Chapter 4

复分析和流体力学

给定一个解析函数 $f(z) = u + iv$，我们知道 u 和 v 是调和函数，满足

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0\,, \qquad (\partial_x^2 + \partial_y^2)v = 0\,, \tag{4.1}$$

或

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} u = 0\,, \qquad \partial_z \partial_{\bar{z}} v = 0\,. \tag{4.2}$$

同时，调和函数是物理和工程中经常碰到的函数，出现在流体力学，静电和静磁学，热传导等等。这一章以流体力学为例简介复变函数的应用。

4.1 定常不可压缩势流

流体力学的研究可以部分归结为对流速场的研究。对于二维平面流体，流速场可以记为

$$\vec{V}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))\,. \tag{4.3}$$

这里 u 和 v 是速度场的 x 和 y 分量。定常体现为速度场不含时间依赖。不可压缩性要求流体流动时体积不发生显著的压缩或膨胀。用数学公式可以表示为

$$\mathrm{div}\vec{V} := \partial_x u + \partial_y v = 0\,. \tag{4.4}$$

上式左边称作 $\vec{V}$ 的散度。散度的物理意义可以通过通量理解。给定一条封闭曲线 C，流线经过 C 的通量定义为

$$\mathrm{Flux}(C) := \int_C \vec{V} \cdot \vec{n} ds\,, \tag{4.5}$$

其中 $\vec{n}$ 是 C 上线元的单位法向量，方向由 C 的内部指向外部。由格林定理，这又可以写为

$$\int_C \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \iint \mathrm{div}\vec{V}\, dxdy \,. \tag{4.6}$$

如果 $\mathrm{Flux}(C) > 0$，表明不断有流体从 C 的内部流出，因此不是不可压缩流体。同样，如果 $\mathrm{Flux}(C) < 0$，表明不断有流体流进 C 的内部。

例子 25 *令*

$$\vec{V} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) ,$$

$\vec{V}$ 在原点之外处处散度为零。但在原点处 $\vec{V}$ 没有定义，因此其散度也没有定义。

流速场在某一点处的旋度记为

$$\mathrm{curl}\vec{V} := \partial_x v - \partial_y u \,. \tag{4.7}$$

势流定义为在空间中流速场的旋度处处为零的流。物理上理解，如果在放置一片树叶在流体上，随着流体的流动树叶没有发生自旋的话就对应了势场。

例子 26 *涡旋 (Eddy) 定义*

$$\vec{V} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) .$$

注意 Eddy 是在除原点外是处处无旋的。

讨论 3 *一个典型的有旋流体是层流，例如*

$$\vec{V} = (y^2, 0) \,.$$

我们下面讨论的都是不可压缩势流。按照上面散度和旋度为零的定义我们有

$$0 = \partial_x u + \partial_y v \,, \qquad 0 = \partial_x v - \partial_y u \,. \tag{4.8}$$

这个结果与柯西-黎曼方程非常接近，仅差一个负号。我们立刻得到如下定义的函数

$$g(z) = u - iv \tag{4.9}$$

是解析函数。由柯西定理知道，在 $g(z)$ 的解析区域内必定存在其原函数，记为

$$\Phi(z) = \varphi + i\psi \,, \tag{4.10}$$

且 $\Phi'(z) = g(z)$。我们把 φ 称作流速场的势函数，把 ψ 称作流函数，把 Φ 称作复势，把 Φ' 称作复速度。我们有

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= \partial_x \varphi + i\partial_x \psi \\ &\overset{\text{C-R}}{=} \partial_x \varphi - i\partial_y \varphi \\ &= u - iv \,, \end{aligned} \tag{4.11}$$

因此

$$\nabla\varphi := (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi) = (u, v) = \vec{V}\,, \tag{4.12}$$

即 φ 的梯度正好给出流速。

例子 27 已知流体速度场

$$\vec{V} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\,,$$

求复势函数。

下面我们解释为什么将 ψ 称作流函数。我们前面证明过，作为一对共轭函数，

$$\varphi(x,y) = C_1\,, \qquad \psi(x,y) = C_2$$

所定义的等高线互相垂直。另外由多变量微积分我们知道 $\nabla\varphi$ 与 φ 的等高线垂直。为了看出这一点，我们参数化某一条 φ 的等高线为

$$\gamma(t) : (x(t), y(t))\,, \qquad a \le t \le b\,. \tag{4.13}$$

则

$$\varphi(x(t), y(t)) = C_1\,. \tag{4.14}$$

由微积分的链式法则我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\,, \end{aligned} \tag{4.15}$$

