# 数学物理方法（上）第十三次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 5 月 29 日

**题 1.** 第一类 *Bessel* 函数的积分表示为

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(nt - x\sin t)}\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

计算在 $x\to+\infty$ 极限下的领头阶近似.

**解.** 设 $f(t) = nt - x\sin t$，有 $f(t)$ 在 $(0,\pi)$ 上二阶连续可微且存在唯一的驻点 $t_* = \arccos\dfrac{n}{x}$，计算得到

$$f(t_*+t) = n\arccos\frac{n}{x} - \sqrt{x^2-n^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-n^2}\,t^2 + o(t^2), \quad t\to 0,$$

于是根据驻相法有

$$\begin{aligned} J_n(x) &\sim \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\mathrm{i}\left(n\arccos\frac{n}{x} - \sqrt{x^2-n^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-n^2}\,t^2\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{x^2-n^2}}}\cos\left(n\arccos\frac{n}{x} - \sqrt{x^2-n^2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(\frac{n\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x\to+\infty. \end{aligned}$$

□

**题 2.** 请列出如下超几何方程的所有奇点，并指出奇点种类（正则还是非正则）

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - abw = 0. \tag{2}$$

**解.** 根据超几何方程的系数

$$p(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}, \quad q(z) = -\frac{ab}{z(1-z)},$$

有当 $ab\neq 0$ 或 $c\neq 0$ 时 $z=0$ 是方程的正则奇点. 当 $ab\neq 0$ 或 $c\neq a+b+1$ 时 $z=1$ 是方程的正则奇点. 对于无穷远点，作变量替换 $z=1/t$ 得到

$$t^2(t-1)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + t[(a+b-1)-(c-2)t]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - abw = 0,$$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

根据方程的系数

$$p_1(t) = \frac{(a+b-1)-(c-2)t}{t(t-1)}, \quad q_1(t) = -\frac{ab}{t^2(t-1)},$$

有当 $ab \neq 0$ 或 $a+b \neq 1$ 时 $z=\infty$ 是方程的正则奇点. □

**题 3.** 求解

$$y'' + x^2 y = 0$$

在 $x=0$ 附近的独立级数解.

**解**. 由于 $x=0$ 点是方程的常点，设方程的解为

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad |x| < \infty,$$

代入方程得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2}x^k = 0,$$

系数满足的递推方程为

$$c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad (k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-2} = 0, \quad k \geqslant 2,$$

解得系数的通项公式为

$$c_{4n} = \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^{2n}\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)} c_0, \qquad c_{4n+1} = \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{4^{2n}\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{5}{4}\right)} c_1,$$

$$c_{4n+2} = 0, \qquad c_{4n+3} = 0,$$

因此方程在 $x=0$ 附近的两个线性无关解为

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^{2n}\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)} x^{4n}, \quad |x| < \infty,$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{4^{2n}\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{5}{4}\right)} x^{4n+1}, \quad |x| < \infty.$$

□

**题 4.** 求解

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$$

在 $x=0$ 附近的独立级数解，对于 $p$ 取何值时，解为多项式？

**解**. 由于 $x=0$ 点是方程的常点，设方程的解为

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad |x| < 1,$$

代入方程得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2}-(k^2-p^2)c_k]x^k=0,$$

系数满足的递推方程为

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-(k^2-p^2)c_k=0,\quad k\geqslant 0,$$

解得系数的通项公式为

$$c_{2n}=\frac{2^{2n}\Gamma\left(n+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)}c_0,$$

$$c_{2n+1}=\frac{2^{2n}\Gamma\left(n+\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma(2n+2)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{p-1}{2}\right)}c_1,$$

因此方程在 $x=0$ 附近的两个线性无关解为

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}\Gamma\left(n+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{p}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)}x^{2n},\quad |x|<1,$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}\Gamma\left(n+\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma(2n+2)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{p-1}{2}\right)}x^{2n+1},\quad |x|<1,$$

多项式解要求存在 $N$ 使得对任意 $n>N$ 都有 $c_n=0$，当 $p$ 为整数时存在多项式解. □

**题 5.** 求解

$$x^2y''-xy'-y=0$$

在 $x=0$ 附近的独立级数解.

