

### 第三章 有心力场

#### 3.1 有心力场概述

##### 3.1.1 两体质心系中的描述

➤ 考虑孤立两体，质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ，其间相互作用势能

$$V = V(|\vec{r}|), \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (1.1)$$

• 取质心（惯性）参考系、质心参考点，则有

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

相应拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.2)$$

• 体系的旋转不变性导致角动量  $\vec{J}$  守恒，故可确定相对运动的轨道为平面曲线，其平面法向即为角动量的方向。取  $m_2$  为参考点，建立极坐标，则拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \quad (1.3)$$

相应守恒的轨道角动量和轨道能量分别为

$$J = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (1.4)$$

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (1.5)$$

于是我们得到

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{\mu r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V(r)] - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$$

如果我们关心的是轨道（如上取了  $\dot{r} > 0$  的轨道分支），则可以对微分方程

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{(J/r^2)}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} \quad (1.6)$$

直接积分得

$$\theta - \theta_0 = \int^r dr \frac{(J/r^2)}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} \quad (1.7)$$

• 能量方程中

$$\frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r) = V_{\text{eff}}(r) \quad (1.8)$$

被称为有效势能，它决定了轨道径向（分）运动的特征。例如，对于能量为  $E$  的轨道，其径向折返点  $r_0$  决定于方程

$$E = V_{\text{eff}}(r_0)$$

### 3.1.2 比奈方程

➤ 有心力场的拉格朗日方程的径向分量式为

$$F(r) = -V'(r) = \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1.9)$$

• 我们引入变量  $u = r^{-1}$ . 考虑到角动量守恒, 可做如下替换

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{J}{\mu} u^2 \frac{d}{d\theta}$$

例如

$$\dot{r} = \frac{J}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{J}{\mu} \frac{du}{d\theta}, \quad \ddot{r} = -\frac{J^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

由此可得到比奈方程

$$-\frac{J^2}{\mu} u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = F(r) \quad (1.10)$$

☞ 例: 由开普勒第一定律可知, 大行星相对于太阳的轨道为椭圆, 轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow u = p^{-1} + \frac{e}{p} \cos \theta$$

代入比奈方程得

$$F(r) = -\frac{J^2}{\mu p} u^2 = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha = \frac{J^2}{\mu p}$$

即可以反推出“平方反比律”。

### 3.2 开普勒问题

➤ 万有引力场中的轨道问题, 被称为开普勒问题, 相应

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = GMm \quad (2.1)$$

➤ 轨道方程: 由方程(1.7), 得

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \int dr \frac{(J/r^2)}{\sqrt{2\mu \left[ E + \frac{\alpha}{r} \right] - \frac{J^2}{r^2}}} \\ &= -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{\mu^2 \alpha^2}{J^4} \left( 1 + \frac{2EJ^2}{\mu \alpha^2} \right) - \left( u - \frac{\mu \alpha}{J^2} \right)^2}}, \quad u = \frac{1}{r} \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{p \cdot u - \frac{\alpha}{|\alpha|}}{e} \right) \end{aligned}$$

即

$$r = \frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{cases} p = \frac{J^2}{\mu|\alpha|} \\ e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}} \end{cases} \quad (2.3)$$

对于万有引力场， $\alpha > 0$ ，进一步取积分常量  $\theta_0 = 0$ （相当于取近日点为极轴方向），则

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2.4)$$

- 由偏心率  $e$  表征的曲线特征，物理上主要反应了轨道能量的正负，

$$\begin{cases} E > 0 \ (e > 1) & \text{双曲线(的一支)} & \text{不闭和 (可到 } r \rightarrow \infty) \\ E = 0 \ (e = 1) & \text{抛物线} & \text{不闭和 (可到 } r \rightarrow \infty) \\ E < 0 \ (e < 1) & \text{椭圆} & \text{闭和且有周期} \end{cases}$$

大行星的轨道为椭圆，即  $E < 0$ ，反映了它们无法逃脱太阳引力的束缚。

- 由正焦弦  $p$  表征的曲线特征，物理上主要反应了轨道角动量的大小，尤其是  $L = 0$  时，椭圆退化成直线段（可看作椭圆的特例），抛物线和双曲线退化成射线。

