6 留数定理及其应用

6.1 留数

留数

若点 a 为函数 $f(z)$ 的解析点, 存在邻域 $|z-a|<R$, $f(z)$ 在邻域内解析. 这时若在邻域内作圆 $C:|z-a|=r<R$, 那么根据 Cauchy 定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

若点 b 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则函数在 $0<|z-b|<R$ 内解析. 这时若作圆 $C:|z-a|=r<R$, 由于围道内有奇点, 所以

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z\text{不一定为零}$$

在 $0<|z-b|<R$ 的环域内 $f(z)$ 有 Laurent 展开:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z-b|=r}\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

令 $n=-1$, 即得

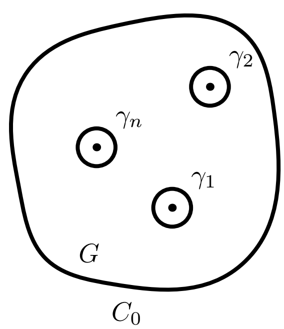
$$\oint_{|z-b|=r}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}a_{-1}$$

留数 *若 b 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 定义函数 $f(z)$ 在孤立奇点 b 的**留数**等于 $f(z)$ 在 b 的空心邻域内 Laurent 展开式中 $(z-b)^{-1}$ 幂的系数 a_{-1}, 记作 $\mathrm{res}f(b)$.*

$$\mathrm{res}f(b)=a_{-1} \tag{1}$$

留数定理

如果我们要计算一闭合围道积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$. 假设闭合围道内部, 被积函数除有限几个孤立奇点 b_k, $k=1,2,...,n$ 外解析.



根据复连通区域 Cauchy 定理, 作小圆 γ_1, γ_2, ..., γ_n 将每个奇点包围, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}f(b_k)$$

Theorem 6.1 (留数定理) *设 C 为一简单闭合围道, G 为 C 的内区域, 若除 G 内有限个孤立奇点 b_k, $k=1,2,...,n$ 外, 函数在 $\overline{G}$ 内解析, 则*

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}f(b_k) \tag{2}$$

留数的计算

求 $f(z)$ 在奇点 b 处的留数, 就是要求 $f(z)$ 在 $z=b$ 点的 (不含 b 的) 邻域内 Laurent 展开中 $(z-b)^{-1}$ 项的系数.

若 b 为可去奇点, 则

$$\mathrm{res}f(b) = a_{-1} = 0 \tag{3}$$

所以, 留数定理应用时, 无需考虑可去奇点.

若 b 为函数的极点

1. 一阶极点
2. 高阶极点
3. 本性奇点或高阶极点

留数的计算

1. 一阶极点
2. 高阶极点
3. 本性奇点或高阶极点

一阶极点

在 b 点的某一空心邻域内

$$f(z) = \frac{1}{z-b}\phi(z) \tag{4}$$

$\phi(z)$ 在含中心 b 点的邻域内解析, $\phi(b) \neq 0$. 作 Taylor 展开

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-b)^n$$

于是

$$\mathrm{res}f(b) = \alpha_0 = \phi(b)$$

由连续性

$$\mathrm{res}f(b) = \lim_{z\to b}(z-b)f(z) \tag{5}$$

特别常见的情况是

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{6}$$

$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 b 点及其邻域内解析, b 是 $Q(z)$ 的一阶零点, $P(b) \neq 0$. 则

$$\mathrm{res}f(b) = \lim_{z\to b}(z-b)\frac{P(z)}{Q(z)} = P(b) \cdot \lim_{z\to b} \frac{z-b}{Q(z)}$$

由l'Hospital法则

$$\mathrm{res}f(b) = P(b) \cdot \frac{1}{Q'(b)} = \frac{P(b)}{Q'(b)} \tag{7}$$

Example 6.1 求 $\dfrac{1}{z^2+1}$ 在奇点处的留数.

Solution $z=\pm\mathrm{i}$ 是它的一阶极点, 且为分母 z^2+1 的一阶零点. 所以

$$\mathrm{res} f(\pm\mathrm{i}) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}} = \mp\frac{\mathrm{i}}{2}$$

□

Example 6.2 求 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$ 在奇点处的留数.

