数学物理方法（上）第一次作业

北京大学物理学院　2400011418　姓名：李天笑*

2025 年 3 月 3 日

题 1. 证明

$$|\sinh y| \le |\cos(x+iy)| \le \cosh y, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

解.

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$|\cos(x+iy)| = \sqrt{\cos^2(x)\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y)}$$

又有

$$\sinh^2(y) \le \cosh^2(y)$$

故

$$|\sinh y| \le |\cos(x+iy)| \le \cosh y$$

□

题 2. 求 $\tan(2-i)$ 的实部和虚部。

解.

$$\begin{aligned}\tan(x+iy) =& \frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} \\ =& \frac{\sin(x)\cos(iy)+\cos(x)\sin(iy)}{\cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy)} \\ =& \frac{\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)}{\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)} \\ =& \frac{\sin(x)\cos(x)+i\sinh(y)\cosh(y)}{\cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y)} \\ =& \frac{\sin(2x)+i\sinh(2y)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}\end{aligned}$$

故

$$\tan(2-i) = \frac{\sin(4)-i\sinh(2)}{\cos(4)+\cosh(2)}$$

*2400011418@stu.pku.edu.cn

$$\operatorname{Re}(\tan(2-i)) = \frac{\sin(4)}{\cos(4)+\cosh(2)}$$

$$\operatorname{Im}(\tan(2-i)) = -\frac{\sinh(2)}{\cos(4)+\cosh(2)}$$

□

题 3. 求解方程 $\cos z = 4$

解.

$$e^{iz} + e^{-iz} = 8$$

令 $e^{iz} = u$，则

$$u^2 - 8u + 1 = 0$$

解得

$$u = 4 \pm \sqrt{15} = e^{iz}$$

故

$$z = 2k\pi \pm i\ln(4+\sqrt{15}) \qquad k = 0、\pm 1、\pm 2\cdots$$

□

题 4. 判断 $\ln(\sin(iz))$ 是否是多值函数。

解. 取 $z = \epsilon e^{i(\theta+2k\pi}$，则

$$\ln(\sin(iz)) = \ln\left(\sin(\epsilon e^{i(\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi)})\right)$$

ϵ 趋于 0 时,

$$\ln(\sin(iz)) = \ln(\epsilon\sin(\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi)) = \ln r + i(\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

即当 z 绕原点转一圈时，函数值发生变化，故 $\ln(\sin(iz))$ 是多值函数。

□

题 5. 找出 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 的支点，并讨论绕其中任意一个支点，任意两个支点，任意三个支点移动一周回到原处后多值函数的变化。画出割线。

显然 $z=a$, $z=b$ 为支点，令 $z=\frac{1}{t}$,

$$\sqrt[3]{(z-a)(z-b)} = \sqrt[3]{\frac{(1-at)(1-bt)}{t^2}}$$

取 $t=\epsilon e^{i\theta}$,t 绕原点转一圈，函数分母值不变，分子相位改变 $\frac{4\pi}{3}$
故 $t=0$ 为支点, 即无穷远点是 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 的支点。
综上，函数 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 的支点为 a，b，∞，割线取作 $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$。

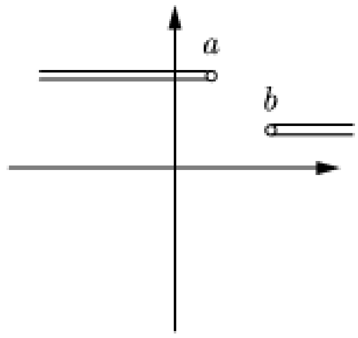

图 1: 割线

绕一个支点移动一周，函数值辐角变化 $\frac{2\pi}{3}$
绕两个支点移动一周, 函数值辐角变化 $\frac{4\pi}{3}$
绕三个支点移动一周，函数值辐角变化 2π，函数值还原。

解. □

题 6. 找出 $\sqrt{\tan z}$ 的所有支点并画出割线。

解. 函数 $\sqrt{\tan z}$ 的零点为 $z = n\pi$，$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$，奇点为 $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$，$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$。

对于 $z = n\pi$，$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$，取 $z = n\pi + \epsilon e^{i(\theta+2k\pi)}$，$\epsilon$ 趋于 0 时，

$$\sqrt{\tan z} = \sqrt{\tan\left(n\pi + \epsilon e^{i\theta}\right)} = \sqrt{\epsilon} e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$$