对于椭圆轨道，给定轨道能量  $E < 0$ ，角动量的极大值对应于匀速圆周运动。

- 椭圆轨道：取半长轴长  $A$ 、半短轴长  $B$ ，则焦距  $C = \sqrt{A^2 - B^2}$

$$\begin{cases} A - C = \frac{p}{1 + e} \\ A + C = \frac{p}{1 - e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \frac{C}{A} \\ p = \frac{B^2}{A} = A(1 - e^2) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = -\frac{\alpha}{2A} = -\frac{GMm}{2A} \\ J = \mu \sqrt{\frac{\alpha}{\mu A}} B = \mu \sqrt{\frac{G(m+M)}{A}} B \end{cases} \quad (2.6)$$

- Kepler 三定律升级版（太阳系中的天体）

开 I：引申为圆锥曲线，太阳位于焦点

开 II：引申为圆锥曲线，对于椭圆轨道有  $K = \frac{dS}{dt} = \frac{J}{2\mu} = \frac{\sqrt{G(m+M)}}{2} \frac{B}{\sqrt{A}}$

开 III：只对椭圆轨道， $T = \frac{\pi AB}{dS/dt} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m+M)}} A^{3/2}$

- 附注：对于太阳系中的天体运动，经常可以利用  $M \gg m$  来做近似。

- 双曲线轨道：近日点

$$C - A = \frac{p}{1 + e}, \quad e = \frac{C}{A}$$

由此可得

$$A = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{GMm}{2E} \quad (2.7)$$

- 库仑排斥力场:  $\alpha = -kQq < 0$ , 轨道方程

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \theta} \quad (2.8)$$

因此轨道为双曲线。近心点距离

$$A + C = \frac{p}{e - 1}$$

则

$$A = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{kQq}{2E} \quad (2.9)$$

- 利用比奈方程求解轨道:

$$-\frac{J^2}{\mu} u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = F(r) = -\alpha u^2 \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = p^{-1}$$

其通解为

$$u = A_0 \cos(\theta - \theta_0) + p^{-1}$$

即是轨道方程 ( $e = pA_0$ )。

- 隆格-楞次矢量:

Laplace-Rouge-Lenz 矢量是平方反比力场特有的守恒量, 其形式为

$$\vec{B} = \mu \vec{v} \times \vec{J} - \mu \alpha \hat{r} \quad (2.10)$$

- 守恒性的证明:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{dt} &= \frac{d(\mu \vec{v})}{dt} \times \vec{J} - \mu \alpha \frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= -\frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \times \vec{J} - \mu \alpha \frac{\vec{J}}{\mu r^2} \times \hat{r} = 0 \end{aligned}$$

- 轨道方程:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{r} &= Br \cos \theta = J^2 - \mu \alpha r \\ \therefore r &= \frac{J^2}{\mu \alpha + B \cos \theta} \end{aligned} \quad (2.11)$$

- $\vec{B}$  的大小:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{B} &= \mu^2 v^2 J^2 + \mu^2 \alpha^2 - 2\mu^2 \alpha (\hat{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{J} \\ &= \mu^2 \alpha^2 + \mu^2 v^2 J^2 - 2\mu \frac{\alpha}{r} J^2 = \mu^2 \alpha^2 + 2\mu E J^2 \end{aligned}$$

因此

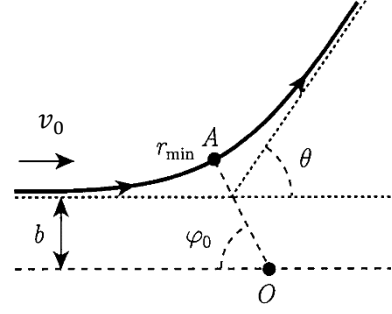
$$B = \mu \alpha \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu \alpha^2}} = \mu \alpha e \quad (2.12)$$

