

19 Green 函数方法

在“ δ 函数”一章中, 我们已经初步接触过 Green 函数, 讨论了常微分方程的 Green 函数方法.

本章将讨论偏微分方程的 Green 函数方法.

Green 第二公式

$$\iiint_V [u(\mathbf{r})\nabla^2 v(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r})\nabla^2 u(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} [u\nabla v - v\nabla u] \cdot d\mathbf{\Sigma} \quad (1)$$

其中 Σ 是体积 V 的边界面, 并且规定边界面的外法线方向为正. 这一公式可简称为 Green 公式.

19.1 Green 函数基本概念

以静电场为例. 先考虑有界空间. 设金属壳表面接地, 金属壳内有一定的电荷分布, 电荷密度为 $\rho(\mathbf{r})$, 则静电势满足 Poisson 方程, 定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

静电势满足电势叠加原理, 设

$$\begin{cases} \nabla^2 u_1 = -\frac{\rho_1(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ u_1|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 u_2 = -\frac{\rho_2(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ u_2|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

则它们的线性组合满足

$$\begin{cases} \nabla^2 (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = -\frac{\alpha_1 \rho_1(\mathbf{r}) + \alpha_2 \rho_2(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

利用 δ 函数, 任意电荷密度分布都可以表示为 δ 函数的线性组合

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$\delta(\mathbf{r})$ 为三维空间的 δ 函数

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

对于每一个 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 电荷分布, 求出

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} \\ G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

G 即 Green 函数. 而线性叠加

$$u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

即定解问题的解.

$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 电荷分布为

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases}$$

且

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} = 1$$

代表在 \mathbf{r}' 处有一个单位点电荷, 所以, 这里的 Green 函数 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 即 \mathbf{r}' 处的单位点电荷在 \mathbf{r} 产生的电势.

Example 19.1 无界空间

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ u|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

定义 Green 函数

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} \\ G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

Solution 实际上, 点电荷在无界空间产生的静电势为

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

容易验证它确实是满足上面方程的 Green 函数, 因为

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

所以

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

这都是我们熟知的结果, 现在用 Green 函数来解释. □

以上通过静电场的实例引入了 Poisson 方程在第一类边界条件下(简称 Poisson 方程的第一边值问题)的 Green 函数. 一般地

Green 函数

不含时间的稳定问题的 Green 函数定义为一个特殊的定解问题的解:

- 方程和原来定解问题的方程一样, 只是非齐次项改为 δ 函数 (点源);
- 同种类型的齐次边界条件.

Note 在某些特殊情形下, 这样定义的 Green 函数可能无解.

在求解 Green 函数时, Green 函数满足的方程是非齐次的, 但非齐次项是 δ 函数, 除了 δ 函数的宗量为零的个别点外, 方程是齐次的! 这会简化 Green 函数的求解. 另一方面, δ 函数不是传统意义下的函数, Green 函数的求解又具有其独特性.

利用 Green 函数可求出任意分布的源在相应边界条件下所产生的场.

Example 19.2 Poisson 方程是

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2)$$

第一、二、三类边界条件可以统一地写为

$$\left[\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right]_{\Sigma} = f \quad (3)$$

其中 α 和 β 是不同时为零的实数, f 是体积 V 的边界 Σ 上的给定函数.

Solution 相应的 Green 函数的定解问题为

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4)$$

$$\left[\alpha \frac{\partial G}{\partial n} + \beta G \right]_{\Sigma} = 0 \quad (5)$$

以 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 乘 (2) 式, $u(\mathbf{r})$ 乘 (4) 式, 相减, 然后在体积 V 中求积分, 得

$$\begin{aligned} \iiint_V [G \nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \nabla^2 G] d\mathbf{r} \\ = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V G \rho d\mathbf{r} + \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V u(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (6)$$

左边的积分应用 Green 公式化为面积分, 移项, 得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}') = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ + \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) d\Sigma \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 代表沿 Σ 的外法线的方向导数.

对于第一类边值问题

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1$$

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 在边界上为零, 所以

$$u(\mathbf{r}') = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \epsilon_0 \iint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma \quad (8)$$

若 $\alpha \neq 0$, 以 G 乘 (3), 得

$$\left[\alpha G \frac{\partial u}{\partial n} + \beta G u \right]_{\Sigma} = G f$$

以 u 乘 (5), 得

$$\left[\alpha u \frac{\partial G}{\partial n} + \beta G u \right]_{\Sigma} = 0$$

两式相减, 得

$$\alpha \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right]_{\Sigma} = G f$$

代入 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}') = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} \\ + \frac{\epsilon_0}{\alpha} \iint_{\Sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}) d\Sigma \end{aligned} \quad (9)$$

□

Note 注意, 对于第二边值问题, $\alpha = 1, \beta = 0$, Poisson 方程的 Green 函数并不存在!
由 Green 公式

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r} &= \iint_\Sigma \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{\Sigma} \\ &= \iint_\Sigma \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial n} d\Sigma = 0\end{aligned}$$

可是, 将 Poisson 方程积分, 又得到

$$\iiint_V \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r} = -\frac{1}{\epsilon_0}$$

19.2 稳定问题 Green 函数的一般性质

Green 函数的对称性

我们来考察解式 (7) 的物理意义. Green 函数 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 代表的是位于 \mathbf{r}' 点的点源在 \mathbf{r} 点产生的场, (7) 式右方的第一个积分中 $\rho(\mathbf{r})$ 是在 \mathbf{r} 点的源, 这使得解释这个积分的意义时发生了困难. 下面我们将证明上述 Green 函数具有对称性

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})$$

因此, 在把 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 对调后, 可得

$$\begin{aligned}u(\mathbf{r}) &= \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &\quad + \epsilon_0 \iint_\Sigma \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n} - u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) d\Sigma' \quad (10)\end{aligned}$$

这个式子的物理意义很清楚: 右边第一个积分代表在体积 V 中的分布源 $\rho(\mathbf{r}')$ 在 \mathbf{r} 点产生的场的总和; 第二个积分则是在边界面上的源所产生的场.

