数学物理方法（上）第十一次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 5 月 15 日

题 1. *求下列函数的 Laplace 变换*

1. $\dfrac{\sin\omega t}{t}, \omega > 0$.
2. $\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\cos\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau$.

解. 1. 设 $f(t) = \dfrac{\sin\omega t}{t}$，根据 Laplace 变换的定义有

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{\sin\omega t}{t}\mathrm{e}^{-st},$$

利用一致收敛性在积分号下求导得到

$$\begin{aligned}F'(s) &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \sin\omega t\ \mathrm{e}^{-st}\\ &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-st} = -\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$，因此有

$$F(s) = \int_{+\infty}^{s} F'(p)\,\mathrm{d}p = \int_s^{+\infty} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,\mathrm{d}p = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{\omega}.$$

2. 设 $\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\cos\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau$，根据 Laplace 变换的定义有

$$\begin{aligned}F(s) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_t^{+\infty} \frac{\cos\tau}{\tau}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_0^{\tau} \frac{\cos\tau}{\tau}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau\ \frac{\cos\tau}{\tau}(1-\mathrm{e}^{-s\tau}),\end{aligned}$$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

利用一致收敛性在积分号下求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sF(s)] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau \cos\tau \, \mathrm{e}^{-s\tau} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau}}{2} \mathrm{e}^{-s\tau} = \frac{s}{s^2+1},\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = 0$，因此有

$$F(s) = \frac{1}{s}\int_0^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[pF(p)]\,\mathrm{d}p = \frac{1}{s}\int_0^s \frac{p}{p^2+1}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{2s}\ln(1+s^2). \qquad \square$$

题 2. 求下列函数的 *Laplace* 变换的逆变换

1. $\dfrac{\omega}{s(s^2+\omega^2)}, \omega > 0.$
2. $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\mathrm{e}^{-s\tau}, \tau > 0.$

解. 1. 设 $F(s) = \dfrac{\omega}{s(s^2+\omega^2)}$，根据 Laplace 逆变换的定义有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\omega}{s(s^2+\omega^2)}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,$$

由于 $t > 0$，取积分围道如图 1 所示.

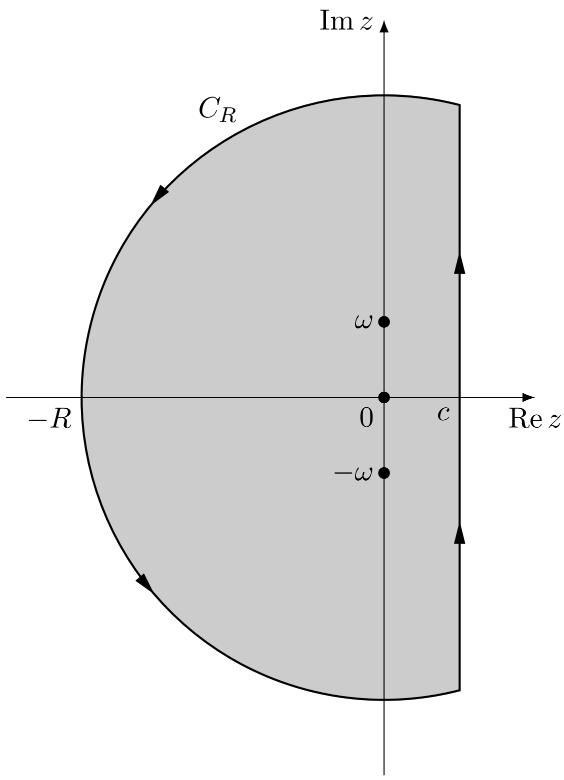

图 1: 题 2.1 积分围道示意图

被积函数在奇点处的留数为

$$\mathrm{Res}(F(s)\mathrm{e}^{st}, 0) = \frac{1}{\omega}, \quad \mathrm{Res}(F(s)\mathrm{e}^{st}, \mathrm{i}\omega) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{2\omega}, \quad \mathrm{Res}(F(s)\mathrm{e}^{st}, -\mathrm{i}\omega) = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\omega},$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$|F(s)| \leqslant \left|\frac{\omega}{R(R^2-\omega^2)}\right| \rightrightarrows 0, \quad (R \to +\infty),$$

根据推广的 Jordan 引理有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = 0,$$

于是根据留数定理，在 $R \to +\infty$ 极限下有

$$f(t) = \frac{1}{\omega} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{2\omega} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\omega} = \frac{1-\cos\omega t}{\omega}, \quad t > 0.$$

2. 设 $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}\mathrm{e}^{-s\tau}$，根据 Laplace 逆变换的定义有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{s}{(s^2+1)^2}\mathrm{e}^{s(t-\tau)}\,\mathrm{d}s,$$

当 $t > \tau$ 时，取积分围道如图 2 所示.

