

理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 从哈密顿原理推导出哈密顿正则方程：
 - 修正的哈密顿原理
 - 额外的端点变分约束
 - 允许“正则变换”
- 最小作用量原理：哈密顿原理 与 莫佩蒂原理

今日目标

- 正则变换
- 四类生成函数的基本型
- 更深入地分析正则变换
 - 无穷小正则变换：正则变量的改变很小
 - 无穷小正则变换的生成元G
- 直接条件：即正则变换的充分必要条件

正则变换

- 目标：找到一种变换

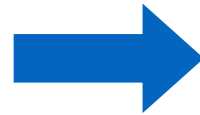
$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

使得变换前后的坐标与动量均满足正则方程，即

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$



$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

K 为变换后的哈密顿量

$$K = K(Q, P, t)$$

“卡密顿量”

- 根据哈密顿原理，我们有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0$$

一般变换

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0$$

- 要满足哈密顿原理，存在两种类型的可能变换

$$P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$$

标度变换

$$P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

正则变换

- 将两者结合起来，

$$P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} = \lambda(p_i \dot{q}_i - H)$$

扩展的正则变换

标度变换

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0$$

- 我们当然总是可以改变坐标和动量的尺度，而不改变物理本质，如物理量的单位变换。

$$Q_i = \mu q_i \quad P_i = \nu p_i$$

为了满足哈密顿原理，我们定义

$$K = \mu\nu H(p, q, t)$$



$$P_i \dot{Q}_i - K = \mu\nu (p_i \dot{q}_i - H)$$

标度变换！

- 当然，在物理上这样的变换太平庸了，我们接下来关注“正则变换”

正则变换

$$P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

- 哈密顿原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H - \frac{dF}{dt} \right) dt = -\delta [F]_{t_1}^{t_2} = 0$$

上式成立，要求变分在端点 t_1 和 t_2 处满足

$$\delta p = \delta q = \delta P = \delta Q = 0$$

- F 可以是关于新老坐标和新老动量 p_i, q_i, P_i, Q_i ，以及时间 t 的任意函数

一个正则变换可由一个函数 F 定义

因此， F 也称为正则变换的生成函数或生成元

一个简单的例子

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

- 尝试这样一个生成函数 $F = q_i P_i - Q_i P_i$

由这个生成函数给出的正则变换为

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = -K + (q_i - Q_i) \dot{P}_i + P_i \dot{q}_i = p_i \dot{q}_i - H$$



$$Q_i = q_i$$

$$P_i = p_i$$

$$K = H$$

恒等变换!

- 太简单了!

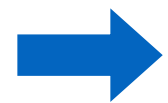
一个简单的例子

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

- 尝试这样一个生成函数 $F = f_i(q_1, \dots, q_n, t)P_i - Q_i P_i$

f_i 是任意关于“老坐标”与时间的函数。

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = -K + (f_i - Q_i)\dot{P}_i + P_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} P_i = p_i \dot{q}_i - H$$



$$Q_i = f_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

涵盖所有可能的广义坐标的变换

$$p_i = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} P_j$$

$$K = H + \frac{\partial f_i}{\partial t} P_i$$

若要求得 P ，需要将 n 个方程组反解！

生成函数的任意性

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

- 一个生成函数 F 可以给出一个正则变换

反过来，一个正则变换并不对应唯一的生成函数 F

可能有多个生成函数对应同一个正则变换。

- 例如，我们总可以在生成函数 F 上附加一个任意的关于时间 t 的函数 $g(t)$

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \longrightarrow P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} + \boxed{\frac{dg(t)}{dt}} \quad \text{不会影响对作用量积分的变分}$$

$$\longrightarrow K \rightarrow K - \frac{dg(t)}{dt} \quad \text{仅改变哈密顿量而不影响对物理的描述}$$

- 生成函数 F 具有附加一个仅为时间的任意函数的任意性。

哈密顿量也具有同样的任意性。

如何构建生成函数？

- 我们先假设 $K(Q, P, t) = H(q, p, t)$

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

→ $\frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i$

- 满足这一点的最简单形式为

$$F = F(q, Q) \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad -P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}$$

- 我们可以有一个很简单的例子, $F(q, Q) = q_i Q_i$

→ $p_i = Q_i \quad P_i = -q_i$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

这再次体现了正则坐标与正则动量的独立地位，你可以任意交换它们的名称。

从正则方程也可看出，要交换坐标和动量，需要如上符号变换，才能满足正则方程的形式。

第一类生成函数

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

- $F = F(q, Q)$ 不能生成时间依赖的正则变换

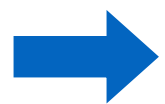
因此，我们将之拓展为 $F = F_1(q, Q, t)$ 第一类生成函数！

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i}$$

$$P_i = - \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i}$$

- 此类生成函数对哈密顿量的影响为

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} = p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i + K - H$$