Solution $z=0$ 是它的一阶极点, 但是分母的二阶零点 (分子的一阶零点). 由一阶极点留数普遍公式(5)

$$\mathrm{res} f(0) = \lim_{z\to 0} z\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z}$$

由l'Hospital法则

$$= \left.\frac{\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{i}b\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{1}\right|_{z=0} = \mathrm{i}(a-b)$$

□

高阶极点

设 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点

$$f(z) = (z-b)^{-m}\phi(z)$$

$\phi(z)$ 在 b 的某个邻域内解析

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-b)^n$$

$\phi(b)\neq 0$. 则

$$\mathrm{res} f(b) = \alpha_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}\phi^{(m-1)}(b)$$

将 b 换成极限 $z\to b$

$$\mathrm{res} f(b) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-b)^m f(z)] \tag{8}$$

Example 6.3 求 $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ 在奇点处的留数.

Solution $z=\pm\mathrm{i}$ 是它的三阶极点, $m=3$

$$\begin{aligned}\mathrm{res} f(\pm\mathrm{i}) &= \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left.\left[(z\mp i)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]\right|_{z=\pm\mathrm{i}}\\ &= \left.\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z\pm\mathrm{i})^3}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}\\ &= \frac{1}{2!}(-3)(-4)(z\pm\mathrm{i})^{-5}|_{z=\pm\mathrm{i}} = \mp\frac{3}{16}\mathrm{i}\end{aligned}$$

□

本性奇点或高阶极点

对于本性奇点时只能是求 Laurent 展开系数 a_{-1}.

对于高阶极点, 很多情况下求展开系数往往比用高阶极点的留数公式(8) 简单. 对于 m 阶极点即求 $\phi(z)=(z-b)^m f(z)$ 的 Taylor 展开系数 α_{m-1}.

我们可用第5章介绍的各种求展开系数方法.

Example 6.4 函数

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)^2}$$

Solution 函数在 $z=\mathrm{i}$ 有二阶极点. 这时

$$\phi(z)=(z-\mathrm{i})^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z+\mathrm{i})^2}$$

要求 $m-1=1$ 次项的系数 α_1. 用待定系数法, 令 $z-\mathrm{i}=t$

$$(t+\mathrm{i})(t+2\mathrm{i})^2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}t^n$$

即

$$(-4\mathrm{i}-8t+\dots)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}t^n$$

先比较两边 0 次项系数

$$-4\mathrm{i}\alpha_0=\mathrm{e}^{-1}$$

得 $\alpha_0=\frac{\mathrm{i}}{4\mathrm{e}}$. 再比较两边 1 次项系数

$$-4\mathrm{i}\alpha_1-8\alpha_0=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{e}}$$

得 $\alpha_1=-\frac{3}{4\mathrm{e}}$. 所以

$$\mathrm{res}f(\mathrm{i})=-\frac{3}{4\mathrm{e}}$$

□

Example 6.5 函数

$$f(z)=\frac{1}{z^2\sin z}$$

Solution $z=0$ 为函数的三阶奇点

$$\phi(z)=z^3\cdot\frac{1}{z^2\sin z}=\frac{z}{\sin z}$$

需要求 $\phi(z)$ 的 Taylor 展开的 $m-1=2$ 次项系数 α_2. 仍用待定系数法, 注意到 $\phi(z)$ 为偶函数

$$\phi(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{2l}z^{2l}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{2l}z^{2l}=z$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{2l}z^{2l}=1$$

得

$$
\begin{aligned}
& & \alpha_0 &= 1 \\
-\frac{1}{6}+\alpha_1 &= 1 & \alpha_1 &= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

所以

$$\mathrm{res} f(0) = \frac{1}{6}$$

□

Note 这两例若用高阶极点留数定理, 则比较复杂.

6.2 有理三角函数的积分

考虑积分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

其中 R 是 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的有理函数.

作变换

$$
\begin{aligned}
z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\
\sin\theta &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2\mathrm{i}} = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z} \\
\cos\theta &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\
\mathrm{d}\theta &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}
\end{aligned}
$$

积分路径变换为 z 平面上的单位圆 $|z|=1$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\
&= 2\pi \sum_{|z|<1} \mathrm{res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Example 6.6 计算积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\mathrm{d}\theta \qquad -1<\epsilon<1$$

Solution 作变换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1+\epsilon\frac{z^2+1}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{2}{\epsilon z^2+2z+\epsilon}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \sum_{|z|<1} \mathrm{res}\left\{\frac{2}{\epsilon z^2+2z+\epsilon}\right\}
\end{aligned}
$$

解方程

$$\epsilon z^2 + 2z + \epsilon = 0$$

可得被积函数两个一阶极点为

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}$$

其中 $|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$ ($\because z_1 \cdot z_2 = 1$). 于是

