数学物理方法（上）第二次作业参考答案

鲍雷栋*[1], 王思越†[1], and 禹凯耀‡[1]

[1]北京大学物理学院

2025 年 3 月 6 日

题 1. 证明

$$|\sinh y| \leqslant |\cos(x+\mathrm{i}y)| \leqslant \cosh y, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

证明. 根据 $\sin(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\sinh y$ 和 $\cos(\mathrm{i}y) = \cosh y$ 有

$$\cos(x+\mathrm{i}y) = \cos x\cos(\mathrm{i}y) - \sin x\sin(\mathrm{i}y) = \cos x\cosh y - \mathrm{i}\sin x\sinh y,$$

利用 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$，一方面可以得到

$$\begin{aligned}|\cos(x+\mathrm{i}y)|^2 &= \cos^2 x(1+\sinh^2 y) + \sin^2 x\sinh^2 y\\ &= \cos^2 x + \sinh^2 y \geqslant \sinh^2 y,\end{aligned}$$

另一方面也可以得到

$$\begin{aligned}|\cos(x+\mathrm{i}y)|^2 &= \cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x(\cosh^2 y - 1)\\ &= \cosh^2 y - \sin^2 x \leqslant \cosh^2 y,\end{aligned}$$

综上有 $|\sinh y| \leqslant |\cos(x+\mathrm{i}y)| \leqslant \cosh y$. □

题 2. 求 $\tan(2-\mathrm{i})$ 的实部和虚部.

解. 设 $z = x + \mathrm{i}y$，根据积化和差有

$$\tan z = \frac{\sin z\cos z^*}{\cos z\cos z^*} = \frac{\sin(z+z^*) + \sin(z-z^*)}{\cos(z+z^*) + \cos(z-z^*)} = \frac{\sin 2x + \mathrm{i}\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y},$$

由此得到

$$\mathrm{Re}[\tan(2-\mathrm{i})] = \frac{\sin 4}{\cos 4 + \cosh 2}, \quad \mathrm{Im}[\tan(2-\mathrm{i})] = -\frac{\sinh 2}{\cos 4 + \cosh 2}.$$ □

注. 这里利用 $(\cos z)^* = \cos z^*$ 可以将分母化为实数.

*2100011330@stu.pku.edu.cn

†2100016344@stu.pku.edu.cn

‡2301110114@stu.pku.edu.cn

题 3. 求解方程 $\cos z = 4$.

解. (方法 1) 设 $z = x + \mathrm{i}y$，有

$$\cos z = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y = 4,$$

比较实部和虚部得到方程组

$$\cos x \cosh y = 4, \quad \sin x \sinh y = 0,$$

由第二个方程可以解得 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 或 $y = 0$.

(1) 若 $y = 0$ 则方程 $\cos x = 4$ 无解.

(2) 若 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 则方程 $(-1)^k \cosh y = 4$ 在 k 为奇数时无解，在 k 为偶数时有解 $y = \pm \operatorname{arcosh} 4 = \pm \ln(4 + \sqrt{15})$.

综上方程的解为

$$z = 2k\pi \pm \mathrm{i} \operatorname{arcosh} 4, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

解. (方法 2) 根据 $\cos z = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，方程可以化为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z} - 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} + 1 = 0,$$

由此解得 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 4 \pm \sqrt{15}$，根据对数函数的多值性，方程的解为

$$z = \mathrm{i} \ln(4 \pm \sqrt{15}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

注. 对给定的正实数取对数时一般认为只取辐角为零的情况.

题 4. 判断 $\ln(\sin(\mathrm{i}z))$ 是否是多值函数.

解. 设 $w = \sin(\mathrm{i}z)$，由于多值函数 $\ln w$ 的支点为 $w = 0, \infty$，于是 w 绕 $w = 0$ 点移动一周时， $\ln w$ 的值将会变化. 而 z 绕 $z = 0$ 点移动一周时，w 也绕 $w = 0$ 点移动一周，从而使得 $\ln(\sin(\mathrm{i}z))$ 的值变化，因此 $\ln(\sin(\mathrm{i}z))$ 是多值函数. $\square$

注. 以后可以证明，若 $f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ 且 $f^{(n)}(z_0) \neq 0$，则 z 绕 $z = z_0$ 点充分小地移动一周时，w 会绕 $w = f(z_0)$ 点移动 n 周. 本题中可以利用等式 $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \sinh x \cos y - \cosh x \sin y$ 严格分析.

