7 Γ 函数

7.1 Γ 函数的定义

Γ 函数的积分表达式

当 $\mathrm{Re}z>0$ 时, 定义

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \tag{1}$$

被积函数中 t^{z-1} 当 z 不是整数时为 t 的多值函数, 这时应该理解为

$$\arg t=0 \tag{2}$$

Theorem 7.1 *Γ 函数的积分表达式 (1) 在右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 代表 z 的一个解析函数.*

Proof 因为这是一个反常积分, 既是瑕积分 (在 $t=0$ 端), 又是无穷积分, 所以要拆成两部分来分别讨论.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

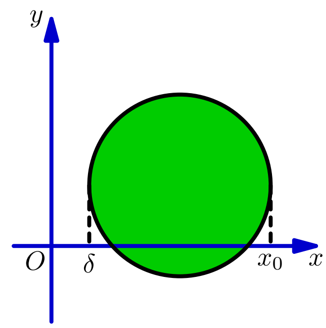
先看第二部分. 显然当 $t\geq 1$ 时, 被积函数$\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}$ 是t的连续函数, 并且作为 z 的函数, 在全平面解析. 由第4章可知, 要证明一个含参数的无穷积分代表一个解析函数，还需证明积分闭一致收敛.

因为

$$\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!},$$

所以 $\forall$正整数N,

$$\mathrm{e}^t>\frac{t^N}{N!},\qquad \mathrm{e}^{-t}<\frac{N!}{t^N}.$$



如图, 对于 $\mathbb{C}$ 上任一闭圆, 均有 $\mathrm{Re}z<x_0$. 当 $t\geq 1$ 时

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right|=\mathrm{e}^{-t}t^{\mathrm{Re}z-1}<N!\cdot t^{x_0-N-1}.$$

这样, 只要选择足够大的N, 使得 $N>x_0$, 积分 $\displaystyle\int_1^\infty t^{x_0-N-1}\mathrm{d}t$ 就收敛, 故

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

在 $\mathbb{C}$ 上闭一致收敛, 因此在全平面解析.

要证明第一部分的积分在右半平面解析, 关键也是证明它的闭一致收敛性.

同样

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right|=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1},\qquad x=\mathrm{Re}z.$$

因此, 对于 $\mathrm{Re}z>0$ 上的任一闭圆, 因为有 $\mathrm{Re}z=x\geq\delta>0$, 对于 $0<t\leq 1$

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right|\leq t^{\delta-1},$$

而 $\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$收敛, 由此即可推知积分

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

在 $\mathrm{Re}z>0$ 上闭一致收敛, 故积分在右半平面解析.

把两部分合起来, 就证得 Γ函数的积分表达式 (1) 在 z 的右半平面解析. □

Γ 函数的解析延拓

上面介绍的 Γ 函数的定义只适用于 $\mathrm{Re}z>0$. 为了延拓到 z 的全平面, 我们仍把积分拆成两部分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

其中第二部分积分 $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ 对任意的 z 收敛, 并且在 z 的全平面解析. 对于第一部分, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}\qquad(\mathrm{Re}z>0)\end{aligned}$$

等式中, 左端积分表达式仅在 $\mathrm{Re}z>0$ 时, 即在 z 的右半平面存在, 解析. 而右端函数级数则在 $z\neq 0,-1,-2,\ldots$ 的全平面收敛, 解析 (不证). 在公共部分 $\mathrm{Re}z>0$ 相等. 所以右端函数级数就是左端积分表达式在全平面上的解析延拓. 于是就完成了 Γ 函数的解析延拓, 重新定义的 Γ 函数为

$$\Gamma(z)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}\tag{4}$$

除去 $z=0,-1,-2,\ldots$ 为其一阶极点外, 全平面解析.

