➢第五章：一些关键的数学进展

- 为啥要有这一讲（而不是直接去讲物理学革命）？
- 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立
- 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用
- 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响
- 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响
- 传承在数学的发展过程中发挥的重要作用

整体考虑

- 回顾完经典物理学理论的发展，按照物理学理论发展的时间顺序，我们下一步我们就应该讲十九世纪末、二十世纪初的物理学革命了。

- 但考虑到介绍物理学革命的教材已经很多，并且很多教材讲得也非常专业、非常细，出于创新性的考虑，我们想尝试从另一个角度来审视物理学的这个关键进展。

- 我们采取的角度是在讲这段关键的历史之前，先总结一下人们在数学与哲学上取得的成就，因为这是他们需要的知识储备（玻恩的例子）。

整体考虑

- 同时，我们也会讨论一下十九世纪的欧洲大学，因为这是在物理学革命中做出贡献的科学家们工作的场所。

- 这些，应该说都是物理学完成由经典理论向量子力学、相对论转变（即物理学革命）的关键的准备。

- 在前言部分，我们提到过笔者对《今日物理》课程三要素的总结是：物理学史、物理学的哲学属性，以及今日的前沿物理学研究的介绍，我们也强调物理学是有一定的人文特质的。这里，我们在讲物理学革命前进行这些准备，应该说也是尊重物理学史、物理学的哲学属性、物理学的人文特质这样一个整体思路的一个体现。

整体考虑

- 在本章，我们首先从数学说起。后面两章，再讲哲学与大学这样的学术环境的营造。

- 自然的语言是数学。因此，在牛顿建立经典力学的过程中，他寻求的也是自然哲学的数学原理。

- 在牛顿之前，数学已经完成了一些关键的发展与转变，比如算术、几何、代数、解析几何都已建立（大学之前的数学）。

- 牛顿与莱布尼茨的贡献是同时提出了微积分的思想。

整体考虑

- 在牛顿之后的十八世纪，微积分理论逐步完善、偏微分方程与变分原理、泛函方法也得到了关键的发展，而分析手段也开始发展并在十九世纪下半叶彻底成熟。
- 比这些数学理论再抽象一些，线性代数、群论（主要是有限群理论）、非欧几何在十九世纪得到了迅猛的发展。
- 在十九世纪下半叶，微分几何、李群李代数、拓扑学方法也逐渐起步。
- 进入二十世纪，这些理论相互之间由开始融合，李群李代数建立在几十年后更是成为物理学理论研究中不可或缺的方法。

整体考虑

- 这些内容，我们在很多教材上都接触过。但需要指出的是，数学的发展史整体遵循的是理论方法从简单到抽象的规律。而我们的课程学习，由于多数时间关注的是知识点的传授，经常会忽略这一点。

- 在笔者看来，这是要反复向学生强调的。以微积分与线性代数为例，它们都是我们进入大一的时候就必须学习的课程，后面的很多课程的学习都需要用到。但我们必须知道这两门课最核心的思想是在完全不同的时间节点成熟的！微积分最核心的思想是微分与积分属互逆操作，这个是牛顿与莱布尼茨在1680年左右提出的。虽然我们总说微积分严格化需要等到十九世纪末数学分析这个学科彻底成熟的时候，但微积分核心思想的提出的时间节点就是十七世纪末。当时，基于笛卡尔在更早一些（十七世纪上半叶）建立的解析几何，再引入微分方法来分析太阳系的行星绕太阳运动时切线与径向的速度与加速度，牛顿方程建立所需要的数学基础就已经完备了。

整体考虑

- 相比于微积分，线性代数则要抽象很多，虽然从莱布尼茨开始人们就有解线性方程组的尝试。在十八世纪，贝祖（Étienne Bézout，1730–1783年）、范德蒙德（Alexandre-Théophile Vandermonde，1735–1796年）、拉普拉斯（Pierre–Simon Laplace，1749–1827年）系统地发展了行列式理论，但线性代数的核心思想“矩阵”则是直到十九世纪中叶才由西尔韦斯特（James Joseph Sylvester，1814–1897年）提出的。

- 之后，他的朋友凯莱（Arthur Cayley，1821–1895年）定义了行列式表示法、矩阵加法、数乘、乘法、次方、单位矩阵、零矩阵和逆矩阵。矩阵理论这个线性代数的核心才得以完成，它是二十世纪发展起来的量子力学的数学基础。从数学方法的抽象性来讲，线性代数和有限群理论是一个层级的，比微积分要抽象很多！

整体考虑

- 之后，从十九世纪中叶开始，矩阵理论、非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学这些数学方法的建立，到二十世纪初物理学革命的完成，大家应该一方面能体会数学方法的发展对物理学发展的重要性，另一方面也能体会数学理论就抽象性而言的层级的进一步提高。

- 这些，都是笔者在作为一个学生在进行物理学专业的学习的时候没有意识到。

- 作为一个结果，在面临一些数学课程的学习的时候，笔者当时要么完全不知道这门课是怎么来的，可以做什么？要么就被吓得完全不敢学了。现在这个年纪，笔者每每想起这些，都会觉得非常的遗憾！因此，我们也会在本章特别强调这些“非知识点的观点性”的内容。

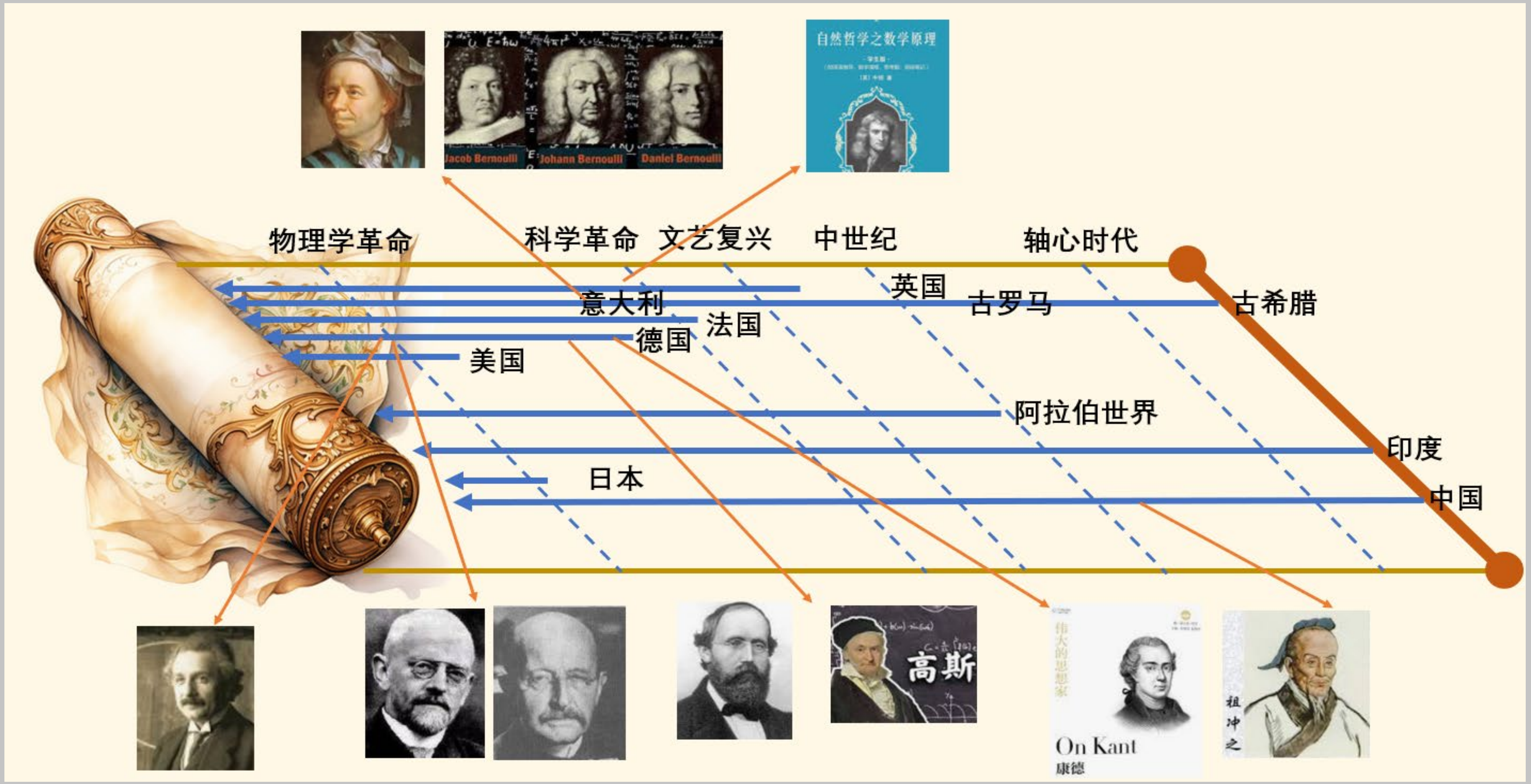
数学方面

- 基于上述考虑，笔者将从：1）几何学、代数学的发展及解析几何的建立；2）微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用；3）线性代数、群论的发展及其对后期物理学的影响；4）非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学的发展及其对后期物理学的影响，四个部分展开本章的讨论。

- 最后，在第五节，我们会强调一下传承在数学的发展过程中发挥的重要作用。实际上，包括我们物理学、我们的兄弟学科化学在内的很多自然科学的分支学科，也都有这个的性质。由于数学的基础性，本章涉及的很多人物大家在基础教育阶段应该都听说过。

数学方面

➢ 借助这个优势，笔者也希望我们完成了高中学习即将进入大学的那部分读者能够初步体会一下人类文明史的画卷，不要考完试就把之前花了很大精力学到的东西丢掉。在今后的学习、工作、生活中，脑子里面有这样一个画卷总是一件有用且美好的事情。



➢第五章：一些关键的数学进展

- 为啥要有这一讲（而不是直接去讲物理学革命）？
- 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立
- 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用
- 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响
- 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响
- 传承在数学的发展过程中发挥的重要作用

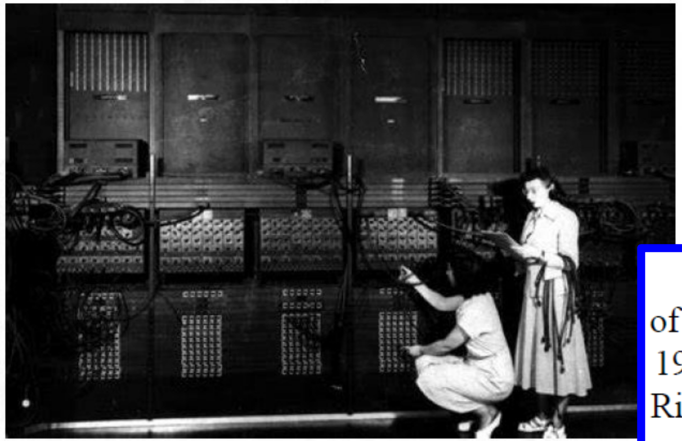
算术

- 从一开始，数学就是人类描述自然的语言。它的发展，一直是也是遵循由简单到复杂、由直观到抽象、由片面到系统的规律来进行的。
- 最早，人们认识到的就是简单的数。像两河流域、古埃及、古希腊，还有我们的先民，都有结绳计数、算筹这样的发明。有理数，也在很早的时候就出现了，它与分配直接相关。这些数学内容对应的数学形式是算术（Arithmetic）。它们研究的，是数的性质及其运算规则。把数和数的性质、数和数之间的四则运算在应用过程中的经验累计起来，并加以整理，数学中最古老的一门分支就很自然地建立了。
- 因为简单与基础，算术这个分支也支撑了自然哲学中人类对自然的最早的认识。数学上所有之后的理论都是以算术为基础的。
- 在小学时代，我们的数学课也叫算术课，这个和我们人类对数学的认识过程都是对应的