而 $(dx/dt, dy/dt)$ 刚好是等高线的切线方向，因此梯度与等高线垂直。因此我们得到结论，$\vec{V}$，$\nabla\varphi$，ψ 的等高线互相平行。因此求出 ψ 的等高线也就求出了流体的流线。这正是流函数这一名字的来源。

例子 28 已知复势函数 $\Phi(z) = (a+ib)z$，求速度场和流线。

例子 29 已知复势函数 $\Phi(z) = Lnz$，求速度场和流线。

例子 30 已知复势函数 $\Phi(z) = iLnz$，求速度场和流线。

流速为零的点成为驻点。由

$$\Phi'(z) = \partial_x\varphi - i\partial_y\varphi = u - iv \tag{4.16}$$

知道，在驻点亦即 $\Phi'(z) = 0$ 的点。

例子 31 求出 $\Phi(z)=z^2$ 的流线和驻点。

例子 32 已知复势函数 $\Phi(z)=Ln(z-1)+Ln(z+1)$，画出驻点和流线。

复分析方法常被用来处理定常不可压缩势流绕固体边界的流动问题。用复势处理这类问题的简便之处在于，流线在固体的边界处的指向应与边界的切线一致。换言之，绕流固体的边界曲线本身就是一条流线，因此 Ψ 在固体边界处应为常数。不失一般性，可以设这个常数为零。这样给定边界线的绕流问题转化为寻找这样一个复势函数 $\Phi(z)$，使得其在给定边界上取实数值。

例子 33 无穷远处的均匀流体流经一个圆形边界的复势由下式给出

$$\Phi(z)=z\bar{U}+\frac{R^2}{z}U\,,$$

其中 R 是圆的半径。

利用 Mathematica 的内置函数 `ComplexStreamPlot` 可以很方便可视化由复势所定义的流函数。例如，如下函数

```
ComplexStreamPlot[f[z],{z,-2-2 I,2+2 I}]
```

在矩形区域内画出向量场 $(\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f)$。假设复势是 Φ，则我们需要用 Mathematica 画的是 $(\Phi'(z))^*$. 图 Figure 4.1是几种典型的复势所对应的流线图.

4.1.1 茹可夫斯基变换和机翼流线

上面结果的一个有趣应用是用来讨论机翼的空气动力学。为此我们要用到共形变换。基本想法是，通过茹可夫斯基变换可以将圆柱变为机翼形状，同样的变换可以将圆柱附近的复势变为机翼对应的复势。

茹可夫斯基变换定义如下：

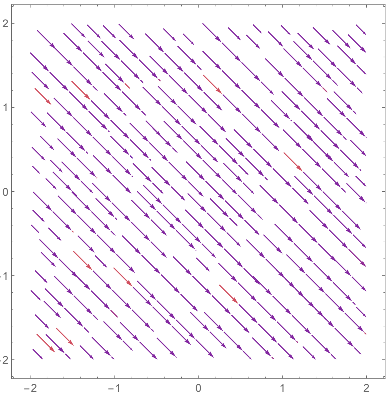
$$w=z+\frac{c^2}{z} \tag{4.17}$$

其中 c 是一个实常数。对于由半径 $R>c$ 所定义的圆 $|z|=R$，在茹可夫斯基变换下变换为一个椭圆，见图 Figure 4.2. 为了理解这一点，对于半径为 R 的圆，$z=R\cos\theta+iR\sin\theta$，变换后成为

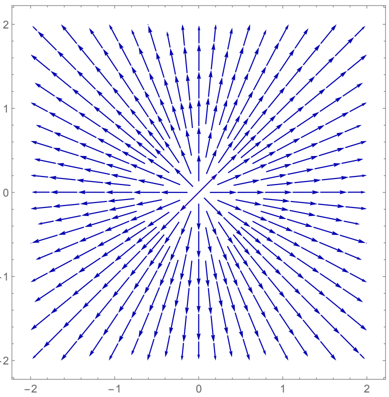
$$w=Re^{i\theta}+\frac{c^2}{R}e^{-i\theta}=(R+\frac{c^2}{R})\cos\theta+i(R-\frac{c^2}{R})\sin\theta \tag{4.18}$$