7.2 Γ 函数的基本性质

性质1

$$\Gamma(1)=1$$

Proof 直接在 Γ 函数的定义 (1) 中代入 $z=1$ 即得

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$$

□

性质2

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

Proof Re$z>0$ 时, 由 Γ 函数的定义 (1)

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^z\mathrm{d}t=-\int_0^\infty t^z\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t})\\&=-\left.\mathrm{e}^{-t}t^z\right|_0^\infty+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}zt^{z-1}\mathrm{d}t=z\Gamma(z)\end{aligned}$$

推广到全平面 ($z=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ 除外). 因为 $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 都在除去 $z=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ 点的整个复平面解析, 而在右半平面相等. 由解析函数的唯一性定理, $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 在全平面恒等, 即 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 在全平面成立. □

推论1

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Proof 由性质1, 反复引用性质2即得. □

性质3: 互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

证明见后面B函数一节.

推论2

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

Proof 性质3中令 $z=\frac{1}{2}$

$$\Gamma^2(\frac{1}{2})=\pi$$

$z=\frac{1}{2}$ 时, 在积分表达式 (1) 中, 被积函数恒为正, 所以 $\Gamma(1/2)>0$. 于是 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. □

推论3
Γ 函数在全平面无零点.

Proof 因 $\pi/\sin\pi z\neq 0$, 故 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)\neq 0$. 因此,

$$\Gamma(z_0)=0\Rightarrow\Gamma(1-z_0)=\infty$$

即 $1-z_0$ 为函数的极点. 这只能发生在 $1-z_0=-n,\ n=0,1,2,\cdots$ 处. 但这时 $z_0=n+1$, 而 $\Gamma(n+1)=n!\neq 0$. 矛盾. □

性质4: 倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})\tag{5}$$

证明见后.

性质5: Stirling 公式
当 $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$ 时,

$$\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi}\tag{6}$$

$$\ln\Gamma(z)\sim(z-\frac{1}{2})\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi\tag{7}$$

由此

$$\ln n!=\ln\Gamma(n+1)\sim n\ln n-n$$

上面公式在统计物理学中经常用到.

Γ 函数的渐近展开

z 为实数 x 的情形,

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^x\mathrm{d}t.$$

假设 $x>0$, 分析一下积分的被积函数, 它在 $t=0$ 时为 0, 随着 t 的增大而增大, 当 $t=x$ 时达到极大, 而后又单调下降. 先将被积函数写成

$$\mathrm{e}^{-t}t^x=\mathrm{e}^{-t+x\ln t}.$$

作变量代换, $t\to xt$, 得到

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(t-\ln t)}\mathrm{d}t.$$

由于指数函数的变化特点, 现在被积函数对积分的贡献主要来自 $t=1$ 附近的区间, 并且随着 $x\to\infty$, 这个区间会是一个很窄的区间. 将函数 $t-\ln t$ 在 $t=1$ 点作 Taylor 展开:

$$t-\ln t=1+\frac{(t-1)^2}{2}+\cdots.$$

就得到 Γ 函数的近似表达式

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)\approx& x^{x+1}e^{-x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}(t-1)^2}\mathrm{d}t\\ \approx& x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}(t-1)^2}\mathrm{d}t\\ =& x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\frac{2}{x}}\Gamma(1/2)=x^x\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi x}.\end{aligned}$$

而

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=x^{x-1/2}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi}.$$

这个方法称为最陡下降法.

性质4: 倍乘公式的证明 考虑函数

$$g(z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(2z)}.$$

利用 Γ 函数的基本性质

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

容易证明

$$g(z+1)=g(z).$$

由 Stirling 公式可得: $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$ 时, $g(z)\sim 1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}g(z+n)=1.$$

所以

$$g(z)=g(z+n)=1.$$

$\square$

Gauss 乘积公式

一般地, 可以证明下列乘积公式

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})\Gamma(z+\frac{2}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n})$$
$$=(2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nz}\Gamma(nz) \tag{8}$$

7.3 ψ 函数

ψ 函数

ψ 函数是 Γ 函数的对数的导数

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{9}$$

根据 Γ 函数的性质, 可以得到 $\psi(z)$ 的性质.

1. $z=0,-1,-2,\cdots$ 都是 $\psi(z)$ 的一阶极点, 留数均为 -1; 除了这些点以外, $\psi(z)$ 在全平面解析.