我们来考虑更一般的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + \lambda u = -f \quad (11)$$

Poisson 方程是它的一个特例 ($\lambda = 0$). 相应的 Green 函数满足方程

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (12)$$

仍设边界条件为

$$\left[\alpha \frac{\partial G}{\partial n} + \beta G \right]_\Sigma = 0 \quad (13)$$

α 和 β 不同时为零. 我们来证明 Green 函数具有对称性

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \quad (14)$$

由方程, 有

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \lambda G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') + \lambda G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')\end{aligned}$$

以 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$ 乘第一式, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 乘第二式, 相减, 然后求积分, 得

$$\begin{aligned}&\iiint_V [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')] d\mathbf{r} \\ &= - \iiint_V [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')] d\mathbf{r} \\ &= - [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') - G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')] \end{aligned}$$

把左方的体积分变为面积分, 得

$$\begin{aligned} & G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \\ &= \iint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')}{\partial n} \right] d\Sigma \end{aligned} \quad (15)$$

Σ 是 V 的边界面. 根据边界条件, 在 Σ 面上有

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} + \beta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \\ \alpha \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')}{\partial n} + \beta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') &= 0 \end{aligned}$$

但 α 和 β 不同时为零, 故必须

$$\left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0$$

这就证明了对称性.

Green 函数的对称性有很重要的物理意义, 即位于 \mathbf{r}' 点的点源, 在一定的边界条件下在 \mathbf{r} 点产生的场, 等于位于 \mathbf{r} 点的同样强度的点源, 在相同的边界条件下在 \mathbf{r}' 点产生的场.

Note 这样的对称性并非所有的 Green 函数都具有.

Green 函数在点源附近的行为

不妨仍然用静电场的语言来描述 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数. 在空间 V 中的点电荷, 必然要在边界面上产生一定的感生(面)电荷分布. 因此, 决定 Green 函数的定解问题又可以等价 (在 V 内等价)地写成无界空间中满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sigma(\Sigma)\delta_{\Sigma}], \quad (16)$$

其中 $\sigma(\Sigma)$ 是边界面 Σ 上的感生面电荷密度, δ_{Σ} 代表某种 δ 函数(例如边界面为球面时就是 $\delta(r - a)$). 相应地, (定义在 V 内的) Green 函数 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 就应该是这两部分电荷电势的叠加: 单位点电荷 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 的电势 $G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 和边界面上的感生电荷 $\sigma(\Sigma)$ 的电势 $g(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$,

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') + g(\mathbf{r}; \mathbf{r}'), \quad (17)$$

$$\nabla^2 G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (18)$$

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\Sigma)\delta_{\Sigma}. \quad (19)$$

点电荷产生的电势

$$G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (20)$$

所以 $G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 点不连续. 因为感生电荷 $\sigma(\Sigma)$ 只分布在曲面 Σ 上, 所以 $g(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 及其一阶偏导数在曲面 Σ 外 (特别是, 在 V 内) 处处连续.

对于第三类边界条件, 也有同样的结果. 只不过 $g(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 的具体表达式会得有所不同.

对于其他类型的稳定问题, 也可以类似地讨论. 例如, Helmholtz 方程的 Green 函数, 在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 点附近, 有

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

以上讨论的是三维空间中 Green 函数在点源处的行为. 值得注意, 它和一维空间中 Green 函数的行为不同. 一维空间中的 Green 函数是处处连续的, 而它的一阶导数不连续. 原因是空间的维数不同, “点源”的性质也不相同. 可以预期, 二维空间中的 Green 函数也应该具有不同的行为.

对于二维空间中 Poisson 方程第一边值问题, 它的 Green 函数 $G(x, y; x', y')$ 是定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] G(x, y; x', y') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(x - x') \delta(y - y'),$$

$$(x, y), (x', y') \in S, \quad (21a)$$

$$G(x, y; x', y')|_C = 0 \quad (21b)$$

的解, 其中 C 是平面区域 S 的边界. 模仿上面三维情形的讨论, 可以得出, 这时的 Green 函数 $G(x, y; x', y')$ 应当是

$$G(x, y; x', y') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} + g(x, y; x', y'), \quad (22)$$

其中第一项是单位点电荷在无界空间中的电势(还可以加上一个常数, 取决于电势零点的选取), 在“点源”(等价于三维空间中的线源) $\delta(x - x')\delta(y - y')$ 处是对数发散的; 第二项 $g(x, y; x', y')$ 是边界上的感生电荷产生的电势, 在 S 内处处连续.

19.3 三维无界空间 Helmholtz 方程的格林函数

Example 19.3 求三维无界空间中亥姆霍兹方程的格林函数, 即在三维无界空间中求解

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (23)$$

无穷远处的边界条件暂缺, 后面再讨论.

Solution 由于是在无界空间, 可以适当地安置坐标架, 使问题得到简化. 如果作坐标平移, 将点电荷所在点 \mathbf{r}' 取为新坐标系的原点, 即在新坐标系 $\mathbf{r}' = 0$. 则

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; 0) = g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$g(\mathbf{r})$ 满足方程

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}) + k^2 g(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}) \quad (24)$$

转换为球坐标系, 注意到

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r)$$

则方程变为 $g(\mathbf{r}) = f(r)$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{df(r)}{dr} \right] + k^2 f(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \delta(r) \quad (25)$$

$r \neq 0$ 时, 方程可化为零阶球贝塞耳方程, 它的通解是

$$f(r) = A \frac{e^{ikr}}{r} + B \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (26)$$

$r = 0$, 我们已经约定, 凡是涉及 δ 函数的等式都应该从积分意义下去理解. 于是, 很自然地, 应当将方程在 $r = 0$ 附近的小体积内对 $4\pi r^2 dr$ 积分.

$$4\pi \left[r^2 \frac{df(r)}{dr} \right]_0^\rho + 4\pi k^2 \int_0^\rho f(r) r^2 dr = -\frac{1}{\epsilon_0}. \quad (27)$$

ρ 为小体积球体的半径. 第一项应理解!

$$\left[r^2 \frac{df(r)}{dr} \right]_{r=0} = 0$$

于是

$$\begin{aligned} 4\pi \left[r^2 \frac{df(r)}{dr} \right]_0^\rho &= 4\pi \left[r^2 \frac{df(r)}{dr} \right]_{r=\rho} \\ &= -4\pi A(1 - ik\rho)e^{ik\rho} - 4\pi B(1 + ik\rho)e^{-ik\rho}. \end{aligned}$$