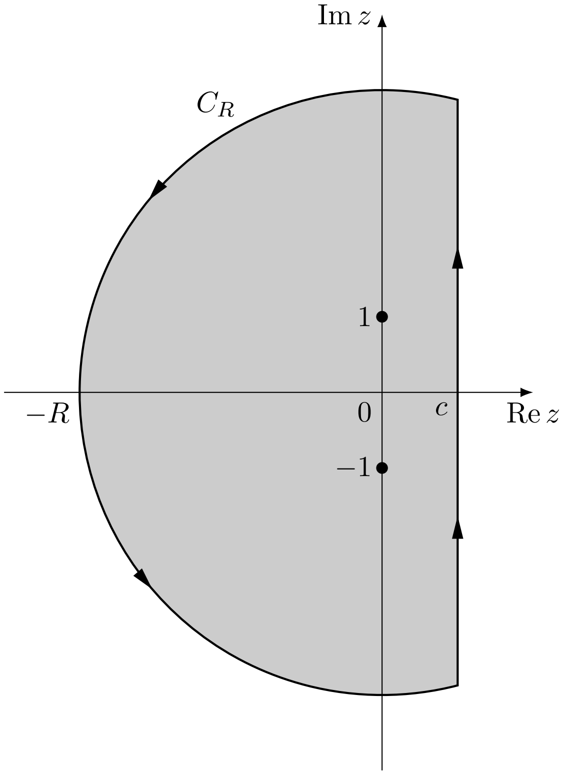

图 2: 当 $t > \tau$ 时题 2.2 积分围道示意图

被积函数在奇点处的留数为

$$\operatorname{Res}(F(s)\mathrm{e}^{st}, \mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{4}(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\tau)}, \quad \operatorname{Res}(F(s)\mathrm{e}^{st}, -\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{4}(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-\tau)},$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$\left|\frac{s}{(s^2+1)^2}\right| \leqslant \left|\frac{R}{(R^2-1)^2}\right| \rightrightarrows 0, \quad (R \to +\infty),$$

根据推广的 Jordan 引理有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{s}{(s^2+1)^2}\mathrm{e}^{s(t-\tau)}\,\mathrm{d}s=0,$$

于是根据留数定理，在 $R\to+\infty$ 极限下有

$$f(t)=-\frac{\mathrm{i}}{4}(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\tau)}+\frac{\mathrm{i}}{4}(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-\tau)}=\frac{1}{2}(t-\tau)\sin(t-\tau).$$

当 $t<\tau$ 时，取积分围道如图 3 所示.

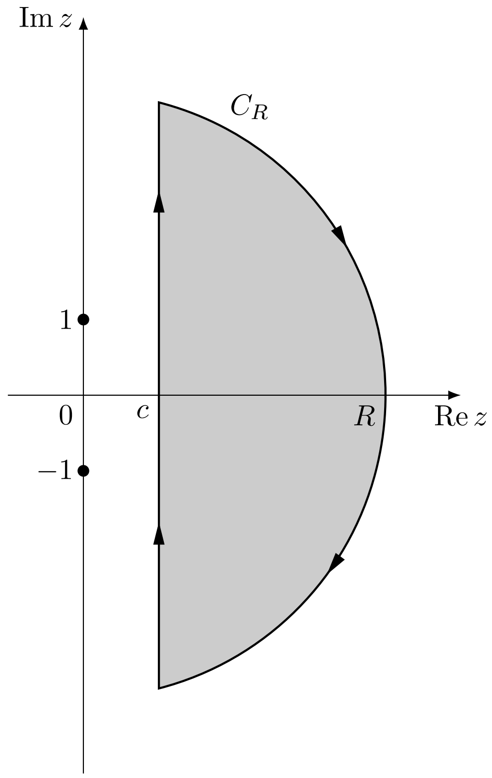

图 3: 当 $t<\tau$ 时题 2.2 积分围道示意图

同样根据 Jordan 引理和 Cauchy 定理，在 $R\to+\infty$ 极限下有

$$f(t)=0.$$

综上可以得到

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(t-\tau)\sin(t-\tau), & t>\tau,\\ 0, & t<\tau.\end{cases}$$

□

注. *教材上有推广的 Jordan 引理：设 $Q(z)$ 在左半平面范围内 $z\to\infty$ 时 $Q(z)$ 一致地趋于 0，则*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}Q(z)\mathrm{e}^{pz}\,\mathrm{d}z=0,$$

其中 $p>0$，C_R 是以原点为圆心，R 为半径，与固定直线 $\mathrm{Re}\,z=c$ 相交的左半圆弧.

