# 理论力学

赵鹏巍

# 内容回顾

- 建立了连续力学系统的拉格朗日表述

$$L = \iiint \mathscr{L}\, dxdydz$$

拉格朗日量

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$$

- 能量、动量守恒由应力—能量张量的散度条件给出

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{,\nu}}\eta_{,\mu} - \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0$$

# 哈密顿表述

- 对于一个离散系统，我们可以定义正则动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad H = p_i \dot{q}_i - L$$

- 对于一个连续系统，$L = \iiint \mathscr{L}(\eta, \dot{\eta}, \frac{d\eta}{dx_i}, t, x_i)\, dxdydz$

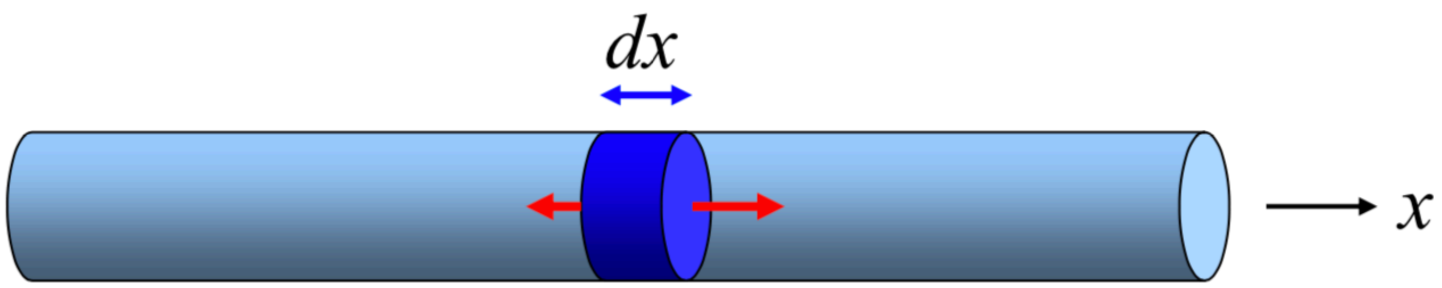
  相应的共轭动量 $\pi(t, x_i) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}}$

  哈密顿量 $H = \iiint \mathscr{H}\, dxdydz$ $\qquad \mathscr{H} = \pi\dot{\eta} - \mathscr{L}$

- 可行吗?

# 弹性棒

- 我们再次考虑一个无限长弹性棒的纵向振动




- 拉格朗日密度 $$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]$$

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\eta}} = \mu\dot{\eta}$$

$$\mathscr{H} = \pi\dot{\eta} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2\mu} + \boxed{\frac{K}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}$$

这是个什么东西?

