10 δ 函数

本章要介绍一种新的"函数" — δ 函数. 它是由物理学家 Dirac 首先引进的, 可用于描写物理学中的点量, 例如点质量, 点电荷, 脉冲等, 在近代物理学中有着广泛的应用. 在数学上, δ 函数属于所谓广义函数, 但仍可以当作普通函数一样进行运算, 如计算微分和积分, 甚至应用于求解微分方程. 运用 δ 函数, 可以为我们处理有关的数学物理问题, 带来极大的便利.

10.1 δ 函数

先看 Fourior 变换

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{1}$$

逆变换为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{2}$$

可得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'f(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')} \tag{3}$$

假设可交换积分次序 (实际不可)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'f(x')\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')} \tag{4}$$

Dirac 引入 δ 函数

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases} \tag{5}$$

并且

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\delta(x). \tag{6}$$

由此得

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'f(x')\delta(x-x') \tag{7}$$

则 Fourior 变换 + 逆变换等价于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\delta(x) \tag{8}$$

数学上, Dirac 的 δ 函数的定义不是普通的数学函数: (5) 和 (6) 是矛盾的.

数学家引入**广义函数**, δ 函数被定义为一广义函数:

δ函数 设函数序列$\{\delta_n(x)\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta_n(x)=f(0) \tag{9}$$

则记

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x\equiv\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta_n(x)=f(0) \tag{10}$$

因此, δ 函数不能按照 Dirac 的原始方法引入, 而应该先写出函数序列:

$$\begin{aligned}\delta_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\ &= \frac{\sin(nx)}{\pi x}\end{aligned}$$

方程(4)则应写成:

$$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x' f(x')\int_{-n}^{n}\mathrm{d}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x' f(x')\delta_n(x-x')\end{aligned}$$

满足 (9) 的函数序列 $\{\delta_n(x)\}$ 很多, 例如

Example 10.1

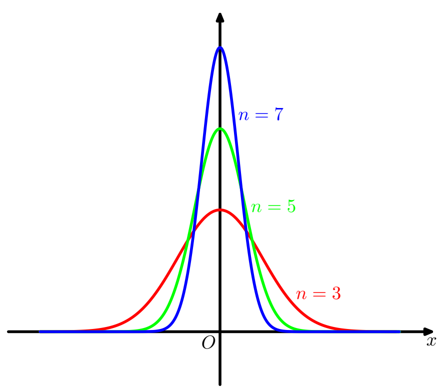
$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{l}{2} \\ \frac{1}{l} & |x| < \frac{l}{2} \end{cases} \qquad l = \frac{1}{n}.$$

若将 $\delta_n(x)$ 看作是在无穷直线上 $-l/2 < x < l/2(l = 1/n)$ 区间内有均匀的电荷分布, 总电量为1个单位时的电荷密度函数. 作为极限情形, 当 $l = 1/n \to 0$ 时, 就得到点电荷的密度函数. 若直接取极限

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty}\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \infty, & x = 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

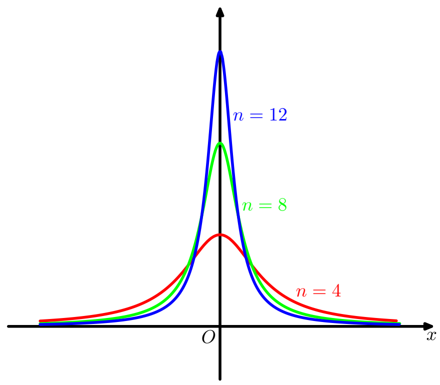
Example 10.2

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp(-n^2x^2)$$



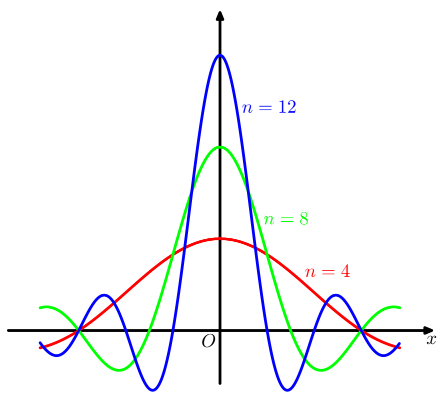
Example 10.3

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$$



Example 10.4

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$



Note 前三例函数有

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \tag{11}$$

与 *Dirac* 的 δ 函数原始定义相符.