题 5. 找出 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 的支点，并讨论绕其中任意一个支点，任意两个支点，任意三个支点移动一周回到原处后多值函数的变化. 画出割线.

解. 设 $w = (z-a)(z-b)$，由于多值函数 $\sqrt[3]{w}$ 的支点为 $w = 0, \infty$，求解方程可以得到 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 可能的支点为 $z = a, b, \infty$. 按正方向绕这三个点移动一周的路径示意图见附录，下面进行分析：

(1) 绕 a 点时，$z - a$ 的辐角增加 2π，$z - b$ 的辐角不变，因此函数的辐角增加 $\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) 绕 b 点时，$z-a$ 的辐角不变，$z-b$ 的辐角增加 2π，因此函数的辐角增加 $\dfrac{2\pi}{3}$.

(3) 绕 ∞ 点时，相当于按反方向同时绕 a 和 b 点，此时函数的辐角减小 $\dfrac{4\pi}{3}$.

因此 a,b 和 ∞ 点都是支点，由此可以得到：

(1) 绕 a 或 b 点移动一周后，函数的辐角增加 $\dfrac{2\pi}{3}$；绕 ∞ 点移动一周后，函数的辐角减小 $\dfrac{4\pi}{3}$.

(2) 绕 a 和 b 点移动一周后，函数的辐角增加 $\dfrac{4\pi}{3}$；绕 a 和 ∞ 点，或绕 b 和 ∞ 点移动一周后，函数的辐角减小 $\dfrac{2\pi}{3}$.

(3) 绕 a,b 和 ∞ 点移动一周后，函数的辐角不变，函数值还原.

由于只有同时绕这三个支点移动一周后函数值才会还原，因此割线必须同时连接这三个支点，一种可能的作法如图 1 所示. □

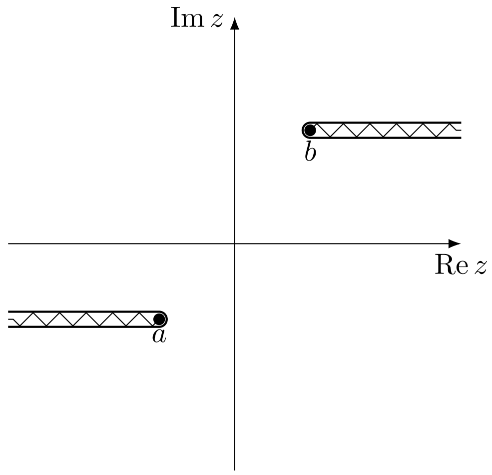

图 1: 题 5 中一种可能的割线作法示意图

题 6. 找出 $\sqrt{\tan z}$ 的所有支点并画出割线.

解. 设 $w=\tan z$，由于多值函数 $\sqrt{w}$ 的支点为 $w=0,\infty$，求解方程可以得到 $\sqrt{\tan z}$ 可能的支点为 $z=\dfrac{1}{2}k\pi, k\in\mathbb{Z}$，下面进行分析：

(1) 当 z 绕 $z=k\pi$ 点充分小地移动一周时，w 会绕 $w=0$ 点移动一周，此时函数的辐角增加 π.

(2) 当 z 绕 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 点充分小地移动一周时，$\dfrac{1}{w}$ 会绕 $\dfrac{1}{w}=0$ 点移动一周，也就是 w 会绕 $w=\infty$ 点移动一周，此时函数的辐角减小 π.