第二项的积分可以直接算出,

$$4\pi A \left[(e^{ik\rho} - 1) - ik\rho e^{ik\rho} \right] + 4\pi B \left[(e^{-ik\rho} - 1) + ik\rho e^{-ik\rho} \right]$$

将这些结果代回, 就有

$$4\pi(A + B) = \frac{1}{\epsilon_0},$$

最后, 应由无穷远处的边界条件定出常数 A 和 B . 考虑到亥姆霍兹方程的实际背景, 它是由波动方程经过分离变量 (分离去时间部分) 得到的. 作为一个例子, 假设要求得到的解在无穷远处为发散波. 取时间因子为 $e^{-i\omega t}$, 则应保留解的第一项 (即 $A \neq 0$), 而弃去第二项 (即令 $B = 0$). 所以

$$A(k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

这样就求出了三维无界空间亥姆霍兹方程的格林函数

$$g(\mathbf{r}) = f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (28)$$

或

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (29)$$

当 $k = 0$ 时, 这个结果就回到泊松方程的格林函数.

如果要求无穷远处为会聚波 (且仍取时间因子为 $e^{-i\omega t}$), 则格林函数是

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (30)$$

如果是其他形式的无穷远条件, 当然还会得到其他形式的解. □

另解 下面介绍另一种解法. 考虑到这是无界空间中的定解问题, 可采用傅里叶变换. 令

$$g(\mathbf{k}; \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (31)$$

则方程 Fourier 变换后, 变为

$$[-k'^2 + k^2] g(\mathbf{k}'; \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\epsilon_0} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'}, \quad (32)$$

所以,

$$g(\mathbf{k}'; \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{k'^2 - k^2} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'}, \quad (33)$$

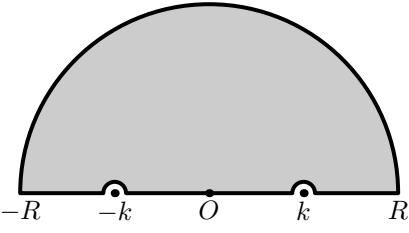
其中 $k'^2 = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = |\mathbf{k}'|^2$. 再求反演, 就有

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{1}{k'^2 - k^2} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{k}'. \quad (34)$$

可以看出, $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 只是 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 的函数. 不妨令 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 然后改用 \mathbf{k}' 空间中的球坐标计算上面的积分, 就得到

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \frac{k'^2}{k'^2 - k^2} e^{ik'R \cos \theta} \sin \theta dk' d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{iR\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{k'}{k'^2 - k^2} \left[e^{ik'R} - e^{-ik'R} \right] dk' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{iR\epsilon_0} \text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty \frac{k'}{k'^2 - k^2} e^{ik'R} dk'. \end{aligned}$$

应用留数定理容易计算出这个定积分. 考虑到在实轴上有两个奇点, $k' = \pm k$, 故可以采用下图的围道. 这样, 当半径趋于0时, 沿奇点 $k' = \pm k$ 处半圆弧的积分值为



$$-\pi i \lim_{k' \rightarrow \pm k} (k' \mp k) \frac{k'}{k'^2 - k^2} e^{ik'R} = -\frac{\pi i}{2} e^{\pm ikR},$$

所以, 现在求得的三维无界空间亥姆霍兹方程的格林函数是

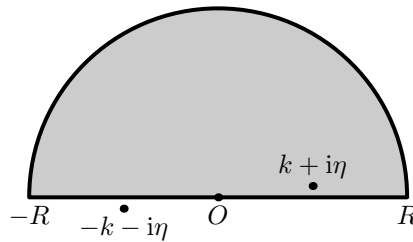
$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{iR\epsilon_0} \frac{\pi i}{2} \left[e^{ikR} + e^{-ikR} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(kR)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (35)$$

将上式与前面用第一种方法得到的结果作比较, 大家立刻发现: 两种方法得出的结果竟然不同! 造成这一矛盾的原因是, 两种方法实际上是使用了不同的无穷远条件. 在第一种方法中, 明确地限定了无穷远处为发散波. 在第二种方法中, 乍一看来, 似乎并没有使用无穷远条件. 但在作 Fourier 逆变换时, 积分取主值要求就相当于取了特定的无穷远条件.

如果限定无穷远处为发散波, 就要采用特殊的技巧, 即将 $g(\mathbf{k}', \mathbf{r}')$ 中的常数 k 添上一个虚部, 变成 $k + i\eta$ (约定 $\eta > 0$), 在求出了格林函数后再令 $\eta \rightarrow 0$.

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{iR\epsilon_0} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^\infty \frac{k'}{k'^2 - (k + i\eta)^2} e^{ik'R} dk'. \quad (36)$$

再应用留数定理计算这个积分. 因实轴上没有奇点, 故采用下图的围道, 就能得到



$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{iR\epsilon_0} \lim_{\eta \rightarrow +0} \left[\pi i e^{i(k+i\eta)R} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.
\end{aligned} \tag{37}$$

得到的格林函数和前一方法结果完全相同。这就是说, 只要把 $g(\mathbf{k}', \mathbf{r}')$ 中的 k 改为 $k + i\eta$, 而在求出解式后再取极限 $\eta \rightarrow +0$, 得到的格林函数就满足无穷远处为发散波的要求。这种做法的根据是, 在无穷远处为发散波的要求下, 解的渐近形式必然具有相位因子 e^{ikR} , 这样, 如果将 k 改为 $k + i\eta$, 则上面的相位因子就变为 $e^{-\eta R + ikR}$, 积分

$$\int |G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')| d\mathbf{r}$$

绝对收敛! 这样才满足 Fourier 变换的条件. □

作为练习, 同学们可以把 $g(\mathbf{k}', \mathbf{r}')$ 中的 k 改为 $k - i\eta$, 重复上面的求解步骤, 就可以发现, 得到的格林函数就对应于无穷远处为会聚波。

19.4 圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数

Example 19.4 圆内 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ u|_{r=a} = f(\phi) \end{cases}$$

相应 Green 函数的定义是

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \\ G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

Solution 采用平面极坐标系 $\mathbf{r}(r, \theta)$, 还需加上边界条件:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r=0} &\text{有界} \\
G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{\phi=0} &= G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{\phi=2\pi} \\
\frac{\partial}{\partial \phi} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \Big|_{\phi=0} &= \frac{\partial}{\partial \phi} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \Big|_{\phi=2\pi}
\end{aligned}$$

方程为非齐次方程, 先将方程齐次化. 注意到在二维平面上

$$\nabla^2 \ln r = 2\pi\delta(\mathbf{r})$$

即

$$v(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

是方程的解.

$$\nabla^2 v(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0}$$

令

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = v(\mathbf{r}; \mathbf{r}') + w(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$$

则 w 满足齐次方程

$$\begin{cases} \nabla^2 w(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = 0 \\ w(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r=a} = -v(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r=a} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{r=a} \end{cases}$$

分离变量 ...