2. $$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}, \tag{10}$$
$$\psi(z+n)=\psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1},$$
$$n=2,3,\cdots. \tag{11}$$

3. $$\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z \tag{12}$$

4. $$\psi(z)-\psi(-z)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z \tag{13}$$

5. $$\psi(2z)=\frac{1}{2}\psi(z)+\frac{1}{2}\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+\ln 2. \tag{14}$$

6. $$\psi(z)\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}-\frac{1}{252z^6}+\cdots,$$
$$z\to\infty,|\arg z|<\pi \tag{15}$$

7. $$\lim_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0. \tag{16}$$

由性质2和性质7, 得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}-\ln n\right]=0$$

即

$$\psi(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}\right)\right] \tag{17}$$

例如, 令 $z=1$, 可得

$$\psi(1)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]$$

ψ 函数的特殊值

$$\psi(1) = -\gamma$$

γ 是数学中的一个基本常数, 称为 Euler 常数,

$$\gamma = 0.577215664\cdots$$

由 ψ 函数的递推关系(性质2)和渐近行为(性质6), 可得

$$\begin{aligned}\psi(z) - \psi(1) =& \psi(z+N+1) - \psi(N+2) \\ & - \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{1+k}\right) \\ =& -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{1+k}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

设 $z = p/q$, p, q 为正整数, $0 < p < q$. 则

$$\psi(p/q) - \psi(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{q}{p+nq}\right).$$

由 Abel 第二定理

$$\begin{aligned}\psi(p/q) - \psi(1) =& \lim_{t\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{q}{p+nq}\right)t^{p+nq} \\ \equiv& \lim_{t\to 1^-} s(t).\end{aligned}$$

Theorem 7.2 (Simpson's dissection (解剖)) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn+m} x^{kn+m} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\omega^{-mj} f(\omega^j x),$$

其中 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$, $0 \le m < k$.

Proof 利用

$$\sum_{j=0}^{k-1}\omega^{jm} = 0, \quad m \not\equiv 0 \mod k.$$

□

利用

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1},$$

令 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/q}$, 计算得

$$\begin{aligned}s(t) =& -t^{p-q}\ln(1-t^q) + \sum_{n=0}^{q-1}\omega^{-np}\ln(1-\omega^n t) \\ =& -t^{p-q}\ln\frac{1-t^q}{1-t} - (t^{p-q}-1)\ln(1-t) \\ & + \sum_{n=1}^{q-1}\omega^{-np}\ln(1-\omega^n t)\end{aligned}$$

令 $t\to 1^-$, 得

$$\psi(p/q)=-\gamma-\ln q+\sum_{n=1}^{q-1}\omega^{-np}\ln(1-\omega^n).$$

将 p 换成 $q-p$ 再两式相加

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\psi\left(\frac{q-p}{q}\right)=-2\gamma-2\ln q+2\sum_{n=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right)\ln(1-\omega^n).$$

取实部

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)+\psi\left(\frac{q-p}{q}\right)=-2\gamma-2\ln q+\sum_{n=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right)\ln\left(2-2\cos\frac{2\pi n}{q}\right).$$

由性质4, 又得

$$\psi(p/q)-\psi(1-p/q)=-\pi\cot\pi p/q.$$

相加得

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q}-\ln q+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right)\ln\left(2-2\cos\frac{2\pi n}{q}\right).$$

或

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q}-\ln q+\sum_{n=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right)\ln\left(2\sin\frac{\pi n}{q}\right).$$

令 $p=1$, $q=2$, 得

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$$

令 $p=1,3$, $q=4$, 得

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}-3\ln 2$$
$$\psi\left(\frac{3}{4}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2}-3\ln 2$$

再令 $p=1,2$, $q=3$, 又得

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$$
$$\psi\left(\frac{2}{3}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$$