题 3. 利用 *Laplace* 变换计算积分

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xt}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin xt}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$

解. 1. 设 $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xt}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，根据 Laplace 变换的定义有

$$
\begin{aligned}
F(s)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xt}{1+x^2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\frac{x}{s^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{1-s^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{s^2}{s^2+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+s},\qquad \mathrm{Re}\,s>0,
\end{aligned}
$$

作 Laplace 逆变换，根据 $f(-t)=-f(t)$ 可以得到

$$
f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{t}, & t<0.\end{cases}
$$

2. 设 $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin xt}{x}\right)^2\mathrm{d}x$，根据 Laplace 变换的定义有

$$
\begin{aligned}
F(s)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin xt}{x}\right)^2\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{s(s^2+4x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2s^2},\qquad \mathrm{Re}\,s>0,
\end{aligned}
$$

作 Laplace 逆变换，根据 $f(-t)=f(t)$ 可以得到

$$
f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}t, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}t, & t<0.\end{cases}
$$

□

题 4. 利用 *Laplace* 变换证明

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\cos s}{s^\nu}\,\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2\Gamma(\nu)\cos(\nu\pi/2)},\qquad 0<\nu<1. \tag{1}
$$

解. 根据 Γ 函数的定义有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\cos s}{s^\nu}\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}s\int_0^{+\infty}t^{\nu-1}\mathrm{e}^{-st}\cos s\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty}t^{\nu-1}\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

设 $f(z)=\dfrac{z^\nu}{1+z^2}$，有 $f(z)$ 的支点为 $z=0,\infty$，取单值分支为 $0<\arg z<2\pi$，割线为正实轴，取积分围道如图 4 所示.

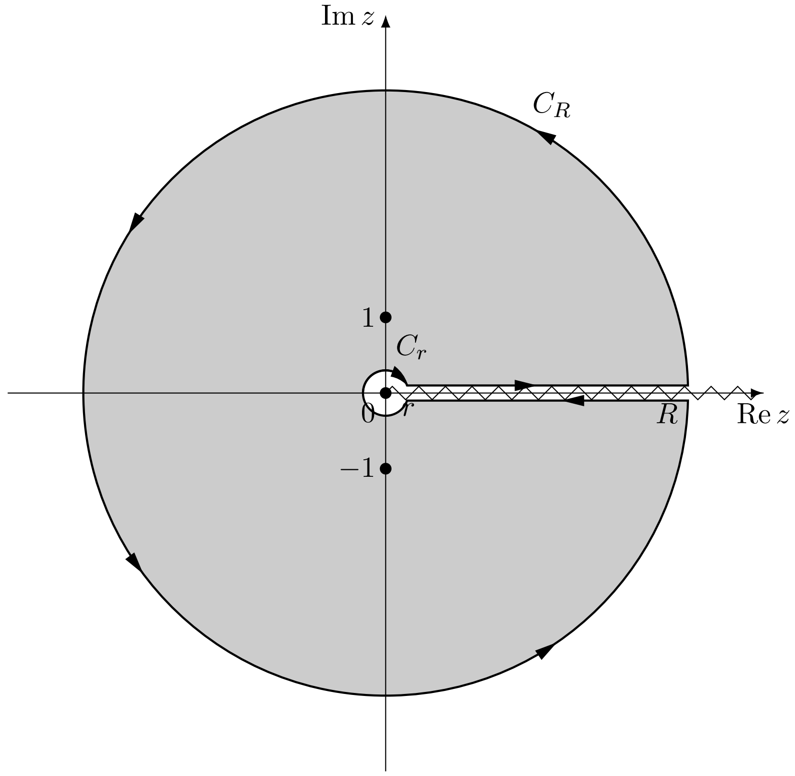

图 4: 题 4 积分围道示意图

对于割线下方水平线，设 $z=t\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$ 有

$$f(z)=\mathrm{e}^{2\nu\pi\mathrm{i}}f(t),$$

函数 $f(z)$ 在奇点处的留数为

$$\operatorname{Res}(f,\mathrm{i})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2}}{2\mathrm{i}},\quad \operatorname{Res}(f,-\mathrm{i})=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\nu\pi/2}}{2\mathrm{i}},$$