极坐标系下 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = R(r)\Phi(\phi) \dots$
 求特解 ...
 本征函数 Φ 选为

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= 1 & \Phi_{m1} &= \cos m\phi \\ \Phi_{m2} &= \sin m\phi\end{aligned}$$

叠加出一般解

$$w(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [C_{m1} r^m \cos m\phi + C_{m2} r^m \sin m\phi]$$

代入边界条件, 定系数.
 利用展开式

$$\begin{aligned}\ln[1 + t^2 - 2t \cos \phi] &= \ln[1 - te^{i\phi}] + \ln[1 - te^{-i\phi}] \\ &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m \cos m\phi\end{aligned}\tag{38}$$

可得

$$\begin{aligned}\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \frac{1}{2} \ln[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')] \\ &= \frac{1}{2} \ln[r_{>}^2 + r_{<}^2 - 2r_{>}r_{<} \cos(\phi - \phi')] \\ &= \ln r_{>} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^m \cos m(\phi - \phi') \\ \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \ln r_{>} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^m \cos m\phi \cos m\phi' \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^m \sin m\phi \sin m\phi'\end{aligned}\tag{39}$$

当 $r = a$ 时

$$\begin{aligned}w(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r=a} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{r=a} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln a - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r'}{a}\right)^m \cos m\phi \cos m\phi' \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r'}{a}\right)^m \sin m\phi \sin m\phi' \\ &= C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [C_{m1} a^m \cos m\phi + C_{m2} a^m \sin m\phi]\end{aligned}$$

比较得

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln a \\ C_{m1} &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{m} \left(\frac{r'}{a^2}\right)^m \cos m\phi' \\ C_{m2} &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{m} \left(\frac{r'}{a^2}\right)^m \sin m\phi'\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln a - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^m \cos m(\phi - \phi') \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \ln a + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^2 - 2 \frac{rr'}{a^2} \cos(\phi - \phi') \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{a^2}{r'} \right)^2 + r^2 - 2r \frac{a^2}{r'} \cos(\phi - \phi') \right] - \ln \frac{a}{r'} \right\} \\
w(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \left| \mathbf{r} - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}' \right| - \ln \frac{a}{r'} \right]
\end{aligned}$$

所以 Green 函数为

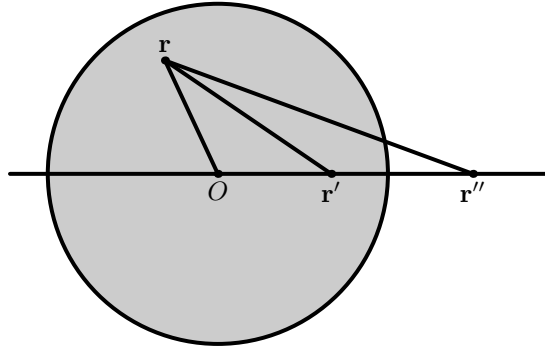
$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln \left| \mathbf{r} - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}' \right| + \ln \frac{a}{r'} \right]
\end{aligned}$$

第一项是 \mathbf{r}' 处点电荷产生的电势, 第二项相当于在圆外

$$\mathbf{r}'' = \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}'$$

处的点电荷产生的电势. □

电像法



大家知道, 一旦在接地圆中放上点电荷后, 在圆周上必然出现感生电荷. 圆内任意一点的电势, 就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加. 前者已经满足 Poisson 方程, 但不满足边界条件. 而后者在圆内满足 Laplace 方程. 合在一起才是整个圆内泊松方程第一边值问题的格林函数.

注意到圆外点电荷产生的电势满足圆内的 Laplace 方程. 如果能把边界上的感生电荷用一个或几个圆外点电荷代替, 产生相同的圆内电势分布. 则求感生电荷电势转化为求一个或几个圆外点电荷的位置和电荷数. 这样, 可以简化 Green 函数的求解. 在电动力学中, 称为**电像法**. 当然, 电像法并不是一个普遍的方法, 只在少数情况下, 才能成功.

对于上述圆内 Poisson 方程问题, 考虑仅在圆外放一个像电荷. 根据对称性的考虑, 我们还可以进一步断定, 如果这个等价电荷存在的话, 它还一定位于真实电荷所处的半径的延长线上. 设这个等价电荷的位置为 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$, 电量为 e , 于是, 它和真实点电荷一起, 在圆内的电势就是

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + e \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + C \right], \quad (40)$$

其中常数 C 与电势零点选择有关. 现在的问题就是要从要求圆周 $r = a$ 上的电势为0,

$$-\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + e \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + C \right]_{r=a} = 0, \quad (41)$$

求出 \mathbf{r}_1 , e 和 C . 如果采用平面极坐标

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & x' &= r' \cos \phi', & x_1 &= r_1 \cos \phi', \\ y &= r \sin \phi, & y' &= r' \sin \phi', & y_1 &= r_1 \sin \phi', \end{aligned}$$

则方程化为

$$\begin{aligned} \ln [a^2 + r'^2 - 2ar' \cos(\phi - \phi')] \\ + e \ln [a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos(\phi - \phi')] + 2C = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

它应该对一切 ϕ 均成立. 注意当 $|t| < 1$ 时有展开式

$$\begin{aligned} \ln [1 + t^2 - 2t \cos \phi] &= \ln [1 - te^{i\phi}] + \ln [1 - te^{-i\phi}] \\ &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t^m \cos m\phi, \end{aligned} \quad (43)$$

