当 $t<0$ 时，我们可以取下半大圆弧构成封闭围道。但此时围道内没有奇点，因此积分恒为零。我们因此得到

$$y(t)=\begin{cases}\left(\frac{e^{-at}}{(1-a)(7-a)}+\frac{e^{-t}}{6(a-1)}-\frac{e^{-7t}}{6(a-7)}\right) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{10.101}$$

例子 83 求解微分方程

$$x''(t)+x(t)=f(t)=H(t)e^{-at}\,,\qquad a>0 \tag{10.102}$$

10.4 δ 函数（分布）

我们在讲傅立叶级数的时候提到这样一个现象。通常，如果一个函数的傅立叶级数系数的渐近行为是 $1/n$，则这个函数是不连续的；如果是 $1/n^2$，则这个函数的导数是不连续的；如果是 $1/n^3$，则这个函数的二阶导数是不连续的；依此类推。对于傅立叶级数系数是多项式衰减的，其函数的某阶导数一般不连续。当系数以指数衰减时 $1/r^n$，这个函数就是所有阶可导且连续，因而一般是（实）解析的。

这个现象也同样适用于傅立叶变换。一个自然的问题是，如果函数的傅立叶变换趋于一个非零常数，例如 1，这个函数的行为如何？从傅立叶变换的不确定原理我们知道，这时傅立叶变换模方的二次矩无穷大，因此原函数模方的二次矩应无穷小。从函数图像上看应该是一个无穷窄的函数。我们以前面给出的一个具体例子来看。

傅立叶变换渐近行为	函数行为
1	???
$\frac{1}{\omega}$	函数不连续
$\frac{1}{\omega^2}$	函数一次导不连续
$\frac{1}{\omega^3}$	函数二次导不连续

Table 10.1: 傅立叶变换的衰减行为

例子 84 带参量的矩形函数

$$f(t,a)=\frac{1}{a}rect(t/a)\,, \tag{10.103}$$

其傅立叶变换为

$$\hat{f}(\omega,a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t,a)e^{-i\omega t}dt=\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega} \tag{10.104}$$

当 $a\neq 0$ 时，$\hat{f}(\omega,a)$ 至少是是以 $/1\omega$ 衰减。但当 $a\to 0$ 时，

$$\lim_{a\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega}=1 \tag{10.105}$$

这时 $\lim_{a\to 0} f(t,a)$ 是一个无穷窄的函数，当 $t\neq 0$ 时，$\lim_{a\to 0} f(t,a)=0$，且

$$\int_{-1}^{1}\lim_{a\to 0} f(t,a)dt = 1\,. \tag{10.106}$$

定义 28 δ 函数 *满足如下两个性质的函数称为 δ 函数，记作 $\delta(x)$。*

1. *当 $x\neq 0$ 时，$\delta(x)=0$*

2. *对于任意 $a<0<b$，$\int_a^b \delta(x)dx = 1$*

这个定义中没有指定 $\delta(x)$ 在 $x=0$ 处的值。但利用第二个性质，

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx = 1\,,\qquad \lim\varepsilon\to 0_+ \tag{10.107}$$

由于积分区域是无穷小区域，因此要求 $\delta(0)=\infty$。

定义 29 高维 δ 函数 *如果 $\vec{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个 n 维矢量，则*

$$\delta^{(n)}(\vec{x}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n) \tag{10.108}$$

δ 函数提供了表述质点、点电荷等理想物理对象的数学工具。例如，在静电学中，我们要考虑空间中的电荷密度分布，$\rho(\vec{x})$。如果空间电荷是连续分布的，则 $\rho(\vec{x})$ 也是空间坐标的连续函数。但如果空间中只有一个点电荷 Q，则 $\rho(\vec{x}) = Q\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$，其中 x_0 是点电荷的坐标。

显然(10.103)中的矩形函数只是 δ 函数的一种表示。其它常见的 δ 函数表示包括:

例子 85 *高斯脉冲:*

$$G_n(x) := \sqrt{\frac{n^2}{\pi}}\exp(-n^2x^2)$$

显然

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = 0\,,\qquad x\neq 0$$

且满足积分条件

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \tag{10.109}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \delta(x)$$

例子 86 *洛伦兹脉冲:*

$$L_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = 0\,, \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_n(x)dx = 1$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = \delta(x)$$

例子 87 正弦脉冲：

$$S_n = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$$

下面我们讨论 δ 函数的一些重要性质。注意 δ 函数的性质**必须**在积分意义下理解，通俗的说，δ 函数总是生活在积分号的阴影下。

1. 从 δ 函数的极限定义可以看出，$\delta(x)$ 是偶函数，即 $\delta(-x) = \delta(x)$。也可以从 δ 函数的定义性质证明。显然当 $x \neq 0$ 时 $\delta(-x) = 0$。另外

$$\begin{aligned}\int_a^b \delta(-x)dx &= -\int_a^b \delta(-x)d(-x)\,, \qquad a<0<b \\ &= -\int_{-a}^{-b} \delta(u)du \\ &= \int_{-b}^{-a} \delta(u)du = 1\,, \qquad -b<0<-a \end{aligned} \tag{10.110}$$

