北京大学

理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 构建了哈密顿表述、与拉格朗日表述等价，更简洁，但方程的数目变为2倍
- 哈密顿量可以守恒、可以不守恒、可以等于总能量、可以不等于总能量
- 关于循环坐标的正则方程可自动略去。

今日目标

- 转动变换
- 欧拉角与四元数
- 自由陀螺与对称陀螺

3D 转动

- 一个*3D*矢量 $\boldsymbol{r}$ 在两个坐标系中可分别表示为

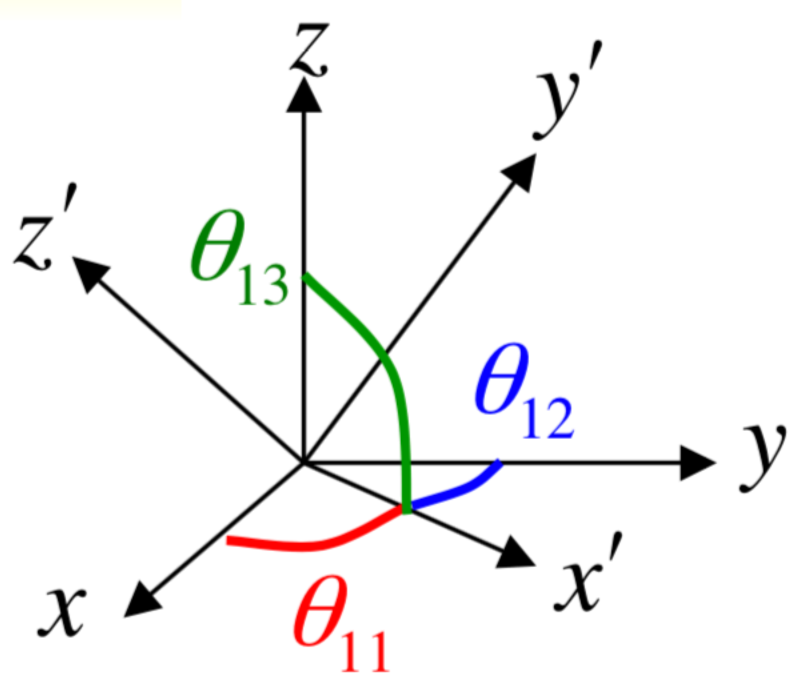
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

- 利用转动前后任意两轴之间的夹角 θ_{ij}

$$x' = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i}' = x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}' + y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}' + z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}' = \cos\theta_{11}x + \cos\theta_{12}y + \cos\theta_{13}z$$

$$y' = \cos\theta_{21}x + \cos\theta_{22}y + \cos\theta_{23}z$$

$$z' = \cos\theta_{31}x + \cos\theta_{32}y + \cos\theta_{33}z$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} \\ \cos\theta_{21} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{23} \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3D 转动

- 简化符号表示

$$(x, y, z) \to (x_1, x_2, x_3); \quad (x', y', z') \to (x'_1, x'_2, x'_3)$$

转动可表示为

$$x'_i = \sum_j \cos\theta_{ij} x_j = \sum_j a_{ij} x_j = a_{ij} x_j$$

爱因斯坦求和约定：重复指标表示对指标求和！

- 于是，我们得到了*9* 个参数来描述*3D*转动，但只有*3*个是独立的。

3D 转动的约束

- 转动不改变矢量的长度

$$r^2 = x_i x_i = x'_i x'_i$$

利用转动矩阵，可知

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad \Rightarrow \quad x'_i x'_i = a_{ij} x_j a_{ik} x_k$$

$$\Rightarrow \quad a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

6个条件，使得转动矩阵的9个参数只有3个是自由的

- 矩阵***A*** = [a$_{ij}$] 是正交阵：

$$A^T A = A A^T = 1$$

正交矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 正交矩阵的一些性质

$$A^T A = A A^T = 1$$

$$|A^T A| = |A^T||A| = |A|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |A| = \pm 1$$

|A| = 1 —> 恰当矩阵 |A| = -1 —> 非恰当矩阵

空间反射

$$\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{r} = S\boldsymbol{r} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{r}$$

$$|S| = -1$$

转动是从单位阵出发的连续变换，而单位阵的行列式为+1

刚体转动由恰当正交矩阵来表示！

欧拉角

- 将 x-y-z 变换到 x'-y'-z'，三步法：

(x, y, z)

绕 z 轴逆时针转动 ϕ

(ξ, η, ζ)

绕 ξ 轴逆时针转动 θ

(ξ', η', ζ')