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \mathrm{res} \left\{ \frac{2}{\epsilon z^2 + 2z + \epsilon} \right\}_{z=z_1} \\ &= 2\pi \left. \frac{2}{2\epsilon z + 2} \right|_{z=z_1} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \end{aligned}$$

□

6.3 有理函数无穷积分

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \mathrm{d}x \tag{11}$$

$R(x)$ 为有理函数. 无穷积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\substack{R_1 \to +\infty \\ R_2 \to +\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \mathrm{d}x \tag{12}$$

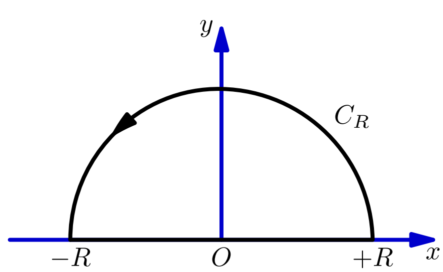
对于有理函数 $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$, 只有当分母多项式 $Q_m(x)$ 次数比分子多项式 $P_n(x)$ 次数至少大 2 时积分存在

$$m - n \geq 2 \tag{13}$$

若积分存在, 则

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} R(x) \mathrm{d}x \tag{14}$$

计算 $\int_{-R}^{R} R(x) \mathrm{d}x$. 从复平面上看, 这是一个沿实轴的复变积分. 为了应用留数定理, 必须先构造适当的围道. 我们补上以原点为圆心, R 为半径的上半圆 C_R.



于是

$$\oint_C R(z) \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} R(x) \mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z) \mathrm{d}z \tag{15}$$

任何有理函数只有有限个的孤立奇点, 所以 $R(z)$ 在上半平面只有有限个孤立奇点, R 足够大时, 则围道包围上半平面所有的奇点, 由留数定理又有

$$\oint_C R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}R(z) \tag{16}$$

对于无穷积分存在的有理函数 $R(z)$, 满足条件 (13), 分母多项式次数比分子多项式次数至少大 2, 则

$$\lim_{z\to\infty} zR(z) = \lim_{z\to\infty} z\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = 0 \tag{17}$$

由大圆弧定理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{18}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}R(z) \tag{19}$$

Example 6.7 计算定积分

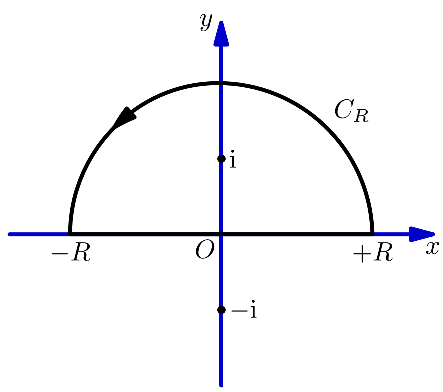
$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$$

Solution 令

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$$

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$

考虑围道如图



$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}f(z)\end{aligned}$$

奇点$z=\pm\mathrm{i}$, 只有$z=\mathrm{i}$在上半平面

$$= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}f(\mathrm{i})$$

而前面已经计算过

$$\mathrm{res}f(\mathrm{i}) = -\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

所以

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{3}{8}\pi$$

因为

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3} = 0$$

由大圆弧定理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi\cdot 0 = 0$$

于是 $I = \frac{3}{8}\pi$. □

基本方法

1. 补上适当的积分路径从而形成闭合围道, 用留数定理计算围道积分.
2. 处理补充的路径上的复变积分: 或者可以直接计算出来. 或者与所要计算的无穷积分相关联.

Example 6.8 计算定积分

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

常规解法 注意到

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

采用半圆形围道, 这时被积函数在围道内有两个奇点

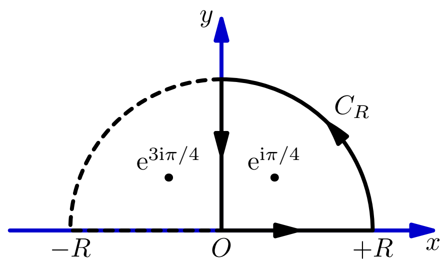
$$z_{1,2} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}3\pi}{4}}$$

需要计算两个奇点的留数. □

另解 令

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

采用围道: 沿正实轴 $0\to R$, 沿圆弧 C_R 到达正虚轴, 再沿正虚轴由 $\mathrm{i}R\to 0$.



