9 二阶线性常微分方程的幂级数解法

二阶常微分方程的标准形式是

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0 \tag{1}$$

9.1 二阶线性常微分方程的常点和奇点

方程的常点和奇点 设 $p(z)$ 和 $q(z)$ 为二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0$$

的系数. 如果 $p(z)$, $q(z)$ 在 z_0 点解析, 则 z_0 点称为方程的 **常点**. 如果 $p(z)$, $q(z)$ 中至少有一个在 z_0 点不解析, 则 z_0 称为方程的**奇点**.

Example 9.1 超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z} + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \alpha\beta w = 0$$

Solution 写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z} + \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}w = 0$$

其系数是

$$p(z) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}$$
$$q(z) = -\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

$p(z)$, $q(z)$ 有两个奇点: $z = 0, 1$. 所以 $z = 0, 1$ 是方程的奇点, 其它点都是方程的常点. □

Example 9.2 *Legendre* 方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0$$

Solution 写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{l(l+1)}{1-x^2}y = 0$$

由系数知: $x = \pm 1$ 为方程的奇点. □

9.2 方程常点邻域内的解

方程常点邻域内的解

Theorem 9.1 如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z - z_0| < R$ 内解析, 则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0$$
$$w(z_0) = C_0, \qquad w'(z_0) = C_1$$

C_0, C_1 为任意常数, 有唯一的解 $w(z)$, 并且 $w(z)$ 在这个圆内单值解析.

根据这个定理, 可以用幂级数解法求方程常点邻域内的解.

首先将 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内展开成 Taylor 级数

$$p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{2}$$

$$q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k \tag{3}$$

根据定理, 又可以把 $w(z)$ 在相同的邻域 $|z-z_0|<R$ 内展开为 Taylor 级数

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \tag{4}$$

由初值条件可得

$$c_0=w(z_0)=C_0,\qquad c_1=w'(z_0)=C_1$$

将幂级数展开式一起代入微分方程, 即可用待定系数法求出解的各个系数 c_k.

Example 9.3 *求 Legendre 方程*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{l(l+1)}{1-x^2}y=0$$

在 $x=0$ 点邻域内的解, 其中 l 是一个参数.

Solution $x=0$ 为常点. 因为 $x=\pm1$ 为方程奇点, 所以 $p(x)$, $q(x)$ 在 $|x|<1$ 内解析, 于是可以在 $|x|<1$ 内找到方程的解析解. 可令解为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$$

下一步若将方程系数 $p(x)$, $q(x)$ 展开成 Taylor 级数, 则解的过程比较繁. 我们将方程仍写成

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

将幂级数解代入, 有

$$\begin{aligned}&(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)x^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kkx^{k-1}\\&+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\end{aligned}$$

左边第一项可写成

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{\infty}c_kk(k-1)x^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)x^k\\=&\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)x^k\end{aligned}$$

代入, 整理、和并后, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-[k(k+1)-l(l+1)]c_k\}x^k=0$$

比较 x 各幂次的系数

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - [k(k+1) - l(l+1)]c_k = 0$$

得到系数之间的递推关系

$$c_{k+2} = \frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$$

反复利用递推关系

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{c_0}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l) \\ &\quad (2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1) \\ c_{2n+1} &= \frac{c_1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1) \\ &\quad (2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2) \end{aligned}$$

利用 Γ 函数性质

$$\begin{aligned} &\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\ &\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z) \end{aligned}$$

可用 Γ 函数表示 n 项连乘

$$(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \tag{5}$$

于是

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l}{2})}{\Gamma(-\frac{l}{2})}\frac{\Gamma(n+\frac{l+1}{2})}{\Gamma(\frac{l+1}{2})}c_0 \\ c_{2n+1} &= \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l-1}{2})}{\Gamma(-\frac{l-1}{2})}\frac{\Gamma(n+1+\frac{l}{2})}{\Gamma(1+\frac{l}{2})}c_1 \end{aligned}$$

所以, Legendre 方程的解就是

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

其中

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l}{2})}{\Gamma(-\frac{l}{2})}\frac{\Gamma(n+\frac{l+1}{2})}{\Gamma(\frac{l+1}{2})}x^{2n} \\ y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(n-\frac{l-1}{2})}{\Gamma(-\frac{l-1}{2})}\frac{\Gamma(n+1+\frac{l}{2})}{\Gamma(1+\frac{l}{2})}x^{2n+1} \end{aligned}$$

□

二阶线性常微分方程通解的结构

以下设方程系数 $p(z)$, $q(z)$ 在区域 G 内解析.

