15 球函数

考虑三维 Laplace 方程的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0 \\ u|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = f(x,y,z)\end{cases} \tag{1}$$

在球坐标系下 $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) \\ \qquad + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \\ u|_{r=R} = f(\theta,\phi) \qquad u|_{r=0}\text{有界} \\ u|_{\theta=0}\text{有界} \qquad u|_{\theta=\pi}\text{有界} \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}\end{cases}$$

我们先考虑 $f = f(\theta)$ 与 ϕ 无关的情况. 这时 $u = u(r,\theta)$ 也与 ϕ 无关. 定解问题简化为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0 \\ u|_{r=R} = f(\theta) \qquad u|_{r=0}\text{有界} \\ u|_{\theta=0}\text{有界} \qquad u|_{\theta=\pi}\text{有界}\end{cases}$$

分离变量, 令

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\Theta(\theta)\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) \\ = 0$$

$\times r^2/R\Theta$, 并移项

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) \\ = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) = \lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda R(r) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \tag{3}$$

由 θ 的边界条件, 得

$$\Theta(0)\text{有界} \qquad \Theta(\pi)\text{有界} \tag{4}$$

即 $\theta = 0, \pi$ 不是方程解的奇点.

方程(3)为 Legendre 方程. 作变换

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\theta \\
y(x) &= \Theta(\theta)
\end{aligned}
$$

Legendre 方程改写为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0 \tag{5}
$$

15.1 Legendre 方程的解

令 $\lambda=\nu(\nu+1)$, 展开

$$
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\nu(\nu+1)y=0 \tag{6}
$$

由

$$
\lambda=\nu(\nu+1)=(-\nu-1)(-\nu)
$$

所以, 可设 $\mathrm{Re}\nu\geq-\frac{1}{2}$

$x=\pm1$ 是方程的两个奇点, 且为正则奇点. 在二阶线性常微分方程的幂级数解法一章, 我们在常点 $x=0$ 的邻域求得方程的两个线性无关的幂级数解.

$$
y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n-\frac{\nu}{2})\Gamma(n+\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}x^{2n} \tag{7}
$$

$$
y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(n-\frac{\nu-1}{2})\Gamma(n+1+\frac{\nu}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu-1}{2})\Gamma(1+\frac{\nu}{2})}x^{2n+1} \tag{8}
$$

我们也可以在正则奇点的邻域求正则解, 这对 $x=\pm1$ 的边界条件的讨论有帮助. 在 $x=1$ 的邻域, 正则解为

$$
y(x)=(x-1)^\rho\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n
$$

代入方程

$$
\begin{aligned}
&-[(x-1)+2](x-1)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+\rho)(n+\rho-1)(x-1)^{n+\rho-2} \\
&\qquad-2[(x-1)+1]\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+\rho)(x-1)^{n+\rho-1} \\
&\qquad\qquad+\nu(\nu+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^{n+\rho}=0
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
&-2\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+\rho)^2(x-1)^n \\
&\qquad+\sum_{n=0}^{\infty}c_n[\nu(\nu+1)-(n+\rho)(n+\rho+1)](x-1)^{n+1}=0
\end{aligned}
$$

先求指标方程,

$$\rho^2 = 0$$

得 $\rho_1 = \rho_2 = 0$. 所以第一解为 Taylor 级数, 递推关系

$$\begin{aligned} c_n =& -\frac{n(n-1)-\nu(\nu+1)}{2n^2} c_{n-1} \\ =& \frac{(\nu-n+1)(\nu+n)}{2n^2} c_{n-1} \end{aligned}$$

所以, 取 $c_0 = 1$

$$\begin{aligned} P_\nu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu-n+1)_{2n}}{(n!)^2} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \end{aligned} \tag{9}$$

称为 ν 次第一类 Legendre 函数. 第二解一定含对数项,

$$Q_\nu(z) = g P_\nu(z) \ln(z-1) + ...$$

取为 (极限过程)

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \lim_{\mu \to 0} Q_\nu^\mu(z) \\ &= \frac{1}{2} P_\nu(z) \left[\ln \frac{z+1}{z-1} - 2\gamma - 2\psi(\nu+1)\right] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{z-1}{2}\right)^n \end{aligned} \tag{10}$$

称为 ν 次第二类 Legendre 函数.

$Q_\nu(z)$ 与 $Q_\nu(x)$

$z = \pm 1$ 是 Q_ν 的枝点, $\nu \neq n$ 时, $z = \infty$ 也是 Q_ν 的枝点. 规定

$$\arg(z \pm 1) = 0 \qquad [\mathrm{Re} z > 1, \mathrm{Im} z = 0]$$

通常规定对于实数 x, 当 $-1 < x < 1$

$$Q_\nu(x) = \frac{1}{2}[Q_\nu(x + \mathrm{i}0) + Q_\nu(x - \mathrm{i}0)]$$

于是

$$Q_\nu(x \pm \mathrm{i}0) = Q_\nu(x) \mp \frac{\pi \mathrm{i}}{2} P_\nu(x)$$

15.2 Legendre 多项式

方程+齐次边界条件构成本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0$$
$$y(\pm 1)\text{有界}$$

方程通解为

$$y(x)=AP_\nu(x)+BQ_\nu(x)$$

$y(1)$ 有界, 而 $Q_\nu(x)$ 含对数项, $\ln(x-1)$ 在 $x=1$ 无界, 所以 $B=0$,

$$y(-1)=AP_\nu(-1)$$

$A\neq 0$, 所以必须 $P_\nu(-1)$ 有界. $\nu\neq n$ 时, 由 Γ 函数互余宗量定理

$$\begin{aligned}P_\nu(-x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\\&=-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\\&\quad\times\left(\frac{x+1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

根据 Γ 函数的 Stirling 公式, 可以估计出 $n\to\infty$

$$\frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\sim\frac{1}{n}$$

$$\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\\\sim&\frac{(\nu+n+1)^{\nu+n+1/2}(n-\nu)^{n-\nu-1/2}\mathrm{e}^{-(2n+1)}}{(n+1)^{2n+1}\mathrm{e}^{-(2n+2)}}\\=&\frac{\mathrm{e}}{n+1}\left(1+\frac{\nu}{n+1}\right)^{\nu+n+1/2}\left(1-\frac{\nu+1}{n+1}\right)^{n-\nu}\\\to&\frac{\mathrm{e}}{n+1}\mathrm{e}^{\nu}\mathrm{e}^{-\nu-1}=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

所以求和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}x^n$$

当 $x\to 1$ 时, 发散! 即 $P_\nu(-1)$ 无界.

