定理 16 (复连通区域上的柯西定理) 设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的复连通区域,$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 D 上的闭曲线,R 是 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 所包围的区域,$f(z)$ 在 R 上解析,定义沿围道 C_k 前进时 R 在 C_k 的左侧为正定向,则下述正定向积分为零,

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)\, dz = 0\,. \tag{3.36}$$

3.3 柯西积分公式

柯西积分公式是解析函数理论的核心内容。如果学完这门课有什么一定要记住的话,柯西积分公式必居其中。

定理 17 (柯西积分公式) 设 $f(z)$ 是单连通区域 D 上的解析函数,C 是 D 上任意封闭曲线,z_0 是 C 所包裹区域内的任意内点。则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz\,, \tag{3.37}$$

其中积分围道沿 C 的正定向。

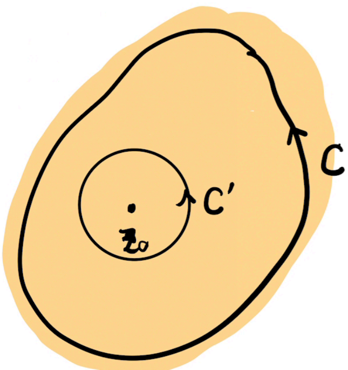


Figure 3.1: 证明柯西积分公式的围道

证明:取图3.1中围道 C 和 C',其中 C' 是以 z_0 为圆心的任一小圆。被积函数 $f(z)/(z-z_0)$ 在 C 和 C' 所包裹的区域内解析,由复连通区域的柯西公式有

$$\int_{C-C'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0 = \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz\,, \tag{3.38}$$

换句话说

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz\,. \tag{3.39}$$

不妨将 C' 取作

$$C'(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,, \tag{3.40}$$

并让 $\varepsilon \to 0$。由复线积分的定义有

$$\begin{aligned}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon i e^{it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0) i dt \\ &= 2\pi i f(z_0)\,,\end{aligned} \tag{3.41}$$

即

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0}dz\,, \tag{3.42}$$

因此柯西公式得证。

例子 23 计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz\,, \qquad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}\,.$$

柯西公式的一个强大之处在于将 $f(z_0)$ 的 z_0 依赖关系用很简单的代数函数表示出来了，不管 $f(z)$ 是多复杂的函数。例如，我们可以从中得到如下重要结论：

定理 18 (柯西求导公式) 设 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数，z_0 是 D 上的内点，C 是将 z_0 包裹在内的任意封闭曲线，$f(z)$ 在 D 上无穷次可导，且 n 阶导数可以写为

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,. \tag{3.43}$$

证明：我们用归纳法进行证明。$n=0$ 的情形直接对应柯西积分公式，因此无须再证明。设(3.43)对于 $n-1$ 阶导数成立，即

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}dz\,, \tag{3.44}$$

我们要证明第 n 阶导数也成立而且可以写成式(3.43)的形式。从导数的定义出发我们有

$$\begin{aligned}f^{(n)}(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(z_0+h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!}{2\pi i h}\int_C f(z)\left(\frac{1}{(z-z_0-h)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n}\right)dz \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!}{2\pi i h}\int_C f(z)\left(\frac{(z-z_0)^n - (z-z_0-h)^n}{(z-z_0-h)^n(z-z_0)^n}\right)dz\,.\end{aligned} \tag{3.45}$$

利用

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + B^{n-1}). \quad (3.46)$$

我们有

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) = & \lim_{h\to 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i h} \int_C f(z) \frac{h\Big[(z-z_0)^{n-1} + (z-z_0)^{n-2}(z-z_0-h) + \cdots + (z-z_0-h)^n\Big]}{(z-z_0)^n (z-z_0-h)^n} \\ = & \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \end{aligned} \quad (3.47)$$

得证。这个结果告诉我们，解析函数一定是无穷次可导的。对于实变量函数这个结论不成立。

例子 24 计算

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz.$$

定理 19 (含参量积分的解析性) *1.* 设 $f(t,z)$ 是 t 和 z 的连续函数，$t \in [a,b]$, $z \in \overline{G}$, 其中 $\overline{G}$ 是有界闭区域;