算术

- 1946年，当第一台电子计算机ENIAC诞生后，像冯·诺伊曼（John von Neumann，1903－1957）这种伟大的逻辑学家瞬间认识到的也是其在算术计算中远超人类的能力，进而提倡利用其解决数学问题。

The year was 1945. Two earth-shaking events took place: the successful test at Alamogordo and the building of the first electronic computer. Their combined impact was to modify qualitatively the nature of global interactions between Russia and the West. No less perturbative were the changes wrought in all of academic re-
search and in a
grand scale the
renascence of
known to the o
pling; in its ne
to its nature, th
name of the M

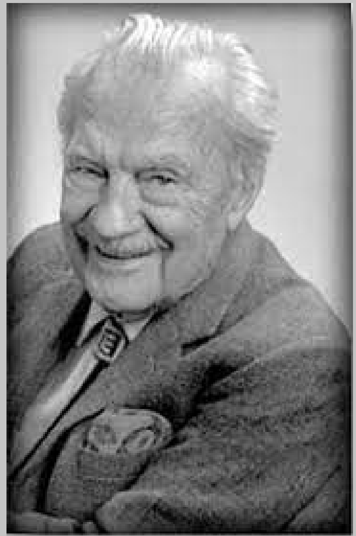


ENIAC:
Electronic Numerical Integrator and Computer, the first programmable general purpose electronic digital computer.

John von Neumann saw the relevance of Ulam's suggestion and, on March 11, 1947, sent a handwritten letter to Robert Richtmyer, the Theoretical Division leader (see "Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method"). His letter included a detailed outline of a possible statistical approach to solving the problem of neutron diffusion in fissionable material.

Stanislaw Ulam

John von Neumann



Nicolas Metropolis

THE BEGINNING *of the* MONTE CARLO METHOD

by N. Metropolis

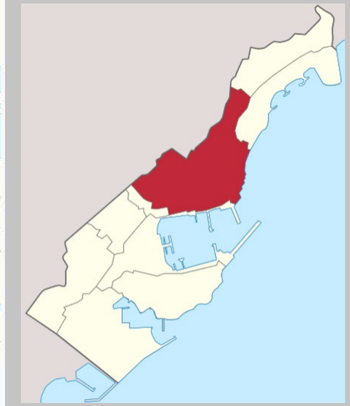
算术

- 我们在科学研究中利用计算机，一般也会经历一个建立代数方程（Algebra）、写出算法（Algorithm）、实现程序的过程。其中的后两部，就是讲一个代数问题简化为算术问题，再交给计算机。所有这些，无不彰显着算术这个数学上最古来的分支在其中的基础地位。

Johnny's interest in the method was contagious and inspiring. His seemingly relaxed attitude belied an intense interest and a well-disguised impatient drive. His talents were so obvious and his cooperative spirit so stimulating that he garnered the interest of many of us. It was at that time that I suggested an obvious name for the statistical method—a suggestion not unrelated to the fact that Stan had an uncle who would borrow money from relatives because he "just had to go to Monte Carlo." The name seems to have endured.

Monte Carlo (/ˌmɒnti ˈkɑːrloʊ/ *MON-tee KAR-loh*, Italian: [ˈmonte ˈkarlo]; French: *Monte-Carlo* [mɔ̃te kaʁlo], or colloquially *Monte-Carl* [mɔ̃te kaʁl]; Monégasque: *Munte Carlu* [ˈmuŋte ˈkaɾlu]; lit. 'Mount Charles') is officially an administrative area of Monaco, specifically the ward of Monte Carlo/Spélugues, where the Monte Carlo Casino is located. Informally, the

Location in relation to Europe
Coordinates: 43°44′23″N 7°25′38″E



几何

- 后来，随着文明的发展，人类进入农业社会。在农业文明中，由于粮食的产量正比于土地的面积，土地丈量也成为了非常实际的需求。

- 相应的，在数学上，除了相对简单的算术，几何也得到发展。需要指出的是，关于图的研究与关于数的研究从开始就是相互促进的。比如，正方形对角线长度的测量带来了无理数。除了丈量土地，天文、航海、以及这些应用中相关理论的提出也极大地促进了几何的发展。

- 最初的几何，就是将规则的点、线、面、体的关系规定住。这些我们在第二章都有介绍。圆、椭圆、抛物线、各种多边形，在当时都是很难处理的几何问题。针对这些问题，人们发展出穷竭法，这是最早的极限的概念。

几何

- 希腊的城邦文明后期，衔接泛希腊化时期，在地中海区域，一批数学家以埃及的亚历山大城为中心活动，系统性的几何理论被欧几里得（Euclid，生活在公元前300年左右）总结为《几何原本》。

- 这是人类历史上第一次从几条公设出发完成的一个系统的理论。它的影响是如此的巨大，以至于科学革命中像牛顿这样的人在写作《自然科学的数学原理》的时候，也是以《几何原本》为榜样来进行构思的。

- 除了《几何原本》，阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约公元前262–190年）的《圆锥曲线论》也是极具影响力的著作。

几何

- 泛希腊化时代之后，罗马帝国统治了地中海区域，古希腊文明逐渐衰退，欧洲历史进入罗马帝国时期。公元四世纪，基督教在罗马帝国被定为国教，古希腊式的学校开始逐渐荒废，数学也开始衰落。像帕普斯（Pappus，约300–350年）、塞翁（Theon of Alexandia，335–405年）、希帕蒂娅（Hypatia，约350–370年出生，415年去世）基本上就是最后几个具有广泛影响力的数学家。
- 如果人们总结古希腊、古罗马时期算术、几何的发展的话，下面四个特点应该说是比较明显的：

  1. 数学成为了一门抽象的学科；
  2. 一种先进的论证模式（演绎证明）建立；
  3. 算术规则基本搞清，几何学、三角学建立；
  4. 一些萌芽中的高等数学的概念，比如极限，已经出现。

西罗马帝国灭亡后，欧洲进入了中世纪。在中世纪欧洲的学校里讲的数学，基本也就是这些内容。

代数

- 中世纪欧洲的衰落伴随的是他们的邻居中东的阿拉伯世界的兴起。从八世纪开始，阿拉伯世界通过翻译各文明的古典作品，在巴格达建立了一个可以取代埃及的亚历山大图书馆的世界数学中心。

- 波斯人花剌子米（Al–Khowarizmi，780–850年）就是在这个背景下产生的杰出数学家。他主要有两部著作。一部是《印度的计算术》，主要介绍印度的数与计算法。另一部是《代数学》，系统性地解决了一元一次、一元二次方程的求解问题。这里，花剌子米使用“还原”（al–jabr）和“平衡（有时也称为对消）”（al–muqābala）的方法把平方的系数区分，进而使任意方程可还原为六种标准格式中的一种。这些方法，后来也成了我们在求解方程的时候使用的基本方法。其中，al–jabr这个词后来演化为代数（algebra）这个词。而花剌子米的名字的拉丁文（algorithm），也演化为算法这个单词。

代数

- 花刺子米之后，欧洲、伊斯兰世界的数学进展整体不大。

- 到了公元十六世纪中叶（1540年左右），文艺复兴后期，来自意大利的卡丹（Girolamo Cardano，1501–1576）、冯塔纳（Niccolo Fontana，1499–1557）、费拉里（Lodovico Ferrari，1522–1565）解决了一元三次、一元四次方程的根式解问题。再之后，人们在寻求五次方程的根式解的过程中发明了群论，这是后话。

- 这里，我们可以将这些数学上的进步总结为：通过代数，人们就可以不再追求解决一些具体问题，而是基于原始项的组合通过方程来描述数学问题，其核心是将具体的问题抽象化进而寻求普适解。这是数学上的一次巨大的进步。

三角

- 除了代数，从古希腊开始，因为天文观测的结果分析以及航海的需要，三角学也得到了很大的发展。

- 三角函数及其变换规则于文艺复兴后期由法国数学家韦达（Franciscus Vieta，1540–1603年）系统化。在他的著作《应用于三角形的数学定律》（<Mathematical Laws Applied to Triangles>，1579年出版）中，有解直角三角形、斜三角形的详述，还有正切定理、余弦定理等。

- 他还发展了利用全部六种三角函数求解各种平面与球面三角形的方法。

- 同时，在他的另一部著作《新代数》（<New Algebra>）中，他还引入了使用字母为符号的代数方法，并开始使用代数来研究集合。这都为数学上的下一个飞跃（解析几何的诞生）奠定了基础。

解析几何

- 解析几何的特点就是使用代数的工具，也就是抽象化的方程，来解决几何问题。

- 它具有系统性的优点。在解析几何产生之前，人们关于几何的研究都是针对具体的图形来画具体的图，进而解决问题。而在解析几何建立之后，人们可以使用一种形式的方程，同通过变换参数，来描述一类曲线。

- 历史上，这是几何与代数的第一次结合。在解析几何的产生过程中，最重要的两个代表人物是笛卡尔（Rene Descartes，1596–1650年）和费马（Pierre de Fermat，1607–1665年）。我们按时间顺序介绍。

解析几何

- 笛卡尔首先是一名哲学家，他是唯理论的奠基人，西方近代哲学也从他开始。
- 数学对他而言，或许也只是理性的工具。
- 在笛卡尔活跃的年代，韦达已经去世，但韦达的思想却深深地影响了他的这位晚辈。
- 文艺复兴的一个结果是欧洲人在哲学上开始全面系统地发展古希腊的数学与物理学，并开始系统地使用数学来描述物体运动，进而寻求宇宙运动的数学描述。

解析几何

- 除了圆和直线，在与圆锥相关的其它曲线（椭圆、抛物线、双曲线）的描述上，早期的希腊文明虽然有了像阿波罗尼奥斯这种人的积淀，但这些方法在数学上的表达还过于繁琐。

- 这都为数学从研究常量的“初等数学”向“研究变量的相对高等的数学”的发展提供了条件。

- 1637年，笛卡尔发表了他理性主义的奠基作《谈谈方法》。《几何学》是作为一个附录（解决几何问题的方法）分三卷在《谈谈方法》中出现的。在第一卷里，笛卡尔引入尺规作图，运用代数方程研究几何对象的性质，把代数与几何建立了初步联系。

解析几何

- 在第二卷中，他将解析几何的两个基本思想完全表现了出来：将平面上的点与一个数对 (x, y) 联系起来，并指出曲线是任何具体代数方程的轨迹。进而，基于其重点讲述一些曲线的性质。