$\nu=$ 非负整数 $=l\geq 0$时, $P_\nu(x)$ 截断为一多项式, $P_\nu(-1)$ 有界. 所以

$$\text{本征值}\qquad \lambda_l=l(l+1)\tag{11}$$
$$\text{本征函数}\qquad y_l(x)=P_l(x)\tag{12}$$

$$\begin{aligned}P_l(x) &= \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l-n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \end{aligned} \tag{13}$$

是一个 l 次多项式, 称为 l 次 Legendre 多项式. 容易得到

$$P_l(1) = 1 \tag{14}$$

最低次的几个 Legendre 多项式为

$$P_0(x) = 1 \tag{15}$$

$$P_1(x) = x \tag{16}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \tag{17}$$

15.3 Legendre 多项式的微分表示式

作为常用的特殊函数, Legendre 多项式有多种表达式.

Rodrigue (罗巨格) 公式 Legendre 多项式可用下面的微分表示式表为

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2 - 1)^l \tag{18}$$

Note 微分表示式满足 *Legendre* 方程, 可以由

$$(x^2 - 1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x^2 - 1)^l = 2lx(x^2 - 1)^l$$

求 $l + 1$ 次导得到.

Proof 由

$$\begin{aligned}(x^2 - 1)^l &= (x-1)^l (x+1)^l = (x-1)^l [2 + (x-1)]^l \\ &= \sum_{n=0}^{l} \frac{l!}{n!(l-n)!} 2^{l-n} (x-1)^{n+l}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2 - 1)^l &= \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{n!(l-n)!} 2^{-n} (x-1)^{n+l} \\ &= \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{n!(l-n)!} \frac{(l+n)!}{n!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = P_l(x)\end{aligned}$$

□

立刻看出

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \tag{19}$$

l 为偶数时, $P_l(x)$ 为偶函数, l 为奇数时, $P_l(x)$ 为奇函数. 所以

$$P_l(-1) = (-1)^l P_l(1) = (-1)^l \tag{20}$$

Legendre 多项式在 $x=0$ 点的展开式可由 Rodrigue 公式得到.

$$(x^2-1)^l = \sum_{r=0}^{l} (-1)^r \frac{l!}{r!(l-r)!} x^{2(l-r)}$$

因为 $r > \frac{l}{2}$ 的项, 求导结果为零

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l &= \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \sum_{r=0}^{l} (-1)^r \frac{l!}{r!(l-r)!} x^{2(l-r)} \\ &= \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{l!}{r!(l-r)!} \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!} x^{l-2r} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P_l(x) =& \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r} \\ =& \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} x^l + \cdots \end{aligned} \tag{21}$$

很容易求出

$$P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} l! l!} \tag{22}$$

$$P_{2l+1}(0) = 0 \tag{23}$$

15.4 Legendre 多项式的正交完备性

正交性

Legendre 多项式是作为本征值问题的本征函数出现的, 因此可以从本征值问题出发, 证明 Legendre 多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_k(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l \tag{24}$$

下面给出另一个证明, 同时还可求出 $\|P_l(x)\|^2$. 设 $k \leq l$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_l(x) P_k(x) \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2-1)^l P_k(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^l l!} P_k(x) \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} (x^2-1)^l \Big|_{-1}^{1} \\ &- \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} P_k'(x) \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} (x^2-1)^l \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} P_k'(x) \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} (x^2-1)^l \mathrm{d}x \\ &= \ldots \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{1} P_k^{(l)}(x)(x^2-1)^l \mathrm{d}x$$

若 $k < l$, k 次多项式求 l 次导数等于零, 所以

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x = 0$$

这就证明了正交性. 若 $k = l$ 时, 则 $P_l^{(l)} =$ 常数. 由 $P_l(x)$ 的多项式表达式

$$P_l(x) = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} x^l + ...$$

所以

$$P_l^{(l)}(x) = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

于是

$$\|P_l(x)\|^2 = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^l l!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \mathrm{d}x$$

积分可用 B 函数表示或分部积分积出. 最后得

$$\|P_l(x)\|^2 = \frac{2}{2l+1} \tag{25}$$

所以

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl} \tag{26}$$

完备性

作为本征函数的Legendre多项式, 具有**完备性**: 任意一个在区间 $[-1,1]$ 中分段连续的函数 $f(x)$, 除去有限个不连续点, 可以展开为级数

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

当然, 展开系数由 Legendre 多项式的正交性得到

$$c_l \|P_l(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

Example 15.1 *将函数 $f(x) = x^3$ 按 Legendre 多项式展开.*

Solution x^3 为3次多项式, 而

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

所以

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}x$$

$\frac{3}{5}x$ 为1次多项式, 而

$$P_1(x) = x$$

所以

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$$

□

若为 x^k, k 较大时, 可以算出普遍表达式.

Example 15.2 将 x^k 按 *Legendre* 多项式展开.