首先由于方程是线性齐次的, 显然有

解的线性迭加性 设 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0$$

在区域 G 内的两个解, 则它们的任意一个线性组合

$$k_1 w_1(z) + k_2 w_2(z)$$

也是方程在此区域的解.

通解 若 $w_1(x)$ 和 $w_2(x)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

在区域 G 内的两个线性无关的解, 即若

$$k_1 w_1(z)+k_2 w_2(z)\equiv 0,$$

必有复常数 $k_1=0$, $k_2=0$. 则方程在区域内的通解为

$$k_1 w_1(z)+k_2 w_2(z)$$

方程的任意一个解都包含在通解中.

解的线性相关充要条件 设 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

在区域 G 内的两个解. $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 在 G 上线性相关的充要条件是: 它们的 Wronski 行列式

$$W[w_1(z),w_2(z)]=\begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} \tag{6}$$

在 G 内恒等于零.

现设 $w_1(z)$, $w_2(z)$ 为方程的两个解

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}+q(z)w_1=0 \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}+q(z)w_2=0 \tag{8}$$

(8)$\times w_1(z)$ $-$ (7)$\times w_2(z)$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}-w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right)\\&+p(z)\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}-w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right)=0\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}W[w_1,w_2]=-p(z)W[w_1,w_2]$$

于是

$$\ln W[w_1,w_2]=-\int^z p(\xi)\mathrm{d}\xi+C$$

即

$$W[w_1,w_2]=A\exp\left[-\int^z p(\xi)\mathrm{d}\xi\right] \tag{9}$$

因此, 只要在区域内任意一点 z_0, $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 的 Wronski 行列式

$$W[w_1(z),w_2(z)]_{z=z_0}=0,$$

则 $A=0$, $W[w_1(z),w_2(z)]\equiv 0$, $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 线性无关. 反之, 只要在区域内任意一点 z_0, $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 的 Wronski 行列式

$$W[w_1(z),w_2(z)]_{z=z_0}\neq 0,$$

则 $A\neq 0$, $W[w_1(z),w_2(z)]$ 恒不为零, $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 线性无关.

9.3 方程在孤立奇点邻域内的解的结构

解析延拓

如果 z_0 是方程的孤立奇点, 则 z_0 点可能是解的奇点. 避开奇点, 我们在 z_0 的邻域内取一点 b 为方程的常点. 在 b 的邻域用幂级数解法, 求出方程在常点 b 附近的解析解

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

幂级数的收敛半径为 R, 收敛圆为圆盘 $D=\{|z-b|<R\}$.

我们可用解析延拓的方法将 G 内的解析解延拓到更大的区域内:

Theorem 9.2 *方程*

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

的解的解析延拓仍为方程的解.

Proof 设 $w(z)$ 是方程在 G 内的解. $w_1(z)$ 为 $w(z)$ 在 G_1 内的解析延拓, 即在 G 和 G_1 的公共区域 $g=G\cap G_1\neq 0$ 内

$$w(z)=w_1(z)$$

考虑函数

$$f(z)=w_1''+p(z)w_1'+q(z)w_1$$

为 G_1 内的解析函数. [1]

在 $g\subset G_1$ 内

$$f(z)=w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

因此 $f(z)$ 在 G_1 内恒为零, 即 $w_1(z)$ 在 G_1 内满足方程. □

对于二阶线性微分方程,

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

如果 z_0 是方程的奇点, 则 z_0 点可能是方程的解的奇点: 可能为解的极点, 本性奇点; 如果解为多值函数, 还可以是解的枝点.