绕 ζ' 轴逆时针转动 ψ

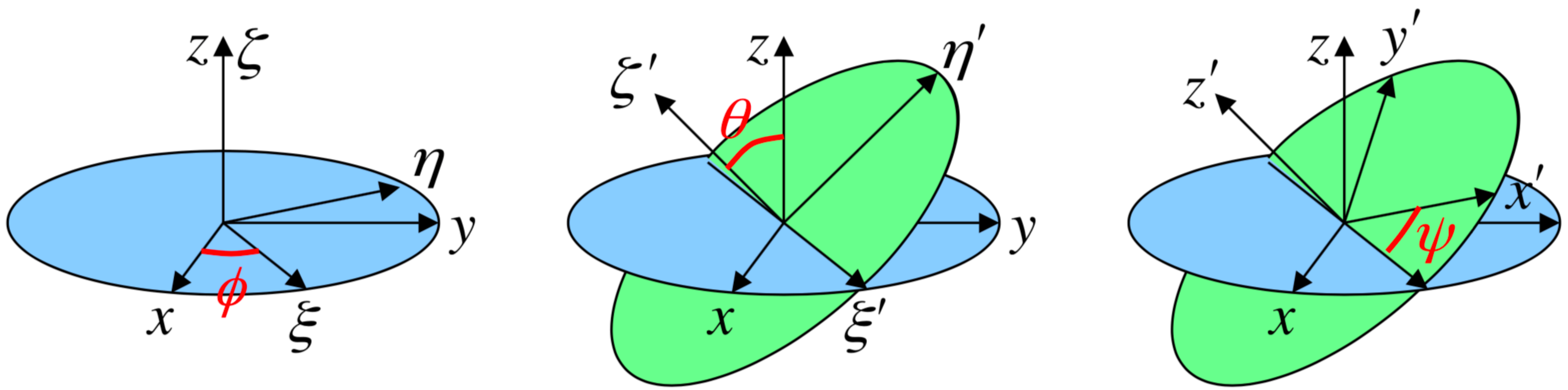
(x', y', z')