Solution 设 $x^k = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$, 则

$$c_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} x^k P_l(x)\mathrm{d}x.$$

从被积函数的奇偶性可以判断

$$c_l = 0, \qquad\qquad 当\ k \pm l = 奇数.$$

当 $k \pm l$ 为偶数时, 将 $P_l(x)$ 用它的微分表示代入, 分部积分, 就有

$$\begin{aligned}
c_l &= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \mathrm{d}x \\
&= (-1)^1 \frac{2l+1}{2}\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l \mathrm{d}x \\
&= \ldots \\
&= (-1)^l \frac{2l+1}{2}\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这时有两种可能, 当 $k < l$ 时, 函数 x^k 微商 l 次一定为 0, 即

$$c_l = 0, \qquad\qquad 当\ k < l.$$

若 $k \geq l$, 不妨令 $k = l + 2n$, 于是

$$c_l = \frac{2l+1}{2}\frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} x^{2n}(1-x^2)^l \mathrm{d}x$$

作变换 $x^2 = t$, 并利用 B 函数就可以算出积分

$$\begin{aligned}
c_l &= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{0}^{1} t^{n-1/2}(1-t)^l \mathrm{d}t \\
&= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}B(n+1/2, l+1) \\
&= (2l+1)2^l \frac{(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!} \\
&= (2k-4n+1)2^{k-2n}\frac{k!(k-n)!}{n!(2k-2n+1)!}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
x^k &= k!\sum_{n=0}^{[k/2]} 2^{k-2n}\frac{(2k-4n+1)(k-n)!}{n!(2k-2n+1)!}P_{k-2n}(x) \\
&= k!\sum_{n=0}^{[k/2]} 2^{-n}\frac{(2k-4n+1)}{n!(2k-2n+1)!!}P_{k-2n}(x).
\end{aligned} \tag{27}$$

□

15.5 Legendre 多项式的生成函数

考虑 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$, 在 $t=0$ 点的 Taylor 展开 (对 t). 规定

$$\left.\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right|_{t=0}=1$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(x)t^l=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l \tag{28}$$

Proof

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}&=\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2-2(x-1)t}}\\&=\frac{1}{1-t}\left[1-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\\&\quad\times\left(-\frac{2k-1}{2}\right)\left[-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right]^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(x-1)^kt^k(1-t)^{-(2k+1)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(x-1)^kt^k\\&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{n!(2k)!}t^n\end{aligned}$$

令 $k+n=l$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}&=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{k!k!(l-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\right]t^l\\&=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l\end{aligned}$$

□

当函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ 对 t 展开成 $t=0$ 邻域内的幂级数时, 其系数为 x 的函数, 刚好为各次 Legendre 多项式, 我们称函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ 为 Legendre 多项式的**生成函数**. 生成函数对特殊函数的计算可以带来很大的方便.

Example 15.3 令$x=1$

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{l=0}^{\infty}t^l=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(1)t^l$$

所以 $P_l(1)=1$

Legendre多项式的模方　将生成函数平方

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n\right]^2$$

对 x 积分, 并利用 Legendre 多项式的正交关系

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=-\frac{1}{2t}\ln(1-2xt+t^2)\Big|_{-1}^{1}\\
&=\frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}\\
&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}
\end{aligned}$$

所以, 也能得Legendre多项式的模方

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}$$

□

Example 15.4 (静电场的 Coulomb 势)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}$$

记 $r_>=\max(r,r')$, $r_<=\min(r,r')$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}&=\frac{1}{\sqrt{r_>^2+r_<^2-2r_>r_<\cos\theta}}\\
&=\frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}}\\
&=\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l
\end{aligned}$$

15.6 Legendre 多项式的递推关系

从 Legendre 多项式的生成函数出发, 很容易导出相邻各次 Legendre 多项式之间的关系—递推关系.

生成函数两端对 t 求导数

$$-\frac{1}{2}\frac{-2x+2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}$$

乘以 $1-2xt+t^2$

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}$$

即

$$(x-t)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l=(1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}$$

比较 t^l 项的系数

$$xP_l(x) - P_{l-1} = (l+1)P_{l+1}(x) - 2xlP_l(x) + (l-1)P_{l-1}(x)$$

整理得

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) \tag{29}$$

将生成函数对 x 求导

$$-\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)t^l$$

乘以 $1-2xt+t^2$

$$t\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = (1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)t^l$$

比较 t^{l+1} 系数

$$P_l(x) = P_{l+1}'(x) - 2xP_l'(x) + P_{l-1}'(x)$$

把前个递推关系对 x 求导

$$(2l+1)P_l(x) + (2l+1)xP_l'(x) = (l+1)P_{l+1}'(x) + lP_{l-1}'(x)$$

消去 $P_{l-1}'(x)$

$$P_{l+1}'(x) = xP_l'(x) + (l+1)P_l(x) \tag{30}$$

消去 $P_{l+1}'(x)$, 则得

$$P_{l-1}'(x) = xP_l'(x) - lP_l(x) \tag{31}$$

递推关系的一个用途是计算积分.

Example 15.5 计算

$$\int_{-1}^{1} xP_k(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

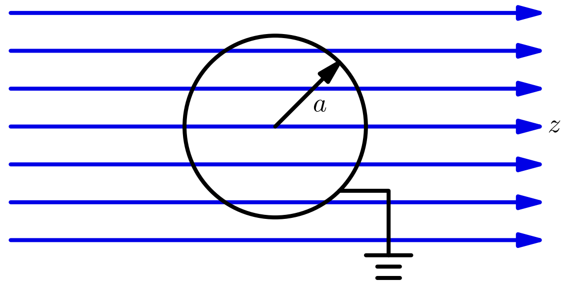
Solution 利用递推关系

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} xP_k(x)P_l(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)\right] \\
&\qquad \times P_l(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{k+1}{2k+1}\frac{2}{2l+1}\delta_{k+1,l} + \frac{k}{2k+1}\frac{2}{2l+1}\delta_{k-1,l} \\
&= \frac{2}{2l+1}\left[\frac{l}{2l-1}\delta_{k+1,l} + \frac{l+1}{2l+3}\delta_{k-1,l}\right]
\end{aligned}$$

□

15.7 Legendre 多项式应用举例

Example 15.6 均匀电场中的导体球.