ψ 函数的导数值

由性质2, 对 z 求导可得

$$\psi'(z+1)=\psi'(z)-\frac{1}{z^2}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\psi'(z+n)=&\psi'(z)\\&-\left[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+n-1)^2}\right],\\&n=2,3,\cdots.\end{aligned} \tag{20}$$

又 (18) 对 z 求导, 得

$$\psi'(z)=\left[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+n-1)^2}+\cdots\right].$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\psi'(z+n)=0.$$

性质3对 z 求导, 然后令 $z=\frac{1}{2}$, 得

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi^2\csc^2\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

再由性质5求导, 并令 $z=\frac{1}{2}$, 得

$$\psi'(1)=\frac{1}{3}\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

ψ 函数应用

利用 ψ 函数, 可以方便地求出许多无穷级数的和.

Example 7.1 *求无穷级数*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

之和.

Solution 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=&\frac{1}{6}\frac{1}{n+1/3}-\frac{1}{3}\frac{1}{n+2/3}\\&+\frac{1}{6}\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\\=&\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1/3}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+2/3}+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}\\=&\frac{1}{6}\left[\psi\left(N+1+\frac{1}{3}\right)-\psi\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\&-\frac{1}{3}\left[\psi\left(N+1+\frac{2}{3}\right)-\psi\left(\frac{2}{3}\right)\right]\\&+\frac{1}{6}\left[\psi(N+2)-\psi(1)\right]\end{aligned}$$

每项都减去 $\ln N$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\\
=&\frac{1}{6}\left[\psi\left(N+1+\frac{1}{3}\right)-\ln N-\psi\left(\frac{1}{3}\right)\right]\\
&-\frac{1}{3}\left[\psi\left(N+1+\frac{2}{3}\right)-\ln N-\psi\left(\frac{2}{3}\right)\right]\\
&+\frac{1}{6}\left[\psi(N+2)-\ln N-\psi(1)\right]
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$, 即得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\\
&=-\frac{1}{6}\left[\psi\left(\frac{1}{3}\right)-2\psi\left(\frac{2}{3}\right)+\psi(1)\right]
\end{aligned}
$$

代入 ψ 函数的特殊值, 得

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 3\right]
$$

□

Example 7.2 求无穷级数

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}
$$

之和.

Solution 因为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}=&\frac{4}{n+1}-\frac{4}{n+1/2}\\
&+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1/2)^2}
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}\\
=&4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1}-4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1/2}\\
&+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1/2)^2}\\
=&4\left[\psi(N+2)-\psi(1)\right]-4\left[\psi(N+3/2)-\psi(1/2)\right]\\
&+\left[\psi'(1)-\psi'(N+2)\right]+\left[\psi'(1/2)-\psi'(N+3/2)\right]
\end{aligned}
$$

同样, 减以 $\ln N$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}\\
=&4\left[\psi(N+2)-\ln N-\psi(1)\right]\\
&\quad-4\left[\psi(N+3/2)-\ln N-\psi(1/2)\right]\\
&\quad+\left[\psi'(1)-\psi'(N+2)\right]+\left[\psi'(1/2)-\psi'(N+3/2)\right]
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$, 并注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi'(n+z)=0$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}\\
&=4\left[\psi(1/2)-\psi(1)\right]+\psi'(1)+\psi'(1/2)\\
&=\frac{2\pi^2}{3}-8\ln 2
\end{aligned}
$$

□

7.4 B函数

在 $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$ 时定义

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \tag{21}$$

令 $t=\sin^2\theta$, 还可以得到B函数的另一个表达式

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \tag{22}$$

B函数可以用 Γ 函数表示出来

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{23}$$

Proof $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$ 时, 使用 Γ 函数的定义 (1). 对于 $\Gamma(p)$, 令 $t=x^2$, 得

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^{2p-1}\mathrm{d}x$$

对于 $\Gamma(q)$, 令 $t=y^2$, 得

$$\Gamma(q)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{q-1}\mathrm{d}t=2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}y^{2q-1}\mathrm{d}x$$

所以

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分为 x,y 平面第一象限的面积分. (x,y) 用极坐标表示

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\\ y=r\cos\theta\end{cases}$$

即得

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(p)\Gamma(q)\\
&=4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\sin\theta)^{2p-1}(r\cos\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=4\int_0^\infty\mathrm{e}^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\cos^{2q-1}\mathrm{d}\theta\\
&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}
$$

□

利用这个关系式可把B函数解析延拓到 p 和 q 的全平面.