2. 对于 $[a,b]$ 上的任何 t 值，$f(t,z)$ 是 $\overline{G}$ 是关于 z 的单值解析函数. 则 $F(z) = \int_a^b f(t,z)dt$ 是 $\overline{G}$ 上的解析函数，且

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z} dt \quad (3.48)$$

证明 *4* 利用柯西积分公式将 $f(t,z)$ 的 z 依赖提取出来:

$$F(z) = \int_a^b \oint \frac{f(t,\zeta)}{\zeta - z} d\zeta dt \quad (3.49)$$

则

$$\begin{aligned} F'(z) = & \oint_a^b \int \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta dt \\ = & \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z} dt \end{aligned} \quad (3.50)$$

从柯西积分公式出发可以得到许多有趣的结果。

推论 2 (柯西估计) 设 $f(z)$ 在区域 D 上解析，以 z_0 为圆心，半径为 R 的圆盘在 D 上，则

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\,\|f\|_C}{R^n}, \quad (3.51)$$

其中 C 是圆盘边界，$\|f\|_C = sup_{z\in C}|f(z)|$ 是 $f(z)$ 在 C 的最小上确界。

证明：由柯西积分公式可知，

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \\ &= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}}Rie^{it}dt\right| \\ &\le \frac{n!}{2\pi}\frac{\|f\|_C}{R^n}2\pi\,. \end{aligned} \tag{3.52}$$

证毕。当 $n=0$ 时，有

$$|f(z_0)| \le \|f\|_C\ , \tag{3.53}$$

由柯西估计我们立刻得到

定理 20 (最大模原理) *设 $f(z)$ 在区域 D 上解析。如果 $f(z)$ 不是常函数，则 $|f(z)|$ 在 D 上没有最大值。*

证明：利用反证法，设 z_0 是 D 上一点，$|f(z_0)|$ 在 D 上取最大值。我们想要证明这是 $f(z)$ 一定是常函数。我们以 z_0 为圆心取一半径为 r 的小圆 C，使得 C 也在 D 上。令 $z=z_0+re^{i\varphi}$，由柯西积分公式我们有

$$\begin{aligned}f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}}rie^{i\varphi}d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi\,. \end{aligned} \tag{3.54}$$

左边取绝对值后有不等式

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\varphi})|d\varphi\,. \tag{3.55}$$

由我们的假设应有

$$|f(z_0)| \ge |f(z_0+re^{i\varphi})|\,. \tag{3.56}$$

为了使这两个不等式(3.55)和(3.56)同时成立，(3.56)中的严格大于号只可能对孤立的 φ 值成立。但又由连续性可知，如果有某个 φ_0 使得

$$|f(z_0)| > |f(z_0+re^{i\varphi_0})|\,, \tag{3.57}$$

则必然存在某个包含 φ_0 的开区间 $(\varphi_0-\varepsilon,\varphi_0+\varepsilon)$，使得(3.57)在这个区间内都成立。因此我们得到结论(3.56)中的大于号不能取到，从而 $f(z)$ 只能是常函数。证毕。

我们可以利用 **最大模原理**来简化某些类型的优化问题。以下通过一个具体例子来说明这一方法的应用。

问题描述

试求函数 $\left|z^2+4z-2\right|$ 在单位圆盘 $|z|\le 1$ 上的最大值。

初步尝试：三角不等式

一个自然的初步尝试是利用三角不等式进行估计：

$$\left|z^2+4z-2\right| \le \left|z^2\right| + |4z| + |-2| \le 7. \tag{3.58}$$

然而，这种估计并不精确。例如，当 $|z|=1$ 时，若取 $z=-1$，则有

$$\left|z^2+4z-2\right| = \left|(-1)^2+4(-1)-2\right| = 5, \tag{3.59}$$

而非 7。因此，这种方法无法给出最优解。

直接计算的复杂性

另一种方法是设 $z=re^{i\theta}$，然后计算

$$\left|z^2+4z-2\right|^2 = \left|r^2e^{2i\theta}+4re^{i\theta}-2\right|^2. \tag{3.60}$$