于是就可以将方程化为

$$\begin{aligned} 2 \ln a + \ln \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \cos(\phi - \phi') \right] + 2e \ln r_1 \\ + e \ln \left[1 + \left(\frac{a}{r_1} \right)^2 - 2 \frac{a}{r_1} \cos(\phi - \phi') \right] + 2C \\ = 2 \ln a + 2e \ln r_1 + 2C \\ - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^m + e \left(\frac{a}{r_1} \right)^m \right] \cos m(\phi - \phi') = 0, \end{aligned}$$

这样就得到

$$\ln a + e \ln r_1 + C = 0 \quad (44)$$

和

$$\left(\frac{r'}{a} \right)^m + e \left(\frac{a}{r_1} \right)^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (45)$$

将上式化成

$$e = - \left(\frac{r_1 r'}{a^2} \right)^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

所以, 就可以得到

$$e = -1$$

和

$$r_1 = \frac{a^2}{r'} \quad \text{或} \quad \mathbf{r}_1 = \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}'.$$

这样, 我们的确求出了这个等价电荷, 它位于真实电荷所在半径的延长线上, 并且满足

$$r' r_1 = a^2.$$

由 e 和 r_1 的结果, 又可以求得

$$C = -\ln a + \ln r_1 = \ln \frac{a}{r'}.$$

将 e , r_1 和 C 的结果代回, 就求得圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln \left| \mathbf{r} - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}' \right| + \ln \frac{a}{r'} \right], \quad (46)$$

或者在极坐标系中的表达式,

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \ln \left[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') \right] - \ln \left[r^2 + \left(\frac{a^2}{r'} \right)^2 - 2r \frac{a^2}{r'} \cos(\phi - \phi') \right] + 2 \ln \frac{a}{r'} \right\}. \quad (47)$$

求出圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数后, 就可以导出一般的定解问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), \quad |\mathbf{r}| < a \quad (48a)$$

$$u(\mathbf{r})|_{r=a} = f(\phi) \quad (48b)$$

的解. 先将方程的自变量改写成 \mathbf{r}'

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}'), \quad |\mathbf{r}'| < a \quad (49a)$$

$$u(\mathbf{r}')|_{r'=a} = f(\phi') \quad (49b)$$

$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 满足的定解问题为

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad |\mathbf{r}| < a, |\mathbf{r}'| < a$$

$$G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})|_{r'=a} = 0$$

再利用 Green 函数的对称性

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})$$

将 Green 函数满足的方程改写成

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad |\mathbf{r}| < a, |\mathbf{r}'| < a \quad (50a)$$

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r'=a} = 0 \quad (50b)$$

将方程 (49a) 和 (50a) 分别乘以 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 和 $u(\mathbf{r}')$, 然后相减, 再在圆内积分, 得

$$\begin{aligned} & \iint_{r' < a} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - u(\mathbf{r}) \\ &= -\epsilon_0 \iint_{r' < a} [G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla^2 u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \\ &= -\epsilon_0 \iint_{r' < a} \nabla \cdot [G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

可利用 Gauss 定理化为沿圆周 $r = a$ 的线积分, 并利用边界条件, 就有

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) &= \iint_{r' < a} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
&+ \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial r'} - u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial r'} \right]_{r'=a} a d\phi' \\
&= \iint_{r' < a} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
&- \epsilon_0 \int_0^{2\pi} f(\phi') \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial r'} \Big|_{r'=a} a d\phi'
\end{aligned} \tag{51}$$

代入 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 的表达式, 得

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \iint_{r' < a} \rho(\mathbf{r}') \left[\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right. \\
&\quad \left. - \ln \left| \mathbf{r} - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}' \right| + \ln \frac{a}{r'} \right] d\mathbf{r}' \\
&+ \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \phi')} d\phi'.
\end{aligned} \tag{52}$$

当 $\rho(\mathbf{r}) = 0$, 就有圆内 Laplace 方程第一边值问题的 Poisson 公式

$$u(\mathbf{r}) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \phi')} d\phi'. \tag{53}$$

19.5 波动方程的 Green 函数

现在再用 Green 函数方法研究与时间有关的定解问题. 以有界弦的波动问题为例, 最一般的定解问题就是 ($0 < x < l, t > 0$)

Example 19.5

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \tag{54a}$$

$$u(x, t)|_{x=0} = \mu(t), \quad u(x, t)|_{x=l} = \nu(t), \tag{54b}$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{54c}$$

相应的 Green 函数 $G(x, t; x', t')$ 是瞬时(仅存在于某一时刻)的点源(仅存在于空间某点)问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] G(x, t; x', t') = \delta(x - x') \delta(t - t'), \tag{55a}$$

$$0 < x, x' < l, t, t' > 0 \tag{55a}$$

加齐次定解条件

$$G(x, t; x', t')|_{x=0} = 0, \quad G(x, t; x', t')|_{x=l} = 0, \tag{55b}$$

$$G(x, t; x', t')|_{t < t'} = 0, \quad \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial t} \Big|_{t < t'} = 0. \tag{55c}$$

这里初始条件的物理意义是很清楚的: 驱动力是在 $t = t'$ 时刻出现的, 在此以前, 弦一直保持静止.

和稳定问题的 Green 函数问题一样, 我们分别讨论下列三个问题.

$G(x, t; x', t')$ 的对称性

为此, 再列出关于 Green 函数 $G(x, -t; x'', -t'')$ 的定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] G(x, -t; x'', -t'') = \delta(x - x'')\delta(t - t''), \quad (56a)$$

$$G(x, -t; x'', -t'')|_{x=0} = 0, \quad G(x, -t; x'', -t'')|_{x=l} = 0, \quad (56b)$$

$$G(x, -t; x'', -t'')|_{-t < -t''} = 0, \quad \frac{\partial G(x, -t; x'', -t'')}{\partial t} \Big|_{-t < -t''} = 0 \quad (56c)$$