对于小圆弧，可以计算得到

$$|zf(z)|\leqslant\left|\frac{r^{\nu+1}}{1-r^2}\right|\rightrightarrows 0,\quad (r\to 0),$$

根据小圆弧引理有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\,\mathrm{d}z=0,$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$|zf(z)|\leqslant\left|\frac{R^{\nu+1}}{R^2-1}\right|\rightrightarrows 0,\quad (R\to +\infty),$$

根据大圆弧引理有

$$\lim_{R\to 0}\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0,$$

根据留数定理，在 $r\to 0$ 和 $R\to +\infty$ 极限下有

$$\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{2\nu\pi\mathrm{i}})f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})+\mathrm{Res}(f,-\mathrm{i})] = \pi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\nu\pi/2}),$$

于是解得

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \pi\frac{\sin(\nu\pi/2)}{\sin\nu\pi} = \frac{\pi}{2\cos(\nu\pi/2)},$$

由此可以得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos s}{s^\nu}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2\Gamma(\nu)\cos(\nu\pi/2)}.$$

□

题 5. 刚体在空气中下落的运动方程可以写为

$$m\frac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} = mg - b\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

取初始条件

$$X(0)=0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

利用 *Laplace* 变换求解.

解. 根据 Laplace 变换的定义，设

$$Y(s) = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\; X(t)\mathrm{e}^{-st},$$

利用分部积分可以得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\; X'(t)\mathrm{e}^{-st} = X(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\; X(t)\mathrm{e}^{-st} = sY(s)-X(0),$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\; X''(t)\mathrm{e}^{-st} = X'(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\; X'(t)\mathrm{e}^{-st} = s^2Y(s)-sX(0)-X'(0),$$

根据初始条件，方程可以化为

$$ms^2Y(s) = \frac{mg}{s} - bsY(s),$$

这个方程的解为

$$Y(s) = \frac{mg}{s^2(ms+b)},$$

作 Laplace 逆变换可以得到

$$X(t) = \frac{mg}{b}t - \frac{m^2g}{b^2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}).$$

□

题 6. 利用 *Laplace* 变换求解如下积分微分方程

$$f'(t) - \int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Theta(t)-\Theta(t-2), \quad f(0)=1, \tag{4}$$

其中 $\Theta(t)$ 是阶跃函数.

解. 当 $t>0$ 时，根据 Laplace 变换的定义，设

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\ f(t)\mathrm{e}^{-st},$$

利用 Laplace 变换的性质可以得到

$$sF(s)-1-F(s)\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s}),$$

这个方程的解为

$$F(s)=\frac{(s^2+1)(s+1-\mathrm{e}^{-2s})}{s^4}=\frac{1}{s^4}(1-\mathrm{e}^{-2s})+\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-2s})+\frac{1}{s},$$

作 Laplace 逆变换可以得到

$$f(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\Theta(t-2)\left[(t-2)+\frac{1}{6}(t-2)^3\right],\quad t>0.$$

当 $t<0$ 时，根据 Laplace 变换的定义，设

$$G(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\ f(-t)\mathrm{e}^{-st}=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t\ f(t)\mathrm{e}^{st},$$

利用 Laplace 变换的性质可以得到

$$1-sG(s)+G(s)\frac{s}{1+s^2}=0,$$

这个方程的解为

$$G(s)=\frac{s^2+1}{s^3}=\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s},$$

作 Laplace 逆变换可以得到

$$f(t)=1+\frac{1}{2}t^2,\quad t<0.$$

综上可以得到

$$f(t)=1+\frac{1}{2}t^2+\Theta(t)\left(t+\frac{1}{6}t^3\right)-\Theta(t-2)\left[(t-2)+\frac{1}{6}(t-2)^3\right].$$ □

题 7. *利用普遍反演公式计算 $F(s)=s^{-1/2}$ 的反 Laplace 变换.*

解. 根据 Laplace 逆变换的定义有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}s^{-1/2}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,$$

有 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 的支点为 $s=0,\infty$，取单值分支为 $-\pi<\arg s<\pi$，割线为负实轴，取积分围道如图 5 所示.