而最后一例不符合 *Dirac* 的原定义!

重要的是 δ 函数的积分性质! 下列 δ 函数的性质都应从积分意义下理解

Example 10.5 *1.*

$$x\delta(x) = 0$$

2.

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

3.

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$

4.

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

5.

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$$

Proof 1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)\mathrm{d}x = xf(x)|_{x=0} = 0$$

2.
$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta(x)\mathrm{d}x \\ =&f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x \\ =&f(x)\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x \\ =&-f'(0) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(-x)\mathrm{d}x \\ =&\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta'(x)\mathrm{d}x \\ =&-[-f'(-x)]_{x=0} = f'(0)\end{aligned}$$

□

δ 函数与阶梯函数

由于
$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\mathrm{d}x = \begin{cases}1 & x>0 \\ 0 & x<0\end{cases} = \eta(x) \tag{12}$$
所以 δ 函数等于阶梯函数的导数
$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{13}$$
含 δ 函数的积分可以表示为 Stieltjes 积分
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}\eta(x). \tag{14}$$

δ 函数的 Laplace 变换

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\} &= \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-pt_0}, \qquad t_0>0\end{aligned}$$

二维或三维的情形

二维时

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \equiv \delta(x-x')\delta(y-y') \tag{15}$$

极坐标下, 注意到面元 $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi') \tag{16}$$

三维时

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \equiv \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{17}$$

球坐标下, 注意到体元 $\mathrm{d}V = r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\phi$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r^2}\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi') \tag{18}$$

Example 10.6 证明三维时

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{19}$$

在直角坐标系下

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

而

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

当 $r \neq 0$ 时, 直接微商可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3y^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3z^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

三式相加, 即得

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0, \quad r \neq 0$$

(19)成立. 但是, 函数 $1/r$ 在 $\boldsymbol{r}=0$ 点不可导!

Proof 凡涉及 δ 函数的等式都应该从积分意义下去理解, 所以我们应该证明

$$\iiint_V \nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}=0 \notin V \\ -4\pi & \boldsymbol{r}=0 \in V \end{cases} \tag{20}$$

并且, 若严格从数学上将 δ 函数理解为广义函数, 则应将 $\nabla^2\dfrac{1}{r}$ 看成一个序列的极限. 所以, 令

$$\frac{1}{r} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{(r^2+a^2)}}$$

计算可得

$$\nabla^2\frac{1}{\sqrt{(r^2+a^2)}} = -\frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}$$

若 $r \neq 0$

$$\lim_{a\to 0} \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{(r^2+a^2)}} = 0$$

所以, 积分体积 V 内不包含 $\boldsymbol{r}=0$ 时, 积分(20)为 0.

当积分积分 V 内包含 $\boldsymbol{r}=0$ 时, 不妨将 V 取为整个 (三维) 空间. 可以得到

$$\begin{aligned}
&\iiint \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
=& \lim_{a\to 0} \iiint \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
=& -\lim_{a\to 0} \iiint \frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\
=& -12\pi \lim_{a\to 0} \int_0^\infty \frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} r^2 \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

令 $r = a\tan\theta$, 可得上面积分与 a 无关, 且

$$\begin{aligned}
\iiint \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= -12\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \mathrm{d}\theta \\
&= -12\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \\
&= -12\pi \cdot \frac{1}{3} \sin^3\theta \Big|_0^{\pi/2} = -4\pi
\end{aligned}$$

□

Example 10.7 二维时

$$\nabla^2 \ln r = 2\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

10.2 利用 δ 函数计算定积分

利用 δ 函数的常用积分表达式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k$$

或

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx \mathrm{d}k,$$

也可以计算定积分. 下面通过几个例题来说明一般的计算步骤.

