作业

题 1. 勒让德多项式是如下生成函数在原点处的泰勒展开，

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+z^2}}=1+P_1(\alpha)z+P_2(\alpha)z^2+\cdots$$

求出 $P_1(\alpha)$，$P_2(\alpha)$，$P_3(\alpha)$，$P_4(\alpha)$.

题 2. 求下列函数在对应环域上的洛朗展开：

1. $z/(z+2)$，$2<|z|$
2. $\sin(1/z)$，$0<|z|$
3. $\cos(1/z)$，$0<|z|$
4. $1/(z-3)$，$3<|z|$

题 3. 证明 $1/(e^z-1)$ 在原点处的洛朗展开具有形式

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$$

其中 B_k 称作伯努利数。求出 B_1, B_2, B_3。

题 4. 证明：∞ 是整函数 $f(z)$ 的可去奇点当且仅当 f 是常函数。（注：整函数指的是在全复平面解析的函数）

题 5. 求出下列函数在延展复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点和留数。

1. $f(z)=z^{2n}/(1+z)^n$，$n\in\mathbb{N}$。
2. $f(z)=e^z/(z^2(z^2+9))$

题 6. 求出下列函数在复平面 $\mathbb{C}$ 上的所有奇点，判断其是本性奇点还是极点，求出其极点阶数和留数。

1. $f(z)=\frac{\sin z-z}{z\sinh z}$
2. $f(z)=\frac{1}{\sin^2 z}$
3. $f(z)=\frac{\cos(1/z)}{\sin z}$
4. $f(z)=\frac{1}{e^{2z}+e^z+1}$

题 7. 用留数定理计算积分 (如不作说明围道均为正定向，下同)

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2+4}{(z-i)(z+i)}dz$$

题 8. 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=2} z\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)dz$$

题 9. 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=a}\frac{dz}{\bar{z}-b},$$

分别讨论 $a>|b|$ 和 $|b|>a>0$ 的情形。

题 10. 用留数定理计算积分

$$\int_{|z|=5}\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}dz$$