因此 $\delta(-x)$ 满足跟 $\delta(x)$ 一样的性质，因此是同一个函数（分布）。

2. 如果定义阶跃函数为

定义 30 阶跃函数

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \tag{10.111}$$

则 δ 函数和阶跃函数有关系

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}\,. \tag{10.112}$$

为了证明这一点，我们只需验证 $dH(x)/dx$ 满足 δ 函数的性质。显然当 $x \neq 0$ 时，$dH(x)/dx = 0$。而对于积分性质

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dH(x)}{dx}dx &= \int_a^b d[H(x)] \\ &= H(b) - H(a) = 1\,, \qquad a<0<b \end{aligned} \tag{10.113}$$

利用这个表示，我们可以证明 δ 函数的一个非常重要性质。

3. 对于光滑函数 $f(x)$, 有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0)\,, \qquad a<0<b \tag{10.114}$$

为了证明这一点，我们注意到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\delta(x)dx &= \int_a^b f(x)H'(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)d[H(x)] \\ &= H(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b H(x)f'(x)dx \\ &= f(b) - \int_0^b f'(x)dx \\ &= f(b) - [f(b)-f(0)] \\ &= f(0)\end{aligned} \tag{10.115}$$

这个性质是你们以后用到最多的性质。它也可以写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{10.116}$$

而对于多维的情况，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d^n\vec{r} = f(\vec{r}_0) \tag{10.117}$$

4. 对于 $a\neq 0$，有

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{10.118}$$

证明如下。令 $u=ax$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)dx = \int_{-a\infty}^{a\infty}\delta(u)\frac{1}{a}du = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(x)}{|a|}dx \tag{10.119}$$

从这个结果知道，$\delta(x)$ 具有与 x 相反的量纲。即如果 x 具有长度量纲的话，$\delta(x)$ 具有长度 $^{-1}$ 量纲。

5. 如果实函数 $g(x)=0$ 在实区间 (a,b) 内只有一个单根 x_0, 则

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \int_a^b f(x)\frac{\delta(x)}{g'(x_0)}dx = \frac{f(x_0)}{g'(x_0)} \tag{10.120}$$

为了证明这一点，我们取 $\varepsilon \to 0_+$，则

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx \tag{10.121}$$

在上述积分区域内，$g(x)$ 可做泰勒展开，

$$g(x) = 0 + (x-x_0)g'(x_0) + \dots \tag{10.122}$$

其中忽略的项是 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的。因此

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(g(x))dx &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta((x-x_0)g'(x_0))dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\frac{\delta(x-x_0)}{g'(x_0)}dx = \frac{f(x_0)}{g'(x_0)}\end{aligned} \tag{10.123}$$

更一般的，如果 $g(x)$ 有 n 个不同的单根，我们有分布等式：

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{10.124}$$

其中 $x_i, i = 1, ..., n$ 是 $g(x) = 0$ 的不同单根。

6. δ 函数的导数通过分部积分定义。对于光滑函数 $f(x)$，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\delta(x) \\ &= \Big[f(x)\delta(x)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx \\ &= -f'(0)\end{aligned} \tag{10.125}$$

7. δ 函数的傅立叶变换是常数 1。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\exp(-ixk)dx = \exp(-i0k) = 1 \tag{10.126}$$

反过来，δ 函数具有傅立叶变换表示

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ixk)dk \tag{10.127}$$

例子 88 阶跃函数的傅立叶变换。我们想求

$$\hat{H}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{-ikx}dx \tag{10.128}$$

换句话说，我们想求得 $\hat{H}(k)$，使得

$$H(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}(k)e^{ikx}dk \tag{10.129}$$

注意到

$$H'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ik\hat{H}(k)e^{ikx}dk=\delta(x) \tag{10.130}$$

与(10.128)比较可以得到一个猜测解 $\hat{H}(k)=-i/k$。我们将之代入(10.129)去看是否自洽，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i}{k}e^{ikx}dk \tag{10.131}$$

被积函数在 $k=0$ 处奇异，因此这个积分是发散的，无法给出我们想要的结果。因此我们修正我们的猜测解为 $\hat{H}(k)=-\mathcal{P}[i/k]$，即取柯西主值积分 $\mathcal{P}$。代入(10.129)发现

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i}{k}e^{ikx}dx&=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{-i}{k}e^{ikx}dk\\&=\begin{cases}\frac{1}{2} & x>0\\ -\frac{1}{2} & x<0\end{cases}\end{aligned} \tag{10.132}$$