### 3.3 中心势场散射截面

#### 3.3.1 散射角

散射(或碰撞)实验是探测微观粒子结构、性质及相互作用机制的重要手段。

我们考虑两体散射过程，如图所示。设两者相互作用势能为  $V(r)$ ，并设  $m_2 \gg m_1$ ，则散射过程中 2 粒子被固定在图中  $O$  点，相应 2 粒子被称为靶粒子，这种散射也被称为固定靶散射。图中 1 粒子（入射粒子）与固定靶相距无穷远时，其速度大小记为  $v_0$ 、速度方向线与  $O$  点距离记为  $b$ ，它也被称为瞄准距离或碰撞参量。相应轨道能量与角动量分别为



$$E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2, \quad J = m_1 v_0 b \quad (3.1)$$

图中， $m_1$  轨道两条渐近线的夹角  $\theta$  被称为散射角，显然两条渐近线关于  $OA$  对称，故有

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 \quad (3.2)$$

由(1.6)式可知

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{+\infty} dr \frac{(J/r^2)}{\sqrt{2m_1[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} \quad (3.3)$$

其中  $r_{\min}$  决定于方程  $E = \frac{J^2}{2m_1 r_{\min}^2} + V(r_{\min})$ 。将(3.1)代入(3.3)，得

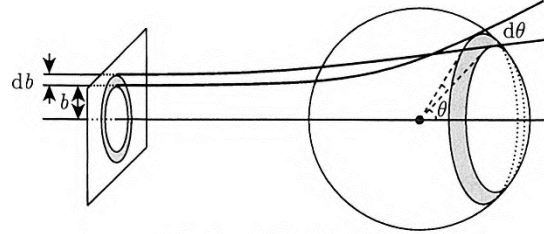
$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{+\infty} dr \frac{(b/r^2)}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{m_1 v_0^2}}} \quad (3.4)$$

结合(3.2)与(3.4)，便可以得到散射角与碰撞的初值参量之间的关系。

### 3.3.2 散射截面

对于通常的微观粒子散射实验，左侧入射的实际上是由大量速度相同的全同粒子组成的粒子束流。束流强度  $I$  被定义为左侧无穷远处单位时间、单位横截面积上入射的粒子数，后面的讨论中我们假设  $I$  为常量。

粒子束流中不同位置入射的粒子具有不同的瞄准距离  $b$ ，对应于不同的散射角  $\theta$ ，相应束流中的粒子被散射到不同的立体角区域。因为中心势场散射具有轴对称，故可取环带立体角元  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ，该立体角元内单位时间散射的粒子数将正比于  $d\Omega$  及束流强度  $I$ ，即有



$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{散射}} = \sigma(\theta) I d\Omega \quad (3.5)$$

其中  $\sigma(\theta)$  具有面积量纲，被称为微分散射截面。

从上图的入射端来看，散射到立体角元  $d\Omega$  的粒子完全来自于宽度为  $db$  的

环带上入射的粒子，因此可以将该环带的面元定义为微分有效散射截面

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (3.5)$$

显然  $I d\sigma$  即为单位时间散射到对应立体角元  $d\Omega$  的粒子数，因此有

$$|d\sigma| = \sigma(\theta) |d\Omega| \quad (3.6)$$

这样便可得到计算微分散射截面的公式

$$\sigma(\theta) = 2\pi b \left| \frac{db}{d\Omega} \right| = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (3.7)$$

在(3.6)和(3.7)式中分别取了绝对值，这是为了保证微分散射截面为正。

考虑库仑排斥力场散射，由轨道方程(2.8)可以解得

$$\varphi_0 = \arccos(e^{-1}) \quad (3.8)$$

其中

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m_1 \alpha^2}}, \quad \alpha = -kQq < 0$$

考虑到(3.1)、(3.2)式，得

$$\cot \frac{\theta}{2} = \tan \varphi_0 = \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{\frac{2EJ^2}{m_1 \alpha^2}} = \frac{m_1 v_0^2}{|\alpha|} b$$

于是

$$b(\theta) = \frac{|\alpha|}{m_1 v_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (3.9)$$

代入(3.7)式可得

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} \left( \frac{|\alpha|}{m_1 v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (3.10)$$

这就是著名的卢瑟福微分散射截面公式。