- 在第三卷里，他讨论了关于代数方程的一些理论。有了变数（变量），运动就可以被很方便地进行解析表达。

- 同时，代数与几何结合，也大大扩展了数学本身。从笛卡尔开始，人们开始用一对实数来描述平面上的点，并用方程表示曲线。用方程描述出的曲线相比于人们之前通过几何方法得到的曲线，因为代数方法的普适性，要丰富很多。同时，人们也意识到了可以通过代数方程将曲线分类。比如，椭圆和圆就可以写成类似的方程。这样，人类对几何的研究与认识也向前迈了一大步。

解析几何

- 像微积分诞生过程中有牛顿与莱布尼茨关于优先权的争议一样，在解析几何的诞生过程中，笛卡尔与费马的贡献同样存在一定争议。

- 这也是科学发展到一个特定阶段进入攻城拔寨关键期时常见的情况。

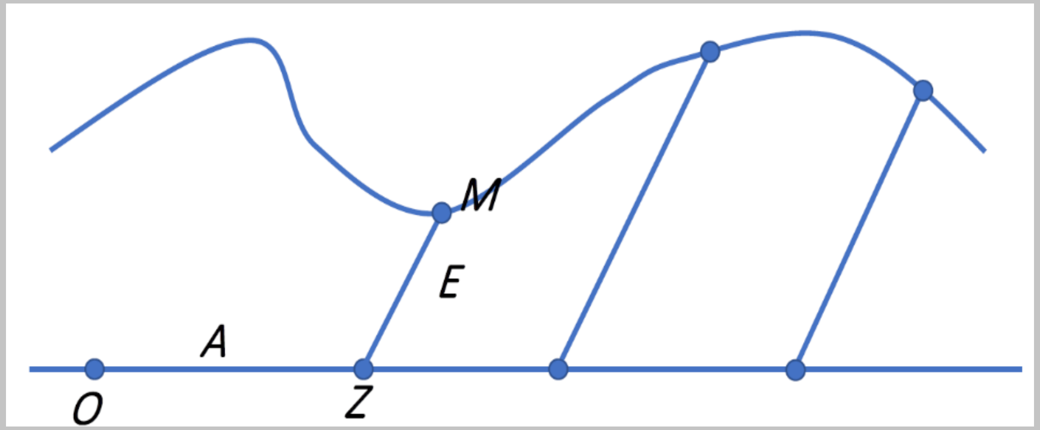
- 费马的主业是一名律师，但他对数学在多方面都有贡献，如解析几何、微积分、概率论。他对解析几何的兴趣是从力图恢复阿波罗尼奥斯关于平面上轨迹的研究开始的。

- 为此，他在1629年出版了一本叫做《论平面和立体的轨迹引论》的著作。1636年，在与当时著名的数学家罗贝瓦尔（G. P. Roberval，1602–1675年）的通信中，他提及了解析几何的思想。

解析几何

- 这里，费马发现了一个可以用代数方程表示曲线的方法。具体步骤，如下图所示。

- 我们可以取一条水平的直线作为轴，并在此轴上固定一个点O为原点。这样，对于任意曲线和它上面的一个点M，它的位置都可以用两个字母A和E来确定（假设A与E代表的线段夹角固定，为α）。其中，A代表O与Z的距离，E代表Z到M的距离。这种表述方式等价于直角坐标系中的x、y。基于此，他说出了只要方程里有两个未知量，我们就可以得到一个轨迹这种普适的定律。

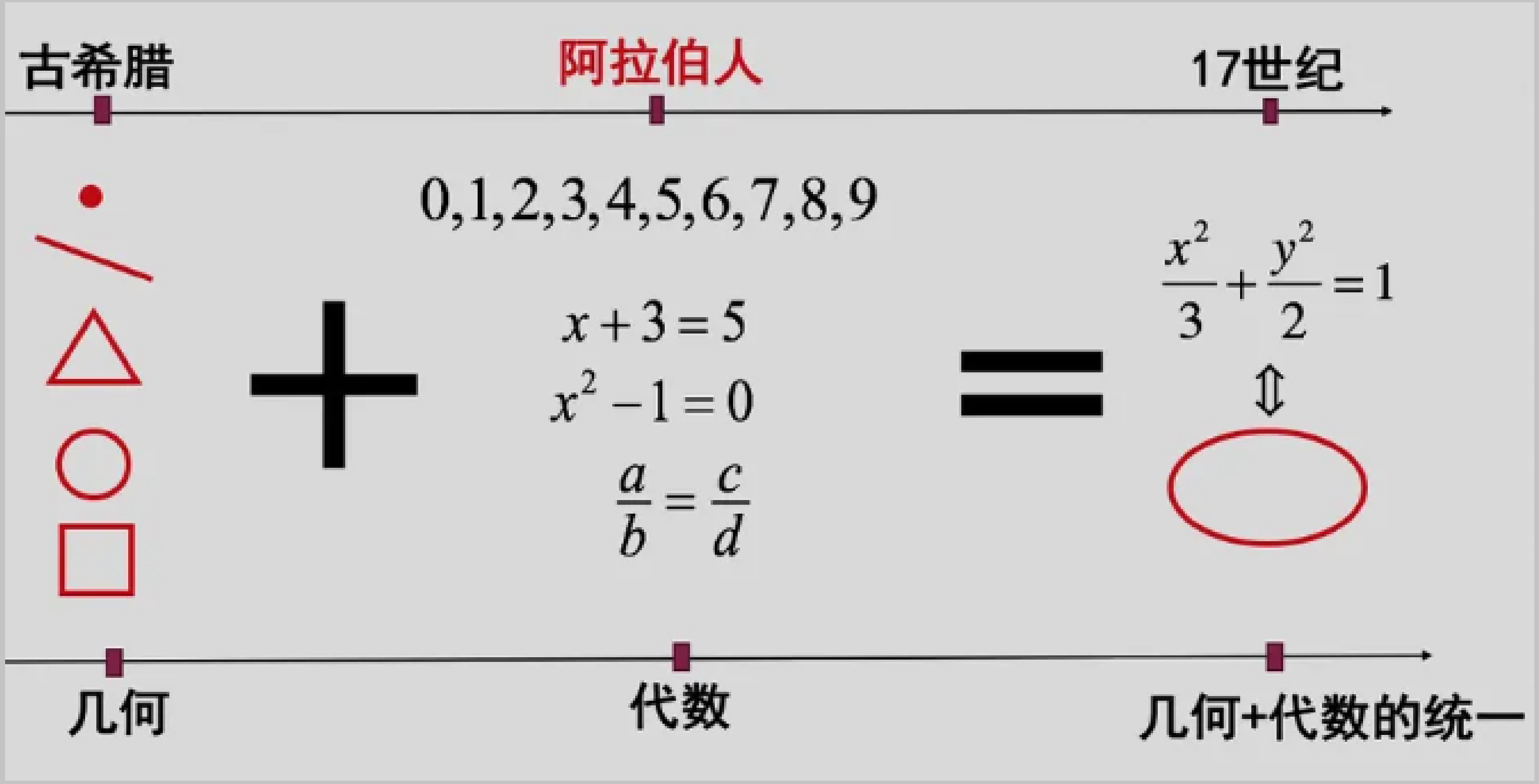


解析几何

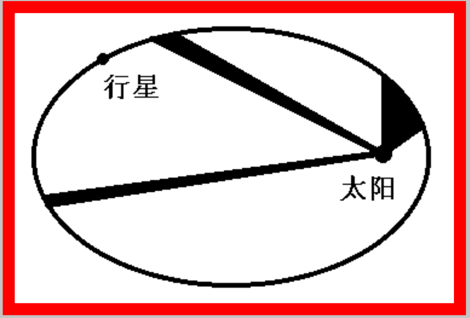
- 看似合理，但比起笛卡尔，费马所说的内容更像是一些核心思想的表述。在系统性上，他的理论与笛卡尔的理论还有一定的差距。

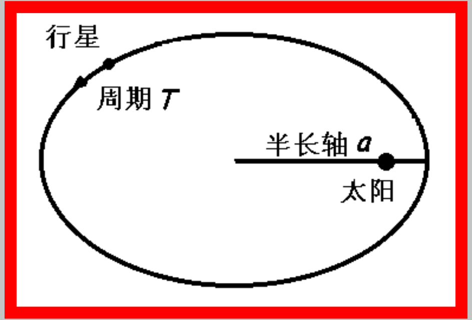
- 也正是因为这个原因，谈及解析几何，人们一般还是会把笛卡尔当作最重要的奠基人。用变量来描述曲线，人们在这个时期，在数学上为微积分的诞生奠定了基础。在物理上，这当然也为牛顿力学的诞生提供了条件。

这个阶段的总结（示意图）



- 用变量来描述曲线，在数学上为微积分的诞生奠定了基础；
- 在物理上也为牛顿力学的诞生提供了条件！





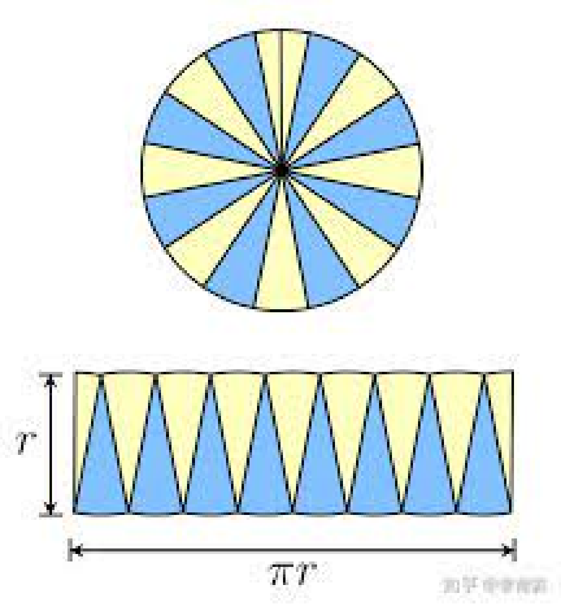
$$T^2 \propto a^3$$

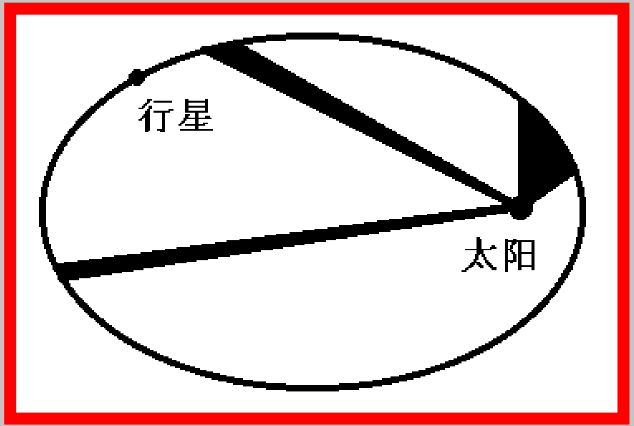
➢第五章：一些关键的数学进展

- 为啥要有这一讲（而不是直接去讲物理学革命）？
- 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立
- 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用
- 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响
- 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响
- 传承在数学的发展过程中发挥的重要作用