将方程 (55a) 和 (56a) 分别乘以 Green 函数 $G(x, -t; x'', -t'')$ 和 $G(x, t; x', t')$, 然后相减, 再在区间 $[0, l]$ 和 $[0, \infty)$ 上对 x 和 t 积分. 因为

$$\begin{aligned} & G(x', -t'; x'', -t'') - G(x'', t''; x', t') \\ &= \int_0^l dx \int_0^\infty \left[G(x, -t; x'', -t'') \frac{\partial^2 G(x, t; x', t')}{\partial t^2} \right. \\ & \quad \left. - G(x, t; x', t') \frac{\partial^2 G(x, -t; x'', -t'')}{\partial t^2} \right] dt \\ & - \int_0^\infty dt \int_0^l \left[G(x, -t; x'', -t'') \frac{\partial^2 G(x, t; x', t')}{\partial x^2} \right. \\ & \quad \left. - G(x, t; x', t') \frac{\partial^2 G(x, -t; x'', -t'')}{\partial x^2} \right] dx \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} & G(x', -t'; x'', -t'') - G(x'', t''; x', t') \\ &= \int_0^l \left[G(x, -t; x'', -t'') \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial t} \right. \\ & \quad \left. - G(x, t; x', t') \frac{\partial G(x, -t; x'', -t'')}{\partial t} \right]_0^\infty dx \\ & - \int_0^\infty \left[G(x, -t; x'', -t'') \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - G(x, t; x', t') \frac{\partial G(x, -t; x'', -t'')}{\partial x} \right]_0^l dt. \end{aligned}$$

代入边界条件 (55b), (56b) 和初始条件 (55c), (56c), 可以看出, 右端的积分为0. 所以, 这样就导出了 Green 函数在空间上的对称性与时间上的倒易性

$$G(x'', t''; x', t') = G(x', -t'; x'', -t''),$$

或者将 x'' 和 t'' 改写成 x 和 t ,

$$G(x, t; x', t') = G(x', -t'; x, -t). \quad (57)$$

在此式中, 将 t 和 t' 易位时出现的负号, 正好保证了时间的先后次序不变, 否则就会违反因果律.

由 Green 函数求定解问题的解

为了用 Green 函数及已知条件表示定解问题 (54) 的解, 先将该定解问题中的自变量改写为 x' 和 t' ,

$$\frac{\partial^2 u(x', t')}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x', t')}{\partial x'^2} = f(x', t'), \quad (58a)$$

$$u(x', t')|_{x'=0} = \mu(t'), \quad u(x', t')|_{x'=l} = \nu(t'), \quad (58b)$$

$$u(x', t')|_{t'=0} = \phi(x'), \quad \frac{\partial u(x', t')}{\partial t'}|_{t'=0} = \psi(x'). \quad (58c)$$

再写出 $G(x', -t'; x, -t)$ 满足的定解问题, 并利用 Green 函数的对称性与倒易性关系改写为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right] G(x, t; x', t') = \delta(x - x')\delta(t - t'), \quad (59a)$$

$$G(x, t; x', t')|_{x'=0} = 0, \quad G(x, t; x', t')|_{x'=l} = 0, \quad (59b)$$

$$G(x, t; x', t')|_{t'>t} = 0, \quad \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial t'}|_{t'>t} = 0. \quad (59c)$$

将方程 (58a) 和 (59a) 分别乘以 $G(x, t; x', t')$ 和 $u(x', t')$, 然后相减, 再积分,

$$\begin{aligned} & \int_0^l dx' \int_0^\infty G(x, t; x', t') f(x', t') dt' - u(x, t) \\ &= \int_0^l dx' \int_0^\infty \left[G(x, t; x', t') \frac{\partial^2 u(x', t')}{\partial t'^2} \right. \\ & \quad \left. - u(x', t') \frac{\partial^2 G(x, t; x', t')}{\partial t'^2} \right] dt' \\ & \quad - a^2 \int_0^\infty dt' \int_0^l \left[G(x, t; x', t') \frac{\partial^2 u(x', t')}{\partial x'^2} \right. \\ & \quad \left. - u(x', t') \frac{\partial^2 G(x, t; x', t')}{\partial x'^2} \right] dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^l dx' \int_0^\infty G(x, t; x', t') f(x', t') dt' - u(x, t) \\ &= \int_0^l \left[G(x, t; x', t') \frac{\partial u(x', t')}{\partial t'} \right. \\ & \quad \left. - u(x', t') \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial t'} \right]_0^\infty dx' \\ & \quad - a^2 \int_0^\infty \left[G(x, t; x', t') \frac{\partial u(x', t')}{\partial x'} \right. \\ & \quad \left. - u(x', t') \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial x'} \right]_0^l dt'. \end{aligned}$$

代入边界条件 (58b), (59b) 和初始条件 (58c), (59c), 可以将上面的结果化简为

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \int_0^l dx' \int_0^t G(x, t; x', t') f(x', t') dt' \\
& + \int_0^l [G(x, t; x', 0) \psi(x') \\
& \quad - \phi(x') \left. \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial t'} \right|_{t'=0}] dx' \\
& - a^2 \int_0^t \left[\nu(t') \left. \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial x'} \right|_{x'=l} \right. \\
& \quad \left. - \mu(t') \left. \frac{\partial G(x, t; x', t')}{\partial x'} \right|_{x'=0} \right] dt'.
\end{aligned} \tag{60}$$

求解 Green 函数

现在讨论如何由定解问题 (55) 求出 Green 函数.

解法一 因为这是非齐次方程的定解问题, 第一种解法仍然是按相应齐次问题的本征函数展开.

$$G(x, t; x', t') = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{61}$$

同时, 将 δ 函数也按该组本征函数展开,

$$\delta(x - x') = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x' \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{62}$$

于是, $T_n(t)$ 就满足常微分方程的初值问题

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x' \delta(t - t'), \tag{63a}$$

$$T_n(t < t') = 0, \quad T_n'(t < t') = 0. \tag{63b}$$

解之即得

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi a} \sin \frac{n\pi}{l} x' \sin \frac{n\pi}{l} a(t - t') \eta(t - t'). \tag{64}$$

所以, $G(x, t; x', t')$ 就是

$$\begin{aligned}
G(x, t; x', t') \\
= \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x' \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} a(t - t') \eta(t - t').
\end{aligned} \tag{65}$$