Theorem 9.3 *如果 z_0 是二阶线性微分方程的孤立奇点, $p(z)$, $q(z)$ 在区域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析, 则在环形区域 $0<|z-z_0|<R$ 内, 方程有两个线性无关的解.*

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \tag{10}$$

$$\begin{aligned}w_2(z)&=gw_1(z)\ln(z-z_0)\\&\quad+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k\end{aligned} \tag{11}$$

其中 ρ_1, ρ_2 和 g 为复常数.

Proof 为简单起见, 假设奇点为 $z_0=0$. 方程的两个线性无关的解为 $w_1(z)$, $w_2(z)$.

不失一般性, 设解为多值函数, $z_0=0$ 为枝点. 沿正实轴方向作割线, 规定割线上岸的辐角值为 $\arg z=0$. 在此单值分支I, $0\le\arg z<2\pi$, $w_1(z)$, $w_2(z)$ 为方程的线性无关解.

在下一个单值分支II, 规定割线上岸的辐角为 $\arg z=2\pi$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, $2\pi\le\arg z<4\pi$, 也是方程的两个线性无关的解. 即 $w_1(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})$, $w_2(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})$, $0\le\arg z<2\pi$ 为方程的解, 故

$$\begin{aligned}w_1(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})&=a_{11}w_1(z)+a_{12}w_2(z)\\w_2(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})&=a_{21}w_1(z)+a_{22}w_2(z)\end{aligned}$$

[1] G 和 G_1 内不含方程的奇点, 所以 $p(z)$, $q(z)$ 在区域内解析.

若有解 $w(z)$ 满足

$$w(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) = \lambda w(z)$$

λ 为一复常数. 考虑函数

$$f(z) = \frac{w(z)}{z^\rho} \qquad \rho = \frac{\ln\lambda}{2\pi\mathrm{i}}$$

我们来计算在单值分支II的多值函数值

$$f(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) = \frac{w(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})}{(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^\rho} = \frac{\lambda w(z)}{z^\rho\lambda} = f(z)$$

说明 $f(z)$ 为单值解析函数, $z_0 = 0$ 不再是函数的枝点, 但可以是函数的奇点, 且为孤立奇点. 于是可在 $z_0 = 0$ 的邻域 $0 < |z-0| < R$ 作 Laurent 展开, 得

$$\frac{w(z)}{z^\rho} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

即

$$w(z) = z^\rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

正是我们要证的形式.

下面来构造 $w(z)$, 设

$$w = b_1 w_1 + b_2 w_2$$

b_1, b_2 为待定系数. 则

$$\begin{aligned} w(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) &= b_1 w_1(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) + b_2 w_2(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) \\ &= (b_1 a_{11} + b_2 a_{21}) w_1(z) + (b_1 a_{12} + b_2 a_{22}) w_2(z) \\ &= \lambda w(z) = \lambda b_1 w_1(z) + \lambda b_2 w_2(z) \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} b_1 a_{11} + b_2 a_{21} = \lambda b_1 \\ b_1 a_{12} + b_2 a_{22} = \lambda b_2 \end{cases}$$

化为矩阵本征值问题

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

其解分成两种情况

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可以找到

$$\begin{aligned} w_1(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) &= \lambda_1 w_1(z) \\ w_2(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}) &= \lambda_2 w_2(z) \end{aligned}$$

则

$$w_1(z) = z^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

$$w_2(z) = z^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$$

符合定理 $(g = 0)$.