Example 10.8 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

Solution 考虑积分

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda x}{x} \mathrm{d}x,$$

显然有

$$\begin{aligned}
F'(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda x \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi\delta(\lambda).
\end{aligned}$$

所以

$$F(\lambda) = 2\pi\eta(\lambda) + C,$$

其中 C 为积分常数, 待定. 故当 $\lambda > 0$ 时,

$$F(\lambda) = 2\pi + C, \qquad F(-\lambda) = C.$$

考虑到 $F(\lambda)$ 是 λ 的奇函数,

$$F(-\lambda) = -F(\lambda), \qquad F(0) = 0,$$

即可定出$C = -\pi$. 因此

$$F(\lambda) = \begin{cases} \pi, & \lambda > 0; \\ 0, & \lambda = 0; \\ -\pi, & \lambda < 0. \end{cases}$$

特别是, 当 $\lambda = 1$, 就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi.$$

□

Example 10.9 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1} \mathrm{d}x.$$

Solution 可以引进辅助积分

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x^2 + x + 1} \mathrm{d}x,$$

它满足微分方程

$$-F''(\lambda) - \mathrm{i}F'(\lambda) + F(\lambda) = 2\pi\delta(\lambda). \tag{21}$$

这是一个特殊的二阶常微分方程: 其非齐次项含有 δ 函数.

这种特殊性表现在两方面: 一是当 $\lambda \neq 0$ 时, $\delta(\lambda) = 0$, 方程是齐次的, 二是当 $\lambda = 0$ 时, $F(\lambda)$ 是连续的,

$$\lim_{\epsilon \to +0} [F(0 - \epsilon) - F(0 + \epsilon)] = 0,$$

但 $F'(\lambda)$ 并不连续.

为了定量描述 $F'(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 点不连续性, 可以将微分方程积分, 由 $\lambda = 0$ 之左积到 $\lambda = 0$ 之右, 于是就有

$$\begin{aligned} &\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \Big[F''(\lambda) + \mathrm{i}F'(\lambda) - F(\lambda)\Big] \mathrm{d}\lambda \\ =& -2\pi \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \delta(\lambda) \mathrm{d}\lambda = -2\pi. \end{aligned}$$

因 $F(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 点连续, 故当 $\epsilon \to +0$ 时, 上式左端第二项和第三项的积分均趋于0,

$$\lim_{\epsilon \to +0} F'(\lambda)\Big|_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} = -2\pi.$$

现在回到微分方程的求解上. 因为当 $\lambda \neq 0$ 时 $\delta(\lambda) = 0$, 所以

$$F(\lambda) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}} + B\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}}, & \lambda > 0; \\ C\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}} + D\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

考虑到 $F(\lambda)$ 的有界性,

$$A=0 \qquad \text{和} \qquad D=0,$$

再因为 $F(\lambda)$ 在 $\lambda=0$点连续,

$$B=C;$$

$F'(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点不连续,

$$\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}B-\frac{-\mathrm{i}+\sqrt{3}}{2}C=-2\pi,$$

因此求得

$$B=C=2\pi/\sqrt{3}.$$

所以

$$F(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda>0;\\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda<0.\end{cases}$$

所要求的积分即为

$$I=\operatorname{Im}F(2)=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}\sin 1.$$

下面直接验证一下 $F'(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点的不连续性. 根据上面所得的结果, 可以求出

$$F'(\lambda)=\begin{cases}-\left[1+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right]\pi\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda>0;\\ \quad\left[1-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right]\pi\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda<0,\end{cases}$$

或者统一写成

$$F'(\lambda)=\left[1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}-2\eta(\lambda)\right]\pi\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|\lambda|/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}.$$

特别是, 在$\lambda=0$点, $F'(\lambda)$的左右极限为

$$\lim_{\epsilon\to+0}F'(0\pm\epsilon)=-\frac{\mathrm{i}\pi}{\sqrt{3}}\mp\pi.$$

□

10.3 常微分方程初值问题的 Green 函数

考虑如下非齐次的线性微分方程初值问题:

Problem

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=f(x), \qquad x>0,\\ &y(0)=0, \qquad y'(0)=0\end{aligned} \tag{22}$$

其解可以用所谓“常数变易法”法得到(见高数教科书). 现在我们用 Green 函数的方法求解.