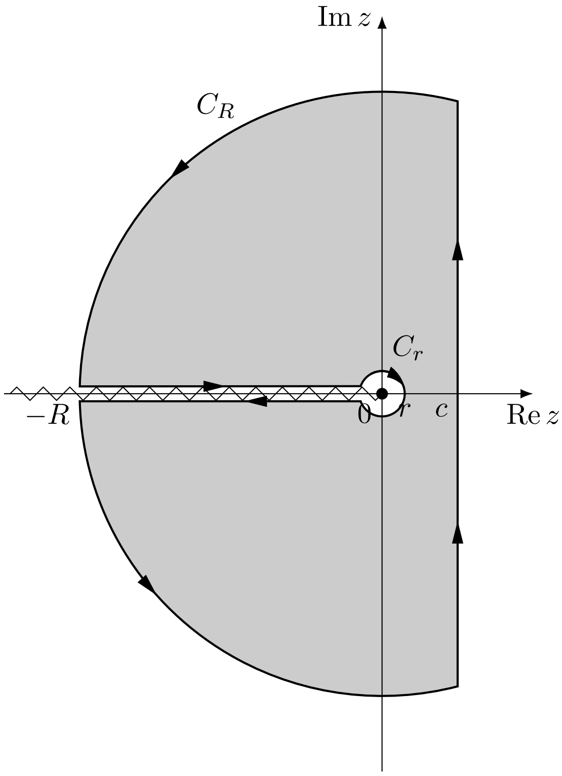

图 5: 题 7 积分围道示意图

对于割线上方水平线，设 $s = x\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$ 有

$$F(s)\mathrm{e}^{st} = -\mathrm{i}x^{-1/2}\mathrm{e}^{-xt},$$

对于割线下方水平线，设 $s = x\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}$ 有

$$F(s)\mathrm{e}^{st} = \mathrm{i}x^{-1/2}\mathrm{e}^{-xt},$$

对于小圆弧，可以计算得到

$$\left|sF(s)\mathrm{e}^{st}\right| \leqslant r^{1/2}\mathrm{e}^{rt} \rightrightarrows 0, \quad (r \to 0),$$

根据小圆弧引理有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = 0,$$

对于大圆弧，可以计算得到

$$|F(s)| = R^{-1/2} \rightrightarrows 0, \quad (R \to +\infty),$$

根据推广的 Jordan 引理有

$$\lim_{R\to 0}\int_{C_R} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = 0,$$

根据 Cauchy 定理，在 $r \to 0$ 和 $R \to +\infty$ 极限下有

$$-2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} x^{-1/2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x + \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} s^{-1/2}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = 0,$$

由此可以得到

$$f(t) = (\pi t)^{-1/2}. \qquad \square$$

题 8. 利用普遍反演公式计算 $F(s)=\dfrac{\ln s}{s}$ 的反 *Laplace* 变换.

解.（方法 1）根据 Laplace 逆变换的定义有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\ln s}{s}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s=-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}s^{-\nu}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\right)\bigg|_{\nu=1},$$

利用题 7 的方法同理有

$$(\mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}})\int_0^{+\infty}x^{-\nu}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x+\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}s^{-\nu}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s=0,\quad 0<\nu<1,$$

由此可以得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}s^{-\nu}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\frac{\Gamma(1-\nu)}{t^{1-\nu}}=\frac{1}{\Gamma(\nu)t^{1-\nu}},$$

计算偏导就有

$$f(t)=-\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu)t^{1-\nu}}\right]\bigg|_{\nu=1}=\Gamma'(1)-\ln t=-\gamma-\ln t,$$

其中 γ 是 Euler γ 常数. □

解.（方法 2）利用公式

$$\ln s=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-su}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

根据 Laplace 逆变换的定义有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\ln s}{s}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-su}}{su}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,$$

利用已知的 Laplace 变换

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{s}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=\Theta(t),$$

由此可以得到

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\Theta(t)\mathrm{e}^{-u}-\Theta(t-u)}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u+\int_t^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

利用分部积分就有

$$\begin{aligned}f(t)&=(\mathrm{e}^{-u}-1)\ln u\Big|_0^t+\int_0^t\mathrm{e}^{-u}\ln u\,\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-u}\ln u\Big|_t^{+\infty}+\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\ln u\,\mathrm{d}u\\&=-\ln t+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\ln u\,\mathrm{d}u=-\ln t-\gamma,\end{aligned}$$

其中 γ 是 Euler γ 常数

$$\gamma=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\ln u\,\mathrm{d}u=-\frac{\partial}{\partial\nu}\int_0^{+\infty}u^{\nu-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\bigg|_{\nu=1}=-\Gamma'(1).$$ □