Chapter 7

解析延拓，伽马函数和黎曼 zeta 函数

7.1 引言：素数与 Zeta 函数

素数，作为整数通过乘法构成的基石，几千年来一直吸引着数学家。一个核心问题是：素数在整数中是如何分布的？虽然它们的序列在局部看起来不规则，但在全局上存在模式。

18 世纪，高斯和勒让德推测，不超过 x 的素数数量，记作 $\pi(x)$，大约为 $x/\ln x$。这在 19 世纪末被严格证明（素数定理）。

伯恩哈德 · 黎曼在他开创性的 1859 年论文中，将素数的研究与一个复变量函数联系起来，这个函数现在被称为黎曼 Zeta 函数。

定义 23 (黎曼 Zeta 函数（初始定义）) 对于复数 $s = \sigma + it$，其实部 $Re(s) = \sigma > 1$，黎曼 *Zeta* 函数定义为绝对收敛的级数：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{7.1}$$

其中 $n^s = e^{s \ln n} = e^{(\sigma+it)\ln n} = e^{\sigma \ln n} e^{it \ln n} = n^\sigma(\cos(t\ln n) + i\sin(t\ln n))$。

黎曼证明了这个函数可以被扩展（解析延拓）到几乎整个复平面，并且它的性质，特别是其零点的位置，蕴含着关于素数的深刻信息。

7.2 素数计数函数

定义 24 (素数计数函数) $\pi(x)$ 计算小于或等于 x 的素数个数，其中 $x \in \mathbb{R}^+$。

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \mid p \text{ 是素数}\} \tag{7.2}$$

定理 37 (素数定理 (PNT)) 素数计数函数渐近于 $x/\ln x$：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1 \tag{7.3}$$

这通常写作 $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$。一个更好的近似是对数积分函数 $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$。

虽然 $\pi(x)$ 直接计算素数，但在技术上，使用加权计数通常更方便。

定义 25 (冯 · 曼戈尔特函数 (von Mangoldt Function)) 冯 · 曼戈尔特函数 $\Lambda(n)$ 定义于整数 $n \geq 1$：

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & 若 n = p^k \text{ 对于某个素数} p \text{ 和整数} k \geq 1 \\ 0 & \text{其它情况} \end{cases} \tag{7.4}$$

$\Lambda(n)$ 挑出素数幂，并用对应素数的对数进行加权。

定义 26 (第二切比雪夫函数 (Second Chebyshev Function)) (第二) 切比雪夫函数 $\psi(x)$ 是冯 · 曼戈尔特函数的求和函数：

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k\leq x} \ln p \tag{7.5}$$

讨论 10 和 $\psi(x)$ 主要由 $k = 1$ 的项（即素数本身）贡献。高次素数幂 ($k \geq 2$) 的贡献要小得多。具体来说，$\sum_{p^k\leq x, k\geq 2} \ln p = O(\sqrt{x}\ln x)$。这意味着 $\psi(x)$ 的行为与 $\sum_{p\leq x} \ln p$ 非常相似。素数定理等价于 $\psi(x) \sim x$。

7.3 黎曼 Zeta 函数的性质

7.3.1 收敛性与欧拉乘积

引理 3 (收敛域) 狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 在 $Re(s) > 1$ 时绝对收敛，在 $Re(s) \leq 1$ 时发散。

证明 10 令 $s = \sigma + it$。各项的绝对值为 $|1/n^s| = |1/e^{s\ln n}| = |1/(n^\sigma e^{it\ln n})| = 1/n^\sigma$。绝对值级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$。根据积分判别法，此级数收敛当且仅当积分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^\sigma} dx$ 收敛。

- 若 $\sigma > 1$: $\int_1^\infty x^{-\sigma} dx = [\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}]_1^\infty = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{1}{1-\sigma} = 0 - \frac{1}{1-\sigma} = \frac{1}{\sigma-1}$ （收敛，因为 $1 - \sigma < 0$）。
- 若 $\sigma = 1$: $\int_1^\infty x^{-1} dx = [\ln x]_1^\infty = \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \infty$ （发散）。
- 若 $\sigma < 1$: $1 - \sigma > 0$，所以 $\int_1^\infty x^{-\sigma} dx = [\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}]_1^\infty = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{1}{1-\sigma} = \infty$ （发散）。