设在电场强度为 E_0 的均匀电场中放进一个接地导体球, 球的半径为 a, 求球外任意一点的电势.

Solution 取电场方向为 z 轴方向, 则原有的均匀电场的电势为

$$u_1(\mathbf{r}) = -E_0 z + u_0$$

采用球坐标系, 则为

$$u_1(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + u_0$$

放进导体球, 由于静电感应, 在导体球的球面上会形成一定的感生电荷分布, 设感生电荷产生的电势为 u_2, 由对称性

$$u_2(\mathbf{r}) = u_2(r,\theta)$$

因为感生电荷局限在球面上, 故

$$u_2(r,\theta)|_{r\to\infty} = 0$$

总电势 $u(\mathbf{r})$ 为原有均匀电场的电势 u_1 和感生的电势 u_2 的叠加

$$u(r,\theta) = u_1(r,\theta) + u_2(r,\theta)$$

而接地的导体球应为零电势

$$u(r,\theta)|_{r=a} = 0$$

下面来求 u. 先求 u_2. 导体球外, 无源的静电场满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0$$

同样, 导体球不存在时, 原有电场也有

$$\nabla^2 u_1 = 0$$

故 u_2 满足 Laplace 方程, 在球坐标系中, 因为 u_2 与 ϕ 无关

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\theta}\right) = 0$$

边界条件则为

$$\begin{aligned} &u_2|_{r=a} = -u_1|_{r=a} = E_0 a\cos\theta - u_0 \\ &u_2|_{r\to\infty} \to 0 \end{aligned}$$

和

$$u_2|_{\theta=0}\text{有界} \qquad u_2|_{\theta=\pi}\text{有界}$$

求解定解问题. 分离变量

$$u_2(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R(r)=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

由 θ 的边界条件, 得

$$\Theta(0)\text{有界}\qquad\Theta(\pi)\text{有界}$$

Legendre 本征值问题的解为

$$\begin{aligned}&\text{本征值} && \lambda_l=l(l+1)\\ &\text{本征函数} && \Theta_l(\theta)=P_l(x)=P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

代入径向方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l(r)}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R_l(r)=0$$

仍为前章讨论过的特殊的二次线性微分方程—Euler 方程, 其解为

$$R_l(r)=r^\rho$$

代入方程

$$\rho(\rho+1)-l(l+1)=0$$

$$\rho_1=l\qquad\rho_2=-l-1$$

于是

$$R_l(r)=A_lr^l+B_lr^{-l-1}$$

特解为

$$u_{2,l}(r,\theta)=(A_lr^l+B_lr^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

一般解

$$u_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_lr^l+B_lr^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

考虑径向边界条件

$$u_2|_{r\to\infty}\to 0$$

所以, $A_l=0$. 而

$$\begin{aligned}u_2|_{r=a}&=\sum_{l=0}^{\infty}B_la^{-l-1}P_l(\cos\theta)\\&=E_0a\cos\theta-u_0=E_0aP_1(\cos\theta)-u_0P_0(\cos\theta)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{B_0}{a}=-u_0 && B_0=-u_0a\\ &\frac{B_1}{a^2}=E_0a && B_1=E_0a^3\\ & && B_l=0\qquad l\geq 2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2(r,\theta) &= -\frac{u_0 a}{r} + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta \\
u(r,\theta) &= u_0 - E_0 r\cos\theta - \frac{u_0 a}{r} + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta \\
&= u_0\left(1-\frac{a}{r}\right) - E_0\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right) r\cos\theta
\end{aligned}
$$

□

Example 15.7 (均匀带电细圆环的静电势) *设有一均匀带电细圆环, 半径为 a, 总电荷量为 Q, 求它在空间任意一点的静电势.*

解法一 除了圆环上各点外, 静电势处处满足 Laplace 方程.

仍取球坐标系, 坐标原点在环心, 而圆环则处在赤道面上. 这时, 空间任意一点 (r,θ,ϕ) 的静电势应与 ϕ 无关

$$u = u(r,\theta)$$

可以写出 u 所满足的定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r,\theta), \tag{32a}$$

$$u\big|_{\theta=0}\ \text{有界}, \qquad u\big|_{\theta=\pi}\ \text{有界}, \tag{32b}$$

$$u\big|_{r=0}\ \text{有界}, \qquad u\big|_{r\to\infty} \to 0. \tag{32c}$$

其中电荷密度分布函数为

$$\rho(r,\theta) = C\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), \tag{33a}$$

由圆环上的总电荷

$$\iiint C\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = Q$$

就可以定出常数 C,

$$C = \frac{Q}{2\pi a^2}. \tag{33b}$$

下面就来求解定解问题(32). 由 δ 函数的性质可以知道, 当 $r \neq a$时, 方程(32a) 退化为 Laplace 方程. 这样, 再结合(32b)和(32c), 就可以得到

$$u(r,\theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), & r<a, \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta), & r>a. \end{cases} \tag{34}$$

把球面 $r=a$ 看成是界面, 在界面上存在电荷分布. 所以 $u(r,\theta)$ 在球面 $r=a$ 上一定是连续的,

$$u(r,\theta)\big|_{r=a-0}^{r=a+0} = 0, \tag{35}$$

而 $\partial u(r,\theta)/\partial r$ 在球面 $r=a$ 上一定是不连续的, 它在球面 $r=a$ 两侧的跃变可以由方程(32a)对 r 积分得到:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a-0}^{r=a+0} = -\frac{Q}{2\pi a^2\epsilon_0}\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right). \tag{36}$$