# 哈密顿表述

- 这里的哈密顿表述把**时间变量挑选出来作特殊处理**

  因为动量的定义为 $\pi = \partial \mathscr{L} / \partial \dot{\eta}$

- 经典场论在结构上保持了时间与空间的对称

  $$\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$$

  至少在拉格朗日表述中是这样的

  经典场论的哈密顿表述并不像其在离散系统中那样有用

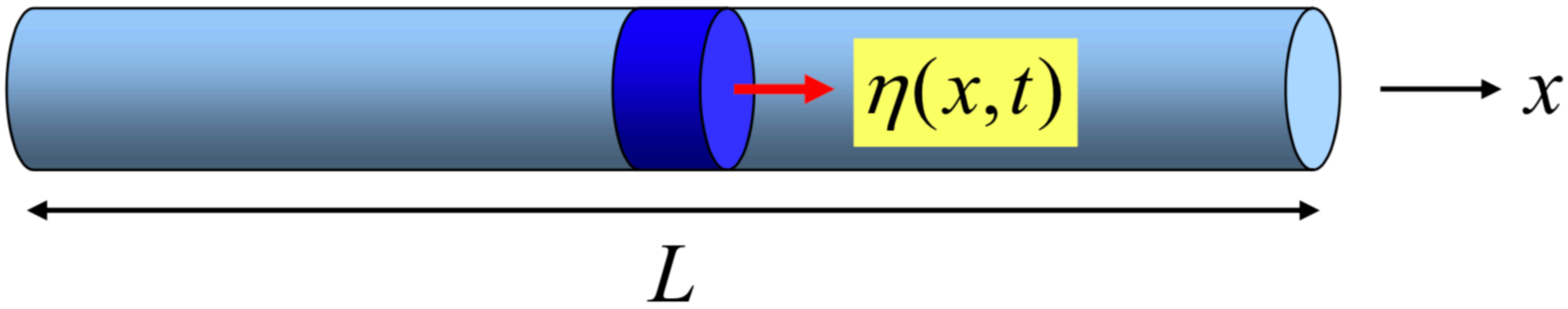
- 量子场论主要是基于拉格朗日表述建立的

  非相对论量子力学则几乎是在哈密顿表述基础上的

如何处理经典场，使之适用于哈密顿表述及其泊松括号呢？ 离散化！

# 傅利叶变换

- 考虑一个有限长度 $L$ 的弹性棒




- 在给定时刻 $t$，我们可以对 $\eta(x, t)$ 进行傅利叶变换

$$\eta(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(t)\sin\frac{\pi n x}{L}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(t)\sin k_n x$$

假设 $\eta(0)=\eta(L)=0$

- 或者，利用复数形式

$$\eta(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\boxed{q_n(t)}e^{i\frac{\pi n x}{L}}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(t)e^{ik_n x}$$

当然要取实部

一个复函数！

# 傅利叶变换

$$\eta(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t)\sin k_n x$$

- 对应的拉格朗日量?

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2-K\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\mu\sum_n \dot{q}_n\sin k_n x\sum_m \dot{q}_m\sin k_m x-K\sum_n q_n k_n\cos k_n x\sum_m q_m k_m\cos k_m x\right]\end{aligned}$$

- 对 $x$ 积分

$$\int_0^L \sin k_n x\sin k_m x dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^L \mathscr{L}dx=\frac{L}{2}\left[\mu\sum_n\frac{\dot{q}_n^2}{2}-K\sum_n\frac{k_n^2q_n^2}{2}\right]=\frac{L}{2}\sum_n\left[\frac{\mu}{2}\dot{q}_n^2-\frac{K}{2}k_n^2q_n^2\right]$$

谐振子!

# 谐振子

$$\frac{L}{2}\sum_n\left[\frac{\mu}{2}\dot{q}_n^2-\frac{K}{2}k_n^2q_n^2\right]$$

- 拉格朗日量可表示为无穷多独立谐振子的叠加

  角频率

$$\omega_n=\sqrt{\frac{Kk_n^2}{\mu}}=v\,k_n$$

波速

波数

- 连续系统的振动可以被分解为一系列分立的振子

  这对任意的线性系统均成立：拉格朗日密度是场微商的二次齐次函数

- 到目前，我们绕行了一整周：我们从一个采用可数广义坐标的分立系统开始，趋向连续变量组的极限，弄清楚如何处理连续系统（场）。最后引入描述场的一种方法，一种采用可数的、分立的坐标组的方法，这些坐标服从我们最初讨论的对应于分立系统的力学。

**应用于场的正则量子化：泊松括号 —〉对易关系**

# 声子

- 量子力学中，谐振子具有的能级是分立的

  可能的能量 $E$ 的值 $E = (m + 1/2)\hbar\omega \quad (m = 0,1,2,\ldots,\infty)$

  对于连续系统的物理意义?

- $\eta(x,t)$ 是一系列关于不同 $k$ 值的 sin 函数的叠加

  $$\eta(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t)\sin k_n x$$

  每个模式都是一个谐振子

  $$\omega_n = v k_n \Rightarrow E_n = (m_n + 1/2)\hbar\omega_n$$

  振动能分解为若干个“小的、有限的”量子 $\hbar\omega_n$

  好似一些粒子组成

- 振动可以被认为是粒子，在力学振动中称为“声子”

# 其他例子?

- 线性场 —〉谐振子 —〉粒子

  我们还知道一个极好的例子：电磁场

  对应的粒子：光子　（光电效应）

- 是不是所有的粒子都对应场的量子激发?