因此，该级数在 $Re(s) = \sigma > 1$ 时绝对收敛，在 $Re(s) = \sigma \leq 1$ 时发散。

通过欧拉乘积公式建立了与素数的联系。

定理 38 (欧拉乘积公式) 对于 $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ 素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{7.6}$$

证明 11 从 $Re(s) > 1$ 时的 $\zeta(s)$ 开始。

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

乘以 $(1/2^s)$:

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots$$

从 $\zeta(s)$ 中减去此式:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \quad \text{(移除了含因子 2 的项)}$$

现在乘以 $(1/3^s)$:

$$\frac{1}{3^s}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \dots$$

从上一个结果中减去此式:

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots \quad \text{(移除了含因子 2 或 3 的项)}$$

对所有素数 p 继续这个过程（一个“筛选”过程），我们移除了所有合数，右侧只剩下 *1*。这依赖于算术基本定理（唯一素数分解）。

$$\left(\prod_{p \text{ 素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right)\zeta(s) = 1$$

整理得到欧拉乘积公式:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ 素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

或者，使用等比级数公式 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$（因为 $|p^{-s}| = p^{-\sigma} < 1$ 对于 $\sigma > 1$ 成立而收敛）展开每一项 $(1 - p^{-s})^{-1}$:

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^2)^s} + \frac{1}{(p^3)^s} + \dots\right)$$

当把这些无穷和相乘时，展开式中的一个通用项形式为

$$\frac{1}{(p_1^{k_1})^s}\frac{1}{(p_2^{k_2})^s}\cdots\frac{1}{(p_m^{k_m})^s}=\frac{1}{(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m})^s}$$

根据算术基本定理，每个大于 *1* 的整数 n 都有唯一的素数分解 $n=p_1^{k_1}\dots p_m^{k_m}$。因此，乘积展开式中每一项 $1/n^s$ 恰好出现一次。

这个公式直接将 Zeta 函数与素数联系起来。

推论 5 (Zeta 函数的对数) 对于 $Re(s)>1$:

$$\ln\zeta(s)=-\sum_{p\text{ 素数}}\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \tag{7.7}$$

证明 12 取欧拉乘积（公式 *7.9*）的自然对数。因为 $\ln(\prod x_i)=\sum\ln x_i$ 且 $\ln(x^{-1})=-\ln x$:

$$\ln\zeta(s)=\ln\left(\prod_p(1-p^{-s})^{-1}\right)=\sum_p\ln\left((1-p^{-s})^{-1}\right)=-\sum_p\ln(1-p^{-s})$$

7.3.2 解析延拓与函数方程

定义 $\zeta(s)=\sum n^{-s}$ 仅在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时有效。黎曼证明了 $\zeta(s)$ 可以延拓为一个在 $s=1$ 处的简单极点之外对所有 $s\in\mathbb{C}$ 都定义的函数。这个延拓后的函数满足一个非凡的对称性。

定理 39 (函数方程) 解析延拓后的黎曼 *Zeta* 函数对所有 $s\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 满足以下关系:

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{7.8}$$

另一种通常更对称的形式涉及完备 *Zeta* 函数 $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$，它满足 $\xi(s)=\xi(1-s)$。

证明过程比较复杂，通常使用泊松求和公式或 Theta 函数的性质，超出了本入门讲义的范围。

例子 77 (计算 $\zeta(-1)$) 级数 $\sum n^{-(-1)}=\sum n=1+2+3+\dots$ 显然发散。使用函数方程（公式 *7.11*），我们可以找到一个有意义的值。考虑 $s\to-1$ 的极限。

$$\begin{aligned}\zeta(-1)&=2^{-1}\pi^{-1-1}\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\Gamma(1-(-1))\zeta(1-(-1))\\&=\frac{1}{2\pi^2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(2)\zeta(2)\\&=\frac{1}{2\pi^2}(-1)(1!)\left(\frac{\pi^2}{6}\right)\quad(\text{因为}\Gamma(2)=1!\ \text{且}\zeta(2)=\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6})\\&=\frac{1}{2\pi^2}(-1)(1)\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