将其展开为实部和虚部的形式：

$$\left|z^2+4z-2\right|^2 = \left(r^2\cos 2\theta+4r\cos\theta-2\right)^2 + \left(r^2\sin 2\theta+4r\sin\theta\right)^2. \tag{3.61}$$

尽管这种方法理论上可行,但在实际操作中,需要对 $0\le r\le 1$ 和 $0\le\theta\le 2\pi$ 的范围进行偏导数计算以寻找极值，计算过程相当繁琐。

最大模原理的应用

注意到函数 $f(z)=z^2+4z-2$ 是全纯函数，根据 **最大模原理**，其在闭圆盘 $|z|\le 1$ 上的最大模必然出现在边界 $|z|=1$ 上。因此，我们只需考虑 $z=e^{i\theta}$ 的情况。

此时，

$$\left|f(e^{i\theta})\right|^2 = \left(e^{2i\theta}+4e^{i\theta}-2\right)\left(e^{-2i\theta}+4e^{-i\theta}-2\right). \tag{3.62}$$

展开后得到

$$\left|f(e^{i\theta})\right|^2 = -8\cos\theta-4\cos 2\theta+21. \tag{3.63}$$

为了找到极值点，我们需要求导并令导数为零：

$$\frac{d}{d\theta}\left|f(e^{i\theta})\right|^2 = 8\sin\theta+8\sin 2\theta = 8\sin\theta(1+2\cos\theta) = 0. \tag{3.64}$$

由基本三角学知识可知，$\sin\theta=0$ 或 $1+2\cos\theta=0$。这对应于 $\theta=0,\pi,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi$。

逐一检查这些角度对应的函数值，可以发现当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\theta=\frac{4\pi}{3}$ 时，函数取得最大值：

$$\left|z^2+4z-2\right|=\sqrt{27}. \tag{3.65}$$

此时对应的 z 值为

$$z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}. \tag{3.66}$$

定理 21 (刘维定理) *定义在整个复平面上的有界解析函数必然是常函数。*

证明：设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数且 $f(z)\leq M$。对任意 $z_0\in\mathbb{C}$，以 z_0 为圆心作以半径为 R 的圆，由柯西估计有

$$|f'(z_0)|\leq\frac{M}{R}\,, \tag{3.67}$$

令 $R\to\infty$，则得到

$$|f'(z_0)|=0\,. \tag{3.68}$$

由于 z_0 是任意一点，因此 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的导数处处为零，因此必然是常函数。

由刘维定理立刻可以得到代数学基本定理的一个简单证明。

定理 22 (代数学基本定理) *$P_n(z)$ 是 n 次 $(n>0)$ 复系数多项式函数，*

$$P_n(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n\,, \tag{3.69}$$

则 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有一个根。

证明：用反证法，设 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有根。考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{P_n(z)}\,. \tag{3.70}$$

显然 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析。且由于

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=0\,, \tag{3.71}$$

因此 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界函数。由刘维定理可得 $f(z)$ 是常函数。但 $f(z)$ 显然不是常函数，因此 $P_n(z)$ 必有根，得证。

在数学的广袤天地中，有一个定理如同一颗璀璨的明珠，历经几个世纪的探索与争论，最终成为了代数学的核心之一。这便是代数基本定理，一个关于多项式方程解的深刻命题：每一个非零单变量多项式方程在复数范围内至少有一个根。