微积分

- 微积分的四个核心理念是：极限、导数、积分、级数。人们一般都知道微积分的诞生是在17世纪晚期，但也往往会忽略了它的定型要等到19世纪下半叶。
- 在正常的教学中，人们一般会按照上面的顺序，来讲解已经定型后的微积分的内容。但实际上，按历史进程来说，出现顺序是：积分、导数、级数、极限。





第一个出现的是积分。古希腊阿基米德在求圆的面积与球的体积的时候就多次使用这个思想。

17世纪初，开普勒发现行星运动的面积定律（第二定律）的时候，也是利用小量求和的思想来求解曲边形的面积的。

微积分

- 第二个概念是导数。关键点，就是牛顿与莱布尼茨相互独立地意识到累计问题和变化率问题是互逆的，曲线的变化率能用切线的方式来处理。

- 再往后，是级数。最具代表性的就是泰勒（Brook Taylor，1685−1731年）。这个的时间点是十八世纪初，已经是在牛顿与莱布尼茨的活跃期之后了。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_h^k[f](a)}{k!h^k}\prod_{i=0}^{k-1}((x-a)-ih)\\
&= f(a) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k}{dx^k}f(a)\frac{(x-a)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

- 最后，是极限。这个要等到十九世纪。我们需求强调的是从逻辑上来讲，积分与导数这两个概念都是建立在极限的基础之上的。导数的定义相对简单，但积分的定义是比较复杂的，它牵扯到级数的累计。但历史上，人类是按照一个由浅入深的方式，一步一步意识到并解决这些问题的。而不是一步就位的产生最合理的逻辑的。

微积分

- 历史上，上述四个理念的产生顺序与当数学问题彻底清楚后的逻辑顺序的不一致也带来过一些实际问题。比如，在17世纪末、18世纪初，微积分的不严谨性所带来的逻辑漏洞也会成为人们攻击微积分的理由，最著名的就是贝克莱（George Berkeley，1685—1753年）悖论。

- 它可以表述为：实际应用中，无穷小量一会儿为零一会儿不为零，在欧洲传统的形式逻辑中这个无疑是一个矛盾。

同一律、排中律、充足理由律和矛盾律。

微积分

- 关于这些概念的精确阐述，一直要等到十九世纪下半叶分析学的建立才得以彻底解决。
- 中间，有两个人物的贡献很重要。首先是柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789-1857年），他把无穷小量定义为变量，引入了极限的概念。
- 之后是维尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstraß，1815-1897年），他将极限的概念严格化，进而彻底解决了像贝克莱悖论这种问题。至此，现代意义上的微积分彻底建立。

常微分方程

- 与微积分理论的严格化同时，18世纪的数学家们也在致力于将牛顿力学应用于各种实际问题。这也催生出三个学科方向：常微分方程、偏微分方程、变分法。
- 前两者统称微分方程，它指的是含有未知函数及其导数的方程。其中，常微分方程理论发展地早一些，萌芽于17世纪，建立于18世纪。针对的，是只包含单变量微分（或导数）的微分方程。它的一般形式可以写为：

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots\cdots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0$$

- 这里的n称为常微分方程的阶。在18世纪牛顿力学的应用中，诞生了如单摆、弹性理论、以及一些天体的运动等一系列经典的力学问题。这些问题的运动方程，很多可以化为类似常微分方程。

常微分方程

- 在整个十八世纪，以欧拉（Leonhard Euler，1707−1782年）、克莱罗（Alexis Claude Clairaut，1713–1765年）、达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert，1717−1783年）、拉格朗日（Joseph−Louis Lagrange，1736−1813年）、拉普拉斯（Pierre−Simon Laplace，1749−1827年）为代表的一批法国数学家针对不同情况下的此类问题，发展了多种的理论。

- 作为一个结果，在十八世纪下半叶，常微分方程也发展成为一个独立的数学分支。

偏微分方程

- 除了常微分方程，在更多的力学问题（比如波动、热传导）理论研究中，人们需要求解的是多元函数。这些问题中的经典力学方程也演化为偏微分方程。以单弦的振动为例，如果将位移当作时间以及弦上点的位置的函数，相应的力学方程就已经是一个偏微分方程了。

- 1747年，达朗贝尔针对此问题，以《张紧的弦振动时形成的曲线研究》为题目，提出了下面这个方程并给出了通解：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 这个工作也被认为是偏微分方程这个学科的开端。后面，我们在后面讲到1926年薛定谔是如何提出薛定谔方程的时候，也会强调这个方程是扮演了一个重要角色的。从1747到1926，将近两百年的时间，物理学与数学中关键问题的结合与传承始终贯穿在我们学科的发展之中。

偏微分方程

- 上面那个公式是简单的一维情况。达朗贝尔之后，欧拉、丹尼尔·伯努利又把它推广至二维与三维的情况，并将此方法推广至弹性力学、流体等问题中。

- 比他们再晚一些，傅里叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768−1830年）在热流的研究中也系统地使用了偏微分方程的方法。

由于对传热理论的贡献，傅里叶于1817年当选为巴黎科学院院士。傅里叶极度痴迷热学，他认为热能包治百病。于是在一个夏天，他关上了家中的门窗，穿上厚厚的衣服，坐在火炉边，竟然被活活热死了，享年62岁。

- 在他的《热的解析理论》中，傅里叶提出的三维空间的热方程（除了三个空间坐标，还有温度、压强、时间）也是典型的偏微分方程。应该说热学问题的研究对当时偏微分方程的发展是一个促进，而偏微分方程的发展又反过来帮助人们解决了热学与电动力学中的关键问题。

偏微分方程

- 就数学理论而言，我们这里需要说明的是：不管是常微分方程还是偏微分方程，早期人们的关注点往往都是各种类型的问题及其孤立技巧的汇总。

- 进入十九世纪，相关数学理论的研究进入了系统化的阶段。数学研究的关注点，也转向初值问题、解的稳定性问题、以及解析理论和定性理论的发展。

- 其中，代表人物包括柯西、刘维尔（Joseph Liouville，1809−1882年)、魏尔斯特拉斯、庞加莱（Henri Poincaré，1854−1912年）、李亚普诺夫（Aleksandr Mikhailovich Lyapunov，1857−1918年）。

偏微分方程

- 就数学理论而言，我们这里需要说明的是：不管是常微分方程还是偏微分方程，早期人们的关注点往往都是各种类型的问题及其孤立技巧的汇总。

- 进入十九世纪，相关数学理论的研究进入了系统化的阶段。数学研究的关注点，也转向初值问题、解的稳定性问题、以及解析理论和定性理论的发展。

- 其中，代表人物包括柯西、刘维尔（Joseph Liouville，1809–1882年)、魏尔斯特拉斯、庞加莱（Henri Poincaré，1854–1912年）、李亚普诺夫（Aleksandr Mikhailovich Lyapunov，1857–1918年）。

偏微分方程

- 进入二十世纪，微分方程在更多的物理学、化学、力学的实际问题中被广泛深入研究。比如，它在无线电、飞机飞行、导弹飞行、化学反应速率的描述等方面都发挥着极其重要的作用。

- 这些应用进一步也会促进微分方程理论的发展。

- 像动力系统、泛函微分方程、奇异摄动方程、复数域上的定性理论，也都成为了在传统微分方程的基础上发展起来的新的学科方向。

变分法

- 十八世纪，与微分方程方法同时发展的还有一个泛函（或者叫变分）方法。

- 它的背后，隐藏着一个非常重要的物理学中的原理：最小作用量原理。

- 这里，最重要的数学工具与函数不同，是泛函。在我们已经比较熟悉的函数中，输入往往是一个或多个变量的值，是一个或多个数。输出，是函数在这些变量的这些具体取值下的值，是一个数。它比较适合被用来描述几何轨道。而泛函的输入是一个函数，输出是一个数，它比较适合来描述物理学中的“场”。

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F \, \mathrm{d}x$$

F是被积函数，也为称为拉格朗日函数。

致谢：知乎的Dr. Stein、晴风

变分法

- 早期，人们往往会把被积函数对应为一个轨道，然后通过最大化或者最小化泛函I的值来针对其进行优化。物理学革命之后，当量子力学、统计物理成为我们科研中的必备工具时，人们又意识到当被积函数由经典力学中的轨道转变为量子力学中的几率分布函数的时候，这个公式在量子力学中的应用同样自然。因此，我们也可以说泛函从根上就是一个适合量子理论的数学工具。

- 作为一个简单的例子，我们可以假设上式中的拉格朗日量仅仅依赖于y(x)这个函数和它的一阶导数函数以及x，把y(x)直接写成y、把它的一阶导数写为y'。这样，这个泛函就可以写为：

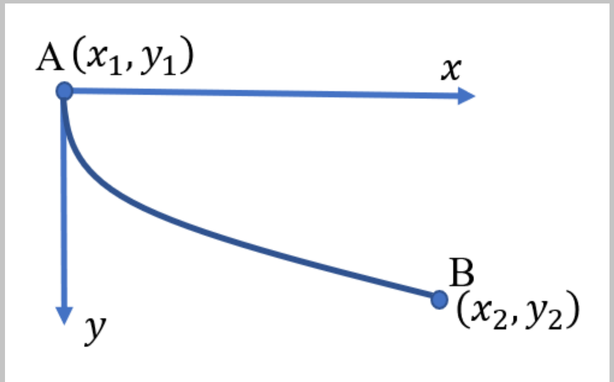
$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(y,y',x)\,\mathrm{d}x$$

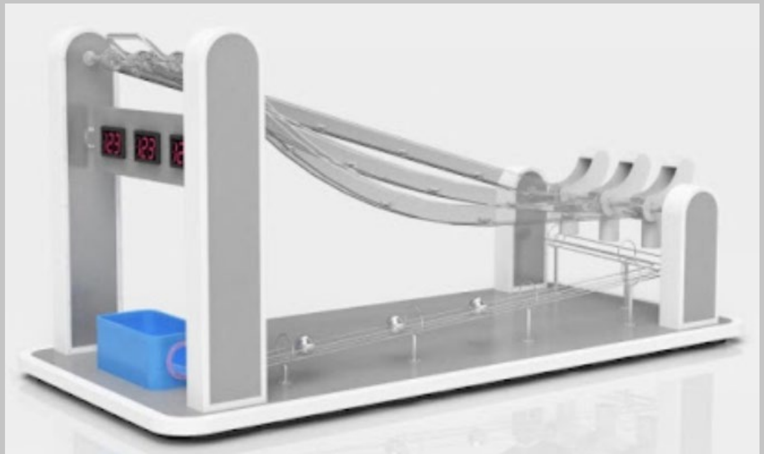
我们基于这个简单的情况来讨论一个应用。

变分法

- 历史上，泛函（变分）方法的发展是和极值问题的求解密切相关的。

- 对应的问题，是最速降线问题，它是1696年约翰I·伯努利（丹尼尔·伯努利的父亲）在写给他哥哥雅可比I·伯努利的一封公开信中提出的。它可表述为：设A和B是竖直平面上不在同一垂线上的两点，在所有连接A和B的平面曲线中，求出一条曲线，使仅受重力作用且初速度为零的质点从A点到B点沿这条曲线运动时所需时间最短。