Green 函数方法简介

非齐次项 $f(t)$ 经常称为**源**. 上述非齐次的线性微分方程初值问题满足叠加原理, 设

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}+k^2y_1(x)=f_1(x), \qquad x>0,\\&y_1(0)=0, \qquad y_1'(0)=0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2}+k^2y_2(x)=f_2(x), \qquad x>0,\\&y_2(0)=0, \qquad y_2'(0)=0\end{aligned}$$

容易证明, 它们的线性组合 $y(x)=\alpha y_1(x)+\alpha_2y_2(x)$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=\alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x), \qquad x>0,\\&y(0)=0, \qquad y'(0)=0\end{aligned}$$

利用 δ 函数, 任意函数 $f(x)$ 都可以表示为 δ 函数的线性组合

$$f(x)=\int f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x'$$

如果我们能够对于每一个 $\delta(x-x')$, 求解初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2g(x;t)}{\mathrm{d}x^2}+k^2g(x;t)=\delta(x-t), \qquad x,t>0,\\&g(0;t)=0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0\end{aligned} \tag{23}$$

则线性叠加

$$y(x)=\int f(t)g(x;t)\mathrm{d}t$$

即定解问题(22)的解.

这就是 Green 函数方法. $g(x;t)$ 称为 Green 函数.

Example 10.10 *求解 Green 函数*

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2g(x;t)}{\mathrm{d}x^2}+k^2g(x;t)=\delta(x-t), \qquad x,t>0,\\&g(0;t)=0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0\end{aligned}$$

Solution 注意到, 当 $x\neq t$ 时, 方程的非齐次项为0, 所以, 可以分段求得

$$g(x;t)=\begin{cases}A(t)\sin kx+B(t)\cos kx, & x<t,\\C(t)\sin kx+D(t)\cos kx, & x>t.\end{cases}$$

根据初值条件, 可以定出

$$A(t)=0, \qquad B(t)=0.$$

至于 $C(t)$ 和 $D(t)$ 则应由 $x=t$ 处的连接条件定出. 首先 $g(x;t)$ 应该在 $x=t$ 点连续

$$g(t-0;t)=g(t+0;t)$$

所以

$$g(t+0;t)=0\Rightarrow C(t)\sin kt+D(t)\cos kt=0$$

然后, 在 $x=t$ 处, $g(x;t)$ 还要满足方程. 因方程中包含有 δ 函数, 我们将方程在 $x=t$ 附近积分, 从 $t-0$ 积到 $t+0$, 得

$$\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0}=1$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t+0}=1\Rightarrow k[C(t)\cos kx-D(t)\sin kx]=1$$

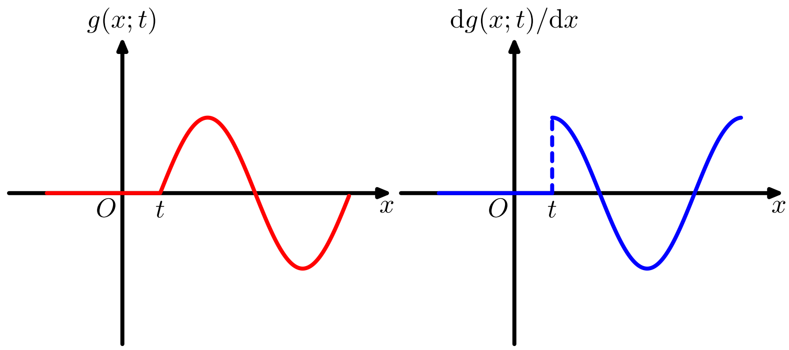
解之即得

$$C(t)=\frac{1}{k}\cos kt,$$
$$D(t)=-\frac{1}{k}\sin kt.$$

这样, 就得到

$$g(x;t)=\frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t)$$

如图



$g(x;t)$ 在 $x=t$ 处连续, 但 $\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}$ 在 $x=t$ 点不连续. □

