# Chapter 11

# 拉普拉斯变换

本章内容翻译自 *Affken*，*Weber*，*Harris*

## 11.1 定义

函数 $F(t)$ 的拉普拉斯变换，记为 $f(s)$ 或 $\mathcal{L}\{F(t)\}$，定义为：

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \tag{11.1}$$

关于此积分的存在性，有几点需要说明。$F(t)$ 的无穷积分 $\int_0^\infty F(t)dt$ 不一定存在。例如，$F(t)$ 可能在 $t$ 很大时呈指数发散。然而，如果存在某个常数 $s_0$，使得对于足够大的 $t, t > t_0$，有

$$\left|e^{-s_0 t}F(t)\right| \le M \tag{11.2}$$

（其中 $M$ 为一个正常数），则拉普拉斯变换（(11.1)）对于 $s > s_0$ 将存在；此时称 $F(t)$ 是指数阶的。一个反例是 $F(t) = e^{t^2}$，它不满足(11.2)给出的条件，也不是指数阶的，$\mathcal{L}\left\{e^{t^2}\right\}$ 不存在。

拉普拉斯变换也可能因为函数 $F(t)$ 在 $t \to 0$ 时具有足够强的奇点而不存在；也就是说，积分

$$\int_0^\infty e^{-st}t^n dt \tag{11.3}$$

在 $n \le -1$ 时于原点发散。因此，拉普拉斯变换 $\mathcal{L}\{t^n\}$ 对于 $n \le -1$ 不存在。

由于对于两个函数 $F(t)$ 和 $G(t)$，若其积分均存在，则

$$\mathcal{L}\{aF(t) + bG(t)\} = a\mathcal{L}\{F(t)\} + b\mathcal{L}\{G(t)\} \tag{11.4}$$

因此，由 $\mathcal{L}$ 表示的运算是线性的。

## 11.2 初等函数的拉普拉斯变换

为了介绍拉普拉斯变换，我们将其应用于一些初等函数。在所有情况下，我们都假设当 $t<0$ 时，$F(t)=0$。如果

$$F(t)=1, \quad t>0 \tag{11.5}$$

则

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}, \quad 对于s>0 \tag{11.6}$$

再如，令

$$F(t)=e^{kt}, \quad t>0 \tag{11.7}$$

其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\left\{e^{kt}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt=\frac{1}{s-k}, \quad 对于s>k \tag{11.8}$$

利用这个关系，我们可以得到其他一些函数的拉普拉斯变换。因为

$$\cosh kt=\frac{1}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right), \tag{11.9}$$

$$\sinh kt=\frac{1}{2}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right), \tag{11.10}$$

我们有

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)=\frac{s}{s^2-k^2} \tag{11.11}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}-\frac{1}{s+k}\right)=\frac{k}{s^2-k^2} \tag{11.12}$$

两者均在 $s>|k|$ 时有效。

我们有关系式

$$\cos kt=\cosh ikt, \tag{11.13}$$

$$\sin kt=-i\sinh ikt \tag{11.14}$$

使用(11.11)和(11.12)，并将 $k$ 替换为 $ik$，我们发现拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\{\cos kt\}=\frac{s}{s^2+k^2} \tag{11.15}$$

$$\mathcal{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2} \tag{11.16}$$

两者均在 $s>0$ 时有效。

最后，对于 $F(t)=t^n$，我们有

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\}=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt \tag{11.17}$$

这正是 Gamma 函数的形式，可以表示为阶乘函数。因此

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, n > -1 \tag{11.18}$$

注意，在所有这些变换中，变量 $s$ 都出现在分母中——即 $s$ 的负幂次。特别地，$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$。这一点的重要性在于，如果 $f(s)$ 包含 $s$ 的正幂次 $(\lim_{s\to\infty} f(s) \to \infty)$，则不存在逆变换。

### 11.2.1 示例 1：部分分式展开

令

$$f(s) = \frac{k^2}{s\left(s^2+k^2\right)} = \frac{c}{s} + \frac{as+b}{s^2+k^2}. \tag{11.19}$$

将方程右边通分，并令分子中 $s$ 的同次幂系数相等，我们得到

$$\frac{k^2}{s\left(s^2+k^2\right)} = \frac{c\left(s^2+k^2\right)+s(as+b)}{s\left(s^2+k^2\right)} \tag{11.20}$$

$$c+a=0, \quad (s^2\text{项}); \quad b=0, \quad (s^1\text{项}); \quad ck^2=k^2, \quad (s^0\text{项}) \tag{11.21}$$