因此 $z=\dfrac{1}{2}k\pi, k\in\mathbb{Z}$ 都是支点. 由于同时绕两个支点移动一周后函数值可以还原，此时可以用割线将支点两两连接，一种可能的作法如图 2 所示. □

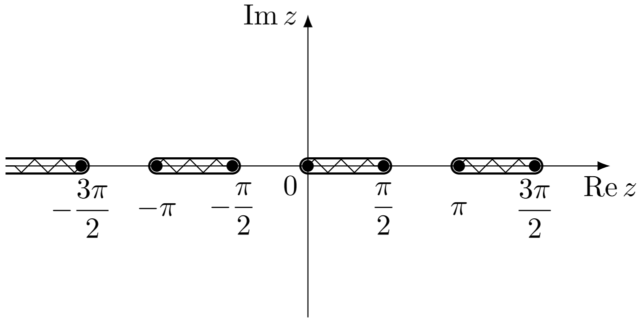

图 2: 题 6 中一种可能的割线作法示意图

题 7. 已知多值函数 $f(z)=z^p(1-z)^{-p}$，p 为实数．若在实轴上沿 0 到 1 作割线，规定在割线上岸 $\arg z=\arg(1-z)=0$，求 $f(\pm\mathrm{i})$ 和 $f(\infty)$.

解. 根据幂函数的定义有

$$f(z)=z^p(1-z)^{-p}=\mathrm{e}^{p\ln z}\mathrm{e}^{-p\ln(1-z)}=\mathrm{e}^{p[\ln z-\ln(1-z)]},$$

设 z 点从割线上岸出发移动到 $z=\mathrm{i}y$ 点的路径如图 3 所示.

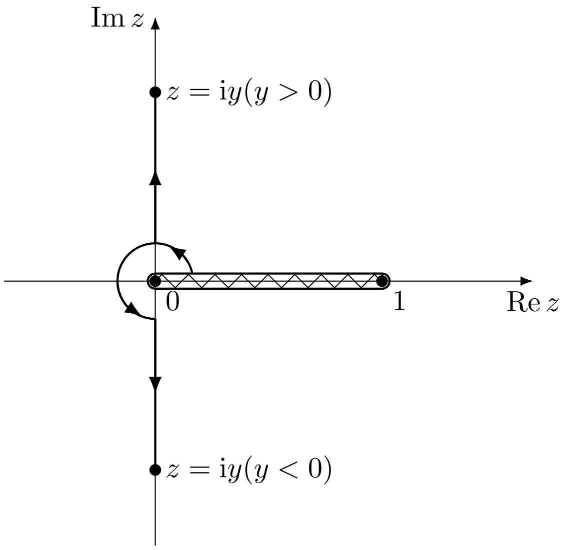

图 3: 题 7 中 z 点移动路径示意图

此时在 $z=\mathrm{i}y$ 点处 z 和 $1-z$ 的辐角分别为

$$\arg z=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & y>0,\\[2mm] \dfrac{3\pi}{2}, & y<0,\end{cases}\qquad \arg(1-z)=-\arctan y,$$

设 $g(z)=\ln z-\ln(1-z)$，可以计算得到

$$g(z)=\ln\frac{|z|}{|1-z|}+\mathrm{i}[\arg z-\arg(1-z)]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y^2}{1+y^2}+\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan y\right), & y>0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y^2}{1+y^2}+\mathrm{i}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\arctan y\right), & y<0,\end{cases}$$

代入待求点的值有

$$g(\mathrm{i})=-\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4},\quad g(-\mathrm{i})=-\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\frac{5\pi}{4},\quad g(\infty)=\lim_{y\to\infty}g(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\pi,$$

于是最终得到

$$f(\mathrm{i})=2^{-\frac{p}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\frac{3\pi}{4}},\quad f(-\mathrm{i})=2^{-\frac{p}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\frac{5\pi}{4}},\quad f(\infty)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi}.$$

□

题 8. 证明 *Möbius* 变换 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 一般来说将圆映射成圆.

