作业

题 1. 设$\omega = e^{2\pi i/N}$，令$(\boldsymbol{u}_k)_n = \omega^{kn}$，即

$$\boldsymbol{u}_k^T = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \cdots, \omega^{k(N-1)})$$

证明

$$\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_l \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\boldsymbol{u}_k)_n (\boldsymbol{u}_l)_n^* = \delta_{kl}$$

题 2. 对于定于在$[0, 2\pi]$的函数$f(x)$，我们可以将其分立化为

$$f_n = f\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

定义向量

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

离散傅立叶变换（DFT）可以写为

$$\boldsymbol{y} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{y}_n \boldsymbol{u}_n, \qquad c_n = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n \rangle$$

DFT的一个重要应用是过滤高频噪声。本题请使用Mathematica等计算机代数系统解答。

滤波：设函数 $f(t)$ 为：

$$f(t) = e^{-t^2/10} \left(\sin(2t) + 2\cos(4t) + a \sin(t) \sin(50t)\right).$$

分别画出$a = 0$和$a = 0.4$时$f(t)$的图像。可以看出$\sin(50t)$为高频噪音。将 f 离散化，令 $y_k = f\left(\frac{2k\pi}{256}\right)$，其中 $k = 0, \ldots, 255$。计算DFT系数 $\widehat{y}_k$，其中 $0 \le k \le 255$。

假设低频系数为 $\widehat{y}_0, \ldots, \widehat{y}_m$ 和 $\widehat{y}_{256-m}, \ldots, \widehat{y}_{255}$，对于某个较小的 m。通过设置 $\widehat{y}_k = 0$（当 $m \le k \le 255 - m$ 时），滤除高频分量，选取你认为合理的 m。

对新的 $\widehat{y}_k$ 应用逆DFT，计算滤波后的 y_k。绘制新的 y_k 值，并与原始函数进行比较。尝试其他 m 值并观察结果。

压缩:设容差 $\mathrm{tol} = 0.01$。若满足 $|\widehat{y}_k| < \mathrm{tol} \times M$，其中 $M = \max_{0 \le k \le 255} |\widehat{y}_k|$，则将 $\widehat{y}_k$ 置为零。

对新的 $\widehat{y}_k$ 应用逆DFT，计算对应的 y_k。绘制新的 y_k 值，并与原始函数进行比较。尝试其他 tol 值并观察结果。

将这个方法推广到二维图像（为了简便起见，可以选取二维黑白图像`https://www.bing.com/th/id/OIP.X4Lkh3mKmmgFlV1-g1woZAHaHa?w=150&h=150&c=8&rs=1&qlt=90&o=6&dpr=2.5&pid=3.1&rm=2`）。

题 3. 傅里叶级数可以用来计算某些重要的求和，且方式多样。

1. 在$-\pi \le x \le \pi$上计算x的傅立叶展开，利用Parseval公式计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

2. 在$-\pi \le x \le \pi$上计算$f(x) = x^2$的傅立叶级数，并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

3. 在$-\pi \le x \le \pi$上计算$f(x) = x^4$的傅立叶级数，并用其计算如下无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

题 4. 对于如下定义在$-\pi \le x \le \pi$上的函数，计算其傅立叶级数：

1. $f(x) = |\sin x|$
2. $f(x) = |x|$
3. $$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$
4. $f(x) = x \cos x$

题 5. 证明三维函数傅立叶变换的求导和卷积定理：

1. $$\mathcal{F}\left[\nabla f(\boldsymbol{r})\right](\boldsymbol{k}) = i\boldsymbol{k}\hat{f}(\boldsymbol{k})$$
2. $$\mathcal{F}\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{r})\right](\boldsymbol{k}) = -k^2\hat{f}(\boldsymbol{k})$$
3. $$\mathcal{F}\left[f \star g(\boldsymbol{r})\right](\boldsymbol{k}) = \hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k})$$

   其中

   $$f \star g(\boldsymbol{r}) \equiv \int f(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')d^3r'$$

题 6. 计算双边指数衰减函数的傅立叶变换

$$f(t) = e^{-a|t|}, \qquad a > 0 \tag{1}$$

并计算其逆变换。

题 7. 定义矩形函数

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ 1 & |t| \le \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

计算平移矩形函数的傅立叶变换

$$f(t) = \mathrm{rect}(t-1)$$

题 8. 求三角脉冲的傅立叶变换：

$$f(x) = \begin{cases} (1 - a|x|)h & |x| < 1/a \\ 0 & |x| > 1/a \end{cases} \tag{3}$$

其中$a > 0$。

题 9. 计算汤川势的傅立叶变换：

$$\mathcal{F}\left[\frac{e^{-ar}}{r}\right](\boldsymbol{k}) \equiv \int \frac{e^{-ar}}{r} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3r$$

参考文献