数学物理方法（上）第十次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1] 北京大学物理学院

2025 年 5 月 8 日

题 1. *计算积分*

$$\int_{-5}^{1} 8\mathrm{e}^{t^2}\cos t\ \delta(t^2-2)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

解. 根据 δ 函数的性质有

$$\delta(t^2-2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}[\delta(t+\sqrt{2})+\delta(t-\sqrt{2})],$$

由于 $-5<-\sqrt{2}<1$ 而 $\sqrt{2}>1$，因此

$$\int_{-5}^{1} 8\mathrm{e}^{t^2}\cos t\ \delta(t^2-2)\,\mathrm{d}t=\left.\frac{8\mathrm{e}^{t^2}\cos t}{2\sqrt{2}}\right|_{t=-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^2\cos\sqrt{2}.$$

□

题 2. *Dirac 梳是具有等间隔 T 的无穷多 δ 函数*

$$\Delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT), \tag{2}$$

证明 Dirac 梳的 Fourier 变换也是 Dirac 梳.

证明. 根据 Fourier 变换的定义有

$$\mathcal{F}[\Delta_T(t)](\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kT\omega},$$

由于 $\Delta_T(t)$ 是以 T 为周期的函数，于是有 Fourier 级数展开

$$\Delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}t},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}t}\Delta_T(t)=\frac{1}{T},$$

由此可以得到

$$\mathcal{F}[\Delta_T(t)](\omega)=\frac{2\pi}{T}\Delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega).$$

□

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

题 3. 利用 *Fourier* 变换法求解 *Laplace* 方程的 *Green* 函数

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = -\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{3}$$

解. 根据 Fourier 变换的定义，设

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k}) = \int \mathrm{d}^3x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

利用 Fourier 变换的性质可以得到

$$\boldsymbol{k}^2 \tilde{G}(\boldsymbol{k}) = 1,$$

这个方程在广义函数意义下的解为

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\boldsymbol{k}^2} + (2\pi)^3 c_0 \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}) + (2\pi)^3 \mathrm{i}\boldsymbol{c}_1 \cdot \nabla\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}),$$

其中常数 $c_0 \in \mathbb{C}, \boldsymbol{c}_1 \in \mathbb{C}^3$，作 Fourier 逆变换就可以得到

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \left[\frac{1}{\boldsymbol{k}^2} + (2\pi)^3 c_0 \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}) + (2\pi)^3 \mathrm{i}\boldsymbol{c}_1 \cdot \nabla\delta^{(3)}(\boldsymbol{k})\right] \\ &= \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + c_0 + \boldsymbol{c}_1 \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \end{aligned}$$

□

注. 由于 *Green* 函数满足的方程是在广义函数的意义下成立的，因此必须考虑广义函数意义下的解，这也可以包含 *delta* 函数．可以证明方程 $x^n f(x) = 0$ 在广义函数意义下的解是 $f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} c_m\, \partial^m \delta(x)$，证明见 *Rudin*《泛函分析》定理 *6.25*.

题 4. 证明

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x - \mathrm{i}\epsilon} = \delta(x). \tag{4}$$

证明. 定义函数

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x-\mathrm{i}\epsilon} = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2},$$

可以计算得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x = 1,$$

现在任取检验函数 $f(x)$，不妨设 $f(x)$ 仅在 $[-T_0, T_0]$ 上非零，于是对任意 $T > T_0$ 都有

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) f(x)\, \mathrm{d}x - f(0)\right| &= \left|\int_{-T}^{T} \delta_\epsilon(x) f(x)\, \mathrm{d}x - f(0)\right| \\ &\leqslant \left|\int_{-T}^{T} \delta_\epsilon(x)[f(x)-f(0)]\, \mathrm{d}x\right| + \left|1 - \int_{-T}^{T} \delta_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x\right| |f(0)|, \end{aligned}$$

任取 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $T_1 > T_0$ 使得

$$\left|1 - \int_{-T_1}^{T_1} \delta_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x\right| |f(0)| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

根据 $f(x)$ 连续可微，存在 M 使得 $|f(x)-f(0)| = |f'(\xi)||x| < M|x|$，于是

$$\left|\int_{-T_1}^{T_1} \delta_\epsilon(x)[f(x)-f(0)]\, \mathrm{d}x\right| < M \int_{-T_1}^{T_1} \delta_\epsilon(x)|x|\, \mathrm{d}x = \frac{\epsilon}{\pi} \ln\left(1 + \frac{T_1^2}{\epsilon^2}\right),$$

由于不等式右端在 $\epsilon \to 0^+$ 的极限下为零，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\left| \int_{-T_1}^{T_1} \delta_\epsilon(x)[f(x) - f(0)] \, \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

这表明任取 $\varepsilon_1 > 0$ 都存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) f(x) \, \mathrm{d}x - f(0) \right| < \varepsilon_1,$$

于是可以得到

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) f(x) \, \mathrm{d}x = f(0),$$

因此命题成立. □

注. 在泛函分析中，δ 函数定义为检验函数空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性映射（线性泛函）

$$\delta: \ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad f(\boldsymbol{x}) \mapsto f(0),$$

其中 $\mathbb{R}^n$ 上的检验函数定义为仅在有界闭区域上非零的无穷阶连续可微函数. 构造 δ 函数的这种极限在泛函分析中称为弱 $*$ 极限（弱星极限）.

题 5. 假设一个运动的点粒子的电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t)), \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{w}(t)$ 是粒子的运动轨迹. 计算

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t_r)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}^3 r', \tag{6}$$

其中

$$t_r = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}, \tag{7}$$

称作推迟时间，c 是光速.

解. 根据 δ 函数的定义有

$$\rho(\boldsymbol{r}', t_r) = \int \rho(\boldsymbol{r}', t')\delta(t' - t + |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c) \, \mathrm{d}t',$$

代入可以得到

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}t' \int \frac{q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{w}(t'))\delta(t' - t + |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}^3 r' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\delta(t' - t + |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')|} \, \mathrm{d}t',
\end{aligned}$$

设 $g(t') = t' - t + |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')|/c$，可以计算得到

$$g'(t') = 1 - \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')|} \cdot \frac{\boldsymbol{w}'(t')}{c},$$

由于粒子速度低于光速，因此 $g(t')$ 至多只有一个零点，且 $g'(t') > 0$，于是有

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')| - [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')] \cdot \boldsymbol{w}'(t')/c} \bigg|_{t' = t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t')|/c},$$

这称为 Liénard-Wiechert 势. □