故事的起点可以追溯到 17 世纪，那时的数学家们正试图理解方程的本质。彼得 · 罗斯 (Peter Roth) 在他的书《Arithmetica Philosophica》中大胆猜测，一个 n 次多项式方程可能有 n 个解。然而，他的表述并不严谨，也没有明确区分实数解和复数解。随后，阿尔伯特 · 吉拉尔（Albert Girard）进一步提出，任何 n 次多项式方程都有 n 个解，并且他甚至展示了一个具体的例子——方程 $x^4 = 4x - 3$。尽管当时的数学界对复数的理解还非常有限，但吉拉尔实际上已经相信这些解的存在，因为他成功找到了四个解，包括两个复数解。

进入 18 世纪，数学家们开始尝试更严格的证明，但这一过程中也出现了不少误解和错误。例如，莱布尼茨曾错误地声称某些类型的多项式（如 $x^4 + a^4$）无法分解为更低次的实系数多项式乘积。然而，欧拉在 1742 年的一封信中巧妙地反驳了这一点，展示了如何将 $x^4 + a^4$ 分解为两个二次多项式的乘积。欧拉的工作不仅纠正了莱布尼茨的错误，还为后来的研究奠定了基础。

真正的突破来自年轻的卡尔 · 弗里德里希 · 高斯。他在 1799 年的博士论文中给出了第一个相对完整的证明。高斯的方法结合了几何和代数的思想，尽管其中仍存在一些逻辑上的漏洞（例如拓扑学上的问题），但这无疑是代数基本定理历史上的里程碑。高斯一生共给出了四种不同的证明，每一次都比前一次更加完善。他的第四次证明（1849 年）甚至使用了复分析的工具，显示了他对数学各个领域的深刻理解。

19 世纪初，业余数学家让-罗贝尔 · 阿冈（Jean-Robert Argand）发表了一个更为直接的证明，这是历史上第一次明确针对复系数多项式的证明。然而，阿冈的工作并未得到应有的认可，直到后来柯西在其教科书中引用了阿冈的证明（但未署名）。19 世纪末，魏尔斯特拉斯提出了寻找构造性证明的问题，并在 1891 年给出了一种基于数值方法的解决方案，这标志着代数基本定理研究的一个新方向。

进入 20 世纪，数学家们从不同领域出发，提供了更多富有创意的证明。例如，拓扑学、复分析和黎曼几何都被用来重新审视这个古老的定理。1981 年，史蒂夫 · 斯梅尔（Steve Smale）甚至将代数基本定理与计算复杂性理论联系起来，揭示了其在现代科学中的深远意义。

代数基本定理的历史就像一场智力接力赛，每个时代都有新的线索和突破。从吉拉尔的直觉猜测，到高斯的严谨推理，再到现代数学家的多学科融合，这个定理见证了数学发展的壮丽画卷。它不仅是代数学的基石，更是人类智慧的结晶。正如高斯所说：“数学是科学的皇后，而算术是数学的皇后。”代数基本定理无疑为这顶皇冠增添了一颗璀璨的明珠。

3.3.1 Kramers-Kronig 关系

介电常数的频率依赖

真空中的麦克斯韦方程有

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{3.72}$$

其中 ε_0 是真空介电常数。电磁波与线性介质相互作用时，电位移矢量还依赖于极化矢量 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{3.73}$$

一般来说，电磁波与线性介质的相互作用依赖于频率，因此在频率空间中将上式写为

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \tag{3.74}$$

可以从一个简单模型看出介电常数的频率依赖性。考虑一个简谐力场中以本征频率 ω_0 运动的电子，在外电场

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

作用下，其运动方程可写为：

$$m \left[\ddot{\mathbf{x}} + \gamma \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} \right] = -e \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \tag{3.75}$$

其中 γ 是阻尼因子。

假设电子的位移 $\mathbf{x}(t)$ 具有与电场相同的频率形式：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}.$$

将 $\mathbf{x}(t)$ 代入运动方程，并利用时间导数关系：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -i\omega \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2 \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t},$$

得到：

$$m \left[-\omega^2 \mathbf{x}_0 - i\omega\gamma \mathbf{x}_0 + \omega_0^2 \mathbf{x}_0 \right] = -e \mathbf{E}_0.$$

整理后可得：

$$\mathbf{x}_0 = \frac{-e \mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}.$$