实验在这里肯定不work，因为自由度太高了。只能说实验发现问题，理论解决问题！

变分法

- 对这个问题，我们使用

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\,\mathrm{d}x$$

是足够的。我们要做的事情就是对y(x)这个函数做个很小的变化δy(x)，看相应的I的变化δI。它等于：

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x$$

这里，右侧第二项又等于：

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\mathrm{d}\delta y = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$

- 这样，整体就有：

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,\mathrm{d}x$$

变分法

- 对此变分公式，在曲线变化过程中A和B两点是固定的，因此 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$。这样的话下式的右边第一项就为零。

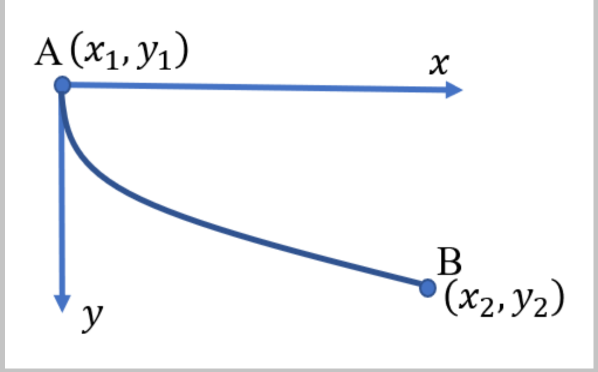
$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,\mathrm{d}x$$

- 而I取极值，就意味着对这个轨道附近的任意的δy(x)的函数形式的变化，δI都为零。这就意味着对于取极值的轨道，有如下公式对曲线上任意一点都成立这样一个性质：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

- 此公式就是人们常说的欧拉-拉格朗日方程。人们可以基于欧拉-拉格朗日方程对很多曲线的极值问题进行求解，比如两点之间直线最短这个几何问题，以及约翰I·伯努利提出的这个最速降线问题为例。

变分法



➢ 先看简单的几何问题，两点之间直线最短。

➢ 在上面提供的理论框架下，我们可以把它理解为上图所示的路径长度的积分。

➢ 每一小段，有：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

➢ 这样的话总的路径长度就是：

对照 $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx$ 这里 $F = \sqrt{1 + (y')^2}$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{Constant}$$

直 线！

变分法

➢ 如果是最速下降问题，唯一的不同是积分的是时间。

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}$$

总时长

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \qquad F = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

代入拉格朗日方程，不太好处理

拉格朗日方程：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

用到：

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

代入

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

$$= y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}y'$$

$$= y'\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\right] + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial x}$$

变分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

欧拉-拉格朗日方程的第二种表达

$$F=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} \qquad T=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=\text{constant}$$

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}-y'\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}=\text{constant}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}=\text{constant}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

变分法

取这个$\sqrt{2g}$乘上这个常数为$1/\sqrt{k}$，就有：

$$y[1+(y')^2]=k$$

进而：

$$y'=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{k}{y}-1}=\sqrt{\frac{k-y}{y}}$$

这是一个典型的常微分方程，它的解可以通过换元积分法得到。

y的取值范围是$[0,k]$，这样可以取其为：

$$y=\frac{k}{2}(1-\cos\theta)$$

这样就有：

$$dy=\frac{k}{2}\sin\theta\,d\theta$$

以及：

$$\sqrt{\frac{k-y}{y}}=\sqrt{\frac{\frac{k}{2}(1+\cos\theta)}{\frac{k}{2}(1-\cos\theta)}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$\frac{\frac{k}{2}\sin\theta\,d\theta}{dx}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

变分法

$$\frac{\frac{k}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$+$

$$\frac{\frac{k}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{k}{2}\sqrt{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\frac{k}{2}\sqrt{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$x=\frac{k}{2}(\theta+\sin\theta)+\text{constant}$$

这个时候再利用边界条件$x_1=0$、$y_1=0$，就有关于轨道的解：

$$x=\frac{k}{2}(\theta+\sin\theta)$$

$$y=\frac{k}{2}(1-\cos\theta)$$

变分法

- 从这个例子，读者应该也可以感受到在十八世纪像欧拉、拉格朗日这样的数学家、物理学家在将牛顿的经典力学用到实际问题的研究中的时候，变分法、微分方程方法的发展得到了极大的作用。

- 当然，变分方法的内涵绝不是一个简单的最速下降问题可以包含的。其背后的最小作用量原理在物理学的研究中扮演着更重要的作用。其中蕴含的“场”思想，在现代物理学更是发挥了核心的作用。

变分法

- 实际上，像牛顿第二定律这样的基本的力学方程都可以从最小作用量原理中得到。前面我们在光学部分讲到的费马原理（最小传播时间原理）也是最小作用量原理在光学领域的一个应用，它可以被用来解释折射现象。

- 十九世纪之后，最小作用量原理在电动力学、量子力学领域也被广泛使用。

- 现在，我们会认为它是物理学中最基本的原理之一，并利用它为物理定律寻求普适表达。这个背后，用到的数学方法都是变分法。

- 这个方法应该说也是欧拉与拉格朗日这对师徒在物理学史中占据那么重要的地位的一个重要原因。

复变函数

- 本节最后要讨论的一个数学方法是复变函数。它是一个自变量是复数且在一个映射关系下对应的因变量也是复数的函数。

- 与前面提到的微分方程方法、变分法一样，在人们认识到复数的重要性的过程中，欧拉也起到了至关重要的作用。

- 在他之前，虽然卡丹在1543年给出一元三次方程根式解的过程中就用到了虚数，但直到一百多年后，笛卡尔的时代，虚数还是被多数数学家排斥。实际上，虚数（Imaginary number）这个名字也是笛卡尔起的，他的意思就是这些数不是真实的数（Real number，即实数）。

复变函数

- 而18世纪的欧拉，则是以1和i为生成元，构成了复数的集合。欧拉之前，有泰勒，他的泰勒展开可以给人们如下知识：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

以及

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

- 这样的话，如果取$x = \mathrm{i}\theta$，那么很显然对$e^{\mathrm{i}\theta}$就有：

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\theta} &= 1 + \mathrm{i}\theta + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}\theta)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}\theta)^3 + \frac{1}{4!}(\mathrm{i}\theta)^4 + \frac{1}{5!}(\mathrm{i}\theta)^5 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \end{aligned}$$

在简谐振动中，运动是由三角函数表达的。因此，引入虚部，人们可以高效地描述简谐振动。这样，这个看似“多余”的数学工具也就有了直接的物理对应。

复变函数

- 基于这些认识，高斯于1811年确定性地引入了复变函数的概念。若干年后，他又鼓励自己的学生黎曼用复变函数为题目完成自己的博士论文（题目是《Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe》，《单复变函数一般理论基础》，1851年）。

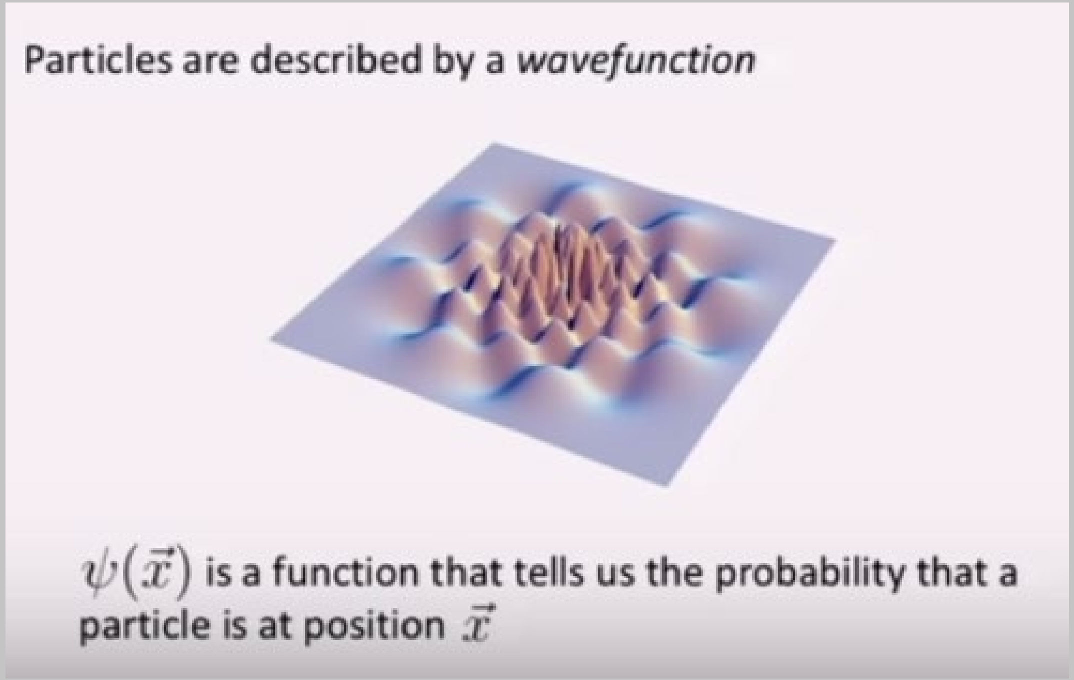
- 在前言中，我们提到过的他后来还鼓励黎曼以非欧几何作为教授资格考试论文的题目，进而彻底打开了人类系统性研究非欧几何的大门。因此，应该说黎曼很遇到高斯这样的导师，也是很庆幸的，他也很出色的完成了这两项开创性的工作。

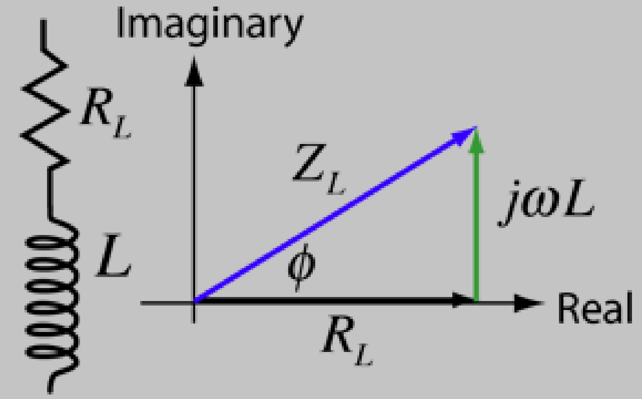
  科学思想与传染病一样，具有“近距离、人传人”的特质。

- 回到复变函数，在黎曼之前，柯西与拉普拉斯有过利用分析的方法开展的研究。黎曼之后，维尔斯特拉斯更是引入了解析延拓的概念，将复变函数发展为一个成熟的数学理论。今天，复变函数在物理学