$$\boldsymbol{x}$$

$$D\boldsymbol{x}$$

$$CD\boldsymbol{x}$$

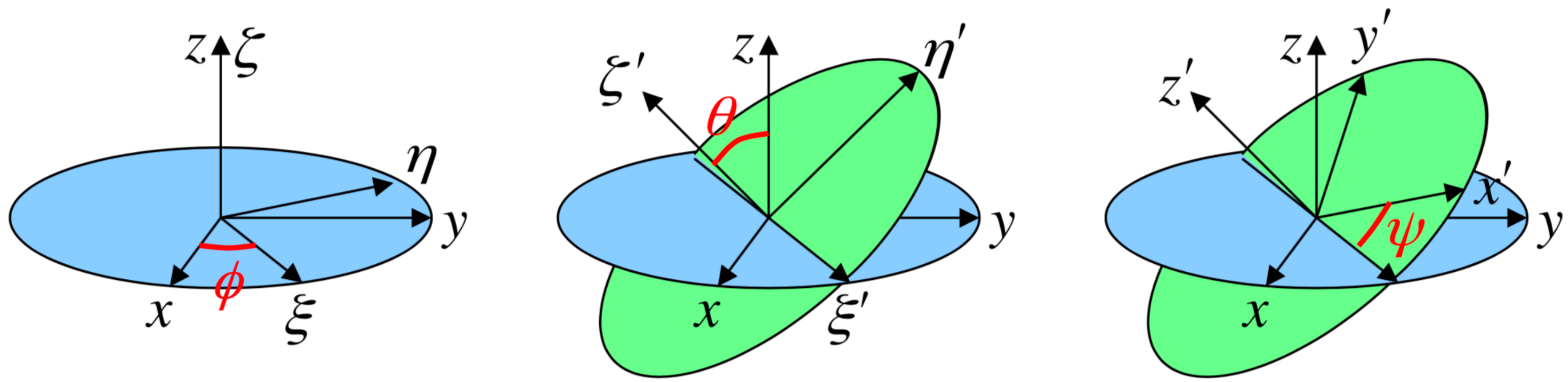
$$A\boldsymbol{x} = BCD\boldsymbol{x}$$



欧拉角

$$D=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\end{pmatrix}$$



- 可以证明矩阵A是正交的
- 有多种约定方法：（右手系下有 3*2*2 = 12种）

  第一个转动绕任意轴，然后不绕同一坐标轴相继转动

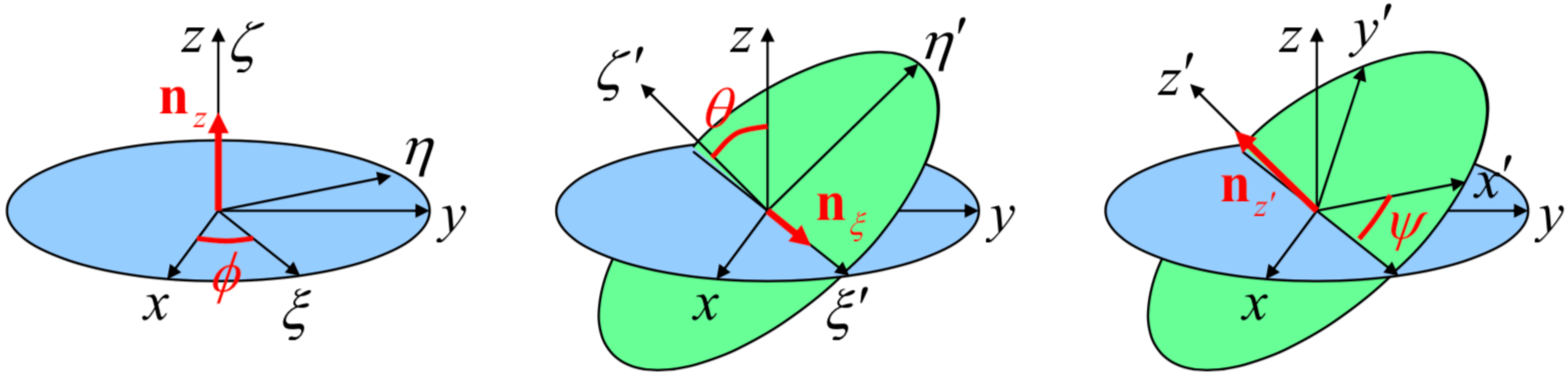
欧拉角的变化率

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times$$

- 利用角速度可以计算质点的速度
  利用欧拉角可以描述刚体的转动

- 如何利用欧拉角计算角速度呢？欧拉角的时间导数

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{n}_z\dot{\phi} + \boldsymbol{n}_\xi\dot{\theta} + \boldsymbol{n}_{z'}\dot{\psi}$$



欧拉角的变化率

- 在(*x'-y'-z'*) 坐标系下计算 $\boldsymbol{\omega}$

  需要将 $\boldsymbol{n}_z, \boldsymbol{n}_\xi, \boldsymbol{n}_{z'}$ 写在此坐标系下

$$\boldsymbol{n}_z \to A\boldsymbol{n}_z, \quad \boldsymbol{n}_\xi \to B\boldsymbol{n}_\xi$$

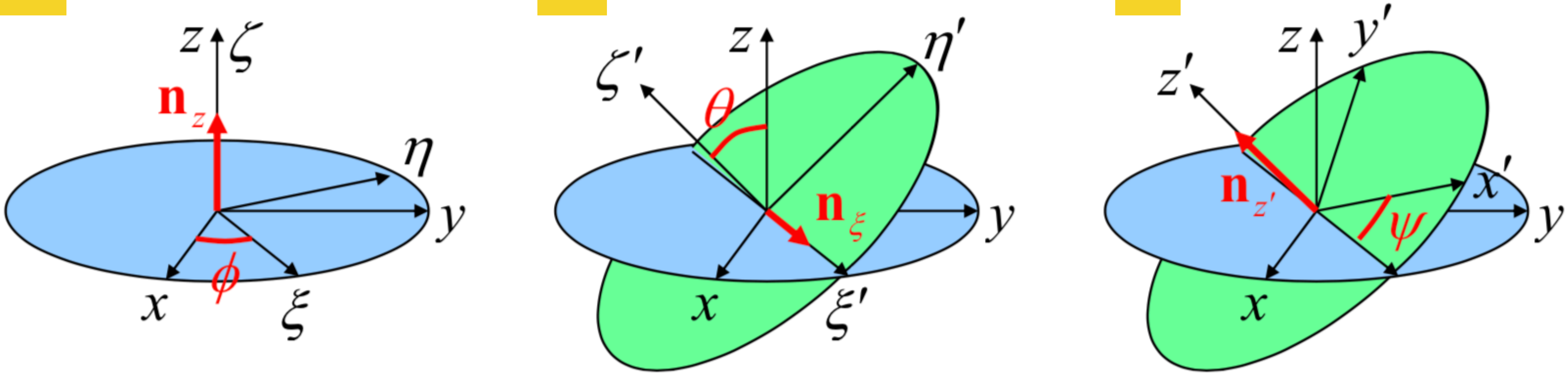
在x-y-z坐标系下也一样"简单"

A = BCD

D

C

B



欧拉角的变化率

$$\boldsymbol{n}_z = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\psi\sin\theta\\\cos\psi\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_\xi = B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi\\-\sin\psi\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_{z'} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{n}_z\dot{\phi} + \boldsymbol{n}_\xi\dot{\theta} + \boldsymbol{n}_{z'}\dot{\psi} = \begin{pmatrix}\dot{\phi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\\\dot{\phi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi\\\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{pmatrix}$$

