = -\hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{l}} - 2\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\cos \varphi \hat{\mathbf{r}} + \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r^2}$$

$\phi_m$ ，使得

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \quad (3.2.2)$$

如果全空间没有自由电流，如永磁体问题，自然满足方程(3.2.1)。此外，如果用包含自由电流环的薄层将自由电流部分从空间中切除，则剩余的空间部分<sup>4</sup>满足方程(3.2.1)。

考虑到

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (3.2.3)$$

及  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，因此

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

即磁标势满足泊松方程

$$\nabla^2\phi_m = \nabla \cdot \mathbf{M} = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (3.2.4)$$

其中

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3.2.5)$$

为等效磁荷密度。考虑永磁体问题，可以取无穷远处为磁标势的零点，则(3.2.4)的解为

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (3.2.6)$$

因此等效点磁荷（磁单极子） $q_m$  在空间激发的磁场强度满足磁库仑定律<sup>5</sup>

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (3.2.7)$$

### 3.2.2 磁标势的边值关系

类似于静电势，跨越 1、2 介质分界面时，磁标势是连续的

$$\phi_{m1} = \phi_{m2} \quad (3.2.8)$$

而由方程(3.2.4)的积分形式可知（ $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$ ）

$$\partial_n \phi_{m2} - \partial_n \phi_{m1} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = -\frac{\sigma_m}{\mu_0} \quad (3.2.9)$$

其中  $\sigma_m$  为边界面上的等效磁荷面密度。此外，对于线性介质分界面，磁感应强度法向连续可以得到

$$\mu_2 \partial_n \phi_{m2} = \mu_1 \partial_n \phi_{m1} \quad (3.2.10)$$

**☞ 例题 3-5** 对半径为  $R$ 、磁化强度为  $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$  的均匀磁化球，求磁化电流激发的磁场。

**解答：**以  $z$  方向为极轴建立球坐标，等效磁荷体密度  $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ ，磁荷仅分布于球面，其面密度为

$$\sigma_m = \mu_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{M} = \mu_0 M \cos \theta$$

这样球内外的磁标势可以分离变量法加以求解（ $x = \cos \theta$ ）

$$\phi_m = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(x) & r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(x) & r > R \end{cases}$$

利用边界条件

$$\phi_m^{R-} = \phi_m^{R+}, \quad \partial_r \phi_m^{R-} - \partial_r \phi_m^{R+} = M \cos \theta$$

<sup>4</sup> 这里重要的是要保证任何环路不能和自由电流环嵌套。比如用包围自由电流环的一个环面切除自由电流，剩余的空间里虽然处处  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ ，但仍然不能保证方程(3.2.1)的成立。

<sup>5</sup> 事实上，无法用(3.2.4)式的等效磁荷密度构造等效点磁荷（Dirac 弦除外）。

得到

$$A_l R^l = B_l R^{-(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_1 + 2 \frac{B_1}{R^3} = M, \quad l A_l R^{l-1} + (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} = 0, \quad l = 0, 2, 3, \dots$$

解得

$$\phi_m = \begin{cases} \frac{M}{3} r \cos \theta & r < R \\ \frac{M R^3}{3 r^2} \cos \theta & r > R \end{cases}$$

此外, 因为有磁库仑定律(3.2.6)式, 所以此时如果你熟悉余弦型球面电荷的结论, 也可以直接写出

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{M}}{3} & r < R \\ \frac{M R^3}{3 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) & r > R \end{cases}$$

相应, 磁感应强度

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \mathbf{M}}{3} & r < R \\ \mu_0 \frac{M R^3}{3 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) & r > R \end{cases}$$

**例题 3-6 磁屏蔽效应:** 如图内外半径分别为  $a$  和  $b$ 、磁导率为  $\mu = \mu_r \mu_0$  的介质球壳位于匀强外场  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$  中, 求空间磁场分布。

**解答:** 以  $z$  方向为极轴建立球坐标, 磁标势在无穷远处渐进行为

$$\phi_m(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta = -H_0 r \cos \theta$$

因此

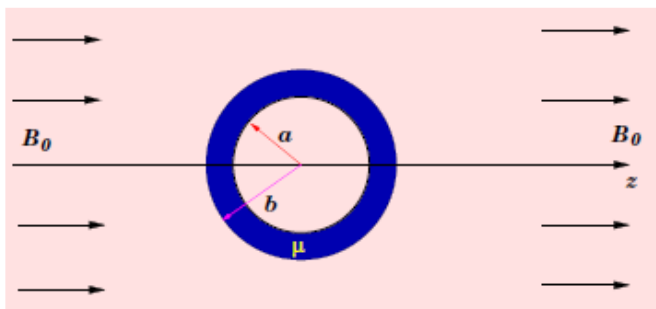
$$\phi_m = \begin{cases} -H_2 r \cos \theta & r < a \\ \left(-H_1 r + \frac{C}{r^2}\right) \cos \theta & a < r < b \\ \left(-H_0 r + \frac{A}{r^2}\right) \cos \theta & r > b \end{cases}$$