故 z 绕 $n\pi$ 转一圈，函数值发生变化，故 $z = n\pi$ 为支点。

对于 $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$，$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$，取 $z = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i(\theta+2k\pi)}$，$\epsilon$ 趋于 0 时，

$$\sqrt{\tan z} = \sqrt{\tan\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \epsilon e^{i\theta}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$$

故 z 绕 $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 转一圈，函数值发生变化，故 $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ 为支点。

综上，函数 $\sqrt{\tan z}$ 的支点为 $z = n\pi$，$z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$，割线取作 $(n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$。

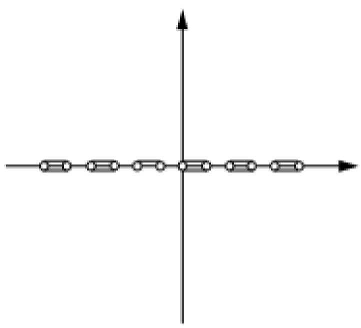

图 2: 割线

□

题 7. 已知多值函数 $f(z) = z^p(1-z)^{-p}$，p 为实数。若在实轴上沿 *0* 到 *1* 作割线，规定在割线上岸 $\arg z = \arg(1-z) = 0$。求 $f(\pm i)$ 和 $f(\infty)$。

解. 在割线上岸 $\arg z = \arg(1-z) = 0$

(1)z 从 $z=0$ 在上方连续的变到 $z=i$，$\arg z$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，故

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$1-z$ 从 $1-z=1$ 连续的变到 $1-z=1-i$，$\arg(1-z)$ 从 0 变到 $-\frac{\pi}{4}$，故

$$1-z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$f(i) = i^p(1-i)^{-p} = e^{i\frac{\pi}{2}p}\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{-p} = 2^{-\frac{p}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}p}$$

(2)z 从 $z=0$ 在上方连续的变到 $z=-i$，$\arg z$ 从 0 变到 $\frac{3\pi}{2}$，故

$$z = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$1-z$ 从 $1-z=1$ 连续的变到 $1-z=1+i$，$\arg(1-z)$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$，故

$$1-z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$f(-i) = i^p(1-i)^{-p} = e^{i\frac{3\pi}{2}p}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{-p} = 2^{-\frac{p}{2}}e^{i\frac{5\pi}{4}p}$$

(3) 在无穷远点，

z 从 0 变到无穷远点，$\arg z$ 从 0 变到 θ $1-z$ 从 1 变到 $(1-z)$, $\arg(1-z)$ 从 0 变到 $-\pi+\theta$

$$f(z) = \frac{z^p}{(1-z)^p} = e^{i\theta p}e^{-i(-\pi+\theta)p} = e^{i\pi p}$$

□

题 8. 证明莫比乌斯变换 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 一般来说将圆映射成圆。

令 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 为莫比乌斯变换，其逆变换为

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a} for bc-ad \neq 0$$

若 z 在圆上，满足 $|z-z_0| = r$，则

$$\left|\frac{dw-b}{-cw+a} - z_0\right| = r$$

$$\frac{|(d+cz_0)w-(b+az_0)|}{|-cw+a|} = r$$

令 $A = d+cz_0$，$B = b+az_0$，则

$$|Aw-B| = r\,|cw-a|$$

$$\left|w - \frac{B}{A}\right| = r\left|\frac{c}{A}\right|\left|w - \frac{a}{c}\right|$$

由阿波罗尼斯圆定理，w 仍然满足圆方程，w 仍然满足圆方程，故莫比乌斯变换将圆映射成圆。

另解：

将莫比乌斯变换写成 $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$ 的形式。其中

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} z$$

$$f_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

f_1 是平移，f_2 是倒数，f_3 是缩放，f_4 是平移，故 f 是圆映射成圆。

显然 f_1，f_3，f_4 都是圆映射，下面说明 f_2 是圆映射。

设 $w = \frac{1}{z}$，则 $z = \frac{1}{w}$. 设 z 在圆上，满足 $|z - z_0| = r$，则

$$\left| \frac{1}{w} - z_0 \right| = r$$

$$\left| w - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{r}{|z_0|} |w|$$

w 仍然满足圆方程，故 f_2 是圆映射。故莫比乌斯变换将圆映射成圆。

解. □

题 9. 令 $f(z) = z^{\Delta}$，其中 $\Delta > 0$。取割线为 *0* 到 $-\infty$。

在一个单值分支内计算

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \left(f(-1 - i\epsilon) - f(-1 + i\epsilon) \right)$$