证明. 定义基本 Möbius 变换为:

(1) $f(z)=z+a$ 称为平移，

(2) $f(z)=az,(a\neq 0)$ 称为旋转与伸缩，

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 称为反演，

则任一 Möbius 变换 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可以分解为有限个基本 Möbius 变换的复合

$$f(z)=\frac{cb-ad}{c(cz+d)}+\frac{a}{d},(c\neq 0),\quad f(z)=\frac{az+b}{d},(c=0).$$

设圆的方程为 $|z-z_0|=r$，展开后可以得到

$$zz^*-z_0^*z-z_0z^*+z_0z_0^*=r^2,$$

于是这个方程一般可以表示为

$$Azz^*+B^*z+Bz^*+C=0,\quad A,C\in\mathbb{R},B\in\mathbb{C},BB^*-AC>0,$$

当 $A\neq 0$ 时这是圆的方程，当 $A=0$ 时这是直线的方程. 在基本 Möbius 变换下:

(1) 方程变为 $Azz^*+(Aa+B)^*z+(Aa+B)z^*+(Aaa^*+B^*a+Ba^*+C)=0$，满足

$$(Aa+B)(Aa+B)^*-A(Aaa^*+B^*a+Ba^*+C)=BB^*-AC>0.$$

(2) 方程变为 $Aaa^*zz^*+(Ba^*)^*z+Ba^*z^*+C=0$，满足

$$(Ba^*)(Ba^*)^*-Aaa^*C=aa^*(BB^*-AC)>0.$$

(3) 方程变为 $Czz^*+(B^*)^*z+B^*z^*+A=0$，满足

$$(B^*)(B^*)^*-CA=BB^*-AC>0.$$

因此 Möbius 变换一般来说将圆映射成圆，总的来说将圆或直线映射成圆或直线. □

注. 还可以根据交比为实数等价于四点共圆或共线，同时利用 *Möbius* 变换不改变交比的性质得到.

题 9. 令 $f(z)=z^\Delta$，其中 $\Delta>0$. 取割线为 0 到 $-\infty$. 在一个单值分支内计算

$$\lim_{\epsilon\to0^+}[f(-1-\mathrm{i}\epsilon)-f(-1+\mathrm{i}\epsilon)], \tag{2}$$

极限表示 ϵ 是无穷小正数. 结果用三角函数表示.

解. 根据 $f(z)=z^\Delta=\mathrm{e}^{\Delta\ln z}=\mathrm{e}^{\Delta(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z)}$，选定 $k\in\mathbb{Z}$ 并取单值分支

$$-\pi+2k\pi<\arg z<\pi+2k\pi,$$

在这个单值分支内有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\arg(-1-\mathrm{i}\epsilon)=-\pi+2k\pi,\quad \lim_{\epsilon\to0^+}\arg(-1+\mathrm{i}\epsilon)=\pi+2k\pi,$$

由此可以得到

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to0^+}[f(-1-\mathrm{i}\epsilon)-f(-1+\mathrm{i}\epsilon)]&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(-\pi+2k\pi)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(\pi+2k\pi)}\\&=-2\mathrm{i}\sin(\pi\Delta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi\Delta}\\&=2\sin(\pi\Delta)\sin(2k\pi\Delta)-2\mathrm{i}\sin(\pi\Delta)\cos(2k\pi\Delta).\end{aligned}$$ □

题 10. 寻找一个支点在 $\pm a$ 的函数 $f(z)$，割线取作 $(-a,a)$，要求在单值分支内满足：

$$\lim_{\epsilon\to0^+}[f(x+\mathrm{i}\epsilon)-f(x-\mathrm{i}\epsilon)]=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases} \tag{3}$$

解. (方法 1) 由于 $g(z)=\mathrm{e}^z$ 在复平面上解析，可以得到

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\left[\frac{f(x+\mathrm{i}\epsilon)}{g(x+\mathrm{i}\epsilon)}-\frac{f(x-\mathrm{i}\epsilon)}{g(x-\mathrm{i}\epsilon)}\right]=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$$