2. $\lambda_1=\lambda_2$ 只能找到

$$w_1(ze^{2\pi i})=\lambda_1 w_1(z)$$

而

$$w_2(ze^{2\pi i})=\beta w_1(z)+\lambda_1 w_2(z)$$

于是

$$w_1(z)=z^{\rho_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$$

下面来求第二解. 因为

$$\frac{w_2(ze^{2\pi i})}{w_1(ze^{2\pi i})}=\frac{w_2(z)}{w_1(z)}+\frac{\beta}{\lambda_1}$$

考虑函数

$$f(z)=\frac{w_2(z)}{w_1(z)}-\frac{\beta}{\lambda_1}\frac{1}{2\pi i}\ln z$$

在单值分支II

$$\begin{aligned}f(ze^{2\pi i})&=\frac{w_2(ze^{2\pi i})}{w_1(ze^{2\pi i})}-\frac{\beta}{\lambda}\frac{1}{2\pi i}\ln(ze^{2\pi i})\\&=\frac{w_2(z)}{w_1(z)}+\frac{\beta}{\lambda_1}-\frac{\beta}{\lambda}\frac{1}{2\pi i}\ln z-\frac{\beta}{\lambda}\\&=f(z)\end{aligned}$$

所以 $f(z)$ 在环域 $0<|z-0|<R$ 内单值解析. 展开成 Laurent 级数, 令 $g=\frac{\beta}{2\pi i\lambda_1}$

$$\frac{w_2(z)}{w_1(z)}-g\ln z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e_n z^n$$

即

$$\begin{aligned}w_2(z)&=gw_1(z)\ln z+w_1(z)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e_n z^n\\&=gw_1(z)\ln z+z^{\rho_1}\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_l z^l\sum_{k=-\infty}^{\infty}e_k z^k\\&=gw_1(z)\ln z+z^{\rho_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n z^n\end{aligned}$$

正是第二解的形式.

□

9.4 方程在正则奇点邻域内的解

在上节, 我们得到了奇点邻域内解的级数展开式 (10)和 (11). 如果我们把解代入方程,试图用待定系数法定级数的系数. 我们会发现, 因为级数具有无穷多个正幂项系数和无穷多个负幂项系数, 这时每一个系数递推关系都可能含有无穷多个正幂项系数和无穷多个负幂项系数. 无法求解出各个系数.

正则解

如果级数解只有有限个负幂项时, 就可以用待定系数法定解. [2] 这时总可以调整 ρ 值, 将解写成

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad c_0 \neq 0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} w_2(z) &= g w_1(z)\ln(z-z_0) \\ &\quad + (z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k \qquad d_0 \neq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

我们把上述形式的解, 称为**正则解**. ρ_1, ρ_2 称为正则解的**指标**.

正则奇点

什么情况下, 奇点附近的解为正则解呢?

正则奇点 z_0 为方程的奇点, 但 $(z-z_0)p(z)$, $(z-z_0)^2 q(z)$ 在 z_0 点解析.

即 z_0 最多是 $p(z)$ 的一阶极点, z_0 最多是 $q(z)$ 的二阶极点.

否则称为**非正则奇点**.

Theorem 9.4 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0$$

在它的奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 有两个正则解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z)\ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

的充要条件是 z_0 是方程的正则奇点.

不含对数项的正则解求解过程

为了简单起见, 不妨设 $z=0$ 是方程的正则奇点. 于是, 在 $z=0$ 点的邻域内, 将方程的系数作 Laurent 展开

$$p(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1}$$

$$q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2}$$

设解为

$$w(z) = z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

[2]若对此有疑问, 见下面的具体操作.

代入方程, 就有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2} \\ +\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1} \\ +\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}=0\end{aligned}$$

方程两边同除以 $z^{\rho-2}$, 整理后得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)(n+\rho-1)z^n \\ +\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l}z^n=0\end{aligned}$$

比较等式两端最低次幂, 即 z^0 的系数, 可得

$$c_0[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]=0$$

由于 $c_0\neq 0$, 所以

$$\boxed{\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0} \tag{14}$$

上式称为**指标方程**. 一般地, 有

$$\boxed{a_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)p(z), \qquad b_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 q(z)} \tag{15}$$

根据指标方程可以求出两个指标 ρ_1 和 ρ_2. 规定 $\mathrm{Re}\rho_1\geq\mathrm{Re}\rho_2$!