$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

谐振子

- 考虑一维简谐振子

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$$

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$

我们可以将平方和转化为三角函数吗？

- 令 $p = f(P) \cos Q$ $q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q$

→ $K = H = \frac{\{f(P)\}^2}{2m}$ $\left\langle \begin{array}{l} Q \text{ 是循环坐标} \rightarrow P \text{ 是常数} \end{array} \right\rangle$

所以，问题转化为如何确定 $f(P)$ 使得坐标变换为正则变换？

谐振子

- 我们试试第一类生成函数 $F = F_1(q, Q, t)$

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i}$$

- 将 p 表示为 q 和 Q 的函数

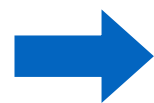
$$p = f(P)\cos Q$$

$$q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q$$

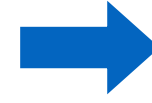


$$p = m\omega q \cot Q$$

- 对 q 积分



$$F_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$$



$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}$$

- 我们需要将 $H(q, p)$ 转换为 $K(Q, P)$, 故用 P, Q 表示 p, q

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$$

$$\cot' \theta = -\frac{1}{\sin^2 \theta}$$

谐振子

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$$

- 现在，我们可以计算新的哈密顿量了（卡密顿量）

$$K = H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2\omega^2 q^2) = \omega P = E$$

是不是超简单？

- 代入相应的正则方程并求解

$$P = \text{const} = \frac{E}{\omega}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$$

$$Q = \omega t + \alpha$$

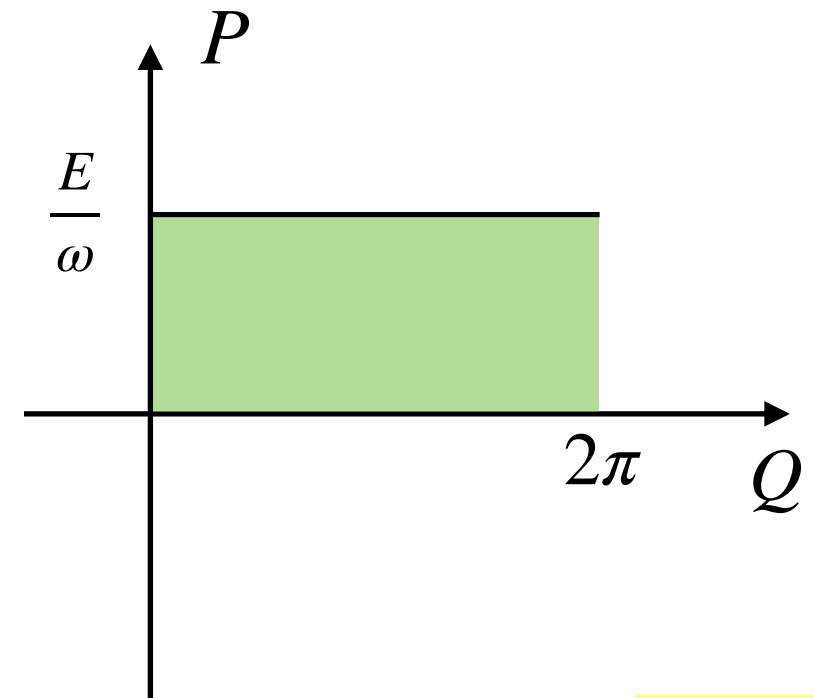
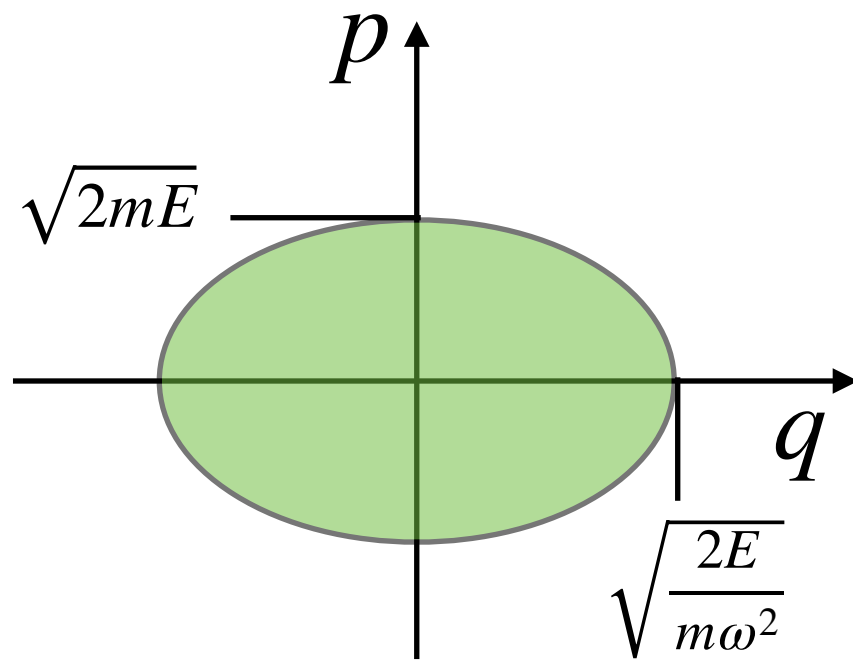
- 最终 $p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha)$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