由(35)式可得

$$A_l a^l = B_l a^{-l-1},$$

将(36)式中的 δ 函数也按 Lengendre 多项式展开,

$$\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta),$$

又可得

$$A_l l a^{l+1}+B_l(l+1)a^{-l}=\frac{(2l+1)Q}{4\pi\epsilon_0}P_l(0).$$

解之即得

$$A_l=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}a^{-l-1}P_l(0),\quad B_l=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}a^lP_l(0).$$

因为$P_{2l+1}(0)=0$，所以

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2l}P_{2l}(0)P_{2l}(\cos\theta), \\ \hfill r<a, \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2l+1}P_{2l}(0)P_{2l}(\cos\theta), \\ \hfill r>a.\end{cases}\tag{37}$$

解式中只含有偶次 Legendre 多项式, 反映了静电势 $r(r,\theta)$ 对于赤道面的(镜像) 反射不变性, 即

$$u(r,\theta)=u(r,\pi-\theta).$$

□

解法二 本题还有一种非标准的解法, 即在 $r\neq a$的条件下先写出定解问题(32)的一般解(34). 然后设法找到 $u(r,\theta)$ 在某些特殊位置的数值, 来定出叠加系数. 由于圆环上各点到轴线上 $(r,\theta)=(r,0)$ 或 (r,π) 点的距离相等, 故可直接叠加出轴线上任意一点的静电势,

$$\begin{aligned}u(r,\theta)\big|_{\theta=0,\pi}&=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\\&=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ra\cos\theta'}}\right|_{\theta'=\pi/2}\\&=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2l}P_{2l}(0), & r<a,\\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2l}P_{2l}(0), & r>a.\end{cases}\end{aligned}\tag{38}$$

另一方面，由(34)式又可以得到

$$u(r,\theta)\Big|_{\theta=0,\pi}=\begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty}(\pm)^lA_lr^l, & r<a,\\ \sum_{l=0}^{\infty}(\pm)^lB_lr^{-l-1}, & r>a,\end{cases}$$

其中的正号和负号分别对应于 $\theta=0$ 和 π. 与前式相比较, 就可以求得

$$\begin{aligned}A_{2l}&=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}a^{-2l-1}P_{2l}(0), & A_{2l+1}&=0,\\ B_{2l}&=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}a^{2l}P_{2l}(0), & B_{2l+1}&=0.\end{aligned}$$

□

15.8 连带 Legendre 函数

连带 Legendre 方程

球坐标系下 Laplace 方程, 在一般情况下, $u = u(r, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) & \\ \qquad + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 & \\ u|_{r=R} = f(\theta,\phi) & u|_{r=0}\text{有界} \\ u|_{\theta=0}\text{有界} & u|_{\theta=\pi}\text{有界} \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} & \left.\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi} \end{cases}$$

分离变量

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\phi) &= R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \\ \Theta(\theta)\Phi(\phi)\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}&\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) \\ +R(r)\Phi(\phi)\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}&\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) \\ +R(r)\Theta(\theta)\frac{1}{r^2\sin^2\theta}&\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 \end{aligned}$$

$\times r^2/(R\Theta\Phi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}&\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) \\ -\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta}&\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = \lambda \end{aligned}$$

将 Θ, Φ 满足的方程再乘以 $\sin^2\theta$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = \mu$$

得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} + \mu\Phi(\phi) = 0 \tag{40}$$

(39) 称为连带 Legendre 方程.

连带 Legendre 函数

边界条件分离变量后为

$$\begin{aligned} &\Theta(0)\text{有界} && \Theta(\pi)\text{有界} \\ &\Phi(0) = \Phi(2\pi) && \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{aligned}$$

解 Φ 本征值问题, 得

$$
\begin{aligned}
&\mu_m = m^2 && m = 0,1,2,3,... \\
&\Phi_0 = 1 && \Phi_{m1} = \cos m\phi \\
& && \Phi_{m2} = \sin m\phi
\end{aligned}
$$

代入 Θ 方程后, Θ 的本征值问题为

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0 \\
\Theta(0)\text{有界} \qquad \Theta(\pi)\text{有界}
\end{cases}
$$

或令

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\theta \\
y(x) &= \Theta(\theta) \\
\lambda &= \nu(\nu+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\nu(\nu+1) - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0 \\
y(\pm 1)\text{有界}
\end{cases}
$$

先求方程的通解. 假设

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2}v_m(x)$$

代入方程, 就可以得到 $v_m(x)$ 所满足的方程

$$(1-x^2)v_m'' - 2(m+1)xv_m' + [\nu(\nu+1) - m(m+1)]v_m = 0$$

下面, 我们证明, 上面的方程可以通过 Legendre 方程求 m 次导数得到. 先将上面方程求一次导数

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)v_m''' - 2xv_m'' - 2(m+1)xv_m'' \\
-2(m+1)v_m' + [\nu(\nu+1) - m(m+1)]v_m' = 0
\end{aligned}
$$

整理后得

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)\left(v_m'\right)'' - 2(m+2)x\left(v_m'\right)' \\
+[\nu(\nu+1)] - (m+1)(m+2)]\left(v_m'\right) = 0
\end{aligned}
$$

这表明, $v_m'(x)$ 满足同样的方程, 只要把 m 换成 $m+1$.

$$v_m'(x) \sim v_{m+1}(x)$$

所以只要知道了 $m=0$ 时方程的解 v_0, 对解求一次导, 就得到了 $m=1$ 时方程的解 v_1, 再求一次导, 就得到了 $m=2$ 时方程的解 v_2, 依此类推. 而 $m=0$ 时方程就是 Legendre 方程

$$(1-x^2)w'' - 2xw' + \nu(\nu+1)w = 0$$

其解为 Legendre 函数 $P_\nu(x)$ 和 $Q_\nu(x)$. 所以, v_m 的通解为

$$v_m(x) = AP_\nu^{(m)}(x) + BQ_\nu^{(m)}(x)$$

而连带 Legendre 方程的通解则为

$$y(x) = A(1-x^2)^{m/2}P_\nu^{(m)}(x) + B(1-x^2)^{m/2}Q_\nu^{(m)}(x)$$

再考虑边界条件, $y(1)$ 有界, Q_ν 在 $x=1$ 对数发散, $Q_\nu^{(m)}$ 则以 $(x-1)^{-m}$ 的方式发散, 所以 $(1-x^2)^{m/2}Q_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x=1$ 发散, $B=0$.