如果我们令

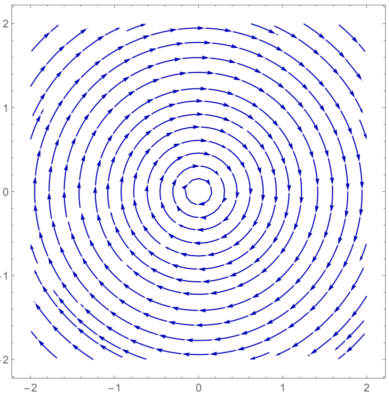
$$X=(R+\frac{c^2}{R})\cos\theta\,,\qquad Y=(R-\frac{c^2}{R})\sin\theta \tag{4.19}$$



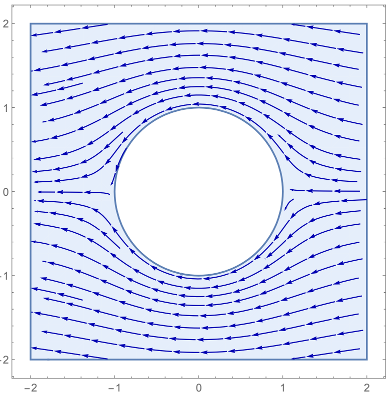
(a) $\Phi(z) = e^{i\pi/4}z$



(b) $\Phi(z) = \mathrm{Ln}z$



(c) $\Phi(z) = i\mathrm{Ln}z$



(d) $\Phi(z) = z\bar{U} + UR^2/z$

Figure 4.1: 几种典型复势所对应的流线图。

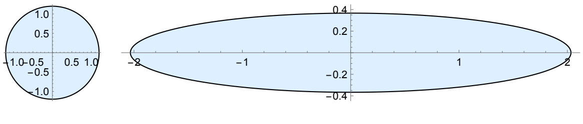


Figure 4.2: 茹可夫斯基变换

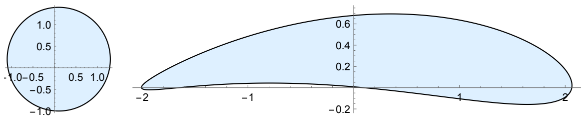


Figure 4.3: 机翼形变换

则容易看出

$$\frac{X^2}{(R+\frac{c^2}{R})^2}+\frac{Y}{(R-\frac{c^2}{R})^2}=1 \tag{4.20}$$

这是一个椭圆的方程。

为了得到机翼的形状，我们可以让圆稍稍偏离原心，$|z-z_0|=R$。这是茹可夫斯基变换的效果如图 Figure 4.3所示。

对于 $|z-z_0|=R$ 所定义的圆柱，其复势可以写为:

$$\Phi(z)=(z-z_0)\bar{U}+\frac{R^2}{z-z_0}U \tag{4.21}$$

求解(4.17)得到

$$z=\frac{w\pm\sqrt{w^2-4c^2}}{2} \tag{4.22}$$

因此在 w 平面的复势可以写为:

$$\Phi(w)=(\frac{w\pm\sqrt{w^2-4c^2}}{2}-z_0)\bar{U}+\frac{R^2}{\frac{w\pm\sqrt{w^2-4c^2}}{2}-z_0}U \tag{4.23}$$

对应的流线见图 Figure 4.4，

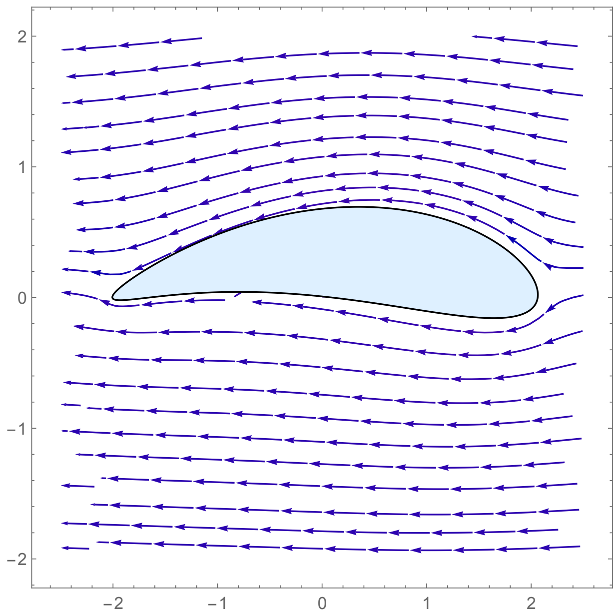


Figure 4.4: 机翼流线