其中第二个等式可通过围道积分求得。这个结果离我们想要的还差一点。因此我们再次修正猜测解，

$$\boxed{\hat{H}(k)=-\mathcal{P}\frac{i}{k}+\pi\delta(k)} \tag{10.133}$$

将其代入(10.129)可以验证这就是我们想要的结果。

例子 89 计算积分

$$\int_{-1}^{1}9x^2\delta(3x+1)dx \tag{10.134}$$

例子 90 $f(x)$ 是光滑函数，计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x^2-a^2)dx\,,\qquad a>0 \tag{10.135}$$

令 $g(x)=x^2-a^2$。$g(x)=0$ 有两个单根，$x=-a$ 和 $x=a$。将该积分分为两段

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(g(x))dx&=\int_{-\infty}^{0}f(x)\delta(g(x))dx+\int_{0}^{\infty}f(x)\delta(g(x))dx\\&=\int_{-\infty}^{0}f(x)\frac{\delta(x)}{g'(-a)}dx+\int_{0}^{\infty}f(x)\frac{\delta(x)}{g'(a)}dx\\&=-\frac{f(-a)}{2a}+\frac{f(a)}{2a}\end{aligned} \tag{10.136}$$

例子 91 极坐标下的 δ 函数。二维 δ 函数在直角坐标系 $\vec{r}=(x,y)$ 下表示为

$$\delta^{(2)}(\vec{r}) := \delta(x)\delta(y) \tag{10.137}$$

在极坐标系下，$\vec{r}=r(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $r=|\vec{r}|$。不失一般性，设极坐标下的 δ 函数为

$$\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}_0) = f(r,\theta)\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) \tag{10.138}$$

由 δ 函数的定义应有

$$\int \delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}_0)d\tau = 1 \tag{10.139}$$

其中

$$d\tau = rdrd\theta \tag{10.140}$$

因此

$$1 = \int_0^\infty rdr\int_0^{2\pi} d\theta f(r,\theta)\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) = r_0 f(r_0,\theta_0) \tag{10.141}$$

由于 r_0 和 θ_0 可取任意值，上式成立的条件是

$$f(r,\theta) = \frac{1}{r} \tag{10.142}$$

因此我们得到极坐标下的 δ 函数

$$\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0) \tag{10.143}$$

例子 92 对于二维矢量 $\vec{r}=(x,y)$，有

$$\nabla^2 \ln\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -2\pi\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}_0)\,, \qquad \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{10.144}$$

为了证明这一点，不妨设 $\vec{r}_0=0$，我们需要证明当 $\vec{r}\neq 0$ 时，

$$\nabla^2 \ln\frac{1}{|\vec{r}|} = 0 \tag{10.145}$$

这可通过简单代数运算验证。此外，我们还需验证积分等式

$$\int_\Omega dS\nabla^2 \ln\frac{1}{|\vec{r}|} = -2\pi \tag{10.146}$$

其中 $dS = dxdy = rdrd\theta$ 是二维面积元，Ω 是包含原点的任意单连通区域。为了证明(10.146)，利用二维散度定理

$$\int_\Omega dS \nabla \cdot \vec{F} = \int_{\partial\Omega} dl (\vec{n} \cdot \vec{F}) \tag{10.147}$$

其中 dl 是 Ω 边界线元，$\vec{n}$ 垂直于积分边界。不妨取 Ω 为半径为 r 的圆，因此 $\vec{n} = \vec{r}/r$。因此

$$\begin{aligned}\int_\Omega dS \nabla^2 \ln \frac{1}{|\vec{r}|} &= \int_{\partial\Omega} dl \frac{\vec{r}}{r} \cdot \nabla \ln \frac{1}{|r|} \\ &= \int_{\partial\Omega} dl \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(\frac{-\vec{r}}{r^2}\right) \\ &= -\int_{\partial\Omega} dl \frac{1}{r} \\ &= -2\pi r \frac{1}{r} = -2\pi \end{aligned} \tag{10.148}$$

证毕。

利用复坐标 $z = x + iy$，$\bar{z} = x - iy$，

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)\,, \qquad \partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \tag{10.149}$$

定义

$$\delta^{(2)}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \tag{10.150}$$

则(10.144)可以写为

$$4\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \frac{1}{|z - z_0|} = -2\pi \delta^{(2)}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \tag{10.151}$$

对于三维矢量 $\vec{r} = (x, y, z)$，$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$，有

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)\,, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{10.152}$$

例子 93 求解微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= ay(t) + \delta(t - t_0)\,, \\ y(0) &= 0\,, \qquad t_0 > 0\,, \qquad a > 0\end{aligned} \tag{10.153}$$

作业 6

对于如下定义在 $-\pi \le x \le \pi$ 上的函数，计算其傅立叶级数：

1. $f(x) = |\sin x|$