再比较 z^n 的系数, 得

$$(n+\rho)(n+\rho-1)c_n+\sum_{l=0}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l}=0$$

即

$$\begin{aligned}[(n+\rho)(n+\rho-1)+a_0(n+\rho)+b_0]c_n \\ +\sum_{l=1}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l}=0\end{aligned}$$

这样便得出了系数之间的递推关系. 由指标方程, 递推关系简化为

$$n(n+2\rho+a_0-1)c_n+\sum_{l=1}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l}=0$$

只要

$$n+2\rho+a_0-1\neq 0 \tag{16}$$

就可以反复利用递推关系, 得到系数 c_n 的普遍表达式.

正则解不含对数项的条件

什么情况下, (16) 总满足? 由指标方程中指标与方程系数的关系

$$\rho_1+\rho_2=-a_0+1$$

得

$$n+2\rho+a_0-1=\begin{cases} n+\rho_1-\rho_2 & \rho=\rho_1 \\ n+\rho_2-\rho_1 & \rho=\rho_2 \end{cases}$$

所以, 如果

1. $\rho_1-\rho_2\neq$ 整数　条件 (16) 对 ρ_1 和 ρ_2 都能满足, 我们就可以求出了方程的 (两个线性无关的) 的特解. 这时方程的第二解也不含对数项.
2. $\rho_1-\rho_2=$ 整数　由规定 $\mathrm{Re}\rho_1\geq\mathrm{Re}\rho_2$, 即 $\rho_1-\rho_2=$ 非负整数, 则 ρ_1 满足条件, 由 ρ_1, 我们可以求出了方程的不含对数项的第一解. 这时方程的第二解可能含对数项.
   (a) $\rho_1=\rho_2$　显然这样只能得到同一个解. 所以, 这时第二解一定含对数项.
   (b) $\rho_1-\rho_2=$ 正整数m　对于有 ρ_2 得到第二解的系数 $c_m^{(2)}$, 有

   $$0\cdot c_m^{(2)}+\sum_{l=1}^{m}[a_l(m+\rho_2-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)}=0$$

   注意 $m+\rho_2=\rho_1$, 因此

   $$\boxed{\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)}\begin{cases}\neq 0, & \text{无解}\\ =0, & c_m^{(2)}\text{任意}\end{cases}}$$

   对于第一种情形, 方程的第二解也一定含对数项. 对于第二种情形, 当然还能继续求解. 这时可任取 $c_m^{(2)}$ 的值, 因而不妨取 $c_m^{(2)}=0$.

含对数项时第二解求解

方法1　将含对数项的解的形式代入方程, 定系数.

方法2　利用 Wronski 行列式

其它方法　以后我们还会介绍.

$$\begin{aligned} W[w_1,w_2]&=w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}-w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\\ &=A\exp\left[-\int^z p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

再积分一次, 得

$$\frac{w_2}{w_1}=A\int^z\left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\right\}\mathrm{d}z+B$$

即

$$w_2 = Aw_1(z)\int^z \left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\right\}\mathrm{d}z$$
$$+ Bw_1(z)$$

令 $A=1$, $B=0$

$$w_2 = w_1(z)\int^z \left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\right\}\mathrm{d}z \tag{17}$$

9.5 Bessel 方程的解

Solution Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y^2=0 \qquad \mathrm{Re}\nu\geq 0$$

可知

$$p(x)=\frac{1}{x},\quad q(x)=1-\frac{\nu^2}{x^2}$$

$x=0$ 为奇点. 它是 $p(x)$ 的一阶奇点, $q(x)$ 的二阶奇点, 所以为正则奇点. 我们来讨论 Bessel 方程在 $x=0$ 邻域内的正则解.