从 B 函数的定义, 可以立即看出对称性

$$
B(p,q)=B(q,p)
$$

现在根据 B 函数和 Γ 函数的关系式 (23) 证明 Γ 函数的互余宗量定理.

Proof 令 $p=z$, $q=1-z$

$$
B(z,1-z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}=\Gamma(z)\Gamma(1-z)
$$

当 $\mathrm{Re}z>0$, $\mathrm{Re}(1-z)>0$, 即 $1>\mathrm{Re}z>0$ 时, 由 B 函数的积分定义式

$$
\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t
$$

令 $x=\dfrac{t}{1-t}$, 则 $(1+x)(1-t)=1$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}=\dfrac{\mathrm{d}t}{1-t}$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z)&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\\
&=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{\sin\pi z}
\end{aligned}
$$

所以在 $0<\mathrm{Re}z<1$ 时, 互余宗量定理成立. 但等式两端在全平面 ($z\neq$ 整数) 都解析, 由解析函数的唯一性定理, 互余宗量定理在全平面均成立. □

Γ 函数倍乘公式的另一证明 考虑积分

$$
\int_{-1}^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x,\quad \mathrm{Re}z>0
$$

令 $x^2=t$, 得

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x&=\int_0^1(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t\\
&=B\left(z,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}
\end{aligned}
$$

若作变换 $1+x=2t$, $1-x=2(1-t)$, 则有另一种形式的结果:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x = 2^{2z-1}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t$$
$$= 2^{2z-1}B(z,z) = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

于是

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)} = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

即

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

□

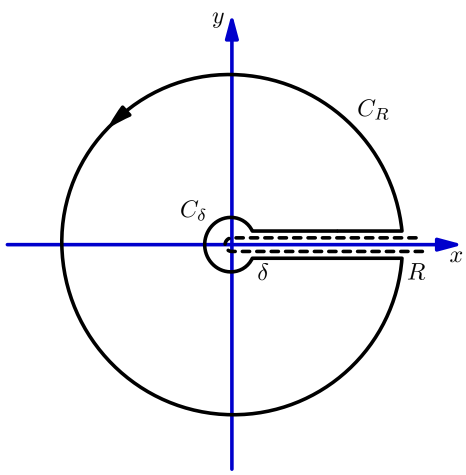
7.5 积分表达式

Γ 函数的积分表达式

考虑围道积分

$$I = \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

如果 z 非整数, 0 和 ∞ 是被积函数的枝点. 积分围道为从正实轴无穷远处出发 (幅角为 0),围绕原点正向一周, 再回到正实轴无穷远处 (幅角为 2π). 先设 z 的值限制在 $\mathrm{Re}z>0$的范围, 我们来计算积分的值.



把这个围道变形, 分为三段,

- 第一段在上半平面从 $t=+\infty$ 沿实轴向左行, 到 $t=\delta>0$ 处, δ之值可以无限小;
- 第二段从 $t=\delta$ 处起, 绕原点作一半径为 δ 的圆, 到下半平面实轴 $t=\delta e^{\mathrm{i}2\pi}$处;
- 第三段在下平面从 $t=\delta e^{\mathrm{i}2\pi}$ 处沿实轴向右行到 $t=+\infty e^{\mathrm{i}2\pi}$处.

