数学物理方法（上）第一次作业参考答案

鲍雷栋*[1] and 王思越†[1]

[1]北京大学物理学院

2025 年 2 月 27 日

题 1. 计算 $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$，其中 $n\in\mathbb{Z}$.

解. 利用复数的指数表示可以得到

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n &= (\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^n+(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^n\\
&= 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}+2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} = 2^{1+\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4},
\end{aligned}
$$

最后一步使用了 Euler 公式. □

注. 若限定 $n\in\mathbb{Z}$，则对任意 $z\in\mathbb{C}$ 都有 $(\mathrm{e}^z)^n=\mathrm{e}^{zn}$，此时左侧不再具有多值性.

题 2. 画出 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0$ 所描述的图形.

解. (方法 1) 设 $z-z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z-z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，可以得到

$$
\mathrm{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\mathrm{Re}\left[\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}\right]=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=0,
$$

设 z_1,z_2 和 z 在复平面上代表的点分别为 A,B 和 P，这等价于

$$
\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=x_1x_2+y_1y_2=0,\quad |\overrightarrow{BP}|^2=x_2^2+y_2^2\neq 0,
$$

因此当 $z_1\neq z_2$ 时，P 构成以 AB 为直径的圆（除 B 点），如图 1 所示. 当 $z_1=z_2$ 时，P 构成空集. □

解. (方法 2) 设 $z-z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $z-z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，可以得到

$$
\mathrm{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\mathrm{Re}\left[\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\right]=\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2)=0,
$$

设 z_1,z_2 和 z 在复平面上代表的点分别为 A,B 和 P，这等价于

$$
\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)=0,\quad |\overrightarrow{BP}|=r_2\neq 0,
$$

因此当 $z_1\neq z_2$ 时，P 构成以 AB 为直径的圆（除 B 点），如图 1 所示. 当 $z_1=z_2$ 时，P 构成空集. □

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

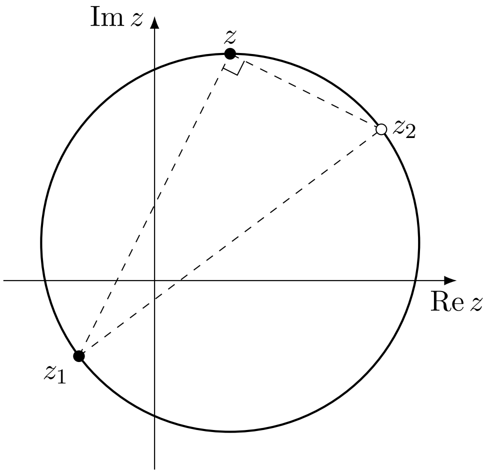

图 1: 题 2 中方程描述的图形示意图

题 3. 将下列和式表示成有限形式：

$$\cos\phi + \cos 2\phi + \cos 3\phi + \cdots + \cos n\phi. \tag{1}$$

解. 利用 Euler 公式可以得到

$$\begin{aligned}
&\cos\phi + \cos 2\phi + \cos 3\phi + \cdots + \cos n\phi \\
&= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\phi} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}) \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\phi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - 1}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\phi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\phi}\right] \\
&= \frac{\sin\dfrac{n\phi}{2}}{\sin\dfrac{\phi}{2}} \cos\left(\frac{n+1}{2}\phi\right),
\end{aligned}$$

其中 $n \in \mathbb{N}^*$. □

注. 在实数范围内可以通过乘以 $\sin\dfrac{\phi}{2}$ 再进行积化和差得到相同的结果.

题 4. 求出极坐标下的 *Cauchy-Riemann* 方程.

解. (方法 1) 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $f(z) = u + \mathrm{i}v$，对 r, θ 方向分别有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = f'(z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = f'(z) \cdot \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},
\end{aligned}$$

由此解得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$ □

解. (方法 2) 设 $z = re^{i\theta}$ 和 $f(z) = u + iv$，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial z^*}{\partial r}\right)^{-1} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z^*}{\partial \theta}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\cdot\frac{1}{e^{-i\theta}} + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\frac{1}{-ire^{-i\theta}} = 0,\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

□

注. 还可以利用直角坐标系中的 *Cauchy-Riemann* 方程通过变量替换得到.

题 5. 证明复变函数的导数满足链式法则：

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z). \tag{2}$$

证明. 设 $w = g(z)$，根据导数的定义

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{w\to w_0}\frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}\lim_{z\to z_0}\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(g(z_0))\cdot g'(z_0),\end{aligned}$$

这里要求 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的导数存在. □

题 6. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部

$$u = \frac{2\sin(2x)}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos(2x)}, \tag{3}$$

且 $f(\pi/2) = 0$，求 $f(z)$.

解. 根据 $x = \dfrac{z + z^*}{2}$ 和 $y = \dfrac{z - z^*}{2i}$ 有

$$u = \frac{\sin(z + z^*)}{\cos(z - z^*) - \cos(z + z^*)} = \frac{\sin(z + z^*)}{2\sin z\sin z^*} = \frac{1}{2}(\cot z + \cot z^*),$$

再根据 $u = \dfrac{1}{2}[f(z) + (f(z))^*]$ 有

$$\frac{1}{2}[f(z) - \cot z + (f(z) - \cot z)^*] = \mathrm{Re}[f(z) - \cot z] = 0,$$

利用 C-R 方程可以得到 $\mathrm{Im}[f(z) - \cot z] = C$，因此

$$f(z) = \cot z + iC, \quad C \in \mathbb{R},$$

最后由 $f(\pi/2) = 0$ 得到

$$f(z) = \cot z.$$

□