这样根据留数定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_R^0 f(\mathrm{i}y)\mathrm{d}(\mathrm{i}y)$$

因为

$$f(\mathrm{i}y) = f(y)$$

所以得

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{d}z &= (1-\mathrm{i})\int_0^R f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{第一象限}} \mathrm{res} f(z) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res} f(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})\end{aligned}$$

而

$$\mathrm{res} f(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}} = -\frac{1+\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}$$

又

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{1+z^4} = 0$$

故由大圆弧定理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

最后可得 $I = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. □

6.4 含三角函数的无穷积分

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x \qquad p>0 \tag{20}$$

$R(x)$ 为有理函数. 积分的实部和虚部分别为

$$\mathrm{Re}I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos px\mathrm{d}x \tag{21}$$

$$\mathrm{Im}I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin px\mathrm{d}x \tag{22}$$

当且仅当有理函数 $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ 的分母多项式 $Q_m(x)$ 次数比分子多项式 $P_n(x)$ 的次数大 1 时

$$m-n\geq 1 \tag{23}$$

无穷积分存在.

对于积分 I 同样考虑围道积分

$$\begin{aligned}\oint_C R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\{R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\}\end{aligned}$$

Theorem 6.2 (Jordan引理) *设在 $0\leq\arg z\leq\pi$ 的范围内, 当 $|z|\to\infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \tag{24}$$

其中 $p>0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的上半圆.

Proof 当 z 在 C_R 上时, 令 $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

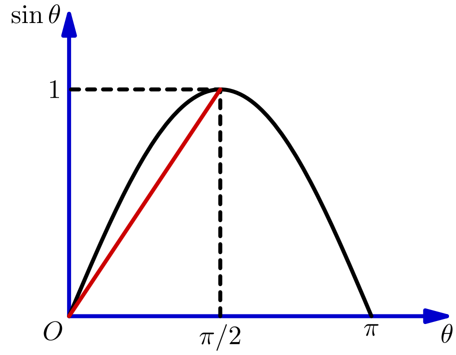
$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}pR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\le \int_0^\pi \left|Q(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

当 R 足够大时

$$< \epsilon R\int_0^\pi \mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

如图, 显然

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$



又由图, 容易看出当 $0 \le \theta \le \pi/2$ 时

$$\sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi} > 0$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right| &< 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-pR\cdot\frac{2\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\epsilon R\frac{\pi}{2pR}(1-\mathrm{e}^{-pR}) \\ &< \frac{\epsilon\pi}{p}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0$$

□

对于 $R(z)$, 满足条件 (23), 分母多项式比分子多项式的次数大 1, 则

$$\lim_{z\to\infty} R(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = 0 \tag{25}$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0 \tag{26}$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\{R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\} \tag{27}$$

Example 6.9 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \qquad a>0$$

Solution 令

$$f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$$

因为被积函数 $f(x)\sin x$ 为偶函数

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

考虑围道积分

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\{f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\}\end{aligned}$$

易知, $z=\mathrm{i}a$ 为上半平面的唯一奇点, 且为一阶极点

$$\mathrm{res}\left\{\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}\right\} = \left.\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}a} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}$$

$\therefore$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}$$

$\because$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = 0$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}$$

于是

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}$$

□

6.5 实轴上有奇点的情形

设被积函数在实轴上有奇点, 则积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为瑕积分. 假设瑕点是 c, 瑕积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{28}$$

如果这两个极限都不存在, 但是 $\lim\limits_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$ 存在, 定义瑕积分的**主值**为

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right] \tag{29}$$

Example 6.10

$$\text{v.p.}\int_{-a}^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad a>0,\, b>0.$$

Solution 考虑积分

$$\int_{-a}^{-\delta_1}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\delta_2}^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(a/\delta_1) + \ln(b/\delta_2).$$

当 $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ 时, 得

$$\text{v.p.}\int_{-a}^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(b/a) \qquad a>0,\, b>0.$$

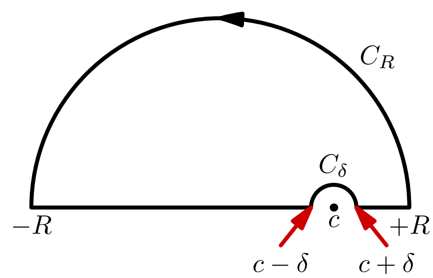
□

瑕积分计算

当然, 如果瑕积分存在, 则其主值也存在, 且它们一定相等. 所以, 我们考虑

$$\begin{aligned} I &= \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to 0}}\left[\int_{-R}^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^R f(x)\mathrm{d}x\right] \end{aligned} \tag{30}$$

因为实轴上 c 点是被积函数的奇点, 必须绕开奇点来构成闭合的积分围道 (如图).