在此基础上, 可以求出

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=f(x),\qquad x>0,$$
$$y(0)=0,\qquad y'(0)=0$$

的解

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t.$$

进一步, 可以求解

Example 10.11

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=f(x),\qquad x>0,$$
$$y(0)=A,\qquad y'(0)=B$$

Solution 先找个特解 $v(x)$ 满足

$$v(0) = A, \qquad v'(0) = B$$

例如

$$v(x) = A + Bx$$

令 $y(x) = u(x) + v(x)$, 则 $u(x)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k^2 u(x) = f(x) - k^2(A + Bx), \qquad x > 0, \\
&y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0
\end{aligned}$$

利用 Green 函数方法求出

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{k}\int_0^x [f(t) - k^2(A + Bt)] \sin k(x - t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{k}\int_0^x f(t) \sin k(x - t) \mathrm{d}t \\
&\quad - A(1 - \cos kx) - \frac{B}{k}(kx - \sin kx)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x) + A + Bx \\
&= \frac{1}{k}\int_0^x f(t) \sin k(x - t) \mathrm{d}t \\
&\quad + A \cos kx + B\frac{\sin kx}{k}
\end{aligned}$$

□

另解 设

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x) + v(x) \\
u(x) &= \frac{1}{k}\int_0^x f(t) \sin k(x - t) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k^2 u(x) = f(x), \qquad x > 0, \\
&u(0) = 0, \qquad u'(0) = 0
\end{aligned}$$

故 $v(x)$ 需满足

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + k^2 v(x) = 0, \qquad x > 0, \\
&v(0) = A, \qquad v'(0) = B
\end{aligned}$$

这是一个齐次线性常微分方程初值问题, 其解为

$$v(x) = A \cos kx + B\frac{\sin kx}{k}$$

... □

10.4 常微分方程边值问题的 Green 函数

考虑带非齐次项的常微分方程边值问题

Problem

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y(x) = f(x), \qquad a < x, t < b \\ &y(a) = 0, \qquad y(b) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

同样可以用 Green 函数方法求解.

Example 10.12 *求解 Green 函数*

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 g(x;t)}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t), \qquad a < x, t < b \\ &g(a;t) = 0, \qquad g(b;t) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Solution 同样当 $x \neq 0$ 时, 方程为齐次线性微分方程. 分段解出

$$\begin{aligned} &g(x;t) = \\ &\begin{cases} A(t)\sin k(x-a) + B(t)\cos k(x-a), & a < x < t, \\ C(t)\sin k(b-x) + D(t)\cos k(b-x), & t < x < b. \end{cases} \end{aligned}$$

由边界条件定出

$$\begin{aligned} g(a;t) = 0 \Rightarrow B(t) = 0 \\ g(b;t) = 0 \Rightarrow D(t) = 0 \end{aligned}$$

$A(t)$ 和 $C(t)$ 则由 $x = t$ 处的连接条件定出. $g(x;t)$ 应该在 $x = t$ 点连续

$$g(t-0;t) = g(t+0;t)$$

所以

$$A(t)\sin k(t-a) = C(t)\sin k(b-t)$$

将方程在 $x = t$ 附近积分, 从 $t-0$ 积到 $t+0$, 仍得

$$\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0} = 1$$

即

$$-k[C(t)\cos k(t-b) + A(t)\cos k(t-a)] = 1$$

这样就可以求得

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)} \\ C(t) &= -\frac{1}{k}\frac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)} \end{aligned}$$