- 这一表达式是写在*x'-y'-z'*坐标系下的
- 现在我们知道如何利用欧拉角表示速度了，接下来，我们可以构造体系的拉格朗日量了

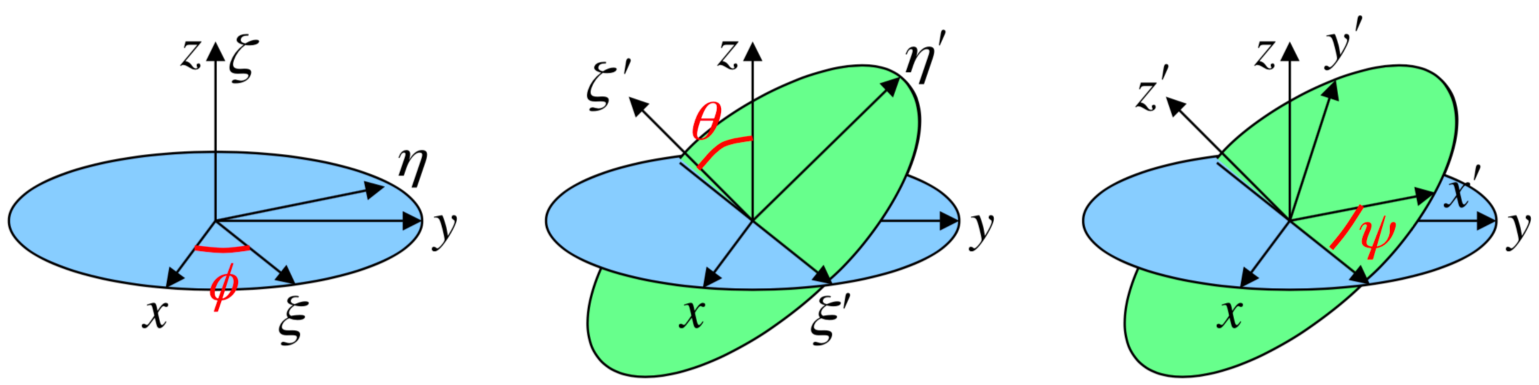
万向节锁死

- 当$\theta = 0$ 时，欧拉角仅仅依赖于两个角度的组合，而不是两个独立的角度。

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\psi+\phi) & \sin(\psi+\phi) & 0 \\ -\sin(\psi+\phi) & \cos(\psi+\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

损失了一个角度！



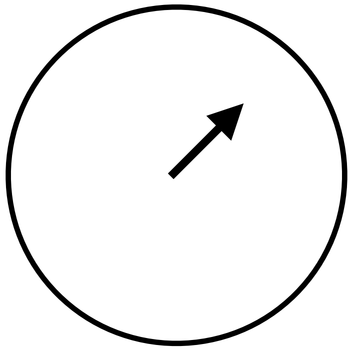
欧拉角表示的局限性

- 所有三维转动操作组成一个集合：

  存在恒等变换、逆变换，满足封闭性、结合律。

- 三维转动构成一个群，即SO(3)群：

  其参数空间为 $(\theta, \boldsymbol{n})$，对应的拓扑结构称为三维实射影空间RP^3



半径为 π 的球体，过球心取一矢量，方向为转轴方向，大小为转动角

所有转动表为 $R([0,\pi]; \pm \boldsymbol{n})$，但 $R(\pi, \boldsymbol{n}) = R(\pi, -\boldsymbol{n})$, 故球面对点粘结

- 欧拉角的参数空间 (ϕ, θ, ψ) 对应的拓扑结构为三维环面T^3

  欧拉角表示：从三维环面T^3 映射到 三维射影空间RP^3

  由于两个空间具有不同的拓扑结构，因而一个映射无法形成全局覆盖。

凯莱-克莱因表示

- 考虑如下两维复矩阵，若要求 $\det(Q) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$，则称为复特殊幺正矩阵，满足 $Q^\dagger Q = QQ^\dagger = 1$。所有二维复特殊幺正矩阵构成一个群：SU(2)

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}$$

独立变量：4 - 1 = 3 个；用于表示转动?

- 以泡利矩阵为基，将三维空间矢量映射到二维复厄米矩阵

$$M = x_i \sigma_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M\sigma_i)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

矢量长度～矩阵行列式

$$\det(M) = -x_i x_i = -|\boldsymbol{x}|^2$$

凯莱-克莱因表示

- 三维转动下矢量长度保持不变，即相应的矩阵 M 行列式保持不变。
- 将 SU(2) 矩阵作用在 M 上，可以保持矩阵 M 行列式不变。

$$M' = QMQ^\dagger \qquad |M'| = |QMQ^\dagger| = |Q|\cdot|M|\cdot|Q^\dagger| = |M|$$

- 可见SU(2)矩阵确实诱导了一个三维转动，SU(2)矩阵可表示一组四元数表示。

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & iq_1 + q_2 \\ iq_1 - q_2 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix} = q_0 I + i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma} \qquad q_0^2 + \boldsymbol{q}^2 = 1$$