利用边值关系(3.2.8)(3.2.10)得

$$\begin{aligned} -H_2 &= -H_1 + \frac{C}{a^3} \\ -H_1 + \frac{C}{b^3} &= -H_0 + \frac{A}{b^3} \\ H_2 &= \mu_r \left(H_1 + \frac{2C}{a^2}\right) \\ \mu_r \left(H_1 + \frac{2C}{b^3}\right) &= \mu_0 H_0 + \frac{2A}{b^3} \end{aligned}$$

解得

$$A = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)H_0}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2}$$



$$H_1 = \frac{3(2\mu_r + 1)H_0}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2}$$

$$C = \frac{-3(\mu_r - 1)a^3H_0}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2}$$

$$H_2 = \frac{9\mu_r H_0}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2}$$

对于软铁磁球壳,  $\mu_r \gg 1$ , 相应

$$H_2 \approx \frac{9H_0}{2\mu_r \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)} \rightarrow 0$$

这种现象被称为磁屏蔽。

### 3.3 静磁场多级展开

#### 3.3.1 矢势多级展开及磁矩

原点附近的一小团电流在远场激发的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

做如下展开

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \mathbf{r}' \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \dots$$

相应

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{r} d^3\mathbf{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})}{r^3} d^3\mathbf{r}' + \dots \quad (3.3.1)$$

引入公式

$$\nabla' \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathbf{r}') = (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))\mathbf{r}' + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \mathbf{r}' = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (3.3.2)$$

上式利用了恒定电流条件。因此, 对于恒定电流情形, “磁单极矩” 为零, 即

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \oint_{S_\infty} d\mathbf{a}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = 0 \quad (3.3.3)$$

展开式(3.3.1)中第二项为磁偶极项。将并矢  $\mathbf{j}\mathbf{r}'$  分解为对称部分和反对称部分

$$\mathbf{j}\mathbf{r}' = [\mathbf{j}\mathbf{r}']^s + [\mathbf{j}\mathbf{r}']^{as} \quad (3.3.4)$$

其中

$$[\mathbf{j}\mathbf{r}']_{ij}^s = \frac{1}{2}(j_i r'_j + j_j r'_i), \quad [\mathbf{j}\mathbf{r}']_{ij}^{as} = \frac{1}{2}(j_i r'_j - j_j r'_i) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\mathbf{j} \times \mathbf{r}')_k \quad (3.3.5)$$

$$\nabla' \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathbf{r}') = (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))\mathbf{r}' + \mathbf{j}\mathbf{r}' + \mathbf{r}'\mathbf{j} \quad (3.3.6)$$

可知,

$$\int [\mathbf{j}\mathbf{r}']^s d^3\mathbf{r}' = 0$$

而

$$[\mathbf{j}\mathbf{r}']_{ij}^{as} r_j = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} r_j (\mathbf{j} \times \mathbf{r}')_k = \frac{1}{2}[(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) \times \mathbf{r}]_i \quad (3.3.7)$$

因此, 矢势的磁偶极贡献为

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int [\mathbf{j}\mathbf{r}']^{as} \cdot \mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \quad (3.3.8)$$

其中磁偶极矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (3.3.9)$$



也被称为磁矩。对于电流强度为  $I$  的恒定电流线圈  $L$ ，其磁矩为

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint_L \mathbf{r}' \times I d\mathbf{r}' = I\mathbf{S} \quad (3.3.10)$$

其中  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_L \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'$  为线圈所围成的矢量面元。

磁偶极矩贡献的磁场为偶极场，利用 ( $r \neq 0$ )

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\mathbf{m} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3}$$

可得偶极磁场为

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}] \quad (3.3.11)$$

如果电流分布区域的线度趋于零，则磁场偶极项绝对占住，这样便形成理想磁偶极子模型，但需要注意的是，考虑到场强体平均的效果，对于磁矩为  $\mathbf{m}$  的微观分子磁偶极子，其场强需被改写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}] + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{r}) \quad (3.3.12)$$

### 3.3.2 磁偶极子在外场中的受力与力矩

原点附近、磁矩为  $\mathbf{m}$  的一小团（恒定）电流在外场  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$  中所受安培力展开为

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{B}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}(0) + \dots] = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}(0) + \dots]$$

因此对于理想磁偶极子，利用公式

$$\int d^3\mathbf{r} j_j r_n = \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{j}\mathbf{r}]_{jn}^{\text{as}} = \epsilon_{njl}(\mathbf{m})_l \quad (3.3.13)$$

得外场受力为

$$F_i = \epsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{r} j_j (r_n \nabla_n) B_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{njl} m_l \nabla_n B_k = [(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B}]_i$$

利用  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，对于理想磁偶极子可得

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.3.14)$$

这相当于磁偶极在外场中感受到了有效势能

$$W_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (3.3.15)$$

利用虚功原理，或者直接展开法，可得磁偶极子所受的外场力矩（对自身参考点）

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.3.16)$$