解这些方程（$s \neq 0$），我们有

$$c=1, \quad b=0, \quad a=-1, \tag{11.22}$$

得到

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2}, \tag{11.23}$$

根据(11.6)和(11.15)，

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = 1 - \cos kt \tag{11.24}$$

### 11.2.2 示例 2：阶跃函数

作为拉普拉斯变换的一个应用，考虑计算

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} dx \tag{11.25}$$

假设我们对这个定（瑕）积分取拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} dx dt \tag{11.26}$$

现在，交换积分顺序（这是合理的），我们得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\int_0^\infty e^{-st}\sin tx dt\right] dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{x}{s^2+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2} \tag{11.27}$$

因为方括号中的因子正是 $\sin tx$ 的拉普拉斯变换。查积分表，

$$\int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{x}{s}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2s} = f(s) \tag{11.28}$$

根据(11.6)，我们进行逆变换得到

$$F(t) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \tag{11.29}$$

这与通过留数定理（第 7.1 节）得到的结果一致。这里假设 $F(t)$ 中 $t>0$。对于 $F(-t)$，我们只需注意 $\sin(-tx) = -\sin tx$，得到 $F(-t) = -F(t)$。最后，如果 $t=0$，$F(0)$ 显然为零。因此

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx = \frac{\pi}{2}[2u(t)-1] = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t>0 \\ 0, & t=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & t<0 \end{cases} \tag{11.30}$$

其中 $u(t)$ 是单位阶跃函数。

## 11.3 导数的拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的主要应用之一是将微分方程转换为更简单的形式，从而更容易求解。例如，常系数耦合微分方程会变换为联立线性代数方程。

让我们变换 $F(t)$ 的一阶导数：

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{dF(t)}{dt}dt \tag{11.31}$$

通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F'(t)\} &= e^{-st}F(t)\big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \\ &= s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0).\end{aligned} \tag{11.32}$$

严格来说，$F(0) = F(+0)$，并且要求 $dF/dt$ 在 $0 \le t < \infty$ 上至少是分段连续的。自然，$F(t)$ 及其导数都必须使得积分不发散。推广可得：

$$\mathcal{L}\left\{F^{(2)}(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(+0) - F'(+0), \tag{11.33}$$

$$\mathcal{L}\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(+0) - \cdots - F^{(n-1)}(+0) \tag{11.34}$$

拉普拉斯变换，像傅里叶变换一样，用乘法代替了微分。注意初始条件 $F(+0), F'(+0)$ 等是如何并入变换中的。

(11.33)可用于推导 $\mathcal{L}\{\sin kt\}$。我们使用恒等式

$$-k^2\sin kt = \frac{d^2}{dt^2}\sin kt \tag{11.35}$$

然后应用拉普拉斯变换运算，我们有

$$-k^2\mathcal{L}\{\sin kt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\sin kt\right\} \tag{11.36}$$
$$= s^2\mathcal{L}\{\sin kt\} - s\sin(0) - \left.\frac{d}{dt}\sin kt\right|_{t=0}$$

由于 $\sin(0) = 0$ 且 $d/\,dt\sin kt|_{t=0} = k$，

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}, \tag{11.37}$$

这与(11.16)一致。

### 11.3.1 示例 1：简谐振子

一个物理例子，考虑一个质量为 $m$ 的物体在理想弹簧（弹簧常数为 $k$）的作用下振动。忽略摩擦。牛顿第二定律变为

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} + kX(t) = 0 \tag{11.38}$$

初始条件为

$$X(0) = X_0, \quad X'(0) = 0 \tag{11.39}$$

应用拉普拉斯变换，我们得到

$$m\mathcal{L}\left\{\frac{d^2X}{dt^2}\right\} + k\mathcal{L}\{X(t)\} = 0 \tag{11.40}$$

利用(11.33)，这变为

$$m[s^2x(s) - sX_0 - X'(0)] + kx(s) = 0 \tag{11.41}$$

代入初始条件 $X'(0) = 0$:

$$ms^2x(s) - msX_0 + kx(s) = 0 \tag{11.42}$$

$$x(s) = X_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad \text{其中}\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \tag{11.43}$$