- 欧拉角与四元数的对应关系

$$Q = \begin{bmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

推导！验证！

SU(2) 转动的周期

$$D = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 设将三维矢量 (1,0,0) 绕 z 轴转逆时针旋转 ϕ：

$$M = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

- 相应的SU(2)矩阵应为

$$Q = \begin{pmatrix} Ae^{ia} & -Be^{-ib} \\ Be^{ib} & Ae^{-ia} \end{pmatrix} \xrightarrow{M' = QMQ^\dagger} Q = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

- 注意 $\phi = 2\pi$ 时，$Q = -I$，这对经典三维矢量无影响，但对自旋态有影响。
- 注意 $\phi = 4\pi$ 时，$Q = I$；这时SU(2)矩阵才完全回到初始状态！**双覆盖**

SO(3) VS SU(2)

- 三维实转动矩阵构成SO(3)群，对应的拓扑结构为三维实射影空间RP^3
- 二维复转动矩阵构成SU(2)群，对应的拓扑结构为三维球面S^3
- SO(3)矩阵和SU(2)矩阵之间的对应关系，建立了两个群间的同态（非同构）。

  不是一一对应关系，两个SU(2)矩阵 Q 与 -Q 对应同一个转动 $M' = QMQ^\dagger$

  SU(2) 是 SO(3) 的双重覆盖群。

- 四元数的参数空间 (q_0, q_1, q_2, q_3) 对应的拓扑结构为三维球面S^3

  四元数表示：从三维球面S^3 映射到 三维射影空间RP^3

  只要将三维球面S^3 上相对的两点等同起来，即三维射影空间RP^3

  因而形成一个二对一映射，双重覆盖，不会出现万向节锁死。

刚体自由转动

$$H=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$
$$=\frac{L_1^2}{2I_1}+\frac{L_2^2}{2I_2}+\frac{L_3^2}{2I_3}$$

能量守恒、角动量守恒

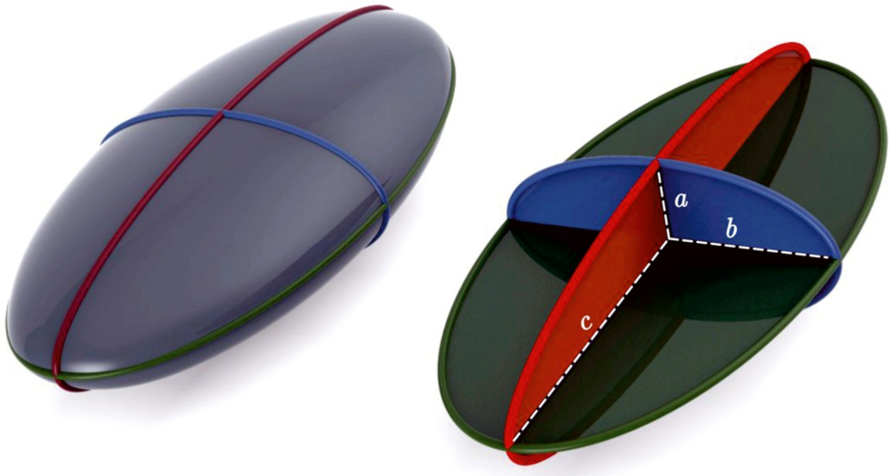
$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s=\left(\frac{d}{dt}\right)_b+\boldsymbol{\omega}\times$$

$$\dot{L}_i+\epsilon_{ijk}\omega_j L_k=0$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I_1\omega_1\\I_2\omega_2\\I_3\omega_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}I_1\omega_1\\I_2\omega_2\\I_3\omega_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

刚体定点转动的欧拉运动方程

$$I_1\dot{\omega}_1-\omega_2\omega_3(I_2-I_3)=0$$
$$I_2\dot{\omega}_2-\omega_3\omega_1(I_3-I_1)=0$$
$$I_3\dot{\omega}_3-\omega_1\omega_2(I_1-I_2)=0$$



三轴椭球转动的稳定性

- 椭球刚体 $I_1 > I_2 > I_3$

  假设初始轴与任一惯性主轴相近

  绕1轴与3轴可形成稳定的转动

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = 0$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = 0$$

- 绕2轴不能形成稳定的转动

  小的扰动会导致转轴偏离2轴很远

练习!

设转轴接近1轴

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{\mathbf{1}} + \varepsilon_2\hat{\mathbf{2}} + \varepsilon_3\hat{\mathbf{3}}$$

$$I_1\dot{\omega}_1 = 0$$
$$I_2\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3\omega_1(I_3 - I_1)$$
$$I_3\dot{\varepsilon}_3 = \omega_1\varepsilon_2(I_1 - I_2)$$

$$\omega_1 = const$$

小于零

$$\ddot{\varepsilon}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_1\dot{\varepsilon}_3 = \boxed{\frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}}\omega_1^2\varepsilon_2$$

振动解!

