数学物理方法上
00432108
2024-2025 学年第二学期

# 作业

姓名：XXX
学号：ZZZ
成绩：____

**题 1.** 定义双阶乘：

$$n!! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k) = n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2\,, & n\text{是偶数} \\ \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(2k-1) = n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1\,, & n\text{是奇数} \end{cases} \tag{1}$$

用伽马函数表示双阶乘。

**题 2.** 借助伽马函数计算如下积分：

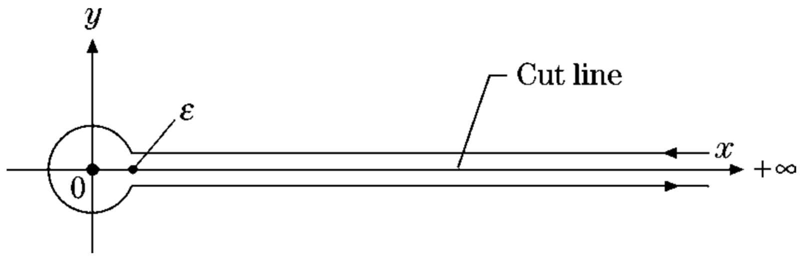
$$-\int_0^1 x^k \ln x dx, \quad k > -1.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx$$

**题 3.** 证明伽马函数存在如下围道积分表示 $(\nu \notin \mathbb{Z})$：

$$\int_C e^{-z} z^v dz = \left(e^{2\pi i v} - 1\right)\Gamma(\nu+1)$$

其中积分围道取作下图所示围道（即所谓的 Hankel 围道）：




**题 4.** 试证明

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)| = |\Gamma(\alpha)| \prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{-1/2}.$$

该公式在 $\beta$ 衰变理论的计算中具有重要意义。

**题 5.** 粒子在库仑势场中散射的波函数为 $\psi(r,\theta)$。在原点处，波函数变为

$$\psi(0) = e^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1+i\gamma),$$

其中 $\gamma = Z_1 Z_2 e^2/\hbar v$。试证明

$$|\psi(0)|^2 = \frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma}-1}.$$

**题 6.** Pochhammer 符号 $(a)_n$ 定义为

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1$$

（对于整数 $n$）。

(a) 用阶乘表示 $(a)_n$。

(b) 用 $(a)_n$ 和双伽马函数表示 $\frac{d}{da}(a)_n$。

**题 7.** 证明 Perron 公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{y^s}{s}ds=\begin{cases}1 & 若 y>1\\ 1/2 & 若 y=1\\ 0 & 若 0<y<1\end{cases}$$

其中 $x>0$，$c>0$。

**题 8.** 定义

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\,,\quad \mathrm{Re}(s)>1$$

$$\zeta^*(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}\,,\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

因此

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\zeta^*(s) \tag{2}$$

从上式证明 $s=1$ 是 $\zeta(s)$ 的单极点，留数为 1。

**题 9.** 已知第二类切比雪夫函数 ($c>1$)：

$$\psi(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}ds$$

选取左半平面的无穷大半圆弧构成封闭围道，假设半圆弧上的积分为 0，且已知：

1. $s=1$ 是 $\zeta(s)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的唯一极点，留数是 1。
2. $\zeta(s)$ 的所有平庸零点位于 $z=-2m$，$m=1,2,3,\cdots$。
3. $\zeta(s)$ 的所有非平庸零点构成集合 $\{\rho_k=\frac{1}{2}+i\gamma_k\}$。

试论证：

$$\psi(x)=x-\sum_{\rho_k}\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^{-2}\right)$$