从(11.15)可以看出这是 $\cos\omega_0 t$ 的变换，因此

$$X(t) = X_0\cos\omega_0 t \tag{11.44}$$

这与预期相符。

### 11.3.2 示例 2：冲激力

作用于质量为 $m$ 的质点上的冲激力的牛顿第二定律变为

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = P\delta(t) \tag{11.45}$$

其中 $P$ 是一个常数，$\delta(t)$ 是狄拉克 $\delta$ 函数。变换后得到

$$m[s^2x(s) - sX(0) - X'(0)] = \mathcal{L}\{P\delta(t)\} \tag{11.46}$$

假设 $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$。对于从静止开始的粒子，$X(0) = 0, X'(0) = 0$。则

$$ms^2x(s) = P \tag{11.47}$$

$$x(s) = \frac{P}{ms^2} \tag{11.48}$$

根据(11.18) $(n = 1)$，并注意到 $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$，

$$X(t) = \frac{P}{m}t \tag{11.49}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{P}{m}, \quad \text{一个常数} \tag{11.50}$$

冲激 $P\delta(t)$ 的效应是（瞬时地）将 $P$ 单位的线性动量传递给粒子。

## 11.4 其他性质

### 11.4.1 s-位移 (Substitution)

如果我们将拉普拉斯变换定义（(11.1)）中的参数 $s$ 替换为 $s-a$，我们有

$$\begin{aligned} f(s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}F(t)dt \\ &= \mathcal{L}\left\{e^{at}F(t)\right\} \end{aligned} \tag{11.51}$$

因此,将 $s$ 替换为 $s-a$ 对应于将 $F(t)$ 乘以 $e^{at}$,反之亦然。从(11.16)和(11.15)我们立刻得到:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\sin kt\right\} = \frac{k}{(s-a)^2+k^2} \tag{11.52}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos kt\right\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}, \quad s > a \tag{11.53}$$

**示例：阻尼振子**

当考虑带有与速度成正比的阻尼的振荡质量时，这些表达式很有用。运动方程变为

$$mX''(t)+bX'(t)+kX(t)=0 \tag{11.54}$$

其中 $b$ 是比例常数。假设粒子从 $X(0)=X_0, X'(0)=0$ 开始运动。变换后的方程是

$$m\left[s^2x(s)-sX_0\right]+b\left[sx(s)-X_0\right]+kx(s)=0 \tag{11.55}$$

于是

$$x(s)=X_0\frac{ms+b}{ms^2+bs+k}=X_0\frac{s+b/m}{s^2+(b/m)s+k/m} \tag{11.56}$$

这可以通过对分母配方来处理：

$$s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}=\left(s+\frac{b}{2m}\right)^2+\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right) \tag{11.57}$$

如果阻尼较小，$b^2<4mk$，最后一项为正，记为 $\omega_1^2$：

$$\begin{aligned}x(s)&=X_0\frac{s+b/m}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}\\&=X_0\frac{s+b/2m}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}+X_0\frac{b/(2m)}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}\\&=X_0\frac{s+b/2m}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}+X_0\frac{b/(2m\omega_1)\cdot\omega_1}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}\end{aligned} \tag{11.58}$$

利用(11.52)和(11.53)，可以得到 $X(t)=X_0e^{-(b/2m)t}\left(\cos\omega_1t+\frac{b}{2m\omega_1}\sin\omega_1t\right)$。

### 11.4.2 t-位移 (Translation / Heaviside Shifting Theorem)

这次让 $f(s)$ 乘以 $e^{-bs}, b>0$：

$$\begin{aligned}e^{-bs}f(s)&=e^{-bs}\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt\\&=\int_0^\infty e^{-s(t+b)}F(t)dt\end{aligned} \tag{11.59}$$

现在令 $t+b=\tau$。(11.59)变为

$$\begin{aligned}e^{-bs}f(s)&=\int_b^\infty e^{-s\tau}F(\tau-b)d\tau\\&=\int_0^\infty e^{-s\tau}F(\tau-b)u(\tau-b)d\tau\end{aligned} \tag{11.60}$$