重陀螺的拉格朗日量

- 假设 $I_1 = I_2 \neq I_3$

  动能 $T = \frac{1}{2} I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$

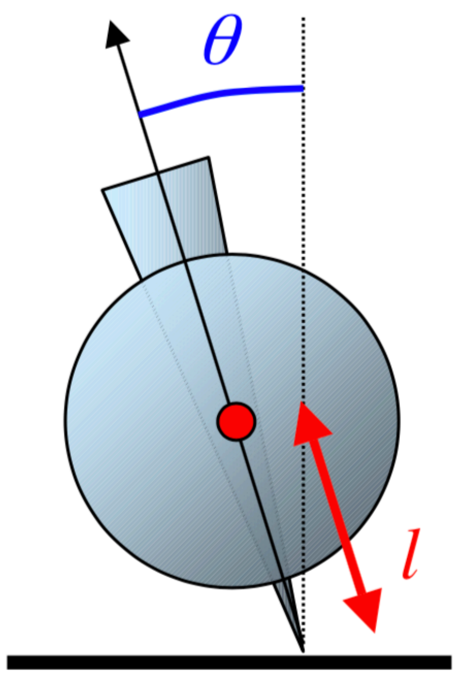
  $$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

  利用欧拉角的变化率，可得

  $$T = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2$$

  势能由质心的高度给出

  $$V = Mgl\cos\theta$$



- 拉格朗日量

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - Mgl\cos\theta$$

重陀螺

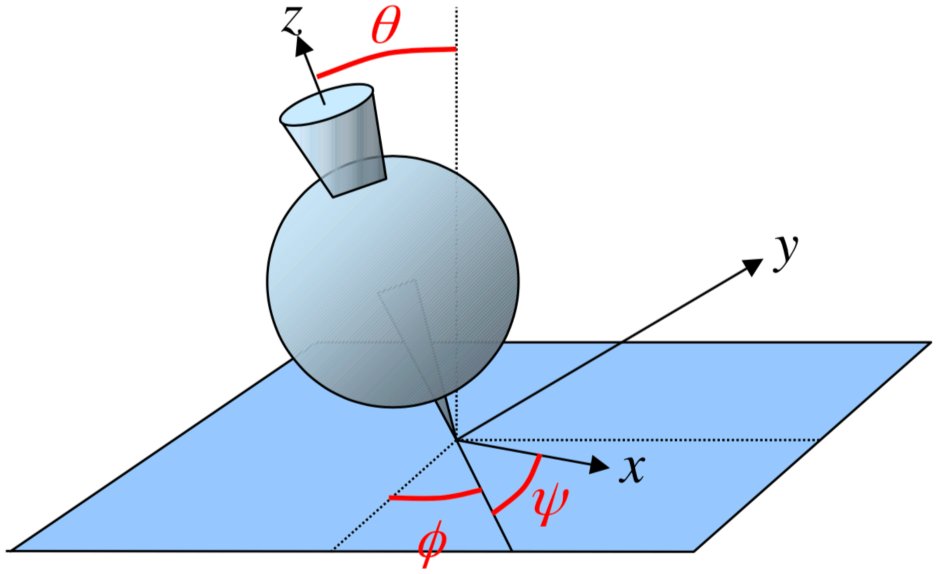
- 有一固定点的旋转陀螺

  拉格朗日量

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - Mgl\cos\theta$$

- ϕ 和 ψ 是循环坐标，存在对称性

- p_ϕ 和 p_ψ 是守恒的



$\dot{\psi}$ 陀螺关于其对称轴的**转动**

$\dot{\phi}$ 陀螺对称轴关于空间 Z 轴的**进动**

$\dot{\theta}$ 陀螺对称轴的**章动** (上下摆动)

定点转动的重陀螺

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1 \dot\phi \sin^2\theta + I_3 \cos\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = \mathrm{const}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = \mathrm{const}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = I_1\dot\theta$$

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\right)^2 - Mgl\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
H &= p_\theta\dot\theta + p_\phi\dot\phi + p_\psi\dot\psi - L \\
&= I_1\dot\theta^2 + p_\phi\dot\phi + p_\psi\dot\psi - \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) - \frac{I_3}{2}\left(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\right)^2 + Mgl\cos\theta \\
&= \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \cos\theta p_\psi\dot\phi + p_\psi\dot\psi + \frac{I_1}{2}\left(\dot\phi^2\sin^2\theta\right) - \frac{1}{2I_3}p_\psi^2 + Mgl\cos\theta \\
&= \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \boxed{\frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{\left(p_\phi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta}
\end{aligned}$$