$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{\text{上半平面} \\ \text{(不含实轴)}}} \mathrm{res} f(z) \\
&= \int_{-R}^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z \\
&+ \int_{c+\delta}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{31}
$$

对于大圆弧积分, 我们可用大圆弧定理或 Jordan 引理处理. 对于小圆弧 C_δ 的积分, 则需要用到小圆弧定理.

Example 6.11 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

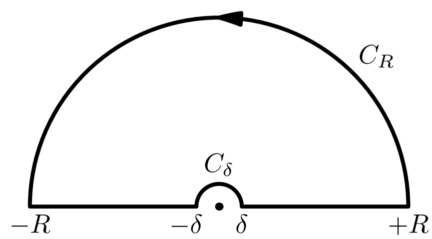
Solution 很自然, 应当考虑积分

$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x$$

注意, $x=0$ 为新积分的瑕点, 且为函数的一阶极点, 瑕积分不存在, 但积分主值存在. 令

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$$

绕开 $z=0$ 的一阶极点, 积分围道如图.



因为积分围道包围的区域内无奇点

$$
\begin{aligned}
&\oint_C f(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z \\
&+ \int_{\delta}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0
\end{aligned}
$$

大圆弧积分, 由 Jordan 引理

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0 \qquad \therefore \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

小圆弧积分, 由小圆弧定理

$$
\begin{aligned}
&\because \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = 1 \\
&\therefore \lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}(0-\pi) = -\mathrm{i}\pi
\end{aligned}
$$

所以

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi = 0$$

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi$$

取虚部

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi$$

□

我们看到, 在用留数定理计算定积分时, 往往不能简单地将围道积分的被积复变函数取成定积分的被积函数. 事实是, 如何选取适当的被积复变函数, 是留数定理求积分的一个难点.

Example 6.12

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

因为是偶函数, 所以

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

注意积分不能拆开成两个积分之和

$$? = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

拆开后两个积分 (即使是积分主值) 都不存在! 若选取被积复变函数为

$$f(z) = \frac{z+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^3(1+z^2)}$$

这时似乎

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z$$

但上式右边积分 (包括主值) 也不存在! [1]

Solution 取

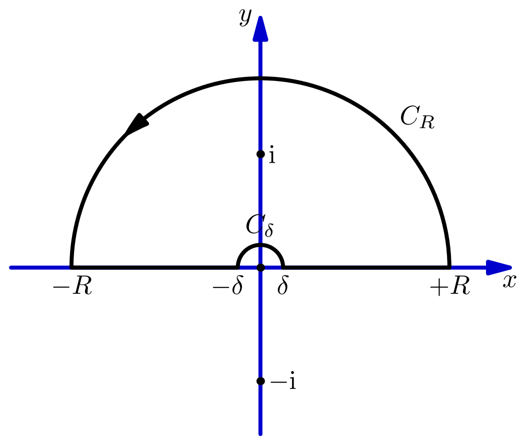
$$f(z) = \frac{z+\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1)}{z^3(1+z^2)}$$

有

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z\right]$$

[1]因为 $z=0$ 是被积函数的三阶极点.

因为 $z=0$ 为被积函数的一阶极点, 故上面的积分主值存在. 考虑积分围道如图



$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}f(z)\\ &= \int_{-R}^{-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z\\ &+ \int_{\delta}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$f(z)$ 的奇点为 0, $\pm$i. 上半平面 (不包括实轴) 仅有一个奇点 i, 为一阶极点. 故

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}f(z) &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}f(\mathrm{i})\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{[z+\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1)]/z^3}{2z}\right|_{z=\mathrm{i}}\\ &= -\frac{\pi}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{z\to0} zf(z) &= \lim_{z\to0}\frac{z+\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1)}{z^2(1+z^2)}\\ &= \lim_{z\to0}\frac{z+\mathrm{i}(\mathrm{i}z+\frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!}+\dots)}{z^2(1+z^2)}\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\end{aligned}$$

由小圆弧定理

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\pi(-\frac{\mathrm{i}}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

而

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_R}\frac{z-\mathrm{i}}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z + \int_{C_R}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z$$

由大圆弧定理

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{z-\mathrm{i}}{z^3(1+z^2)} = 0 \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z-\mathrm{i}}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z = 0$$

由 Jordan 引理

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{i}}{z^3(1+z^2)}=0 \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^3(1+z^2)}\mathrm{d}z=0$$

故 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$. 所以

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{\mathrm{e}}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\mathrm{e}}$$

最后得

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\mathrm{e}}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

□

难点

选择适当的被积复变函数和积分路径.