  对一个质量为 $m$ 的粒子 $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$

  对应到一个谐振子

  $$\hbar^2\omega^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{m^2c^4}{\hbar^2} + k^2c^2$$

  必须满足这一色散关系！

- 当然，这时场首先需要满足相对论

# 相对论场论

- 我们在相对论力学中处理多粒子体系时曾遇到困难

  每个粒子的运动方程

  $$\frac{dp_s}{d\tau_s} = K_s$$

  多粒子体系：使用哪个原时?

  粒子s 的原时

- 考虑场 $\eta(x, t)$，时间不过是场除空间外的另一个参量而已

  作用量、运动方程中时空坐标具有固有的相似性

  $$I = \iiint \mathscr{L}\, dxdydzdt$$

- 我们是不是直接让 $x^0 = ct$ 就得到相对论场论了?

  $$\frac{d}{dx_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$$

  差不多是这样的… 但要注意

  **1. 闵氏四维时空，度规；2. 作用量、拉氏密度是洛伦兹不变量；**

  3. 积分限的协变描述：类空曲面，类时曲面

# 拉格朗日密度

- 从作用量积分出发，必须是洛伦兹标量

  写为 $$I=\int \mathscr{L}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

  积分体积元 $dx^0dx^1dx^2dx^3$ 是一个洛伦兹不变量

  故**拉格朗日密度必须是一个洛伦兹标量**

- 我们在构造拉格朗日密度时，要使用协变形式的物理量

  我们的场可以是标量场 $\eta$ 或 4-矢量场 $\eta_\mu$ 或张量场

  我们可以将这些场组合在一起最终得到一个标量

# 场方程

- 我们已经从哈密顿原理推导了拉格朗日方程

  现在推导不变，方程不变

$$\delta I = \delta \int \mathscr{L}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \eta_\rho)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$$

- 注意时间分量

$$\frac{d}{dx^0}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{d\eta_\rho}{dx^0}} = \frac{d}{d(ct)}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{d\eta_\rho}{d(ct)}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{d\eta_\rho}{dt}}$$

取几个例子....

# 标量场

- 最简单的场是标量场 $\phi$

  $$\frac{d\phi}{dx^\mu}$$

  拉格朗日密度写为 $\mathscr{L}(\phi, \phi_{,\mu}, x_\mu)$

  对于自由场，拉格朗日密度不显含 $x_\mu$

  于是，我们可以构成一些简单的标量形式

  如 $\mathscr{L} = \phi_{,\lambda}\phi_{,}^{\lambda} - \mu_0^2\phi^2$

$$\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dx^\nu}(2\phi_{,}^{\nu}) + 2\mu_0^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^\nu dx_\nu} + \mu_0^2\phi = 0$$

一个相对论形式的薛定谔方程

*Klein-Gordon* 方程

# Klein-Gordon 方程

- 在一个空间体积 $V$ 内做傅利叶变换

$$\phi = \sum_{k} q_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$ ，其中， $$q_k = \frac{1}{V}\int \phi e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} dV$$

***k*** 遍历满足边界条件的所有值

于是，K-G方程写为

$$\frac{d^2\phi}{dx^\nu dx_\nu} + \mu_0^2\phi = \frac{d^2\phi}{c^2 dt^2} - \nabla^2\phi + \mu_0^2\phi = \sum_{k}\left\{\frac{1}{c^2}\ddot{q}_k + k^2 q_k + \mu_0^2 q_k\right\} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 0$$

对每个模式 ***k***, $$\frac{1}{c^2}\ddot{q}_k + k^2 q_k + \mu_0^2 q_k = 0$$

谐振子！

色散关系 $$\omega_k^2 = c^2(k^2 + \mu_0^2)$$

- 这对应一个有限质量的粒子 $$m = \frac{\hbar}{c}\mu_0$$

$$\omega^2 = \frac{m^2c^4}{\hbar^2} + k^2c^2$$

# 什么是场?

- 场 $\mathscr{L} = \phi_{,\lambda}\phi_{,}^{\lambda} - \mu_0^2\phi^2$ 给出一个具有质量的粒子 $m = \frac{\hbar}{c}\mu_0$

  但是场 $\phi$ 本身是什么呢?