复变函数

1. 电路理论中解线性方程
2. 量子力学中的波函数



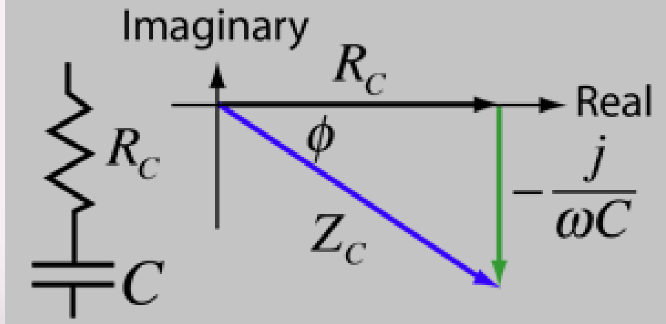


Cartesian form: $Z_L = R_L + j\omega L$

Polar form: $Z_L = |Z_L| e^{j\phi}$

where $|Z_L| = \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}$

$\phi = \tan^{-1} \dfrac{\omega L}{R_L}$



Cartesian form: $Z_C = R_C - \dfrac{j}{\omega C}$

Polar form: $Z_C = |Z_C| e^{j\phi}$

where $|Z_C| = \sqrt{R_C^2 + \left[\dfrac{-1}{\omega C}\right]^2}$

$\phi = \tan^{-1} \dfrac{-1}{\omega C R_C}$

3. 量子场论
4. 多体理论中算的积分，很多都要用Residue Theorem，尤其牵涉到波色分布和费米分布（通常推延到Matsubara frequency）

今天，复变函数在物理学的各个角落，比如电路理论、量子力学、场论、统计力学等多个领域都发挥着不可替代的作用。

➢第五章：一些关键的数学进展

- 为啥要有这一讲（而不是直接去讲物理学革命）？
- 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立
- 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用
- 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响
- 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响
- 传承在数学的发展过程中发挥的重要作用

线性代数

- 前面谈到的解析几何、微积分、微分方程、泛函、复变函数这些数学工具在经典的物理学理论的发展过程中发挥了重要的作用，相关应用涵盖了力学、热学与热力学、电动力学等多个领域。

- 在这些数学方法的发展过程中，也会伴随着一些其它的数学分支的产生。这些新产生的数学分支在早期的物理学研究中有些能够被直接应用，有些则需要等待很长时间才能体现出价值。但我们必须去承认的一个事实是历史不停地告诉我们数学最神奇的地方就在于它作为人类描述自然的语言它的实用性。

- 在出现的时候，很多并不对应真实的世界，但随着物理学的发展，却总会在一个时刻发挥出作用。本章下面两节要讲的内容就都具备这样的特征。我们从大学的理工科教育中大学一年级便开始学习的线性代数讲起。

线性代数

- 线性代数起源于人们对线性方程组的求解。比如，莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646−1716年）就开创过用指标体系来表示线性方程组的方法，并提出了行列式的概念。

- 跟他大致同一个时期，日本数学家关孝和（Seki Takakazu，1642−1708年）也提出了行列式的概念。1750年，瑞士数学家克莱默（Gabriel Cramer，1704−1752年）提出了基于行列式的求解线性方程组的具体方法，称为克莱默法则（但这个法则因为太麻烦，人们后来基本不用）。

- 之后，法国数学家贝祖（Étienne Bézout，1730–1783年）简化了他的法则，并证明了行列式等于零是n元齐次线性方程组有非零解的充要条件，这就让问题简化了很多。

线性代数

- 再往后，法国数学家范德蒙德（Alexandre-Théophile Vandermonde，1735–1796年）以行列式为独立的研究对象，对行列式理论进行了系统的阐述。因此，他也被称为行列式理论的奠基人。

- 受到范德蒙德的影响，拉普拉斯提出了用r行中所含的子式和它们的余子式的集合来展开行列式的方法，这个方法被称为拉普拉斯展开。

- 之后，德国数学家高斯（Carl Friedrich Gauss，1777−1855年）、谢克（Heinrich Ferdinand Scherk，1798–1885年）、雅可比（Carl Gustav Jacob Jacobi，1798–1885年）、法国数学家柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789–1857年）又对利用行列式求解线性方程组的方法进行了各种扩展与系统化。但整体而言，关注点都在行列式本身。

线性代数

- 将行列式背后的矩阵作为一个独立的数学概念提出，发掘出其线性变换的本质及其背后的线性空间的意义，是线性代数发展过程中最重要的一次进步。

- 这个进步的时间节点在十九世纪中叶。英国数学家西尔韦斯特（James Joseph Sylvester，，1814–1897年）首先提出了矩阵（matrix）的概念。Matr在英语中代表母性，matrix的本意是母体、子宫。隐含的一个意思就是它是之前人们已经广泛研究的行列式的母体，同时它也可以包含更为复杂的数学结构。

- 几年之后，他的挚友英国数学家凯莱（Arthur Cayley，1821–1895年）首次以矩阵的形式来表达线性方程组，一个强大的数学语言由此诞生。凯莱定义了今天的行列式表示法、矩阵加法、数乘、乘法、次方、单位矩阵、零矩阵和逆矩阵。他也因此被称为矩阵理论的创立者。

线性代数

- 再往后，柯西在研究行列式的时候提出的特征值与特征分解这些概念被爱尔兰数学家与物理学家哈密顿（William Rowan Hamilton，1805–1865年）、德国数学家弗罗贝尼乌斯（Ferdinand Georg Frobenius，1849–1917年）推广。

- 弗罗贝尼乌斯还提出了矩阵的秩的概念，关于矩阵的理论得以系统化。十九世纪末，意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858–1932年）又给出了向量空间的公理化定义。德国数学家托普利茨（Otto Toeplitz，1881–1940年）将线性代数的主要定理推广到任意体上的最一般的向量空间中。

- 至此，矩阵蕴藏的线性变换的概念及其背后的线性空间的概念逐渐清晰。这些理论在后期的量子力学发展过程中起到了至关重要的作用。

群论（有限群）

- 和线性代数类似，群论（先关注有限群理论，再以李群为例关注连续群）也是一个产生于解代数方程的理论。在我之前出版的《群论及其在凝聚态物理中的应用》的前言中，曾将这个过程做了一个解释。这里，我们把那个解释搬过来，供大家了解基本情况。

- 代数方程，大家都知道，一元一次的是ax+b=0，一元二次的是ax2+bx+c=0。它们的解析根式解我们在中学的时候就学过。一元三次方程和一元四次方程有没有和它们类似的根式解?

- 答案：有。对一元三次和四次方程，早期人们是可以利用配方和换元的方法把它们变成低次方程来求解的。比方说$ax^3+bx^2+cx+d=0$这样一个式子，$a\neq0$。人们怎么做呢?

群论

先换元，取$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{3a}}$，把它代入上式，企图把$\boldsymbol{x}$的一般的一元三次方程变成$\boldsymbol{y}$的一元三次方程。而这个$\boldsymbol{y}$的一元三次方程，不再是一个一般的一元三次方程，而是具有特殊形式的一元三次方程。过程如下：

$$\mathrm{a}\left(y-\frac{\mathrm{b}}{3\mathrm{a}}\right)^3+\mathrm{b}\left(y-\frac{\mathrm{b}}{3\mathrm{a}}\right)^2+\mathrm{c}\left(y-\frac{\mathrm{b}}{3\mathrm{a}}\right)+\mathrm{d}=0$$

$$\mathrm{a}\left(y^3-\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}y^2+\frac{\mathrm{b}^2}{3\mathrm{a}^2}y-\frac{\mathrm{b}^3}{27\mathrm{a}^3}\right)+\mathrm{b}\left(y^2-\frac{2\mathrm{b}}{3\mathrm{a}}y+\frac{\mathrm{b}^2}{9\mathrm{a}^2}\right)$$
$$+\mathrm{c}\left(y-\frac{\mathrm{b}}{3\mathrm{a}}\right)+\mathrm{d}=0$$

$$\mathrm{a}y^3+\left(\mathrm{c}-\frac{\mathrm{b}^2}{3\mathrm{a}}\right)y+\left(\mathrm{d}+\frac{2\mathrm{b}^2}{27\mathrm{a}^2}-\frac{\mathrm{bc}}{3\mathrm{a}}\right)=0$$

这样，二次项就不见了，一元三次方程变成了$y^3+py+q=0$，这里p、q都是由a、b、c、d确定的常数。而这个特殊形式的一元三次方程，是有根式解的。

群论（有限群）

- 历史上，有个故事与其相关，时间是16世纪，地点是意大利。当时在欧洲的数学界，去寻求一元三次方程的解在数学界是一种时尚，就像我们现在物理学界对高温超导机制的研究一样。代表人物有两个，分别是冯塔纳（Niccolo Fontana，1499–1557年）和卡丹（Girolamo Cardano，也称卡尔达诺，1501–1576年）。

- 传说第一个想出这个特殊方程根式解是冯塔纳，但他比较喜欢通过故弄玄虚来显示自己的聪明，不把话说明。因此，虽然当时有很多人相信他会解这个方程，但没有任何文献记录。而卡丹呢，则低调务实。传说中他跟冯塔纳讨教过，冯塔纳用很隐晦的语言进行了提示，他认为以卡丹理解不了。但事实却是卡丹在他的著作《大术》（<Ars Magna>，1545出版）中给了一些详细的解释。

群论（有限群）

- 因为这个原因，现在我们在讨论一元三次方程的根式解的时候，提到的第一个人物往往是卡丹。上面那个特殊的一元三次方程的解，人们也称为卡丹公式：

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

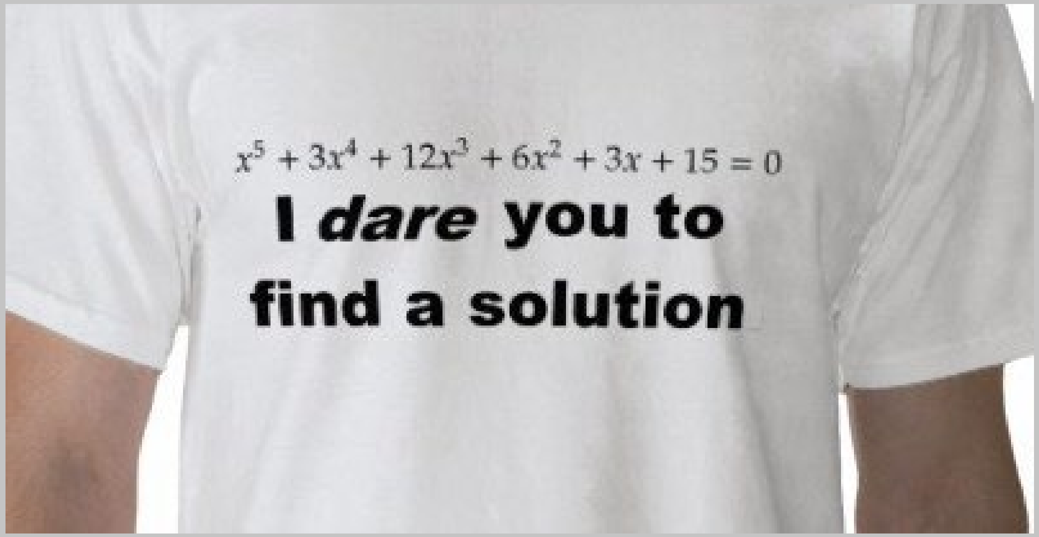
$$y_2=\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y_3=\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

这个里面$\boldsymbol{\omega}=-\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{3}}\mathrm{i}$。他已经用了虚数。前面也提到过，100年之后，笛卡尔依然不认可虚数的意义。