其中 $u(\tau-b)$ 是单位阶跃函数，定义为 $u(x)=1$ 若 $x\geq 0$，$u(x)=0$ 若 $x<0$。由于假设当 $t<0$ 时 $F(t)=0$，因此当 $0\leq\tau<b$ 时 $F(\tau-b)=0$。所以我们可以将积分下限扩展到零而不改变积分的值。然后，注意到 $\tau$ 只是一个积分变量，我们得到

$$e^{-bs}f(s)=\mathcal{L}\{F(t-b)u(t-b)\} \tag{11.61}$$

### 11.4.3 变换的微分 (Derivative of a Transform)

当 $F(t)$ 至少是分段连续的，且 $s$ 的选择使得 $e^{-st}F(t)$ 对大的 $s$ 呈指数收敛时，积分

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \tag{11.62}$$

是一致收敛的，并且可以（在积分号下）对 $s$ 微分。那么

$$f'(s)=\int_0^\infty(-t)e^{-st}F(t)dt=\mathcal{L}\{-tF(t)\} \tag{11.63}$$

继续这个过程，我们得到

$$f^{(n)}(s)=\mathcal{L}\left\{(-t)^nF(t)\right\} \tag{11.64}$$

这个技巧也可以用来生成更多的变换。例如，

$$\mathcal{L}\left\{e^{kt}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt=\frac{1}{s-k},\quad s>k \tag{11.65}$$

对 $s$ 微分（或对 $k$ 微分），我们得到

$$\mathcal{L}\left\{te^{kt}\right\}=\frac{1}{(s-k)^2},\quad s>k \tag{11.66}$$

### 11.4.4 变换的积分 (Integration of Transforms)

同样，当 $F(t)$ 至少是分段连续的，且 $x$ 足够大以至于 $e^{-xt}F(t)$ 呈指数递减（当 $x\to\infty$ 时），积分

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}F(t)dt \tag{11.67}$$

关于 $x$ 是一致收敛的。这证明了在下式中交换积分顺序的合理性：

$$\begin{aligned}\int_s^b f(x)dx&=\int_s^b dx\int_0^\infty dte^{-xt}F(t)\\&=\int_0^\infty F(t)\left[\int_s^b e^{-xt}dx\right]dt\\&=\int_0^\infty F(t)\left[-\frac{1}{t}e^{-xt}\right]_s^b dt\\&=\int_0^\infty\frac{F(t)}{t}\left(e^{-st}-e^{-bt}\right)dt\end{aligned} \tag{11.68}$$

下限 $s$ 的选择要足够大，以使 $f(s)$ 在一致收敛区域内。现在令 $b\to\infty$，我们有

$$\int_s^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} \tag{11.69}$$

前提是 $F(t)/t$ 在 $t=0$ 时有限，或者发散程度弱于 $t^{-1}$（这样 $\mathcal{L}\{F(t)/t\}$ 才会存在）。

## 11.5 卷积定理 (Convolution Theorem)

拉普拉斯变换最重要的性质之一是卷积定理。我们取两个变换，

$$f_1(s) = \mathcal{L}\{F_1(t)\} \quad 和 \quad f_2(s) = \mathcal{L}\{F_2(t)\} \tag{11.70}$$

并将它们相乘。

$$\begin{aligned} f_1(s)f_2(s) &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}\left(\int_0^t F_1(t-z)F_2(z)dz\right)dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t F_1(t-z)F_2(z)dz\right\} \end{aligned} \tag{11.71}$$

这个积分 $\int_0^t F_1(t-z)F_2(z)dz$ 通常记为 $(F_1 * F_2)(t)$，称为 $F_1$ 和 $F_2$ 的卷积。因此，卷积定理也写作：

$$\mathcal{L}\{(F_1 * F_2)(t)\} = \mathcal{L}\{F_1(t)\}\mathcal{L}\{F_2(t)\} \tag{11.72}$$

### 11.5.1 示例：有阻尼的受驱振子

作为卷积定理应用的一个例子，让我们回到弹簧上的质量 $m$，带有阻尼和驱动力 $F(t)$。运动方程现在变为

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = F(t) \tag{11.73}$$

为简化说明，使用初始条件 $X(0)=0, X'(0)=0$。变换后的方程是

$$ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) = f(s) \tag{11.74}$$

或者

$$x(s) = \frac{f(s)}{ms^2+bs+k} = f(s)\cdot\frac{1}{m}\frac{1}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2} \tag{11.75}$$