有效势

可以看成一个“质量”为 I_1 的质点在一个等效势场中的运动方程 —〉章动！

$$H = \mathrm{const} \qquad p_\phi = \mathrm{const} \qquad p_\psi = \mathrm{const}$$

运动方程

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = I_3\omega_3 = \text{const} \equiv I_1 a$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1\dot\phi\sin^2\theta + I_3\cos\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = \text{const} \equiv I_1 b$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot\phi\sin\psi\sin\theta + \dot\theta\cos\psi \\ \dot\phi\cos\psi\sin\theta - \dot\theta\sin\psi \\ \dot\phi\cos\theta + \dot\psi \end{pmatrix}$$

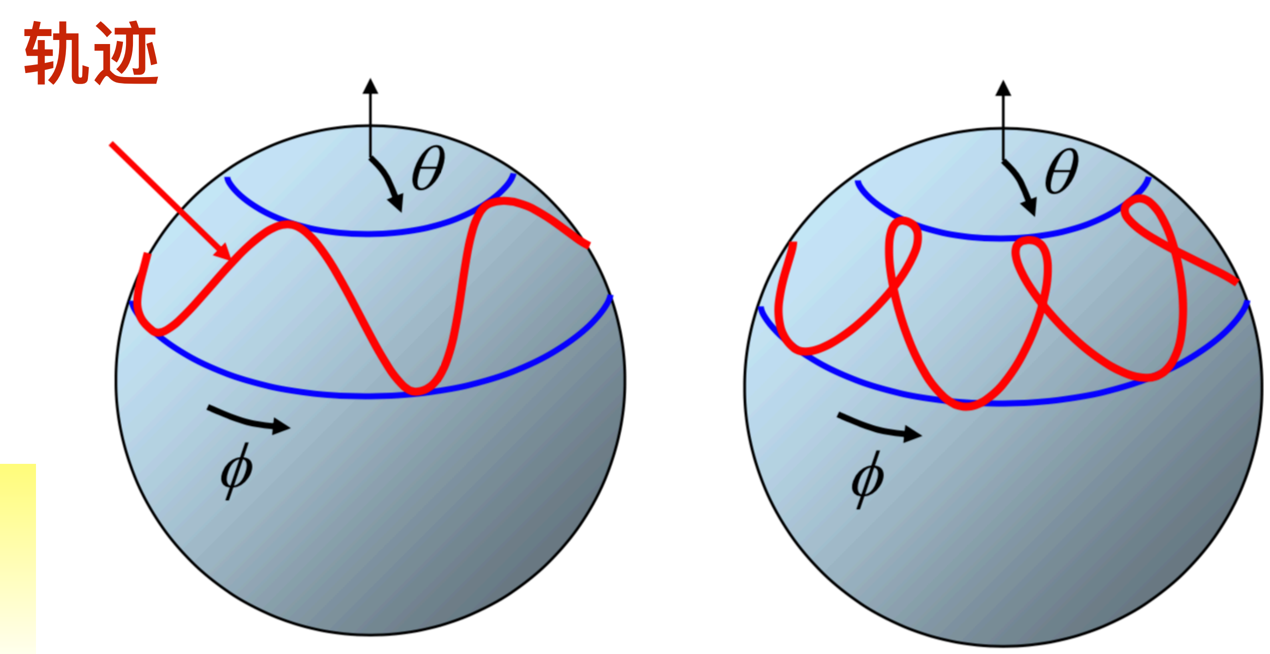
$$E = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{\left(p_\phi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + V^{eff}(\theta) = E - \frac{I_3\omega_3^2}{2}$$ 为常数！

- 可以解出$\theta(t)$, 亦可得$\phi(t)$, $\psi(t)$；
- $\dot\phi$ 的符号在$\cos\theta = b/a$ 处改变

$$\dot\psi = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos\theta\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\dot\phi = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}$$



ϕ的大小一直增加　　ϕ的大小有增有减

规则进动

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + V^{eff}(\theta) = E - \frac{I_3\omega_3^2}{2}$$

- 可以得到纯进动，无章动的陀螺运动形态吗?

即 $\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \text{const}\,.$

$$V^{eff}(\theta) = \frac{I_1}{2}\left(\frac{b - a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + Mgl\cos\theta = E - \frac{I_3\omega_3^2}{2}$$

$$\frac{dV^{eff}}{d\theta} = I_1\frac{(b - a\cos\theta)\left[(b - a\cos\theta)\cos\theta + a\sin^2\theta\right]}{\sin^3\theta} + Mgl\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi}\cos\theta_0)$$

规则进动

- 陀螺问题的初始条件要求指明*t* = 0时刻的 $\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}(\text{or } \omega_3)$

