作业

题 1. 对于如下二阶线性 ODE:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+2(1-2z)\frac{dy}{dz}-2y=0$$

验证 $y_1=1/z$ 是一个解。

利用 Wronskian 行列式

$$W(x)=\exp\left[-\int^x P(x')dx'\right]$$

求第二个独立解。

题 2. 证明：考虑具有有理系数的二阶线性常微分方程（下同）。在延展复平面上，不存在没有奇点的二阶线性常微分方程。

题 3. 证明：在延展复平面上仅有一个奇点的二阶线性常微分方程一定能写成：

$$y''(z)+\frac{2}{z}y'(z)=0$$

求出这个方程的通解。

题 4. 证明：在延展复平面上，奇点位于 0 和 ∞，且均为正则奇点的二阶线性常微分方程一定能写成（欧拉方程）

$$z^2y''+p_0zy'+q_0y=0$$

求出该方程的解。

题 5. 证明：在延展复平面上，奇点位于 $z=a$ 和 $z=b$，且均为正则奇点的二阶线性常微分方程一定能写成

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{2z+\mu}{(z-a)(z-b)}\frac{dy}{dz}+\frac{\nu}{(z-a)^2(z-b)^2}y=0$$

其中 μ 和 ν 是常数。

题 6.

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{2z+2}{z(z-1)}\frac{dy}{dz}+\frac{2}{z^2(z-1)^2}y=0$$

寻找莫比乌斯变换，将该方程的正则奇点映射到 0 和 ∞，从而通过欧拉方程的一般解求解该方程。

题 7. 在延展复平面上奇点位于 $0, 1, \infty$，且均为正则奇点的方程是超几何方程：

$$z(1-z)y''(z)+[c-(1+a+b)z]y'(z)-aby(z)=0$$

其的解可以写为 ${}_2F_1(a,b,c;z)$。

数学物理中一类仅具有三个正则奇点的二阶 ODE 是连带勒让德方程：

$$y''(z)-\frac{2z}{1-z^2}y'(z)-\left[\frac{t}{1-z^2}+\frac{m^2}{\left(1-z^2\right)^2}\right]y(z)=0$$

其中 m 是整数，t 是复数。我们要做的是将该方程化成超几何方程的形式。

1. 寻找适当的变量替换 $w=f(z)$，将奇点映射到 $0, 1, \infty$。求出变换后的方程

   $$y''(w)+P(w)y'(w)+Q(w)y(w)=0$$

   的 P 和 Q 的形式。

2. 定义一个新的函数 $y(w)=w^A(1-w)^Bv(w)$，选取 A 和 B 使得 $v(w)$ 所满足的方程具有超几何方程的形式，定出参数 a, b, c。