□

解法二 第二种方法是将定解问题作 Laplace 变换. 令

$$g(x, p; x', t') = \int_0^{\infty} G(x, t; x', t') e^{-pt} dt, \tag{66}$$

则 $g(x, p; x', t')$ 满足常微分方程的边值问题

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{p}{a} \right)^2 \right] g(x, p; x', t') = -\frac{1}{a^2} e^{-pt'} \delta(x - x'), \tag{67a}$$

$$g(x, p; x', t')|_{x=0} = 0, \quad g(x, p; x', t')|_{x=l} = 0. \tag{67b}$$

由此也可求得

$$g(x, p; x', t') = \begin{cases} \frac{\sinh \frac{p}{a}(l-x') \sinh \frac{p}{a}x}{pa \sinh \frac{p}{a}l} e^{-pt'}, & x < x', \\ \frac{\sinh \frac{p}{a}x' \sinh \frac{p}{a}(l-x)}{pa \sinh \frac{p}{a}l} e^{-pt'}, & x' < x \end{cases} \quad (68)$$

最后, 求反演,

$$G(x, t; x', t') = \frac{1}{2\pi i} \int_L g(x, p; x', t') e^{pt} dp,$$

应用留数定理算出这个积分, 也可以得到相同的结果. \square

Example 19.6 再讨论一个三维空间的例子. 这时的 *Green* 函数 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ 满足定解问题 ($t, t' > 0$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \right] G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (69a)$$

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')|_{t < t'} = 0, \quad \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial t} \right|_{t < t'} = 0. \quad (69b)$$

Solution 作 Fourier 变换

$$g(\mathbf{k}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (70)$$

于是就将定解问题化为

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + (ka)^2 \right] g(\mathbf{k}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \delta(t - t'), \quad (71a)$$

$$g(\mathbf{k}, t; \mathbf{r}', t')|_{t < t'} = 0, \quad \left. \frac{dg(\mathbf{k}, t; \mathbf{r}', t')}{dt} \right|_{t < t'} = 0. \quad (71b)$$

可以得到

$$g(\mathbf{k}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sin ka(t - t')}{ka} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \eta(t - t'). \quad (72)$$

作逆变换, 就有

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') &= \frac{\eta(t - t')}{(2\pi)^3} \iiint \frac{\sin ka(t - t')}{ka} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

在 \mathbf{k} 空间的球坐标系中计算上面的积分, 就得到

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi^2 a} \frac{\eta(t - t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^\infty \sin ka(t - t') \sin k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dk. \quad (73)$$

这个积分在通常的意义下是不存在的. 出现这种积分的原因, 是由于定解问题中的非齐次项也不是通常意义下的函数. 为了算出这个积分, 可以利用积分变换恒等式

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x') \sin kx' dx' \right] \sin kx dk \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x') \left[\int_0^\infty \sin kx' \sin kx dk \right] dx', \end{aligned}$$

这说明 $(x, x' > 0)$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin kx' \sin kx dk = \delta(x - x')$$

把这个结果代入, 就求出了 Green 函数

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a(t - t')). \quad (74)$$

这里去掉了函数 $\eta(t - t')$, 因为 δ 函数已经保证了 $t - t' < 0$ 时 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0$. 这个解式的物理意义明确: t' 时刻在 \mathbf{r}' 处发射的信号, t 时刻一定只到达距 \mathbf{r}' 点为 $a(t - t')$ 的球面上.

利用这个 Green 函数, 当然就可以得到三维无界空间中波动方程的初值问题

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t), \quad t > 0, \quad (75a)$$

$$u(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \phi(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}) \quad (75b)$$

的解,

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| < at} \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/a)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi a} \left[\iint_{\Sigma} \frac{\psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\Sigma' + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \frac{\phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\Sigma' \right], \quad (76)$$

其中 Σ 是以 \mathbf{r} 点为球心、 at 为半径的球面 $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = at$. □

19.6 热传导方程的 Green 函数

对于热传导问题的 Green 函数, 可以仿照波动问题的做法. 例如, 对于三维有界空间中的热传导问题 $\mathbf{r} \in V$, $t > 0$,

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t), \quad (77a)$$

$$u(\mathbf{r}, t)|_{\Sigma} = \mu(\Sigma, t), \quad (77b)$$

$$u(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \phi(\mathbf{r}), \quad (77c)$$

相应的 Green 函数 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ 就可以定义为 t' 时刻在 \mathbf{r}' 处有一个(单位强度的)瞬时点热源所产生的温度分布. 换句话说, 就是定解问题

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right] G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (78a)$$

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')|_{\Sigma} = 0, \quad (78b)$$

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')|_{t=0} = 0, \quad (78c)$$

的解. 由平移不变性, 容易理解, 初始条件也可以写成 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')|_{t < t'} = 0$.

仿照波动问题的做法, 也可以证明 Green 函数同样具有空间对称性和时间倒易性,

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G(\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}, -t). \quad (79)$$

为了应用 Green 函数方法解定解问题, 也可以模仿上一节的做法: 首先将定解问题的自变量改写成 \mathbf{r}' 和 t' ,

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} - \kappa \nabla'^2 u(\mathbf{r}', t') = f(\mathbf{r}', t'), \quad (80a)$$

$$u(\mathbf{r}', t')|_{\Sigma'} = \mu(\Sigma', t'), \quad (80b)$$

$$u(\mathbf{r}', t')|_{t'=0} = \phi(\mathbf{r}'). \quad (80c)$$

然后写出格林函数 $G(\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}, -t)$ 满足的定解问题,

$$\left[\frac{\partial}{\partial(-t')} - \kappa \nabla'^2 \right] G(\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}, -t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (81)$$

$$G(\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}, -t)|_{\Sigma'} = 0, \quad (82)$$

$$G(\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}, -t)|_{-t' < -t} = 0. \quad (83)$$

进一步再利用格林函数对于空间的对称性和时间的倒易性关系, 改写成

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t'} - \kappa \nabla'^2 \right] G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (84a)$$

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')|_{\Sigma'} = 0, \quad (84b)$$

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')|_{t' > t} = 0. \quad (84c)$$