这个令人惊讶的结果在物理学中有应用（例如，卡西米尔效应，弦理论）。

7.4 Zeta 函数的零点

$\zeta(s) = 0$ 的位置至关重要。

命题 2 (零点的分类) *$\zeta(s)$ 的零点分为两类：*

1. ***平凡零点 (Trivial Zeros):*** *位于负偶整数处，$s = -2, -4, -6, \dots$。*
2. ***非平凡零点 (Non-trivial Zeros):*** *位于**临界带 (critical strip)** 内，定义为 $0 < Re(s) < 1$。*

此外：

- *对于 $Re(s) > 1$，没有零点。*
- *在直线 $Re(s) = 1$ 上没有零点（由 Hadamard 和 de la Vallée Poussin 证明，等价于素数定理）。*
- *非平凡零点关于实轴对称（因为 $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$）并且关于**临界线 (critical line)** $Re(s) = 1/2$ 对称（由于函数方程 $\xi(s) = \xi(1-s)$）。*

证明 13 (简述)

- ***Re(s) > 1 无零点：*** 在此区域，欧拉乘积 $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ 收敛。每个因子 $(1-p^{-s})^{-1}$ 都非零（因为 $p^{-s} \neq 1$）。收敛的非零项无穷乘积不可能为零。
- **平凡零点：** 考虑函数方程（公式 7.11）。对于 $s = -2m$ 其中 $m \in \mathbb{N}$：项 $\sin(\pi s/2) = \sin(\pi(-2m)/2) = \sin(-m\pi) = 0$。我们必须检查其它项不会引入抵消此零点的极点或零点。$\Gamma(1-s) = \Gamma(1+2m)$ 是有限且非零的。$\zeta(1-s) = \zeta(1+2m)$ 是有限且非零的（因为 $1+2m > 1$）。幂 2^s 和 π^{s-1} 是有限且非零的。因此，对 $m = 1, 2, 3, \dots$，$\zeta(-2m) = 0$。
- **临界带内的非平凡零点：** 如果对于某个 $Re(s) < 0$ 但 $s \neq -2m$ 的 s 有 $\zeta(s) = 0$，那么 $\sin(\pi s/2)$ 项非零。$\Gamma(1-s)$ 项有限非零（因为 $1-s$ 不是 $0, -1, -2, \dots$）。幂 $2^s, \pi^{s-1}$ 非零。因此，$\zeta(s) = 0$ 将意味着 $\zeta(1-s) = 0$。如果 s 满足 $Re(s) < 0$，则 $1-s$ 满足 $Re(1-s) > 1$。但我们知道 ζ 在 $Re(s) > 1$ 时没有零点。这迫使所有其它零点（非平凡零点）必须位于带 $0 \leq Re(s) \leq 1$ 内。$Re(s) = 0$ 和 $Re(s) = 1$ 上无零点的事实将其细化为 $0 < Re(s) < 1$。
- **对称性：** 对称性 $\xi(s) = \xi(1-s)$ 意味着如果 $\xi(\rho) = 0$，则 $\xi(1-\rho) = 0$。由于因子 $s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ 在临界带内非零，$\xi(\rho) = 0 \iff \zeta(\rho) = 0$。因此，如果 ρ 是一个非平凡零点，那么 $1-\rho$ 也是。这显示了关于直线 $Re(s) = 1/2$ 的对称性。

这引出了数学中最著名的未解问题之一：[**黎曼猜想 (The Riemann Hypothesis, RH)**] 黎曼 Zeta 函数 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点都位于临界线 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上。也就是说，如果 $\zeta(\rho) = 0$ 且 $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$，则 $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$。

数十亿个零点已被计算出来，并且都发现在临界线上。然而，证明仍然遥不可及。

7.5 连接零点与素数：明确公式

零点如何与素数相关？这种联系是通过 $\zeta(s)$ 的对数导数和围道积分建立的。

定理 40 (Zeta 函数的对数导数) 对于 $Re(s) > 1$:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{7.9}$$