其中 $\omega_1^2 \equiv k/m - b^2/4m^2$，如前。令 $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{m}\frac{1}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}\right\} = \frac{1}{m\omega_1}e^{-(b/2m)t}\sin\omega_1 t$。根据卷积定理 ((11.71) 或 (11.72))，

$$X(t) = \int_0^t F(t-z)G(z)dz = \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t F(t-z)e^{-(b/2m)z}\sin\omega_1 z dz \tag{11.76}$$

如果力是冲激力，$F(t) = P\delta(t)$，则 $f(s) = P$。

$$X(t) = \frac{1}{m\omega_1}\int_0^t P\delta(t-z)e^{-(b/2m)z}\sin\omega_1 z dz \tag{11.77}$$

利用 $\delta$ 函数的筛选性质 $\int_0^t g(z)\delta(t-z)dz = g(t)$ (假设 $0 < t$)，

$$X(t) = \frac{P}{m\omega_1}e^{-(b/2m)t}\sin\omega_1 t \tag{11.78}$$

## 11.6 拉普拉斯逆变换

### 11.6.1 Bromwich 积分

我们现在推导拉普拉斯逆变换 $\mathcal{L}^{-1}$ 的表达式：

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} \tag{11.79}$$

一种方法是通过傅里叶变换，我们知道其逆关系。但是存在一个困难：傅里叶可变换函数必须满足狄利克雷条件，特别是要求 $\lim_{\omega\to\infty} G(\omega) = 0$。现在我们希望处理可能指数发散的函数 $F(t)$。为了克服这个困难，我们从（可能）发散的拉普拉斯函数中提取一个指数因子 $e^{\gamma t}$，并写作

$$F(t) = e^{\gamma t}G(t) \tag{11.80}$$

如果 $F(t)$ 以 $e^{\alpha t}$ 的形式发散，我们要求 $\gamma > \alpha$ 以使 $G(t)$ 收敛。现在，当 $t < 0$ 时 $G(t) = 0$，并且在其他方面受到适当限制，使其可以由傅里叶积分表示：

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}du\int_0^{\infty} G(v)e^{-iuv}dv \tag{11.81}$$

使用(11.80)，我们可以将(11.81)改写为

$$F(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}du\int_0^{\infty} F(v)e^{-\gamma v}e^{-iuv}dv \tag{11.82}$$

现在，通过变量代换

$$s = \gamma + iu, \tag{11.83}$$

关于 $v$ 的积分就变成了拉普拉斯变换的形式：

$$\int_0^{\infty} F(v)e^{-sv}dv = f(s) \tag{11.84}$$

$s$ 现在是一个复变量，且 $\Re(s) = \gamma$ 以保证收敛。由于 $\gamma$ 是常数，$ds = idu$。将(11.84)和 $ds = idu$ 代入(11.82)，我们得到

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}f(s)ds \tag{11.85}$$

这就是我们的逆变换，通常称为 Bromwich 积分。积分路径是复平面中的一条无限垂直线，常数 $\gamma$ 的选择要使得 $f(s)$ 的所有奇点都在该路径的左侧。这个积分可以用留数定理（第七章）的方法计算。如果 $t>0$，可以通过在左半平面添加一个无穷大的半圆来闭合围线。然后根据留数定理

$$F(t)=\sum(\text{包含在}\Re(s)<\gamma\text{ 内的留数}) \tag{11.86}$$

### 11.6.2 示例：通过留数计算逆变换

如果 $f(s)=a/\left(s^2-a^2\right)$，则

$$e^{st}f(s)=\frac{ae^{st}}{s^2-a^2}=\frac{ae^{st}}{(s+a)(s-a)} \tag{11.87}$$

奇点（极点）是 $s=a$ 和 $s=-a$（均为单极点）。在 $s=a$ 处的留数为 $\lim_{s\to a}(s-a)\frac{ae^{st}}{(s+a)(s-a)}=\frac{ae^{at}}{2a}=\frac{1}{2}e^{at}$。在 $s=-a$ 处的留数为 $\lim_{s\to -a}(s+a)\frac{ae^{st}}{(s+a)(s-a)}=\frac{ae^{-at}}{-2a}=-\frac{1}{2}e^{-at}$。那么

$$F(t)=\text{留数之和}=\frac{1}{2}e^{at}-\frac{1}{2}e^{-at}=\sinh at \tag{11.88}$$

这与(11.12) (令 $k=a$) 的逆变换结果一致。