群论（有限群）

- 这个是关于一元三次方程根式解的故事。一元四次方程，人们又用相似方法做了努力，由卡丹的学生费拉里（Lodovico Ferrari，1522–1565年）给出了根式解，这个结果也是在卡丹的那本1545年的《Ars Magna》里面展示。之后，五次、六次及其以上又是什么情况呢？同样，在1545年以后也继续成为欧洲数学界的时尚。但两百年过去了，却始终没有任何进展。



群论（有限群）

- 当这个问题有下一步进展的时候，也就到了我们《群论》作为一门学科出现的时候了。这个前后发展的时间有一百多年，从1770年代开始，到19世纪末结束。其中的代表人物包括拉格朗日、鲁菲尼（Paolo Ruffini，1765-1822年）、迦罗瓦（Évariste Galois，1811–1832年）、阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802–1829年）、凯莱、弗罗贝尼乌斯、勃恩赛德（William Burnside，1852–1927年）、舒尔（Friedrich Heinrich Schur，1856–1932年）、李（Marius Sophus Lie，1842–1899年）等。

- 其中前面这些人（到阿贝尔），他们工作的初衷是求一元五次方程的解，但结果是建立了群论。而后面这些人，从凯莱开始，他们的主要工作，就是完善这个由前人提出的理论了。这些名字以及与他们相关的定理，在《群论》的学习中我们一般都会接触到。

群论（有限群）

- 怎么把解一元五次方程和《群论》这门学科联系起来，背后的道理其实很简单。前面我们提到了，在费拉里之后，两百多年，欧洲各位顶级的数学家都尝试着利用配方、换元这些数学手段去求四次以上方程的根式解，但都没成功。这种情况下，按科学规律而言，传统思维肯定就不行了。

- 这个就像我们把自己关在一个屋子里找东西，你的前辈科学家，各个聪明绝顶，他们把这个屋子的每个角落都进行了仔细的搜寻，都没有找到。这个时候你应该去意识到是不是这个屋子有另外一个维度你并不知道？你需要打破传统思维去找到这个维度。

群论（有限群）

- 在五次及其以上一元方程根式解的问题上，认识到这一点的最早的人物是拉格朗日。他实际上是看到了一种新的数学结构。从他开始，到鲁菲尼，到迦罗瓦与阿贝尔，他们做的事情是开始从群的结构，也就是常说的群论的角度去考虑这些问题了。

- 具体而言，如果把一个一元n次方程的根式解作为变换对象，那么它就会对应一个n次置换群。其中拉格朗日、鲁菲尼干的事情是利用置换的概念，去理解了三次和四次方程为什么有解。之后就是迦罗瓦和阿贝尔了，他们干的事情是彻底地在代数方程的可解性与其对应的置换群之间建立了联系，指出了n次方程有解的充要条件，以及说明一般的五次方程没有根式解。

群论（有限群）

- 一个n阶置换群是可解群的条件，是它的不变子群形成的不变子群列具有一个特殊的性质。就是前一个不变子群对后一个不变子群的商群，都是阿贝尔群。对于置换群而言，前四个都有这个性质。第五个及其以上，没有。因此，一元五次及其以上方程没有根式解。这部分大家不用理解细节，只需要知道大致逻辑即可。

- 基于这些开创性的工作，人们开始研究群这个集合的结构特征并且建立的有限群理论（用到了线性代数）。量子力学诞生后（建立在线性代数的基础上的），人们在量子力学的本征态与这个量子体系对称群的不可约表示之间建立联系，进而可以通过群论的语言去描述量子力学的本征态及与之相关的各种跃迁。

➡ 群论大大扩展了代数！也扩展了物理学的研究！

➢第五章：一些关键的数学进展

- 为啥要有这一讲（而不是直接去讲物理学革命）？
- 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立
- 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用
- 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响
- 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响
- 传承在数学的发展过程中发挥的重要作用

非欧几何、拓扑学、李群李代数

- 前一节说的主要是代数方面的进展。其中，像线性空间这些概念已经包含了几何的内容了。它是对传统的欧式几何所描述的空间的重要的扩展。

- 实际上，从解析几何开始，代数与几何就不可分割了。当然，各自还是各自的特征。本节关心的是物理学革命前几何学的新进展。和线性代数、有限群理论一样，它们也为二十世纪物理学变革型的新理论的提出提供了数学基础。

- 它们的特点也是抽象，但抽象背后，依然是理性。

非欧几何、拓扑学、李群李代数

- 一定程度上，我们也可以把十九世纪以非欧几何的诞生为起点的新几何、以群论的诞生为标志的新代数的发展以及它们的结合当作是几何与代数在历史上的第二次结合。

- 如果说它们的第一次结合导致的解析几何的诞生催生出了以牛顿力学为代表的经典物理的话，那么它们在十九世纪的第二次结合无疑又催生出量子力学与相对论，导致了物理学革命的发生。

- 本着易读的原则，我们还是先从非欧几何说起。非欧几何指的就是曲面上的几何。由于笔者之前出版的《群论及其在凝聚态物理中的应用》第二版的第七章曾经覆盖过这部分内容，和上节讲群论的时候一样，我们还是从那里拿了一部分内容过来并加以修改，供读者参考。

非欧几何

- 由于我们的基础教育（甚至包含多数高等教育）并不包含非欧几何的内容，我们往往会觉得与之相关的一些名词（比如本节后面要提到的拓扑空间与微分流形）非常的高深与抽象。为了将读者带入，我们从一些简单的关于空间的概念出发来展开介绍。

- 我们首先想再次强调的就是类似看起来复杂与高深的学术成就的诞生都是符合最直观、最简单的逻辑的。

- 比如，我们都知道早期欧氏几何描述的是均匀的、可以无限扩展的三维空间的性质。而在古希腊的多数自然哲学体系中，人们认为地球是处在中心宇宙这个同心球体的中心的。

非欧几何

- 比如，在亚里士多德的宇宙模型中，连续的、无限的直线运动是不被允许的，匀速圆周运动才是完美的。这样，就不可避免地会带来一个逻辑上比较简单但非常值得思考的问题：当我们站到地面上的一点我们看到的是欧氏空间，但当我们把自己放在上帝视角去看这个同心球模型中的地球我们就会意识到地球上的某个人看到的欧氏空间是无法通过无限延展覆盖整个地球的球面的。

- 考虑到这一点，后来人们对欧氏几何提出质疑就不足为奇了。

- 此质疑过程中比较有代表性的是1826年俄罗斯数学家Nikolai Ivanovich Lobachevsky（罗巴切夫斯基，1792-1856），他在喀山的一个数学家会议中宣读的自己关于非欧几何的论文《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》。

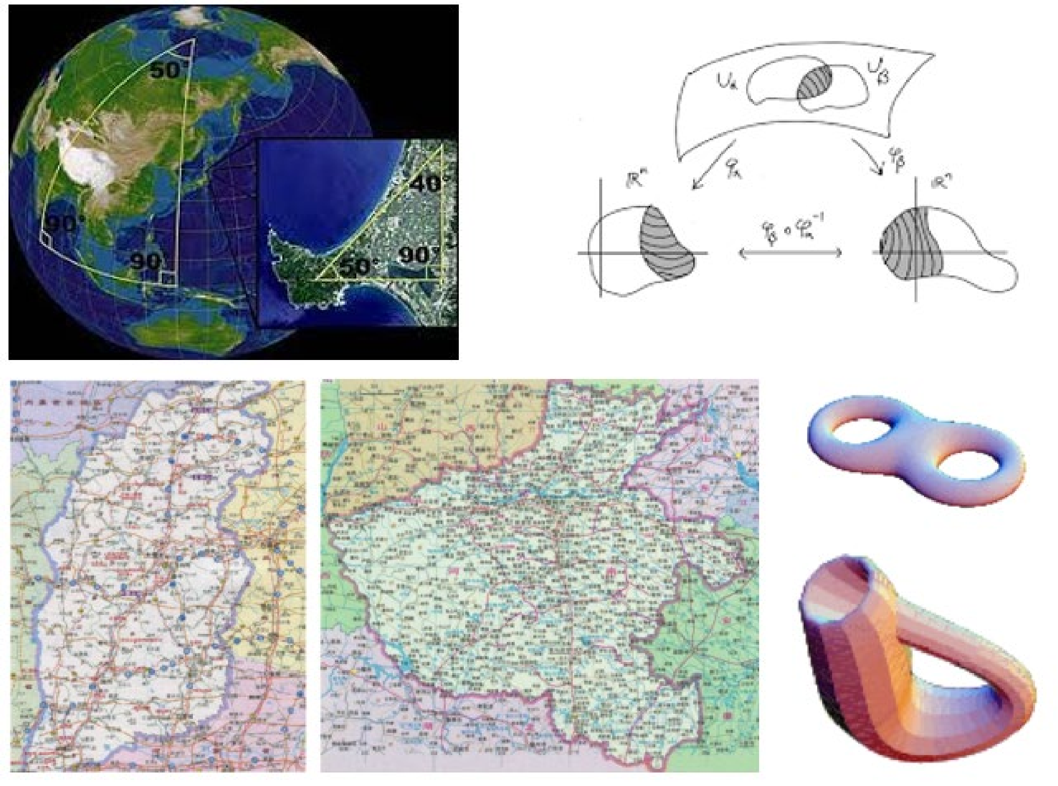
非欧几何

- 这里，他提出如果将欧氏几何中的第五条公设去除，基于前面的几条公设还是可以构建一个几何体系。但遗憾的是此理论在当时并没有被人们接受。1853年，哥廷根大学数学系教授高斯建议他的学生黎曼在其教授资格考试（Habilitation）中以非欧几何为题目完成资格考试论文。基于此建议，黎曼将此论文题目定为《On the hypotheses which underlie geometry》。此后，非欧几何正式在主流学界被广泛接受。

- 黎曼的主要研究对象是椭球球面，在这个过程中，他引入了流形（英文是manifold，意思是多褶皱，江泽涵先生按“天地有正气，杂然赋流形”进行翻译，信达雅兼顾）的概念，来描述类似基于曲面的几何。

非欧几何

- 在描述这个曲面的几何时，平行线公设是不需要的。就像下图中的地球，如果我们画一个很大的三角形，则在局域的视角我们认为相互平行的两条经线，在全局视角看来是可以相交的。图中这个三角形的内角和也不是180度。



非欧几何

- 黎曼几何很好地利用了欧氏空间的性质，把复杂的曲面分成很多封闭的区域的集合。类似封闭的区域的集合称为图卡（Atlas，有时也翻译为坐标图卡、图集、图汇）。每个区域对应的局部空间（开集），与欧氏空间这种完全没有扭曲的空间的开集在结构上对应。