将三段积分记为 I_1, I_2, I_3. 这三段积分分别为

$$\begin{aligned}
I_1 =& \int_{\infty}^{\delta} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = -\int_{\delta}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,\\
I_2 =& \int_0^{2\pi} e^{-\delta e^{\mathrm{i}\theta}}(\delta e^{\mathrm{i}\theta})^{z-1}\delta e^{\mathrm{i}\theta} i d\theta,\\
I_3 =& e^{2\pi z\mathrm{i}}\int_{\delta}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由 $\mathrm{Re}z>0$, 则当 $\delta\to 0$ 时, $I_2\to 0$, 而有

$$I = (e^{\mathrm{i}2\pi z}-1)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi z}\sin\pi z\Gamma(z).$$

因此有 z 不为整数时

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\mathrm{i}\pi z}}{2\mathrm{i}\sin\pi z}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

这个关系是在 $\mathrm{Re}z>0$ 的条件下得到, 但围道积分适用于任意不为整数的 z 值, 故按解析延拓原理, $\mathrm{Re}z>0$的条件可以取消.

当 z 是正整数时, 上式的右边是一个不定式, 而当 z 是负整数时, 右边为无穷大. 但利用互余宗量公式, 得

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{e^{-\mathrm{i}\pi z}}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t. \tag{24}$$

这个表达式适用于任意 z 值, 包括 z 等于整数.

将上式中 $1-z$ 换成 z, 得

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{e^{\mathrm{i}\pi z}}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{-z}\mathrm{d}t. \tag{25}$$

再将 t 换成 $-t=e^{\mathrm{i}\pi}t$, 得

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{t}t^{-z}\mathrm{d}t \quad (|\arg t|<\pi). \tag{26}$$

其中的围道从负实轴无穷远处 $(t=\infty e^{-\mathrm{i}\pi})$ 出发, 正向绕原点一周, 再回到出发点 $(t=\infty e^{\mathrm{i}\pi})$.

Note 上面的围道可以整个地绕原点转一角度 α, 只要 $|\alpha|<\pi/2$, 围道积分之值不变. 所以

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty e^{i\alpha}}^{(0+)} e^{t}t^{-z}\mathrm{d}t \quad (|\arg t-\alpha|<\pi). \tag{27}$$

ψ 函数的积分表达式

设 $\mathrm{Re}z>0$. 利用 (17) 式, 即

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} + \lim_{m\to\infty}\left(\ln m - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{z+n}\right). \tag{28}$$

若 $\mathrm{Re}p>0$, 有

$$\frac{1}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

对 p 积分, 由 $p=1$ 到 $p=m$, 得

$$\ln m = \int_0^{\infty}(e^{-t}-e^{-mt})\frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{29}$$

将上两式代入 (28) 中, 得 $\mathrm{Re}z > 0$ 时

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-mt})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{n=0}^{m}\int_0^\infty e^{-(z+n)t}\mathrm{d}t\right\}\\ &= \lim_{m\to\infty}\left\{\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-mt})\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_0^\infty \frac{e^{-zt}(1-e^{-(m+1)t})}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t\right\}\end{aligned}$$

$t=0$ 为被积函数的可去极点. 将上式改写成

$$\begin{aligned}\psi(z) = \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty \Bigg\{&\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\\ &-e^{-mt}\left[\frac{1}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}+e^{-zt}\right]\Bigg\}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 $m\to\infty$ 时, 可以证明含 e^{-mt} 因子的积分值为零, 故得

$$\psi(z) = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\}\mathrm{d}t. \tag{30}$$

令 $z=1$, 得

$$\gamma = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right\}e^{-t}\mathrm{d}t. \tag{31}$$

将上两式相加, 得

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t. \tag{32}$$

ψ 函数的渐近展开式

由

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}. \tag{33}$$

将 t 换成 $-t$, 有

$$\frac{t}{1-e^{-t}} = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}. \tag{34}$$

当 $\mathrm{Re}z > 0$ 时, 代入 (30) 得

$$\begin{aligned}\psi(z) \sim \int_0^\infty &\left\{\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{t} - \frac{1}{2}e^{-zt}\right\}\mathrm{d}t\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\int_0^\infty t^{2k-1}e^{-zt}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用 (29), 得

$$\psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k}z^{-2k}. \tag{35}$$

可以证明: 只要 z 不等于负实数, 即 $|\arg z| < \pi$, 上式即成立.