- 序列例子:

(1) $\{z_n\}$: $z_n = \frac{1}{n}$

(2) $\{z_n\}$: $z_1=1$, $z_{n+1} = \frac{z_n}{2} + \frac{1}{z_n}$,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sqrt{2}$$ Q 不完备!

(3) $z_n = \left(-1 + \frac{i}{n^3}\right)^n$ 极限 $\{\pm 1\}$

(4) $z_1 = 1$, $z_{n+1} = z_n + \frac{1}{z_n}$ 发散.

- 复变函数极限

$f(z)$ 是定义在 $D_\varepsilon(z_0)/\{z_0\}$ 上的复变函数,
如 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$, 使 $\forall |z-z_0|<\delta$, 有
$|f(z)-L|<\varepsilon$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 的极限存在,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L$$

- 极限的方向无关性.

例: $f(z) = z/\bar{z}$ 在 $z=0$ 处的极限是?

• 连续性：

如果$f(z)$在z_0的某个邻域内有定义，且

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

则称$f(z)$在z_0连续。如$f(z)$在D上每点皆连续，则称$f(z)$在D上连续。

* 复导数：

$$f'(z_0)=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z)}{h}}_{\text{极限存在}\Rightarrow f(z)\text{在}z_0\text{可导}}$$

• 如果$f(z)$在区域D上处处可导，则称f是D上的

(1) (复)可导函数

(2) 全纯函数

(3) 解析函数：存在幂级数展开.(举例)

例：$f(z)=z^2$ 在$\mathbb{C}$上可导.

例：$f(z)=\bar{z}$ 在$\mathbb{C}$上不可导.

问题：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的可导性应如何从 u 和 v 反映？

- 柯西-黎曼方程：

$f(z)$ 在 D 上可导的充要条件：

① u, v 及其一阶导数在 D 上存在.

② u, v 满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

缩写：$u_x = v_y$, $u_x = -v_y$

证明：(1) 必要性：

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

不妨令 $h = \Delta x$, $\Delta x \to 0$，则

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x}$$

$$= u_x + iv_x$$

另一方面，令 $h = i\Delta y$, $\Delta y \to 0$，则

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= -iu_y + v_y$$

$$\Rightarrow \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

(2) 充分性：

令 $h = s+it$，$s, t \to 0$，由偏导数存在知

$$u(x+s, y+t) = u(x,y) + su_x + tu_y + \alpha|h|$$

$$v(x+s, y+t) = v(x,y) + sv_x + tv_y + \beta|h|$$

α 和 β 随 $h \to 0$ 而 $\to 0$. 此时，

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{su_x + tu_y + isv_x + itv_y + (\alpha+\beta)|h|}{s+it}$$

$$\overset{C.R.}{=} \lim_{h \to 0} \frac{(s+it)u_x + i(s+it)v_x + (\alpha+\beta)|h|}{s+it}$$

$$= u_x + iv_x$$

类似还有： $f'(z) = -iu_y + v_y$

例： $f(z) = e^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上可导（全纯函数）

例： $f(z) = x^2+y + i(y^2-x)$ 在 $y=x$ 上可导，但不解析.

• 判断函数解析性的更简便方式是Wirtinger微分.

定义: $$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\partial_{\bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

上述定义应在链式法则下理解,

$$x = \frac{1}{2}(z+\bar z), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \dfrac{\partial x}{\partial \bar z}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \bar z}\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

• C-R方程可等价表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{\partial u}{\partial \bar z} + i\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}u_x + \underbrace{\frac{i}{2}u_y + \frac{i}{2}v_x}_{0} - \frac{1}{2}v_y$$

$$\boxed{\partial_{\bar z} f = 0}$$ 全纯函数不显含 $\bar z$ 依赖.

例: $f = x^2+y^2 = z\cdot\bar z$ 不解析

例: $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

$= z^2$ 可导.