- 因此，可以用欧氏空间中的微分工具来描述其结构。而相邻的区域，有重叠部分。在这些重叠的部分，又可以通过微分性质的连续性，保证完美地拼接起来。

- 这种拼接允许空间扭曲，而类似空间的扭曲会带来与欧氏几何完全不一样的性质。

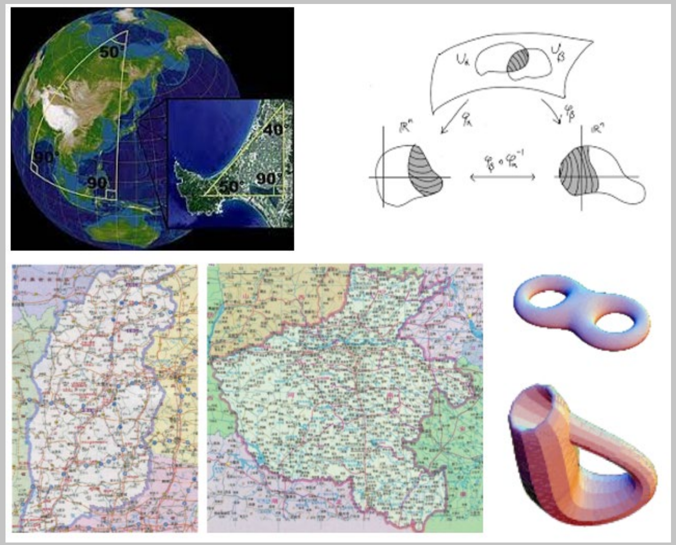
非欧几何

- 黎曼几何很好地利用了欧氏空间的性质，把复杂的曲面分成很多封闭的区域的集合。类似封闭的区域的集合称为图卡（Atlas，有时也翻译为坐标图卡、图集、图汇）。每个区域对应的局部空间（开集），与欧氏空间这种完全没有扭曲的空间的开集在结构上对应。因此，可以用欧氏空间中的微分工具来描述其结构。而相邻的区域，有重叠部分。在这些重叠的部分，又可以通过微分性质的连续性，保证完美地拼接起来。这种拼接允许空间扭曲，而类似空间的扭曲会带来与欧氏几何完全不一样的性质。

- 后来，大家都知道这套基于数学家对空间概念的探索而引入的数学语言诞生半个世纪后，在爱因斯坦发展的广义相对论中发挥了至关重要的作用。这个背后，实际上就是上一段提到的本质上很简单的图像。同时，我们也要指出本章要讲的很多看似高深、看似复杂的概念，都与这个简单的图像相关。

拓扑学

- 当我们以曲面为对象来研究几何的时候，曲面的宏观结构就形成了拓扑，如下图右下角的克莱因瓶所示。数学上，为了理解这些概念，我们需要先从拓扑空间出发引入一套基本语言来描述空间的拓扑性。之后，作为拓扑空间中一个例子，我们取可以利用微分方程来分析的豪斯道夫空间下手，引入微分流形。之后，这部分内容与群论结合，可以产生李群、李代数。它们描述的是不同曲面之间可以通过变换联系起来的性质。要想理解这些，还是需要花很大精力的。这里我们只是从历史的角度讲解其简单逻辑。



拓扑学

- 这个历史逻辑可以体现在克莱因（Felix Klein，1849–1925年）是黎曼之后加入哥廷根大学数学系的。之前，高斯与黎曼对这些晚辈的德国数学家肯定会产生影响。同时，在加入哥廷根大学之前，克莱因曾是爱尔兰根大学的教授，上述思想也是他在加入爱尔兰根大学时的入职演讲（史称爱尔兰根纲领）中的主要思想。

- 此纲领的作用，是把当时人们研究的不同几何学综合到一起成为关于空间之在变换群下不变性的研究。其几何根本，是由保其度规的变换群所表示的。

- 在这个纲领中，克莱因也特别提到了李（Sophus Lie, 1842–1899年）的贡献。

李群、李代数

- 在哥廷根期间，除了担任《数学年刊》，他还独具慧眼地将希尔伯特请到哥廷根，这使得哥廷根的数学系直至二战结束前都能够一直引领世界。同时，其数学地位也使得这所学校在十九世纪末、二十世纪初的物理学革命中扮演了不可替代的角色。

- 二十世纪二十年代末，量子力学建立之后，外尔（Hermann Klaus Hugo Weyl，1885−1955）接替了希尔伯特在哥廷根大学数学系的位置，开始系统地研究规范在物理学中的作用。这些，一定程度上也是本节所总结的传承的反映。

- 与之相应的更为抽象与高端的数学工具，即李群李代数，在二十世纪中后期逐渐称为学习理论物理的必需。

➢第五章：一些关键的数学进展

- 为啥要有这一讲（而不是直接去讲物理学革命）？
- 算术、几何、三角、代数的发展以及解析几何的建立
- 微积分、常微分方程、偏微分方程、泛函（变分）方法、复变函数理论的发展及其在物理学研究中的应用
- 线性代数、有限群理论的发展及其对后期物理学发展的影响
- 非欧几何、微分几何、李群李代数、拓扑学理论的发展及其对后期物理学的影响
- 传承在数学的发展过程中发挥的重要作用

传承

- 最后，我们讲一下传承在数学发展中的作用。前面提到过，这一点在很多学科中都是类似的。
- 在面向大众针对这一点进行讲解的时候，数学与物理与科学的其它分支略有不同。
- 它们（这两个学科）是如此的基础（特别是数学），以至于可以举得例子中牵扯到的人物我们多数都耳熟能详。
- 因此，我们把这节当成是一个对科学的这个属性进行详细说明的机会。我们会以数学的发展为例，把这个规律呈现出来，供读者体会。这个规律是适用于科学的其它分支的。

传承

- 在前面我们讲惠更斯的时候我们已经提到过，他深受韦达（Franciscus Vieta，1540−1603年）、笛卡尔（Rene Descartes，1596−1650年）、费马（Pierre de Fermat，1607−1665年）的影响，特别是笛卡尔。他虽然并不以数学成就著称，但莱布尼茨能够取得那么大的学术成就（包括数学成就），很大程度上得益于通过他处在笛卡尔这一脉上，并对这一脉的理性传统进行了充分的继承。

- 莱布尼茨往后，他一个重要的学生是雅可比I·伯努利（Jacob Bernoulli，1655−1705年）。雅可比I·伯努利带出了自己的弟弟约翰I·伯努利（Johann Bernoulli，1667−1748年）。约翰I·伯努利有四个儿子，其中丹尼尔I·伯努利（Daniel Bernoulli，1700−1782年）学术成就最大。他是流体力学中伯努利方程的提出者。同时，他还有一个好朋友欧拉（Leonhard Euler，1707−1782年）。他们一起，引领了牛顿力学在18世纪的发展。也将法国、俄罗斯建成了世界数学的中心。

传承

- 欧拉再往后，有个很有影响力的学生拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，1736−1813年）。

- 同时，虽然在直接传承上不能体现，但像笛卡尔、莱布尼茨、伯努利家族、欧拉这种人对法国数学的影响，也使得法国能够独立地涌现出达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert，1717−1783年）这样的数学大师。达朗贝尔的一个学生叫拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749-1827）。

- 当法国数学、物理学的旗帜传承到拉格朗日、拉普拉斯的手中的时候，时间已经到了十八世纪末。法国的启蒙运动也已结束。

传承

- 之后，拉格朗日与拉普拉斯以巴黎高工、巴黎高师为基地，培养出一批法国数学家，包括傅立叶（Joseph Fourier，1768−1830年，拉格朗日的学生）、泊松（Siméon Denis Poisson，1781−1840年，拉格朗日与拉普拉斯共同的学生）、阿拉贡（François Arago，1786−1853年，受益于拉普拉斯与泊松）、安培（André−Marie Ampère，1775−1836年，阿拉贡的合作者）、卡诺（Nicolas Léonard Sadi Carnot，1796–1832年）、柯西（Augustin−Louis Cauchy，1789−1857）、伽罗瓦（Évariste Galois，1811–1832年）等一批又一批我们无法一一列举的杰出的数学家。

- 现在，数学教育也是法国高校的特色。

传承

- 同样的故事也发生在德国、英国、俄罗斯，我们仅以德国为例展开说明。

- 在本书的前言部分，我们已经提到他们的科学发展是经历了一个从哲学、数学（这两个刚好也是最基础的学科），到实验物理学，到理论物理学，再到各个学科的系统渐进的逐步绽放过程的。这里我们可以略微转换关注点，从数学发展的角度来进行一个重新审视。

- 这一切还是要从莱布尼茨说起。在莱布尼茨生活的年代，德国还没有统一，各个独立的王国相对于法国还很落后，更别说和英国对比了。

- 但是之后的十八世纪，德国经历了古典哲学发展的黄金期。

传承

- 前面提到过，黑格尔（Georg Wilhelm Friedrich Hegel，1770−1831年）比高斯（Carl Friedrich Gauss，1777−1855年）只大七岁。

- 高斯是不世出的天才。德国的数学在他之后崛起，其中传承也起到了极其重要的作用。在这个传承过程中，哥廷根大学、柏林大学也扮演了极其重要的角色。

- 高斯的学生辈中比较出色的是黎曼（Bernhard Riemann，1826−1866年）和莫比乌斯（August Ferdinand Möbius，1790–1868年)，黎曼开创了非欧几何方面的系统研究，莫比乌斯的工作已经包含了拓扑的内容。

传承

- 在高斯的学生中，并不像黎曼、莫比乌斯这么著名，但也非常出色的有古德曼（Christoph Gudermann，1798–1852年）、格宁（Christian Ludwig Gerling，1788–1864年）。

- 其中，古德曼有个极其著名的学生魏尔施特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1815–1897年），是现代分析学的奠基人。

- 格宁的学生普吕克（Julius Plücker，1801–1868年）又带出了克莱因（Felix Klein，1849−1925年）。

传承

- 克莱因通过其学生林德曼（Carl Louis Ferdinand von Lindemann，1852–1939年），又影响了希尔伯特（David Hilbert，1862–1943年）、闵可夫斯基（Hermann Minkowski，1864−1909年）、索末菲（Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld，1868–1951年）这样的人物。

- 他们在青年时代均在哥廷根大学学习，之后有些也回到了哥廷根。

- 因此，用我们总是强调的“大学学科建设”的语言，在这里我们可以说克莱因传承了高斯、黎曼，将哥廷根大学发展为数学中心。

传承

- 除了哥廷根大学，还有柏林大学。魏尔施特拉斯，对它的影响是巨大的。

- 他带出了基灵（Wilhelm Killing，1847–1923年）、康托尔（Georg Cantor，1845–1918年）、弗罗贝尼乌斯（Ferdinand Georg Frobenius，1849–1917年）、熊夫利（Arthur Moritz Schoenflies，1853–1928年）等人。

- 在十九世纪末，以哥廷根大学、柏林大学为基地，再加上海德堡大学、慕尼黑大学、柯尼斯堡大学等其它高校的贡献，德国的数学也迎来的巅峰。

传承

- 最后，笔者强调一下自己的专业是物理学中的凝聚态物理，而非数学。

- 本章的这些感慨也仅仅是自己在讲授《今日物理》课程的过程中，体会到的我们需要学习的数学与我们在课本上或者各种读物中接触到的历史人物之间的联系，进而挖掘这些人物之间的联系所总结出的一些个人感触。这里总结出来，仅供参考。

下一个主题：与物理学相关的哲学思想的发展

谢谢大家！