  弹性棒的振动 —〉声子

  电磁场的振动 —〉光子

- 场 $\phi$ 不一定必须是“物理的实在”

  其“存在性”某种程度上体现在其量子激发是物理的实在（粒子）

  量子力学中， $\phi$ 称为波函数，其振幅的平方解释为粒子的几率，这也是一种对其“存在性”的间接定义。

# 矢量场

- 当然，可以构造出比标量场更复杂的场

  描述具有自旋的粒子

  如，四矢量场描述自旋为1的粒子　　**自旋1/2？**

- 电磁场是一个很好的例子

  对应的粒子为光子，自旋为1

  我们曾经介绍过四矢量 $A_\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A})$

  也介绍过场强张量

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

# 电磁场

- 电磁场与电荷相互作用

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- 用场强张量表示

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{E}}{c} = -\frac{\rho}{c\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial F^{i\nu}}{\partial x^\nu} = -(\nabla \times \boldsymbol{B})^i + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E^i}{\partial t} = -\mu_0 j^i$$

练习

定义 $j^\mu = (\rho c, \boldsymbol{j})$

$$\frac{dF^{\mu\nu}}{dx^\nu} = -\mu_0 j^\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{dF^{\mu\nu}}{dx^\nu} + j^\mu = 0$$

选一个单位制使 $\mu_0 = 1$

对应的拉格朗日密度?

# 电磁场

$$\frac{dF^{\mu\nu}}{dx^\nu} + j^\mu = 0$$

- 要构造拉格朗日密度，我们可以使用 $A^\mu, F^{\mu\nu}, j^\mu$

  不难发现相应的拉格朗日密度 $\mathscr{L} = \frac{F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}}{4} + j^\lambda A_\lambda$

  场方程

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\mu} &= \frac{d}{dx^\nu}\frac{F^{\lambda\rho}}{2}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial A_{\mu,\nu}} - j^\mu \\
&= \frac{d}{dx^\nu}\frac{-F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}}{2} - j^\mu \\
&= -\frac{dF^{\mu\nu}}{dx^\nu} - j^\mu = 0
\end{aligned}$$

$$= A_{\rho,\lambda} - A_{\lambda,\rho}$$

# 自由电磁场

$$\mathscr{L} = \frac{F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}}{4} + j^{\lambda}A_{\lambda}$$

- 对于自由电磁场，

  场方程为 $$\frac{dF^{\mu\nu}}{dx^{\nu}} = 0$$

$$\frac{d}{dx^{\nu}}\left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}\right) = \frac{\partial^2 A^{\nu}}{\partial x_{\mu}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x_{\nu}\partial x^{\nu}} = 0$$

- 这似乎不太像一个一般的波动方程 …

- 注意，给定 ***E*** 和 ***B***，并不能唯一确定 $A^{\mu}$

  洛伦兹规范：

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x_{\nu}\partial x^{\nu}} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 A^{\mu}}{dt^2} - \nabla^2 A^{\mu} = 0$$

电磁波，速度为*c*

# 规范条件

- 我们可在$A^\mu$上加一个任意函数 $\Lambda$ 的梯度，

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\mu}} \quad \Rightarrow \quad F'^{\mu\nu} = \frac{\partial A'^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = F^{\mu\nu} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_{\nu}\partial x_{\mu}} = F^{\mu\nu}$$

- 所以，我们需要一下规范条件来确定 $A^\mu$

  通常的库仑规范并不满足协变性 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

  一个自然的相对论推广是洛伦兹规范 $\dfrac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0$

- 所有的规范条件都给出相同的物理

  通常选择简单、易处理的规范

# 相对论场论

- 经典场论可以很好地推广至相对论情况

- 拉格朗日密度必须是一个洛伦兹标量

  利用协变的场和流来构建

  这限制了可能的拉格朗日密度的形式

- 场的“量子化”带来粒子

  傅利叶变换 —〉 谐振子

  量子场论（二次量子化）在描述基本粒子及其相互作用上取得极大成功。

# 总结

- 本课程到此结束，我们介绍了很多东西

  非完整约束系统，拉格朗日乘子法，诺特定理，三体系统，

  哈密顿量，欧拉角与四元数，相空间，正则变换，辛几何，泊松括号，

  对称性与守恒律，刘维尔定理，可积系统，作用角变量，哈雅方程，

  相对论力学，场论 ...

- 祝大家期末考试取得好成绩！