极限表示 ϵ 是无穷小正整数. 结果用三角函数表示。

解. $f(z) = z^{\Delta} = e^{\Delta \ln z}$，取割线为 0 到 $-\infty$，则在一个单值分支内，有 $\arg z \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$，故

$$-1 - i\epsilon = \sqrt{1 + \epsilon^2} e^{-i(\pi - \arcsin \epsilon) + i2k\pi}$$

$$-1 + i\epsilon = \sqrt{1 + \epsilon^2} e^{i(\pi - \arcsin \epsilon) + i2k\pi}$$

$$\begin{aligned} f(-1 - i\epsilon) - f(-1 + i\epsilon) =& e^{\Delta\left(\ln\left(\sqrt{1+\epsilon^2}\right) - i(\pi - \arcsin \epsilon) + i2k\pi\right)} - e^{\Delta\left(\ln\left(\sqrt{1+\epsilon^2}\right) + i(\pi - \arcsin \epsilon) + i2k\pi\right)} \\ =& e^{\Delta\left(\ln\left(\sqrt{1+\epsilon^2}\right) + i2k\pi\right)} \left(e^{-i\Delta(\pi - \arcsin \epsilon)} - e^{i\Delta(\pi - \arcsin \epsilon)} \right) \\ =& -2ie^{\Delta\left(\ln\left(\sqrt{1+\epsilon^2}\right) + i2k\pi\right)} \sin(\Delta(\pi - \arcsin \epsilon)) \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \left(f(-1 - i\epsilon) - f(-1 + i\epsilon) \right) = -2ie^{i2\Delta k\pi} \sin(\Delta\pi)$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ □

题 10. 寻找一个支点在 $\pm a$ 的函数 $f(z)$，割线取作 $(-a,a)$，要求在单值分支内满足：

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)\right)=\begin{cases} e^x & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$$

解. 先考察 $f(z)=e^z\ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right)$。

$$f(x+i\epsilon)=e^x\ln\left(\frac{x+a+i\epsilon}{x-a+i\epsilon}\right)，\ f(x-i\epsilon)=e^x\ln\left(\frac{x+a-i\epsilon}{x-a-i\epsilon}\right)$$

在一个单值分支内，对于 $|x|<a$，有

$$x+a+i\epsilon=x+a，\ x-a+i\epsilon=(a-x)e^{i\pi}$$

$$x+a-i\epsilon=(x+a)e^{i2\pi}，\ x-a-i\epsilon=(a-x)e^{i\pi}$$

$$f(x+i\epsilon)=e^x\ln\left(\frac{x+a}{a-x}\right)-i\pi e^x，\ f(x-i\epsilon)=e^x\ln\left(\frac{x+a}{a-x}\right)+i\pi e^x$$

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)\right)=-2i\pi e^x$$

对于 $|x|>a$，有

$$x+a+i\epsilon=x+a，\ x-a+i\epsilon=x-a$$

$$x+a-i\epsilon=(x+a)e^{i2\pi}，\ x-a-i\epsilon=(x-a)e^{i2\pi}$$

$$f(x+i\epsilon)=e^x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)，\ f(x-i\epsilon)=e^x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)\right)=0$$

为满足题目条件，取 $f(z)=\frac{i}{2\pi}e^z\ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right)$，此时有在一个单值分支内

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(f(x+i\epsilon)-f(x-i\epsilon)\right)=\begin{cases} e^x & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$$

□

题 11. *(选做)* 比较课上讲过的各种复变函数可视化方式，哪种更容易帮助找到多值函数的支点？如何画出 $\sqrt{z}$ 的黎曼面？

解.

(1)domain coloring 更容易帮助找到多值函数的支点，可以通过图形的颜色变换看出来函数的支点

(2) 若要画出函数 $\sqrt{z}$ 的黎曼面，先找到 $\sqrt{z}$ 的支点以及单值分支

支点为 $z=0$，$z=\infty$，两个单值分支上函数的形式分别为

$$f(z)=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}，\ f(z)=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+i\pi}$$

可以将 $f(z)=\sqrt{z}$ 的两个分支分别绘制在三维空间中的不同高度上，从而形成一个完整的黎曼面。 □