电子的极化矢量 $\mathbf{P}$ 定义为单位体积内的偶极矩总和。对于单个电子，偶极矩为 $-e\mathbf{x}$，因此极化矢量为：

$$\mathbf{P} = N(-e\mathbf{x}),$$

其中 N 是单位体积内的电子数密度。将 $\mathbf{x}(t)$ 的表达式代入：

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = N(-e) \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}.$$

利用 $\mathbf{x}_0$ 的表达式：

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t)=N(-e)\cdot\frac{-e\mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}e^{-i\omega t}.$$

简化后得到：

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t)=\frac{Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}.$$

在频域中，极化矢量可以写为：

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\omega)=\epsilon_0\chi_e(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega),$$

其中 $\chi_e(\omega)$ 是频率依赖的电极化率，定义为：

$$\chi_e(\omega)=\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}.$$

电位移矢量 $\mathbf{D}$ 和电场强度 $\mathbf{E}$ 的关系为：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega)=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega),$$

其中介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 定义为：

$$\varepsilon(\omega)=\epsilon_0(1+\chi_e(\omega)).$$

将 $\chi_e(\omega)$ 的表达式代入：

$$\varepsilon(\omega)=\epsilon_0\left[1+\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}\right].$$

进一步整理：

$$\varepsilon(\omega)=\epsilon_0+\frac{Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}.$$

这个例子告诉我们，介电常数常数可以有虚部，对应了介质的吸收效应。实验上对介电常数实部和虚部测量的一个例子如下：

时域的非定域性

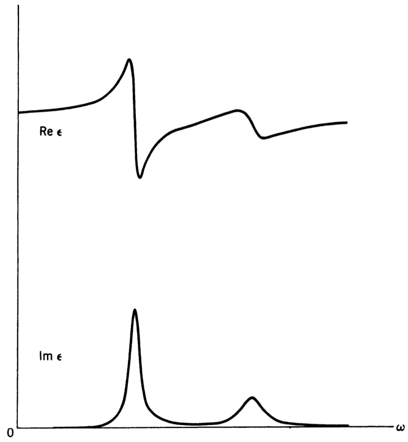
介电常数频率依赖关系：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega)=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega), \tag{3.76}$$

的一个重要后果是导致电磁波与介质相互作用的时域非定域性。为了看出这一点，傅立叶变换回到时域。

首先，将频域中的电位移矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega)$ 和电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)$ 表达为时域量的傅里叶变换：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}, \tag{3.77}$$



$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}. \tag{3.78}$$

将频域关系 $\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega)=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)$ 代入 $\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$ 的表达式中：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}. \tag{3.79}$$

由于 $\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)$ 是 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ 的傅里叶变换，将其展开为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{x},t')e^{i\omega t'}\,\mathrm{d}t', \tag{3.80}$$

并代入 $\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$ 的表达式中，得到：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)e^{-i\omega(t-t')}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\right]\mathbf{E}(\mathbf{x},t')\,\mathrm{d}t'. \tag{3.81}$$

定义一个时间卷积核 $\chi(t-t')$，其傅里叶变换为 $\varepsilon(\omega)$：

$$\chi(t-t')=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)e^{-i\omega(t-t')}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}. \tag{3.82}$$

因此，电位移矢量在时域中的表达式可以写为：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{x},t')\,\mathrm{d}t'. \tag{3.83}$$

这表明，电位移矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$ 不仅依赖于当前时刻的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$，还依赖于过去所有时刻的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t')$。

物理的因果律要求 $\chi(t)\propto\theta(t)$。即电场只能影响未来的电位移矢量。以简谐振子模型为例，

$$\varepsilon(\omega)=\epsilon_0\left[1+\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}\right]. \tag{3.84}$$