- 处理补充的路径上的复变积分: 或者可以直接计算出来. 或者与所要计算的无穷积分相关联.

6.6 多值函数的积分

一种常见的多值函数的积分是

$$I=\int_0^{\infty}x^{s-1}R(x)\mathrm{d}x \tag{32}$$

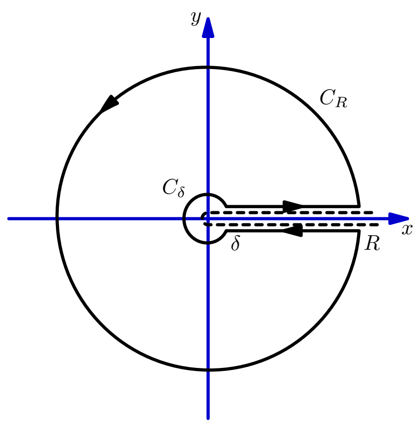
其中 s 为实数, $R(x)$ 为有理函数, 在正实轴上没有奇点. 不妨设 $0<s<1$, 则为了保证积分收敛, 要求:

1. $R(x)=P_n(x)/Q_m(x)$ 的分母多项式次数比分子多项式次数至少大 1.

$$m-n\geq 1 \tag{33}$$

2. $x=0$ 不是 $R(x)$ 的极点.

由于 z^{s-1} 为多值函数, 作割线沿正实轴将复平面割开, 并规定沿割线上岸 $\arg z=0$. 积分路径由 (割开的) 大小圆弧及割线上下岸组成: 沿割线上岸 $\delta\to R$, 经大圆弧 C_R 到达割线下岸, 沿割线下岸回来 $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\to\delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$, 沿小圆弧 C_δ 绕过原点 O 形成闭合围道如图.



$$\oint_C z^{s-1}R(z)\mathrm{d}z=\int_\delta^R x^{s-1}R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}z^{s-1}R(z)\mathrm{d}z$$
$$+\int_R^\delta(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi})^{s-1}R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_\delta}z^{s-1}R(z)\mathrm{d}z$$

由于有理函数 $R(z)$ 只有有限的孤立奇点, 在取极限 $\delta \to 0$, $R \to \infty$ 后, 围道包围所有奇点, 由留数定理

$$\oint_C z^{s-1}R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\{z^{s-1}R(z)\}$$

由积分收敛条件1, 应用大圆弧定理

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot z^{s-1}R(z) = 0 \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} z^{s-1}R(z)\mathrm{d}z = 0$$

由积分收敛条件2, 应用小圆弧定理

$$\lim_{z\to 0} z\cdot z^{s-1}R(z) = 0 \qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} z^{s-1}R(z)\mathrm{d}z = 0$$

所以

$$\int_0^\infty x^{s-1}R(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s}}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\{z^{s-1}R(z)\} \tag{34}$$

Example 6.13 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\mathrm{d}x \qquad 0<\alpha<1$$

Solution 这里 $R(x)=\frac{1}{x+1}$. 重复以上过程!

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\right\}$$

$z=-1$ 为唯一的奇点 (一阶极点), 于是得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}}\left.\frac{z^{\alpha-1}}{1}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}\\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}-1}\\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\end{aligned}$$

□

Example 6.14 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$$

Solution 考虑含参数的积分

$$I(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\frac{x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$$

重复以上过程! 得

$$I(s) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s}}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\{z^{s-1}R(z)\}$$

其中 $R(z)=\dfrac{z}{1+z+z^2}$, 奇点

$$z_{1,2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$$

都是一阶极点. 计算留数值, 得

$$\operatorname{res}\{z^{s-1}R(z)\}_{z=z_1} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s/3}$$
$$\operatorname{res}\{z^{s-1}R(z)\}_{z=z_2} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi s/3}$$

于是

$$I(s) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sin\frac{\pi s}{3}}{\sin \pi s}$$

当 $s \to 0$ 时, 注意到 $I(s)$ 为 s 的偶函数

$$I(s) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3} + 0 \cdot s + \dots)$$

对 s 求导[2], 并令 $s = 0$, 得

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = 0$$

□

[2]由一致收敛性 $(-1 < -A \leq s \leq B < 1)$. 0 和 ∞ 是积分的两个瑕点, 需分别处理 ...