(4) 双曲三角函数. (虚周期函数)

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cos(-iz)$$

与洛伦兹变换关系.

$$\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\sin(-iz)$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z$$

(5) $\frac{1}{z}$ $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的解析函数.

$$= \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

延展复平面: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$

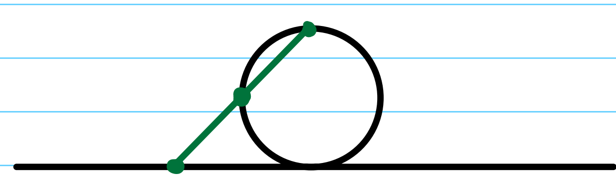
定义: 无穷远点 ∞: 复序列 $\{z_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \text{iff} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|z_n|} = 0$$

对于实轴, 有两种引入 ∞ 的方式

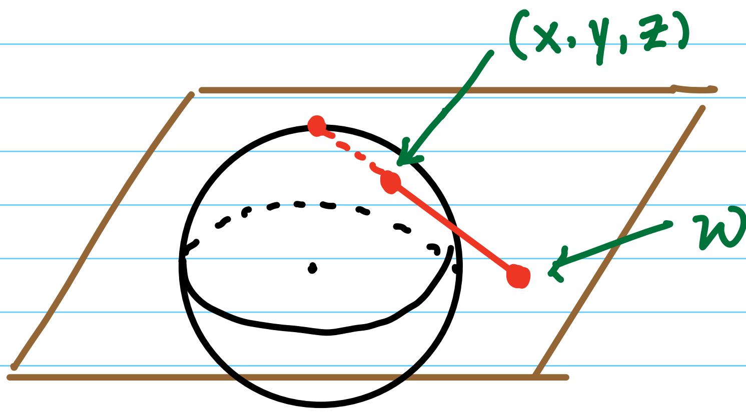
① $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$: 保持序结构.

② $\mathbb{RP}^1$:



由于复平面上无法定义顺序，因此采用②作扩充.

球极投影：



只有一个无穷远点！

$$w = \frac{x+iy}{1-z}$$

如 $f(z) = \frac{1}{z}$

则 $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$

- 复变函数的可视化：

① 3D plot

② domain color plot.

useful for visualing zero / ∞.

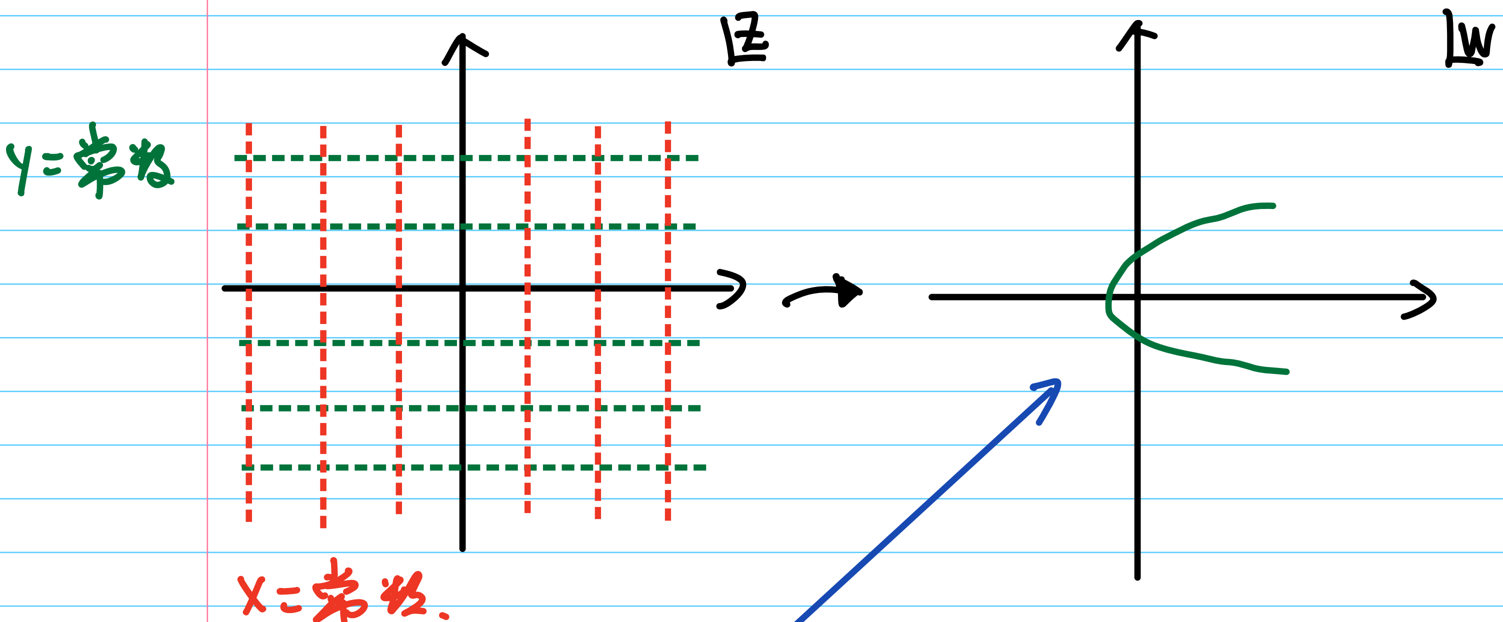
复变函数的可视化.

