数学物理方法（上）第七次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 4 月 17 日

题 1. 利用 *Mittag-Leffler* 定理求如下函数的无穷部分分式分解形式：

1. $\dfrac{1}{\sinh z}$.
2. $\tanh z$.

解. 利用 $\pi\cot\pi z$ 的无穷分式分解

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

1. 根据 $\dfrac{1}{\sin z}=\cot\dfrac{z}{2}-\cot z$ 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z}&=\frac{2}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{z-2n\pi}+\frac{2}{z+2n\pi}\right)-\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)\\&=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n2z}{z^2-n^2\pi^2},\end{aligned}$$

根据 $\sinh z=-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z$ 有

$$\frac{1}{\sinh z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi\mathrm{i}}+\frac{1}{z+n\pi\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n2z}{z^2+n^2\pi^2}.$$

2. 根据 $\tan z=\cot z-2\cot 2z$ 有

$$\begin{aligned}\tan z&=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)-\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi/2}+\frac{1}{z+n\pi/2}\right)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{-1}{z-(n-1/2)\pi}+\frac{-1}{z+(n-1/2)\pi}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2z}{z^2-(n-1/2)^2\pi^2},\end{aligned}$$

根据 $\tanh z=-\mathrm{i}\tan\mathrm{i}z$ 有

$$\tanh z=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{z-(n-1/2)\pi\mathrm{i}}+\frac{1}{z+(n-1/2)\pi\mathrm{i}}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2+(n-1/2)^2\pi^2}.\qquad\square$$

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

注. *Mittag-Leffler* 定理仅给出了符合给定极点与 *Laurent* 展开主要部分的亚纯函数的存在性和可能形式，严格计算时还需说明收敛性.

题 2. 求出 $\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}$ 的无穷乘积形式，并证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

解. 利用 $\sin\pi z$ 的无穷乘积展开

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}=\pi z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

根据 $\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}=\sqrt{2}\sin\frac{\pi(1-x)}{4}$，计算

$$\begin{aligned}\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{1-x}{4n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1-x}{4n}}&=\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{1}{4n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{4n}}\left(1+\frac{x}{4n-1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{4n}}\\&=\left.\frac{\sin\pi z}{\pi z}\right|_{z=\frac{1}{4}}\prod_{n\neq 0}\left(1+\frac{x}{4n-1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{4n}}=\frac{4}{\sqrt{2}\pi}\prod_{n\neq 0}\left(1+\frac{x}{4n-1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{4n}},\end{aligned}$$

由此得到

$$\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}=(1-x)\prod_{n\neq 0}\left(1+\frac{x}{4n-1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{4n}}=(1-x)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{4n-1}\right)\left(1-\frac{x}{4n+1}\right),$$

取 x^1 项有

$$-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}. \qquad \square$$

注. *Weierstrass* 因子分解定理仅给出了符合给定零点的整函数的存在性和可能形式，严格计算时还需说明收敛性. 最后待求的级数是条件收敛的，*Riemann* 重排定理告诉我们不能随意交换顺序，计算时应保持相同的排序.

注. 对于 *Weierstrass* 因子分解定理中整函数因子 $g(z)$ 的确定，有 *Hadamard* 因子分解定理：设 a_n 是 $f(z)$ 的零点，若存在整数 h 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/|a_n|^{h+1}$ 收敛，则 $g(z)$ 是次数不超过 h 的多项式.

附录

$\pi\cot\pi z$ 无穷分式分解的更多证明.

证明. (方法 1) 设 $f(z)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$，有 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，极点为 $z=n,n\in\mathbb{Z}$，在极点附近 Laurent 展开的主要部分为

$$L_n(z)=\frac{1}{(z-n)^2}.$$

任取 $R>0$，取 $N=[R]$ 为 R 的整数部分，一方面有

$$|L_n(z)|\leqslant\frac{1}{(n-R)^2},\quad\forall|n|>N,|z|\leqslant R,$$

于是级数 $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}[L_n(z)+L_{-n}(z)]$ 在 $|z|\leqslant R$ 上绝对一致收敛，从而在 $|z|\leqslant R$ 上解析.