将方程分别乘以 G , 相减, 并积分, 就得到

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt' \iiint_V f(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - u(\mathbf{r}, t) \\ &= \iiint_V d\mathbf{r}' \int_0^\infty \left[G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \frac{\partial u(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right. \\ & \quad \left. + u(\mathbf{r}', t') \frac{\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right] dt' \\ & - \kappa \int_0^\infty dt' \iiint_V \left[G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \nabla'^2 u(\mathbf{r}', t') \right. \\ & \quad \left. - u(\mathbf{r}', t') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \right] \cdot d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt' \iiint_V f(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - u(\mathbf{r}, t) \\ &= \iiint_V G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') u(\mathbf{r}', t') \Big|_{t'=0}^{t'=\infty} d\mathbf{r}' \\ & - \kappa \int_0^\infty dt' \iint_\Sigma \left[G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \nabla' u(\mathbf{r}', t') \right. \\ & \quad \left. - u(\mathbf{r}', t') \nabla' G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \right] \cdot d\mathbf{\Sigma}', \end{aligned}$$

代入边界条件和初始条件, 最后就得到

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}, t) = & \int_0^t dt' \iiint_V f(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' \\
& + \iiint_V \phi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) d\mathbf{r}' \\
& - \kappa \int_0^t dt' \iint_{\Sigma} \mu(\Sigma', t') \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial n'} \right|_{\Sigma'} d\Sigma'.
\end{aligned} \tag{85}$$

Example 19.7 求解一维无界空间热传导方程的 *Green* 函数

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] G(x, t; x', t') &= \delta(x - x') \delta(t - t'), \\
t' &> 0, \\
G(x, t; x', t') \Big|_{x \rightarrow \pm \infty} &\text{有界}, \\
G(x, t; x', t') \Big|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}$$

Solution 作 Laplace 变换, 令

$$g(x, p; x', t') = \int_0^\infty G(x, t; x', t') e^{-pt} dt,$$

定解问题化为

$$\begin{aligned}
pg(x, p; x', t') - \kappa \frac{d^2 g(x, p; x', t')}{dx^2} &= \delta(x - x') e^{-pt'}, \\
g(x, p; x', t') \Big|_{x \rightarrow \pm \infty} &\text{有界}.
\end{aligned}$$

求解此一维 *Green* 函数问题, 得

$$g(x, p; x', t') = \frac{1}{2\sqrt{\kappa p}} e^{-pt'} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{p}{\kappa}} |x - x'| \right\}.$$

利用

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2/4t}.$$

反演, 得

$$\begin{aligned}
G(x, t; x', t') &= \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')} \right\} \\
&\quad \times \eta(t-t').
\end{aligned}$$

□

19.7 广义 *Green* 函数

前面已指出, *Green* 函数

$$\begin{aligned}
\nabla^2 G &= -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Sigma} &= 0
\end{aligned}$$

不存在. 这个结论很容易从这个定解问题在热传导问题中的物理意义看出. 方程代表一个稳定的温度场, 场中 \mathbf{r}' 点有一个点热源, 而边界条件则表示边界是绝热的. 但这样的温度场不可能是稳定的, 因为从点源出来的热量既然不能通过(绝热的)边界散走, 势必会使物体内部的温度不断升高. 对于第一和第三类边界条件, 这种情况不会发生, 因为这时, 物体与外界都有热量的交换, 是可以达到稳定状态的.

下面从更为普遍的角度来讨论 Green 函数存在的必要条件. 仍考虑 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + \lambda u = -f \quad (86)$$

在齐次的第 一、二、三类边界条件

$$\left[\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right]_{\Sigma} = 0 \quad (87)$$

之下的定解问题.

若 u_0 为齐次如下齐次方程定解问题的非零解

$$\nabla^2 u_0 + \lambda u_0 = 0 \quad (88)$$

$$\left[\alpha \frac{\partial u_0}{\partial n} + \beta u_0 \right]_{\Sigma} = 0 \quad (89)$$

即 λ 是算符 $-\nabla^2$ 的本征值, u_0 是相应的本征函数. 以 u_0 乘 (86), u 乘 (88), 相减, 然后求积分, 得

$$\begin{aligned} \iiint_V [u_0 \nabla^2 u - u \nabla^2 u_0] d\mathbf{r} \\ = \iint_{\Sigma} \left[u_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_0}{\partial n} \right] d\Sigma = - \iiint_V f u_0 d\mathbf{r} \end{aligned}$$

由边界条件 (87) 和 (89) 有 (因 α 和 β 不同时为零)

$$\left[u_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_0}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0$$

因此得

$$\iiint_V f u_0 d\mathbf{r} = 0 \quad (90)$$

这就是在 λ 为本征值时, 非齐次方程 (86) 有解的必要条件: **非齐次项 f 必须与本征函数 u_0 正交.**

现在回过头来讨论 Green 函数的问题. 方程和边界条件是

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (91)$$

$$\left[\alpha \frac{\partial G}{\partial n} + \beta G \right]_{\Sigma} = 0 \quad (92)$$

如果 λ 是本征值, 相应的本征函数是 $u_0(r)$, 则

$$\iiint_V u_0(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} = u_0(\mathbf{r}') \neq 0$$

因此, 在这种情形下, Green 函数不存在!

在 λ 是本征值的情形下, 可以引入所谓 “广义 Green 函数”. 令 G 满足方程

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + c u_0(r)$$

边界条件不变, 仍为 (92). 要求

$$\iiint_V u_0(r) [-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + c u_0(r)] d\mathbf{r} = 0$$

即

$$c = \frac{\iiint_V u_0(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}}{\iiint_V [u_0(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r}} = \frac{u_0(\mathbf{r}')}{\iiint_V [u_0(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r}} \quad (93)$$

如果 $u_0(\mathbf{r})$ 是归一的,

$$\iiint_V [u_0(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r} = 1$$

则 $c = u_0(\mathbf{r}')$, 而 G 所满足的方程为

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + u_0(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}) \quad (94)$$

但满足方程 (94) 和边界条件 (92) 的解不是唯一的, 可以任意加上相应齐次方程的解 $A(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r})$. 因此, 通常还要求 G 与 $u_0(\mathbf{r})$ 正交:

$$\iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (95)$$

这样, G 就是唯一的了.

由 (94), (92) 和 (95) 确定的函数 G 称为广义 *Green* 函数. 利用广义 *Green* 函数, 可以如前得到普遍边值问题

$$\nabla^2 u + \lambda u = -f \quad (96)$$

$$\left[\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right]_{\Sigma} = g \quad (97)$$

的解, 其中 λ 是本征值.