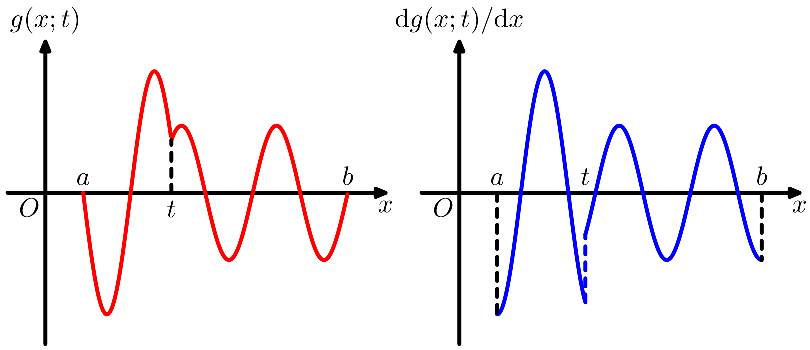
最后, 得到 Green 函数

$$g(x;t) = \begin{cases} -\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}\sin k(x-a), & a < x < t, \\ -\frac{1}{k}\frac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)}\sin k(b-x), & t < x < b. \end{cases}$$

整理后, 可以得到

$$
\begin{aligned}
g(x;t) = &\frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t) \\
&-\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}\sin k(x-a)
\end{aligned}
$$

如图



$g(x;t)$ 在 $x=t$ 处连续, 但 $\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}$ 在 $x=t$ 点不连续. □

于是可以求出

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=f(x), \qquad a<x<b, \\
&y(a)=0, \qquad y(b)=0
\end{aligned}
$$

的解

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\frac{1}{k}\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t \\
&-\frac{1}{k}\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}\int_a^b f(t)\sin k(b-t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

进一步, 可以求解

Example 10.13

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=f(x), \qquad a<x<b, \\
&y(a)=A, \qquad y(b)=B
\end{aligned}
$$

Solution 先找个特解 $v(x)$ 满足

$$v(a)=A, \qquad v(b)=B$$

例如

$$v(x)=A\frac{b-x}{b-a}+B\frac{x-a}{b-a}$$

令 $y(x)=u(x)+v(x)$, 则 $u(x)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+k^2u(x)=f(x)-k^2v(x), \qquad x>0, \\
&y(a)=0, \qquad y(b)=0
\end{aligned}
$$

利用 Green 函数方法求出

$$
\begin{aligned}
u(x) = &\frac{1}{k}\int_a^x [f(t) - k^2 v(x)]\sin k(x-t)\mathrm{d}t \\
&- \frac{1}{k}\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}\int_a^b [f(t) - k^2 v(x)]\sin k(b-t)\mathrm{d}t \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

□

另解 设

$$
\begin{aligned}
y(x) &= u(x) + v(x) \\
u(x) &= \frac{1}{k}\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{1}{k}\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}\int_a^b f(t)\sin k(b-t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

则由

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k^2 u(x) = f(x), \qquad a < x < b, \\
&u(a) = 0, \qquad u(b) = 0
\end{aligned}
$$

$v(x)$ 需满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + k^2 v(x) = 0, \qquad a < x < b, \\
&v(a) = A, \qquad v(b) = B
\end{aligned}
$$

这是一个齐次线性常微分方程边值问题, 通解写为

$$
v(x) = C\sin k(x-a) + D\sin k(b-x)
$$

由边界条件

$$
\begin{aligned}
D\sin k(b-a) &= A \\
C\sin k(b-a) &= B
\end{aligned}
$$

解得

$$
v(x) = A\frac{\sin k(b-x)}{\sin k(b-a)} + B\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
y(x) &= u(x) + v(x) \\
&= \frac{1}{k}\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{1}{k}\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}\int_a^b f(t)\sin k(b-t)\mathrm{d}t \\
&\quad + A\frac{\sin k(b-x)}{\sin k(b-a)} + B\frac{\sin k(x-a)}{\sin k(b-a)}
\end{aligned}
$$

□