**解**. 由于 $x=0$ 点是方程的正则奇点，设方程的解为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^{k+\rho},\quad 0<|x|<+\infty,$$

代入方程得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[(k+\rho)^2-2(k+\rho)-1]c_kx^{k+\rho}=0,$$

系数满足的递推方程为

$$[(k+\rho)^2-2(k+\rho)-1]c_k=0,\quad k\geqslant 0,$$

根据 $c_0\neq 0$ 有相应的指标方程为

$$\rho^2-2\rho-1=0,$$

解得 $\rho_1 = 1+\sqrt{2}$ 和 $\rho_2 = 1-\sqrt{2}$，对于 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 解得系数的通项公式为

$$c_n = 0, \quad n \geqslant 1,$$

因此方程在 $x=0$ 附近的两个正则解为

$$y_1(x) = x^{1+\sqrt{2}}, \quad y_2(x) = x^{1-\sqrt{2}}, \quad 0<|x|<+\infty. \qquad \square$$

**题 6.** 求解

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

在 $x=0$ 附近的独立级数解.

**解.** 由于 $x=0$ 点是方程的正则奇点，设方程的解为

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+\rho}, \quad 0<|x|<+\infty,$$

代入方程得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[(k+\rho)^2 - 2(k+\rho)+1]c_k x^{k+\rho} = 0,$$

系数满足的递推方程为

$$[(k+\rho)^2 - 2(k+\rho)+1]c_k = 0, \quad k \geqslant 1,$$

根据 $c_0 \neq 0$ 有相应的指标方程为

$$\rho^2 - 2\rho + 1 = 0,$$

解得 $\rho_1 = 1$ 和 $\rho_2 = 1$，对于 $\rho_1$ 解得系数的通项公式为

$$c_n = 0, \quad n \geqslant 1,$$

因此方程在 $x=0$ 附近的第一个正则解为

$$y_1(x) = x, \quad 0<|x|<+\infty,$$

根据两个解满足的关系

$$x^2(y_1y_2'' - y_2y_1'') - x(y_1y_2' - y_2y_1') = 0,$$

可以得到第二个解满足的方程

$$y_1y_2' - y_2y_1' = gx,$$

解得 $y_2 = gx\ln x + d_0x$，因此方程在 $x=0$ 附近的第二个正则解为

$$y_2(x) = x\ln x, \quad 0<|x|<+\infty. \qquad \square$$

**题 7.** 求解

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

在 $x=0$ 附近的独立级数解.

**解.** 由于 $x=0$ 点是方程的正则奇点，设方程的解为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k x^{k+\rho},\quad 0<|x|<+\infty,$$

代入方程得到

$$\sum_{k=-2}^{+\infty}(k+\rho+2)(k+\rho+3)c_{k+2}x^{k+\rho}+\sum_{k=0}^{+\infty}c_k x^{k+\rho}=0,$$

系数满足的递推方程为

$$\rho(\rho+1)c_0=0,\quad (\rho+1)(\rho+2)c_1=0,\quad (k+\rho+2)(k+\rho+3)c_{k+2}+c_k=0,\quad k\geqslant 0,$$

根据 $c_0\neq 0$ 有相应的指标方程为

$$\rho(\rho+1)=0,$$

解得 $\rho_1=0$ 和 $\rho_2=-1$，对于 $\rho_1$ 解得系数的通项公式为

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}c_0,\quad c_{2n+1}=0,$$

因此方程在 $x=0$ 附近的第一个正则解为

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=\frac{\sin x}{x},\quad 0<|x|<+\infty,$$

根据两个解满足的关系

$$(y_1y_2''-y_2y_1'')+\frac{2}{x}(y_1y_2'-y_2y_1')=0,$$

可以得到第二个解满足的方程

$$y_1y_2'-y_2y_1'=-\frac{d_0}{x^2},$$

解得 $y_2=d_0\dfrac{\cos x}{x}+d_1\dfrac{\sin x}{x}$，因此方程在 $x=0$ 附近的第二个正则解为

$$y_2(x)=\frac{\cos x}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1},\quad 0<|x|<+\infty.$$

□