解毕！

相空间

- 我们可以分别在 p - q 和 P - Q 两个相空间下考察谐振运动



- 谐振子运动一个周期在两个相空间描绘出的面积相等 $\frac{2\pi E}{\omega}$
- 循环运动系统在相空间内描绘的面积不变!

$$Q = \omega t + \alpha$$

$$P = \text{const} = \frac{E}{\omega}$$

$$p = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

其他类型的生成函数

- 第一类生成函数 $F = F_1(q, Q, t)$ 仍然不是最一般化的生成函数

比如，恒等正则变换就不能由其得到 $Q_i = q_i$ $P_i = p_i$

- 我们需要依赖于不同变量组的生成函数

事实上，可以有以下 4 种生成函数的基本型

$$F_1(q, Q, t)$$

$$F_2(q, P, t)$$

$$F_3(p, Q, t)$$

$$F_4(p, P, t)$$

自变量总是一新一旧

- 我们接下来推导它们的形式

记住，我们总是可以在作用量积分中附加一个函数的时间全导数

第二类生成函数

- 首先，我们认识这样一个事实，利用 $F = -q_i p_i$ 可得到如下变换

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0 \quad \rightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{p}_i q_i - H(q, p, t)) dt = 0$$

- 于是，我们可将正则变换的定义相应地写为

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H \quad \rightarrow \quad -\dot{P}_i Q_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

$$\rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i + Q_i \dot{P}_i + K - H$$

- 为了满足这一条件

$$F = F_2(q, P, t)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

第二类生成函数

- 如果我们还是回到原本对正则变换及其生成函数的定义

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

- 一个平庸的例子 $F_2 = q_i P_i$



$$p_i = P_i$$

$$q_i = Q_i$$

恒等变换!

- 同样的思路可以得到第三、四类生成函数

正则变换

生成函数	微商	示例
$F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = q_i Q_i \quad \begin{matrix} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{matrix}$
$F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i \quad \begin{matrix} Q_i = q_i \\ P_i = p_i \end{matrix}$
$F_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = p_i Q_i \quad \begin{matrix} Q_i = -q_i \\ P_i = -p_i \end{matrix}$
$F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = p_i P_i \quad \begin{matrix} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{matrix}$

四类生成函数

- 必须强调，四类生成函数“几乎”是等价的
虽然看起来，第一类生成函数要“基本”一点...

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

$$-\dot{P}_i Q_i - K + \frac{dF_2}{dt} = p_i \dot{q}_i - H$$

$$P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_3}{dt} = -\dot{p}_i q_i - H$$

$$-\dot{P}_i Q_i - K + \frac{dF_4}{dt} = -\dot{p}_i q_i - H$$

四类生成函数任何一类都不比其他三类更基本！

我们只是“任意”地从第一类出发进行了推导，因为第一类形式恰好对应之前学过的拉格朗日形式。

四类生成函数

- 是不是任何一个正则变换都有四类生成函数对应呢？（既然等价）

不是！如恒等变换就只能通过 F_2 和 F_3 得到！

- 但是，这不应该影响四类生成函数的“等价性”

我们总是可以交换正则坐标和正则动量

$$Q_i = p_i$$

$$P_i = -q_i$$

我们总是可以引入平庸的标度变换来改变符号

$$Q_i = \pm q_i$$

$$P_i = \pm p_i$$

- 这样，四类生成函数在实际应用层面就等价了。

正则变换构成一个群

- 存在恒等变换
- 正则变换的逆变换也是正则变换
- 两个相继的正则变换给出一个新的正则变换
- 正则变换满足结合律

总结

- 四类生成函数的基本型

- 直接条件

正则变换的充分必要条件

- 无穷小正则变换