另一方面补充在可去奇点上的定义后 $f(z)-\sum\limits_{n=-N}^{N}L_n(z)$ 也在 $|z|\leqslant R$ 上解析，由此得到

$$g(z)=f(z)-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}L_n(z),$$

在 $|z|\leqslant R$ 上解析，由于 R 是任取的，因此 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，下证 $g(z)\equiv 0$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$，根据 $|\sin^2\pi z|=\cosh^2\pi y-\cos^2\pi x$ 和 $|z-n|^2=y^2+(x-n)^2$ 有

$$\begin{aligned}|f(z)|&\leqslant\frac{\pi^2}{\cosh^2\pi y-1},\\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|L_n(z)|&\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{y^2+n^2}<\frac{2}{y^2}+\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{y^2+t^2}=\frac{2}{y^2}+\frac{\pi}{y},\end{aligned}\qquad\forall|y|\geqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1,$$

于是 $g(z)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上随 $|y|\to+\infty$ 一致趋于 0，从而有 $g(z)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上有界，利用 $g(z+1)=g(z)$ 有 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界，根据 Liouville 定理有 $g(z)\equiv 0$，由此得到

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

由于 $-\pi\cot\pi z$ 是 $f(z)$ 的原函数，根据一致收敛性对 $L_n(z)+L_{-n}(z)$ 项积分得到

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},$$

由于等式两边都是奇函数，表明无需添加积分常数. □

证明. (方法 2) 设 $f(z)=\pi\cot\pi z$，有 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，极点为 $z=n,n\in\mathbb{Z}$，在极点附近 Laurent 展开的主要部分为

$$L_n(z)=\frac{1}{z-n}.$$

任取 $R>0$，取 $N=[R]$ 为 R 的整数部分，一方面有

$$|L_n(z)-L_n(0)|\leqslant\frac{R}{n(n-R)},\quad\forall|n|>N,|z|\leqslant R,$$

于是级数 $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}[L_n(z)+L_{-n}(z)]$ 在 $|z|\leqslant R$ 上绝对一致收敛，从而在 $|z|\leqslant R$ 上解析.

另一方面补充在可去奇点上的定义后 $f(z)-\sum\limits_{n=-N}^{N}L_n(z)$ 也在 $|z|\leqslant R$ 上解析，由此得到

$$g(z)=f(z)-L_0(z)-\sum_{n=1}^{+\infty}[L_n(z)+L_{-n}(z)],$$

在 $|z| \leqslant R$ 上解析，由于 R 是任取的，因此 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，下证 $g(z) \equiv 0$.

设 $z = x + \mathrm{i}y$，根据 $\cot \pi z = \dfrac{\sin 2\pi x - \mathrm{i} \sinh 2\pi y}{\cosh 2\pi y - \cos 2\pi x}$ 和 $|z^2 - n^2| \geqslant |x^2 - y^2 - n^2|$ 有

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leqslant \frac{\pi \cosh 2\pi y}{\cosh 2\pi y - 1} < 2\pi, \\ |L_0(z)| + \sum_{n=1}^{+\infty} |L_n(z) + L_{-n}(z)| &\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8y}{y^2 + n^2} < 1 + 4\pi, \end{aligned} \qquad \forall |y| \geqslant 1, |x| \leqslant \frac{1}{2},$$

于是 $g(z)$ 在 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 上有界，利用 $g(z+1) = g(z)$ 有 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界，根据 Liouville 定理有 $g(z) \equiv C$，由 $g(z)$ 为奇函数有 $g(z) \equiv 0$，由此得到

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \qquad \square$$

$\sin \pi z$ 无穷乘积展开的更多证明.

证明. (方法 1) 设 $f(z) = \sin \pi z$，有 $f(z)$ 是整函数，零点为 $z = n, n \in \mathbb{Z}$，由 $\displaystyle\sum_{n=\neq 0} \frac{1}{n^2}$ 收敛有

$$f(z) = z\mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{n}} = z\mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right),$$

其中 $g(z)$ 是整函数，计算 $f'(z)/f(z)$ 可以得到

$$\pi \cot \pi z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right),$$

于是由 $g'(z) = 0$ 得到 $g(z) \equiv C$，计算 $f(z)/z$ 在 $z = 0$ 处的极限可以定出常数

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{n}} = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \qquad \square$$

证明. (方法 2) 设 $f(z) = \sin \pi z$，有 $f(z)$ 是整函数，零点为 $z = n, n \in \mathbb{Z}$，由 $\displaystyle\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$ 收敛有

$$f(z) = z\mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{n}} = z\mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right),$$

其中 $g(z)$ 是次数不超过 1 次的多项式 $g(z) = a_0 + a_1 z$，根据 $f(z)$ 是奇函数有 $a_1 = 0$，计算 $f(z)/z$ 在 $z = 0$ 处的极限可以定出 a_0 得到

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{n}} = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \qquad \square$$