一、映射.

将复变函数 $w=f(z)$ 视作从 $z\mapsto w$ 的映射

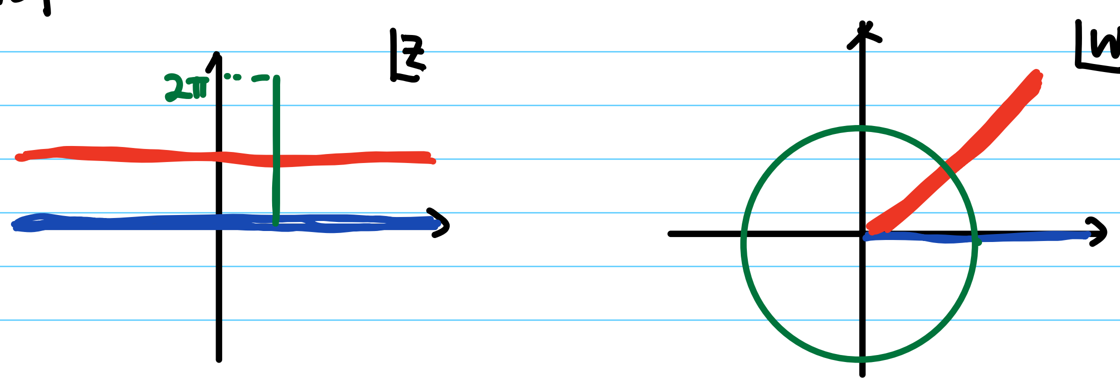
以初等函数为例:

$$w=z^2=x^2-y^2+2ixy$$



$(x^2-c^2,\ 2xc)$ $y=c=$ 常数. $=\frac{1}{2}$

例2: $w=e^z$



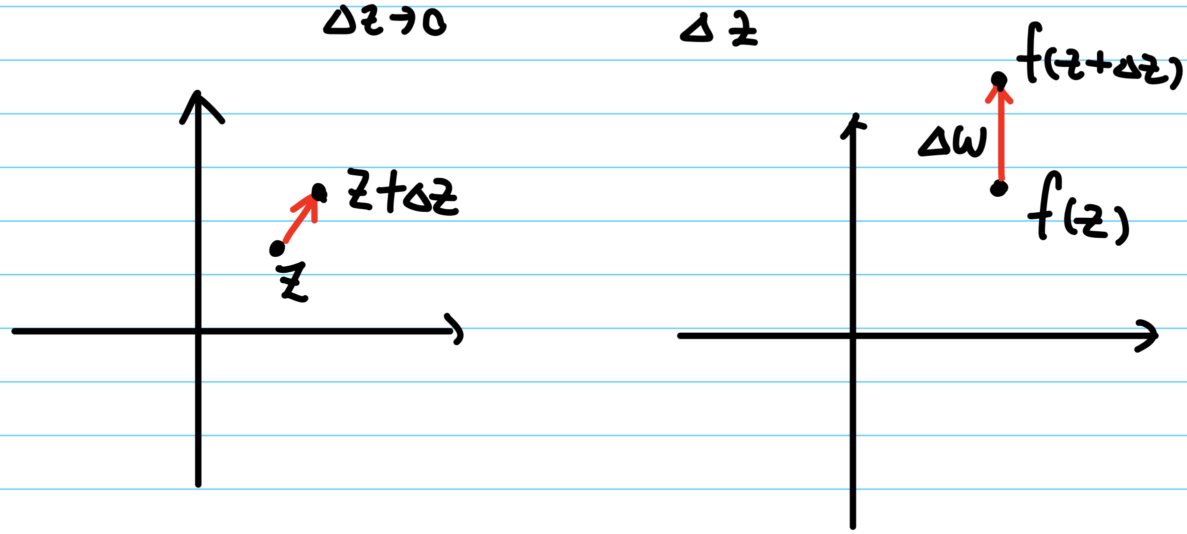
- 解析函数与共形映射.

考虑解析函数 $f(z)$,

映射 $z\mapsto f(z)$ 定义了复平面上的映射,

由导数定义

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$



$$\Delta w = f'(z)\,\Delta z$$

$$= re^{i\phi}\,\Delta z$$

$$\left.\begin{array}{ll} r=|f'(z)| & \text{伸缩} \\ \phi=\operatorname{Arg} f'(z) & \text{旋转.} \end{array}\right\}\ \text{共形映射}\ (\text{保角映射})$$

延展复平面(黎曼球)上的共形变换与物理有密切联系.

- 从洛伦兹变换到莫比乌斯变换.

Mobius: $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$

莫比乌斯变换可通过简单变换的复合得到:

如果 $c \neq 0$:

$f_1(z) = z + \frac{d}{c}$ (平移)

$f_2(z) = \frac{1}{z}$ (反演 + 实轴反射)

$f_3(z) = \dfrac{bc-ad}{c^2} z$ (伸缩 + 旋转)

$f_4(z) = z + \frac{a}{c}$ (平移)

$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

- Mobius变换 将 圆 $\mapsto$ 圆. (exercise)

洛伦兹变换： $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$\begin{array}{cccc} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow \\ ct, & x, & y, & z \end{array}$$

间隔不变性： $\Delta s^2 = (x_1 - x_2)^2$

$$= (x_1^0 - x_2^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_1^i - x_2^i)^2$$

考虑坐标 x^μ 与时空原点的间隔.

$$\Delta s^2 = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2$$

令： $A = x^0 \sigma_0^T + \sum_{i=1}^{3} x^i \sigma_i^T$

$$= \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + i x^2 \\ x^1 - i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

厄米性： $A^\dagger \equiv (A^*)^T = A$

* $\det A = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2$

洛伦兹变换 $x^\mu \mapsto x'^\mu$ 是保持

$$(x'^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x'^i)^2 = 0$$ 的线性变换.

$$A \xrightarrow[\Lambda]{} A' = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 + ix'^2 \\ x'^1 - ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}$$

要求: $(A')^\dagger = A'$, $\det A' = \det A$

不妨设 $A' = U_\Lambda A U_\Lambda^\dagger$

厄米性被保持.

类光间隔条件: $\det A' = \det U_\Lambda \det A \det U_\Lambda^\dagger$

$\Rightarrow \det U_\Lambda = 1$

令 $U_\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\left.\begin{aligned} \det U_\Lambda = ad - bc = 1 \\ a, b, c, d \in \mathbb{C} \end{aligned}\right\} SL(2, \mathbb{C})$

- 与 Mobius 变换的联系.