代入上式，

$$\varepsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}. \tag{3.85}$$

将其分解为实部和虚部，分别对应介电常数的色散和吸收部分。分母中的 $-i\omega\gamma$ 项导致了虚部的存在，表示介质对电磁波的能量吸收。

为了进一步分析 $\chi(t)$ 的因果性，我们利用复平面上的积分技巧来计算 $\chi(t)$。根据傅里叶逆变换公式：

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}. \tag{3.86}$$

考虑 $\varepsilon(\omega)$ 的极点结构。从简谐振子模型中可以看到，$\varepsilon(\omega)$ 的极点位于复平面上的：

$$\omega_\pm = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} - i\frac{\gamma}{2}. \tag{3.87}$$

注意到极点位于复平面的下半平面。将 ω 积分视作复围道积分，当 $t < 0$ 时，可以将围道从上半平面通过一个大半圆连成封闭围道。在围道内部被积函数是解析的，因此围道积分为零。另一方面，被积函数在无穷远衰减的足够快，因此大半圆的积分也为零。从而 $t < 0$ 时 $\chi(t) = 0$。与我们对因果律的期待一致。

Kramers-Kronig 关系

Kramers-Kronig 关系揭示了介电常数实部和虚部之间的内在联系。它们源于因果性和解析性的数学约束。将一般的复介电常数写作

$$\varepsilon(\omega) = n(\omega) + i\nu(\omega) \tag{3.88}$$

其中 $n, \nu \in \mathbb{R}$。$\varepsilon(\omega)$ 在 ω 上半复平面的解析性使得我们对于任意 $\mathrm{Im}\omega > 0$，有

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varepsilon(z)}{z - \omega} dz \tag{3.89}$$

其中 C 取作实轴和上半平面大半圆构成的封闭围道。物理上我们关心 ω 是实数的情况。我们可以让 ω 从上半平面逼近实轴。

定义柯西主值积分

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a} dx = \lim_{\delta \to 0_+} \int_{-\infty}^{a-\delta} \frac{f(x)}{x - a} dx + \lim_{\delta \to 0_+} \int_{a+\delta}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a} dx \tag{3.90}$$

则(3.89)在 ω 位于实轴上时可以分解为：

$$\varepsilon(\omega) = \mathrm{P}\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(z)}{z - \omega} dz + \lim_{\delta \to 0_+} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{\varepsilon(z)}{z - \omega} dz \tag{3.91}$$

其中 C_δ 是以 ω 为圆心，δ 为半径的逆时针下半圆:

$$\lim_{\delta\to 0_+}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta}\frac{\varepsilon(z)}{z-\omega}dz=\frac{\varepsilon(\omega)}{2} \tag{3.92}$$

将这一形式代入(3.91)，并分离实部和虚部，得到:

$$n(\omega)=\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(z)}{z-\omega}dz, \tag{3.93}$$

$$\nu(\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(z)}{z-\omega}dz, \tag{3.94}$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示柯西主值积分。

这两个公式即为 Kramers-Kronig 关系的核心表达式。它们表明，介电常数的实部 $n(\omega)$ 和虚部 $\nu(\omega)$ 并非独立，而是通过积分关系相互制约。具体来说：- 实部 $n(\omega)$ 可以通过虚部 $\nu(\omega)$ 的积分计算得出；- 虚部 $\nu(\omega)$ 可以通过实部 $n(\omega)$ 的积分计算得出。

这种制约关系在实验中具有重要意义。例如，在光学测量中，如果能够精确测量材料的吸收谱（对应于 $\nu(\omega)$），则可以通过 Kramers-Kronig 关系推导出色散特性（对应于 $n(\omega)$）。反之亦然。

作业 3

计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1}\,.$$

计算正定向围道积分

$$\int_{|z|=1}|z-1|\cdot|dz|\,.$$

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析且处处满足 $|f(z)-1|<1$。证明对 D 中的任意封闭曲线 C 有

$$\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0\,.$$

(假设 $f'(z)$ 连续)。

证明当 $|a|<r<|b|$ 时，

$$\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-a)(z-b)}dz=\frac{2\pi i}{a-b}\,,$$

其中积分围道取正定向。

计算

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}\,.$$