$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2iy = 2z = \frac{\partial f}{\partial z}$

- 对于一般的全纯函数,

$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$

即将 $f(z)$ 视作实变量函数并应用实微分公式

证明: $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)$

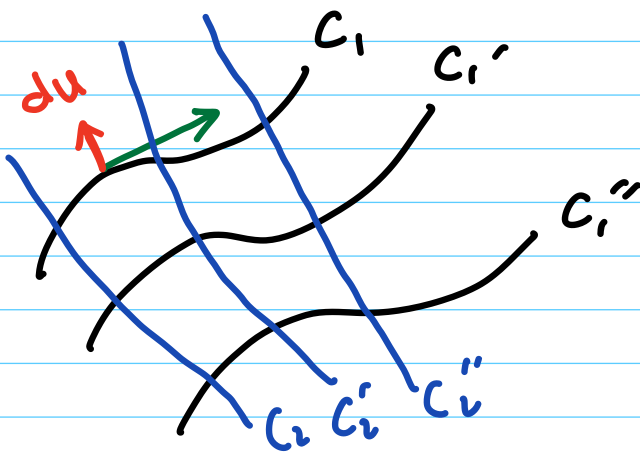
$= \frac{1}{2}u_x + \frac{i}{2}v_x - \frac{i}{2}u_y + \frac{1}{2}v_y$

$= u_x + iv_x = f'(x)$

例: $(z^n)' = nz^n$

- C-R方程的后果
- 解析函数的实部和虚部定义了两组正交曲线族.

$$\begin{cases} u(x,y)=C_1 & ① \\ v(x,y)=C_2 & ② \end{cases}$$ 分别定义了两组曲线族.



①的切线方程:

$$du = u_x dx + u_y dy = \vec{\nabla} u \cdot (dx, dy)$$

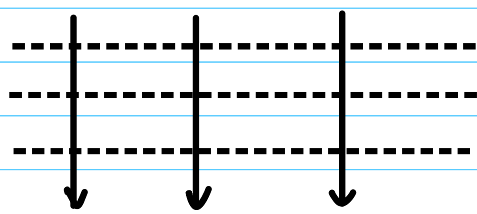
$$\vec{F}_u = \begin{pmatrix} u_y \\ -u_x \end{pmatrix}$$

同理, $\vec{F}_v = \begin{pmatrix} V_y \\ -V_x \end{pmatrix}$

$$\vec{F}_u^T \cdot \vec{F}_v = (u_y, -u_x) \cdot \begin{pmatrix} V_y \\ -V_x \end{pmatrix} = u_y V_y + u_x V_x$$

$$= u_x u_x - u_x u_y = 0$$

- Examples in physics:



等势线 / 势线

电场线 / 流线

- 调和函数.

由 C-R 方程出发,

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x = 0$$

$$\boxed{\Delta u = 0 \qquad \Delta v = 0}$$

解析函数实部和虚部为调和函数.

共轭.

- 求共轭调和函数.

若已知 u, 则

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$$

$$v = \int^{(x,y)} dv + C$$

- 或利用 Wirtinger 微分的性质.

例: 已知 $f(z)$ 的虚部 $V(x,y)=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$,
求 $f(z)$.

解: 利用 $V(x,y)\in\mathbb{R}$ 的条件.

$$V(x,y)=V\left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\right)$$

$$=\sqrt{-\frac{1}{2}(z+\bar{z})+\sqrt{z\bar{z}}}$$

$$=\sqrt{-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{z}-\sqrt{\bar{z}})^2}$$

$$=\frac{-i}{\sqrt{2}}\underbrace{(\sqrt{z}-\sqrt{\bar{z}})}_{\text{纯虚}}$$

$\therefore\quad f(z)=u+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{z}-\sqrt{\bar{z}})+C$

但 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \Rightarrow u=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\bar{z}}$

$\Rightarrow f(z)=\sqrt{2z}+C$

• 一些基本初等全纯函数.

(1) 幂次函数: z^n

(2) 指数函数: $\exp(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

• $\frac{d}{dz}e^z = e^z$

• 当 $n \in \mathbb{Z}$, $(e^z)^n = e^{nz}$

$$\left(e^{1+2i\pi k}\right)^{1+i2\pi k} = e^{1+i2\pi k} = e \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$= e^{(1+2i\pi k)^2} = e^{1+4i\pi k-4\pi^2k^2} = e\cdot e^{-4\pi^2k^2}$$ 矛盾!

(3) 三角函数. (实周期函数)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z$$