进一步, $y(-1)$ 有界, 只要 $\nu \neq$ 整数, P_ν 为一无穷级数, 则 P_ν 在 $x=-1$ 点也是对数发散,

$$P_\nu(x) = \alpha P_\nu(-x) + \beta Q_\nu(-x) \qquad \beta \neq 0$$

实际上, $\nu \neq$ 整数 时

$$Q_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[\cos\nu\pi P_\nu(x) - P_\nu(-x)]$$

同样的道理, 则 $(1-x^2)^{m/2}P_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x=-1$ 发散.

除非 $\nu = l$, P_l 截断成 Legendre 多项式. 且 $l \geq m$ 时, $P_l^{(m)}$ 不为零! 得

$$\lambda_l = l(l+1) \qquad l = m, m+1, m+2, ...$$
$$y_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}P_l^{(m)}(x) \equiv P_l^m(x)$$

$P_l^m(x)$ 称为 m 阶 l 次连带 Legendre 函数

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$$

定义

$$P_\nu^{-m}(x) = (-)^m \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(x), \tag{41}$$

$$Q_\nu^{-m}(x) = (-)^m \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(x). \tag{42}$$

当 $m > l$ 时, 取极限, 得第一解为

$$P_l^{-m}(x) = \lim_{\nu\to l} P_\nu^{-m}(x). \tag{43}$$

$P_l^{-m}(x)$ 在 $x \to -1$ 时仍为对数发散.

作为本征函数, 连带Legendre函数有正交关系

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad k \neq l \tag{44}$$

Proof 设 $k \leq l$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m P_l^{(m)}P_k^{(m)}(x)\mathrm{d}x$$

分部积分 m 次后得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x \\ =&(-1)^m\int_{-1}^{1}P_l(x)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x)\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而

$$P_l(x) = \frac{(2l)!}{2^l l! l!}x^l + ...$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x)\right] \\
=&\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(-1)^m x^{2m}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{(2k)!}{2^k k!k!}x^k\right)+...\right] \\
=&(-1)^m\frac{(2k)!}{2^k k!k!}\frac{k!}{(k-m)!}\frac{(k+m)!}{k!}x^k+...
\end{aligned}
$$

为一 k 次多项式. 将其用 Legendre 多项式展开

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[(1-x^2)^m P_k^{(m)}(x)\right] \\
&=(-1)^m\frac{(k+m)!}{(k-m)!}P_k(x)+\sum_{n=0}^{k-1}c_nP_n
\end{aligned}
$$

当 $k<l$ 时, $P_l(x)$ 与 P_k 正交, 且显然 $P_l(x)$ 与 $P_n(n<k)$ 正交, 所以积分等于零, 这就证明了正交性. 当 $k=l$ 时积分为

$$
\|P_l^m\|^2=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\|P_l\|^2=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}
$$

所以

$$
\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{lk} \tag{45}
$$

□

15.9 球面调和函数

球坐标系下 Laplace 方程的分离变量的特解

$$
u(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)
$$

Φ, Θ 为相应本征值问题的本征函数.

$$
\begin{aligned}
&\Phi_0=1 && \Phi_{m1}=\cos m\phi \\
& && \Phi_{m2}=\sin m\phi \qquad m=0,1,2,3,... \\
&\Theta_l^m(\theta)=P_l^m(\cos\theta) && l=m,m+1,m+2,...
\end{aligned}
$$

我们把 Φ, Θ 的乘积称为球面调和函数, 简称球谐函数. 记为 $S(\theta,\phi)$. 这样, 球坐标系下 Laplace 方程的分离变量的特解

$$
u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)
$$

而

$$
\begin{aligned}
S_{lm1}(\theta,\phi)&=P_l^m(\cos\theta)\cos m\phi \qquad m=0,1,2,...,l \\
S_{lm2}(\theta,\phi)&=P_l^m(\cos\theta)\sin m\phi \qquad m=1,2,...,l
\end{aligned}
$$

$l=0,1,2,3,...$

常采用另一种形式的球谐函数. 本征函数 Φ 取复数的形式

$$
\Phi_m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \qquad m=0,\pm1,\pm2,...
$$

球面调和函数则为

$$
S_{lm}(\theta,\phi)=P_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}
$$

$l=0,1,2,...,$ $m=0,\pm1,\pm2,...,\pm l$

其正交关系和模方为

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} & S_{lm}(\theta,\phi)S_{kn}^*(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{lk}2\pi\delta_{mn} \\ &= \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{lk}\delta_{mn}\end{aligned} \tag{46}$$

归一化的球面调和函数

$$Y_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{2l+1}{4\pi}}P_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{47}$$

其正交关系很简单

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta,\phi)Y_k^{n*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\delta_{lk}\delta_{mn} \tag{48}$$

归一化即指其模方为1.

Note 不同的文献 Y_l^m (或 Y_{lm}) 的定义可能不同. 例如, Y_l^m 定义中的绝对值符号可能去掉, 这是因为

$$\begin{aligned}P_l^{-m}(x) &\equiv \frac{(-1)^{-m}}{2^l l!}(1-x^2)^{-m/2}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l \\ &= (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)\end{aligned}$$

这样就会相差一个因子 $(-1)^m$. 在我们的教科书中

$$Y_l^{m*}(x)=Y_l^{-m}(x)$$

而常用的约定是

$$Y_l^{m*}(x)=(-1)^mY_l^{-m}(x)$$

球面调和函数的引入使问题求解变得简单.