设

$$y(x)=x^\rho\sum_{k=0}^\infty c_kx^k \qquad c_0\neq 0$$

代入方程得

$$\sum_{k=0}^\infty c_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}$$
$$+\sum_{k=0}^\infty c_k(k+\rho)x^{k+\rho-2}$$
$$+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)\sum_{k=0}^\infty c_kx^{k+\rho}=0$$

约去 $x^{\rho-2}$, 合并后得

$$\sum_{k=0}^\infty c_k[(k+\rho)^2-\nu^2]x^k+\sum_{k=0}^\infty c_kx^{k+2}=0$$

先比较最低次幂 x^0 的系数, 得

$$c_0(\rho^2-\nu^2)=0$$

$\because c_0\neq 0$, 得指标方程

$$\rho^2-\nu^2=0$$

取

$$\rho_1=\nu,\quad \rho_2=-\nu; \qquad \mathrm{Re}\rho_1\geq\rho_2$$

先由 ρ_1 求解, (一定) 能得到正则的不含对数项的第一解. 由 x^1 的系数

$$c_1[(\nu+1)^2-\nu^2]=0$$

所以 $c_1=0$. 再由 $x^n(n\geq 2)$ 的系数

$$c_n[(\nu+n)^2-\nu^2]+c_{n-2}=0$$

得递推关系

$$c_n=-\frac{1}{n(n+2\nu)}c_{n-2}$$

反复利用递推关系, 就可以得到

$$\begin{aligned}
c_{2n}&=(-1)^n\frac{1}{2n(2n-2)\cdots 2}\\
&\quad\times\frac{1}{(2n+2\nu)(2n+2\nu)\cdots(2\nu+2)}c_0\\
&=(-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(v+1)}c_0\\
&=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+\nu+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0\\
c_{2n+1}&=0
\end{aligned}$$

于是

$$y_1(x)=c_0x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

取 $c_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, 则解为

$$y_1(x)=J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

为 ν 阶 Bessel 函数.

考虑第二解, 令 $\rho=-\nu$, 得

$$c_1[-2\nu+1]=0$$

递推关系

$$c_nn(-2\nu+n)+c_{n-2}=0$$

1. $\rho_1-\rho_2=2\nu\neq$ 整数
   重复上述过程, 可得
   $$y_2(x)=J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$
   为 $-\nu$ 阶 Bessel 函数.

2. $\rho_1=\rho_2$ 即 $\nu=0$
   第二解一定含对数项.

3. $\rho_1-\rho_2=2\nu=1$即$\nu=\frac{1}{2}$
   得 $c_1\cdot 0=0$, c_1 任意. 取 $c_1=0$, 仍有 $c_{2n+1}=0$, 得
   $$y_2(x)=J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$
   为 $-\frac{1}{2}$ 阶 Bessel 函数.

4. $\rho_1-\rho_2=2\nu=2m$ 即 $\nu=m$, $(m=1,2,3,...)$
对于 c_{2m}

$$c_{2m}\cdot 0+c_{2m-2}=0$$

$c_{2m-2}=0$. 但显然 $c_{2m-2}\neq 0$, 矛盾. 无解, 说明第二解含有对数项. 实际上, 这时的 $-m$ 阶 Bessel 函数为

$$J_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

注意到 $n\geq 0$ 时 $\Gamma(-n)=\infty$

$$\begin{aligned}J_{-m}(x)&=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+m)-m}\\&=(-1)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}\\&=(-1)^mJ_m(x)\end{aligned}\tag{18}$$

与 n 阶 Bessel 函数线性相关.

5. $\rho_1-\rho_2=2\nu=2m+1$ 即 $\nu=m+\frac{1}{2}$, $(m=1,2,3,...)$
得 $c_1=0$. 由递推关系 $c_3=\cdots=c_{2m-1}=0$. 但

$$c_{2m+1}\cdot 0+0=0$$

所以, c_{2m+1} 任意, 仍取 $c_{2m+1}=0$, 则仍有 $c_{2n+1}=0$, 可得

$$\begin{aligned}&y_2(x)=J_{-m-\frac{1}{2}}(x)\\=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

总之, $\nu=$ 整数, 第二解一定包括对数项; 其它情况, 第二解不包括对数项.
含对数项时, 第二解的求解不要求计算. □