  ϕ 和 ψ 是循环坐标，其初始值无关紧要

  若要求陀螺做无章动的匀速进动，则剩余四个初始值不能任意选取

  由于需要满足 $\dot{\theta} = 0$，因此，在给定ω_3和θ_0时，$\dot{\phi}$ 也确定下来了。

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi}\cos\theta_0)$$

$\dot{\phi} = 0$ 不可能满足方程，所以要得到规则进动，必须给陀螺一个初始推动，使它开始进动

这是一个二次方程，可能无实数解，也可能有两个实数解

有两个实数解的条件 *($b^2 > 4ac$)*

$$I_3^2\omega_3^2 > 4MglI_1\cos\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 > \frac{2}{I_3}\sqrt{MglI_1\cos\theta_0}$$

快陀螺！

两个实数解分别对应“慢进动”与“快进动”

慢进动的近似解

$$I_3\omega_3 \gg I_1\dot{\phi}\cos\theta_0 \qquad \dot{\phi} \simeq \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

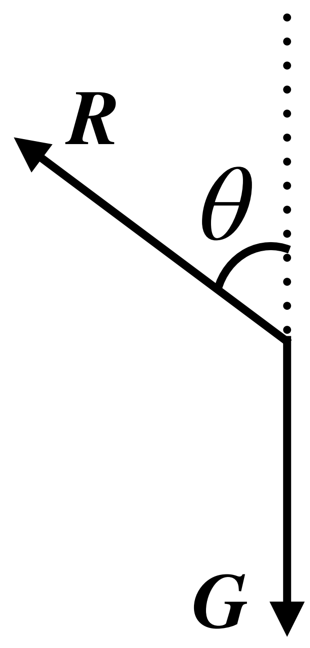
快进动的近似解

$$\dot{\phi} \gg Mgl \qquad \dot{\phi} \simeq \frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta_0}$$

磁场内电荷系统的进动

- 陀螺在重力场中的势函数

$$V = -M\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{G} = Mgl\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} \simeq \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

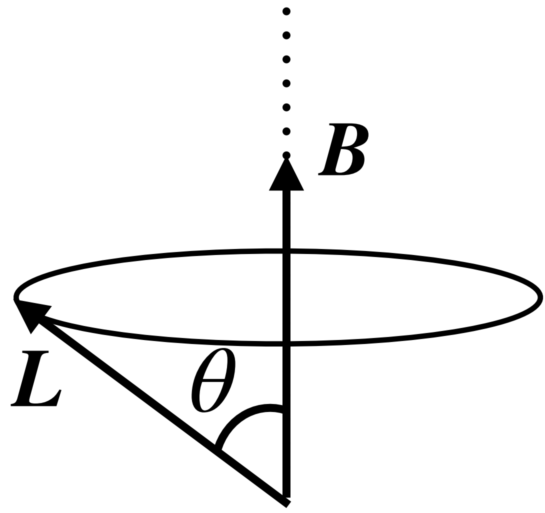


- 磁偶极子在均匀磁场中的势函数

磁矩 $\boldsymbol{M} = \gamma\boldsymbol{L} = \dfrac{q}{2m}\boldsymbol{L}$

$$V = -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B} = -\gamma LB\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} \simeq -\frac{\gamma LB}{L} = -\gamma B$$

拉摩进动



严格的拉摩进动非纯进动，相关推导要参照快陀螺情形

基本粒子

- 许多基本粒子如电子、质子等具有内禀角动量，即自旋 ***s***
  于是也具有内禀磁矩***μ***

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{m}\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{M} = \gamma \boldsymbol{L} = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L}$$

- 对于自旋为1/2的粒子，狄拉克（Dirac）方程预言
  与经典的带电粒子相差一个2倍的因子

- 定义 $$\boldsymbol{\mu} = \frac{gq}{2m}\boldsymbol{s}$$

  $g = 1$ 经典
  $g = 2$ 量子

- g = 2, 电子，***μ*** 子等Dirac粒子

- 质子g = 2.8; 中子g = -1.9 复合粒子

反常磁矩

- 电子和 μ 子的磁矩已经测量得非常精确

$$g_e = 2.00231930436182 \pm 0.00000000000052$$

$$g_\mu = 2.0023318418 \pm 0.0000000012$$

- 并不是严格等于2，因为有电子和μ 子周边围绕着各种虚粒子云

- 偏离2的部分为反常磁矩，探索新物理，新粒子?

- 测量利用拉摩进动原理

将已知自旋取向的粒子放在给定磁场B中

测量时间 t 后的自旋取向

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{gq}{2m}\boldsymbol{B}$$

需要非常高精度的磁场大小测量

总结

- 转动的SU(2)表示
- 分析了重陀螺的运动

  约化为一个关于 θ 的一维问题

  定性分析 —〉 进动 + 章动

  规则进动
- 磁场中的旋转带电体

  磁矩与角动量的关系：g因子

  拉摩进动

  基本粒子的g因子测量：新物理