Example 15.8 一半径为a的均匀导体球, 表面温度为

$$u|_{r=a}=P_1^1(\cos\theta)\cos\phi$$

试求出球内的稳定温度分布

Solution 化为球坐标系下的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2u}{\partial\phi^2}=0 \\ u|_{r=a}=f(\theta,\phi)=P_1^1(\cos\theta)\cos\phi \\ u|_{r=0}\text{有界} \\ u|_{\theta=0}\text{有界} \qquad\qquad u|_{\theta=\pi}\text{有界} \\ u|_{\phi=0}=u|_{\phi=2\pi} \qquad\qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}\end{cases}$$

分离变量

$$u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0$$

和

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0$$

加上边界条件

$$S|_{\theta=0}\text{有界} \qquad\qquad S|_{\theta=\pi}\text{有界}$$
$$S|_{\phi=0}=S|_{\phi=2\pi} \qquad\qquad \left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial S}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

构成一个偏微分方程的本征值问题. 其解为 (写出即可)

$$\begin{aligned}&\lambda_l=l(l+1)\\&S_{lm}(\theta,\phi)=Y_l^m(\theta,\phi)\qquad m=0,\pm1,\pm2,...,\pm l\end{aligned}$$

代入径向方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l(r)}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R_l=0$$

其通解

$$R_l(r)=A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-l-1}$$

由边界条件$u|_{r=0}$有界, $B_{lm}=0$. 所以, 特解为

$$u_{lm}(r,\theta,\phi)=A_{lm}r^lY_l^m(\theta,\phi)$$

一般解

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}r^lY_l^m(\theta,\phi)$$

定系数

$$u(r,\theta,\phi)|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}a^lY_l^m(\theta,\phi)$$

由球谐函数正交归一性

$$A_{lm}a^l=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\phi)Y_l^{m*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$A_{lm}=a^{-l}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\phi)Y_l^{m*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

或直接将 $f(\theta,\phi)$ 用球谐函数展开. 因为

$$Y_1^{\pm1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}P_1^1(\cos\theta)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}$$

则

$$\begin{aligned}P_1^1(\cos\theta)\cos\phi &= P_1^1(\cos\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{2}\\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_1^1(\theta,\phi)+Y_1^{-1}(\theta,\phi)\right]\end{aligned}$$

于是,

$$A_{11}=A_{1-1}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\qquad A_{\text{其它}}=0$$

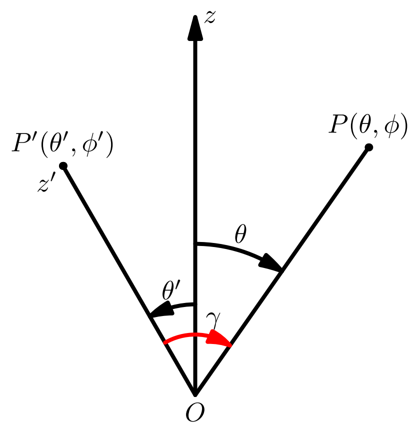
$$\begin{aligned}u(r,\theta,\phi) &= \frac{r}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_1^1(\theta,\phi)+Y_1^{-1}(\theta,\phi)\right]\\ &= \frac{r}{a}P_1^1(\cos\theta)\cos\phi=\frac{r}{a}\sin\theta\cos\phi\end{aligned}$$

□

15.10 连带 Legendre 函数的加法公式

加法公式

如图, 若改变球坐标极轴方向



有如下加法公式:

$$\begin{aligned}P_l(\cos\gamma) &= \sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')}\\ &= \sum_{m=-l}^{l}(-1)^m P_l^m(\cos\theta)P_l^{-m}(\cos\theta')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')}\\ &= P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')\\ &+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\\ &\times\cos m(\phi-\phi')\end{aligned}\tag{49}$$

其中 γ 是 OP (方向为 θ,ϕ) 与 z' 轴 OP' (方向为 θ',ϕ') 间的夹角.

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\tag{50}$$

Proof 这个加法公式的证法很多. 下面从微分方程的解的关系着手, 予以证明.

在球坐标系中用分离变量法解 Laplace 方程:

$$\nabla^2 V = 0$$

可得 $V(r,\theta,\phi) = R(r)S(\theta,\phi)$. 假设 $V(0)$ 有界, 则可取

$$V_{lm}(r,\theta,\phi) = r^l Y_{lm}(\theta,\phi)$$

现在改变球坐标的极轴, 从 z 轴换到 z' 轴. 显然, 在这样的变换下 Laplace 方程的形式不变, 而其解在新坐标系 (r,γ,δ) 下有:

$$U_{lm}(r,\gamma,\delta) = r^l Y_{lm}(\gamma,\delta)$$

仍满足

$$\nabla^2 U = 0$$

由解的完备性, $U_{lm}(r,\gamma,\delta)$ 一定可以表示成 $V_{lm}(r,\theta,\phi)$ 的线性组合, 所以

$$r^l Y_{lm}(\gamma,\delta) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k} r^k A_{kn} Y_{kn}(\theta,\phi)$$

比较 r^l 的幂次, 有

$$A_{kn} = A_n \delta_{kl}$$

所以

$$Y_{lm}(\gamma,\delta) = \sum_{n=-l}^{l} A_n Y_{ln}(\theta,\phi) \tag{51}$$

其中 $A_n = A_n(\theta',\phi')$ 仅依赖于 z' 轴对 z 轴的方向. 反过来, $V_{lm}(r,\theta,\phi)$ 也一定可以表示成 $U_{lm}(r,\gamma,\delta)$ 的线性组合, 所以又可以得到

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sum_{n=-l}^{l} B_n Y_{ln}(\gamma,\delta) \tag{52}$$

在(51)中考虑 $m=0$ 的情形,

$$Y_{l0}(\gamma,\delta) = \sum_{m=-l}^{l} A_m Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{53}$$