证明 14 我们从 $Re(s) > 1$ 时的 $\ln\zeta(s) = -\sum_p \ln(1-p^{-s})$ 开始。对两边关于 s 求导。左边是 $\frac{d}{ds}\ln\zeta(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$。对于右边，我们逐项求导（一致收敛性允许这样做）:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(-\sum_p \ln(1-p^{-s})\right) &= -\sum_p \frac{d}{ds}\ln(1-p^{-s}) \\
&= -\sum_p \frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \frac{d}{ds}(1-p^{-s}) \\
&= -\sum_p \frac{1}{1-p^{-s}} \cdot (-\frac{d}{ds}e^{-s\ln p}) \\
&= -\sum_p \frac{1}{1-p^{-s}} \cdot (-(-\ln p)e^{-s\ln p}) \\
&= -\sum_p \frac{\ln p \cdot p^{-s}}{1-p^{-s}}
\end{aligned}$$

现在，使用等比级数展开 $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$，其中 $x = p^{-s}$ （因为 $|p^{-s}| < 1$ 而有效）:

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_p (\ln p \cdot p^{-s}) \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-s})^k \\
&= -\sum_p \ln p \sum_{k=0}^{\infty} p^{-s(k+1)} \\
&= -\sum_p \ln p \sum_{k=1}^{\infty} (p^k)^{-s} \quad \text{(重新索引} k' = k+1) \\
&= -\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln p}{(p^k)^s}
\end{aligned}$$

这个双重求和遍历所有素数幂 $n = p^k$。回想冯 · 曼戈尔特函数的定义：如果 $n = p^k$，$\Lambda(n) = \ln p$，否则为 0。所以这个和恰好是:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

该定理将 Zeta 函数的导数（与其变化率相关，因此对零点/极点敏感）与涉及冯 · 曼戈尔特函数（与素数相关）的和联系起来。

最后一步使用复分析，特别是佩龙公式 (Perron's formula) 和留数定理。我们将公式 7.12 乘以 x^s/s 并在复平面上一个合适的围道 B 上积分。

引理 4 (佩龙公式 - 简化版) 对于 $y > 0$, $c > 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases}1 & 若 y > 1\\ 1/2 & 若 y = 1\\ 0 & 若 0 < y < 1\end{cases}$$

这个积分的作用类似于阶跃函数。

应用这些方法（细节省略，请参阅解析数论的高级教材）可以导出**明确公式 (Explicit Formula)**，它直接将素数计数函数 $\psi(x)$ 与 $\zeta(s)$ 的零点联系起来。

定理 41 (冯 · 曼戈尔特明确公式 (简化版)) 对于 $x > 1$ 且 x 不是素数幂：

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n) = x - \sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}) \tag{7.10}$$

这里，和 $\sum_\rho$ 遍历 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点 ρ，通常按 $\rho, \bar{\rho}$ 成对并按 $|Im(\rho)|$ 递增的顺序排列。项 $\ln(1-x^{-2})$ 与平凡零点有关。

解释：

- 主要项是 x。这对应于素数定理 ($\psi(x) \sim x$)。
- 和 $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$ 代表了素数围绕主要趋势 x 分布的波动或“误差项”。
- 每个非平凡零点 ρ 贡献一个振荡项 x^ρ/ρ。如果 $\rho = \beta + i\gamma$，那么 $x^\rho = x^\beta e^{i\gamma\ln x} = x^\beta(\cos(\gamma\ln x) + i\sin(\gamma\ln x))$。虚部 γ 决定了振荡的频率，实部 β 决定了振幅 x^β。
- **关键在于，黎曼猜想断言对于所有 ρ 都有** $\beta = 1/2$。这意味着波动的幅度增长像 $x^{1/2}$。在 RH 下，明确公式变为：

$$\psi(x) = x - \sum_\gamma\frac{x^{1/2+i\gamma}}{1/2+i\gamma} - \ln(2\pi) - \cdots \approx x + O(\sqrt{x}(\ln x)^2) \tag{7.11}$$

  ($(\ln x)^2$ 因子来自于对零点和的仔细分析)。这为素数定理的误差项提供了最佳可能界限。如果 RH 是错误的，则会存在 $\beta > 1/2$ 的零点，导致更大的波动 x^β。

明确公式表明，素数的精确分布与黎曼 Zeta 函数在临界线上的非平凡零点的位置密切相关。