由球谐函数的正交归一关系, 得

$$A_m = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{l0}(\gamma,\delta) Y_{lm}^*(\theta,\phi)\mathrm{d}\omega$$

其中 $\omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ 是立体角元. 将 (52)代入, 注意立体角的大小不因极轴的变换而改变

$$\mathrm{d}\omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\Omega = \sin\gamma\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\delta$$

得

$$\begin{aligned} A_m &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{l0}(\gamma,\delta)\sum_{n=-l}^{l} B_n^* Y_{ln}^*(\gamma,\delta)\mathrm{d}\Omega \\ &= B_0^* \end{aligned}$$

B_0 可以从(52)算出如下: 当 $\gamma=0$ 时, $\theta=\theta'$, $\phi=\phi'$, 而

$$
\begin{aligned}
Y_{ln}(0,\delta) &= \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\frac{2l+1}{4\pi}}P_l^n(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\delta} \\
&= \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{n0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\delta} \\
&= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{n0}
\end{aligned}
$$

故

$$B_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{lm}(\theta',\phi')$$

即

$$A_m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^*_{lm}(\theta',\phi')$$

得

$$Y_{l0}(\gamma,\delta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi') \tag{54}$$

将 Y_{lm} 的表达式代入, 就证明了加法公式. □

Note

$$\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi') \qquad \text{不变量}$$

在新坐标系里, 令 $(\theta,\phi)=(0,0)$, $(\theta',\phi')=(\gamma,\delta)$. 因为

$$
\begin{aligned}
Y_{lm}(0,0) =& \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta m0, \\
Y_{l0}(\gamma,\delta) =& \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\gamma),
\end{aligned}
$$

得

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta',\phi') \tag{55}$$

带电圆环问题解法三 重新再讨论带电圆环问题. 在环上取弧元 $a\mathrm{d}\phi'$, 它到空间任意一点 (r,θ,ϕ) 的静电势就是

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\mathrm{d}\phi'}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\gamma}},$$

其中

$$
\begin{aligned}
\cos\gamma &= \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\big|_{\theta'=\pi/2} \\
&= \sin\theta\cos(\phi-\phi').
\end{aligned}
$$

由此就直接叠加出整个带电圆环在 (r,θ,ϕ) 的静电势

$$u(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\gamma}}.$$

可以利用加法公式计算出这个积分. 当 $r<a$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\gamma}}\\
=&\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\int_0^{2\pi}P_l(\cos\gamma)\mathrm{d}\phi'\\
=&\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\int_0^{2\pi}\Bigg[P_l(\cos\theta)P_l(0)\\
&+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(0)\cos m(\phi-\phi')\Bigg]\mathrm{d}\phi'
\end{aligned}$$

积分后, 得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\gamma}}=\frac{2\pi}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta)P_l(0),$$

所以

$$\begin{aligned}
u(r,\theta,\phi)&=\frac{Q}{4\pi a\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta)P_l(0)\\
&=\frac{Q}{4\pi a\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta)P_{2l}(0).
\end{aligned}$$

这里用到了 $P_{2l+1}(0)=0$. 类似地, 当 $r>a$ 时也可以得到

$$u(r,\theta,\phi)=\frac{Q}{4\pi r\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta)P_{2l}(0).$$

结果完全相同. □

15.11 超几何函数

超几何级数

超几何级数是一个级数 $\sum c_n$, 满足

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=n \text{ 的有理函数}$$

将有理函数的分子多项式和分母多项式因式分解后, 总可以写成

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)x}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)} \tag{56}$$

这里出现 x 因子是因为多项式不一定是首一的. $n+1$ 因子可能来源于因式分解, 也可能不是. 如果不是, 则只需在分子上加一补偿因子 $n+1$. 由以上递推关系,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}c_n&=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{x^n}{n!}\\
&\equiv c_0\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix};x\right)
\end{aligned} \tag{57}$$

许多初等函数都可以表示成超几何级数, 如

$$\mathrm{e}^x = {}_0F_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}\ ;x\right) \tag{58a}$$

$$\sin x = x\,{}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 3/2 \end{matrix}\ ;-x^2/4\right) \tag{58b}$$

$$\cos x = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ 1/2 \end{matrix}\ ;-x^2/4\right) \tag{58c}$$

$$\log(1+x) = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} 1,1 \\ 2 \end{matrix}\ ;-x\right) \tag{58d}$$

$$(1-x)^{-a} = {}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}\ ;x\right) \tag{58e}$$

超几何函数

超几何函数

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta;\gamma;z) &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha,\beta \\ \gamma \end{matrix}\ ;z\right) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} z^n \end{aligned} \tag{59}$$

及其解析延拓.

超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + [\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \alpha\beta z = 0 \tag{60}$$

的特点是方程的奇点有三个: 0, 1, 和 ∞, 且它们都是正则奇点.

当 $\gamma \neq$整数时, 方程的两个线性无关解是

$$w_1(z) = F(\alpha,\beta;\gamma;z) \tag{61}$$

$$w_2(z) = z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;z) \tag{62}$$

一些特殊函数可以用超几何函数来表示. 如 Legendre 多项式

$$P_n(z) = F(-n,n+1;1;\frac{1-z}{2}) \tag{63}$$

Legendre 函数

$$P_\nu(z) = F(-\nu,\nu+1;1;\frac{1-z}{2}) \tag{64}$$

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}(2z)^{-\nu-1} \\ &\quad \times F(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}) \end{aligned} \tag{65}$$

连带 Legendre 函数

$$
\begin{aligned}
P_\nu^\mu(z) &= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu/2} \\
&\times F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}) \qquad (66)\\
Q_\nu^\mu(z) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}z^{-\nu-\mu-1}(z^2-1)^{\mu/2} \\
&\times F(\frac{\nu+\mu+1}{2},\frac{\nu+\mu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}) \qquad (67)
\end{aligned}
$$