由于对数函数在相邻两叶 Riemann 面上的值之差为常数 $2\pi\mathrm{i}$，可以考虑函数 $\ln\dfrac{z-a}{z+a}$，选定 $k\in\mathbb{Z}$ 并取单值分支

$$-\pi+2k\pi<\arg\frac{z-a}{z+a}<\pi+2k\pi,$$

当 $|x|<a$ 时，在这个单值分支内有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\arg\frac{x+\mathrm{i}\epsilon-a}{x+\mathrm{i}\epsilon+a}=\pi+2k\pi,\quad \lim_{\epsilon\to0^+}\arg\frac{x-\mathrm{i}\epsilon-a}{x-\mathrm{i}\epsilon+a}=-\pi+2k\pi,$$

当 $|x|>a$ 时，在这个单值分支内有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\arg\frac{x+\mathrm{i}\epsilon-a}{x+\mathrm{i}\epsilon+a}=2k\pi,\quad \lim_{\epsilon\to0^+}\arg\frac{x-\mathrm{i}\epsilon-a}{x-\mathrm{i}\epsilon+a}=2k\pi,$$

由此可以得到

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\left[\ln\frac{x+\mathrm{i}\epsilon-a}{x+\mathrm{i}\epsilon+a}-\ln\frac{x-\mathrm{i}\epsilon-a}{x-\mathrm{i}\epsilon+a}\right]=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}$$

因此存在解

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{z-a}{z+a}.$$ □

解. (方法 2) 取积分围道如图 4 所示，根据 Cauchy 积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta+\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\right],$$

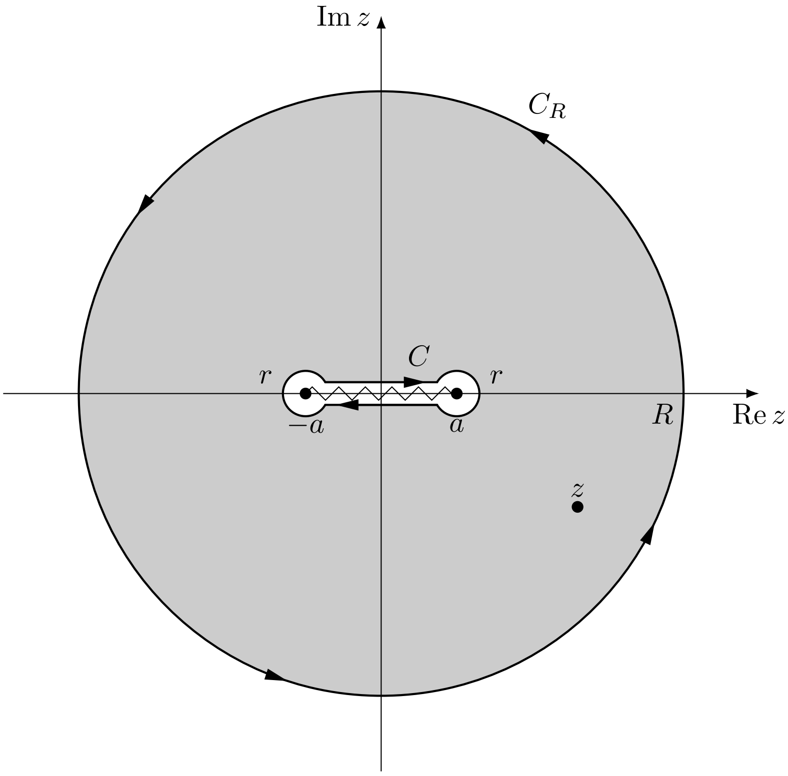

图 4: 题 10 积分围道示意图

为简单起见，可以假定存在一个在 $(-a,a)$ 上无零点的解析函数 $g(z)$ 使得 $\dfrac{f(\zeta)/g(\zeta)}{\zeta-z}$ 在小圆和大圆上的积分在 $r\to 0$ 和 $R\to\infty$ 的极限下都趋于零，此时

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{g(z)}&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{-a}^{a}\frac{f(x+\mathrm{i}\epsilon)/g(x+\mathrm{i}\epsilon)}{x+\mathrm{i}\epsilon-z}\,\mathrm{d}x-\int_{-a}^{a}\frac{f(x-\mathrm{i}\epsilon)/g(x-\mathrm{i}\epsilon)}{x-\mathrm{i}\epsilon-z}\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{[f(x+\mathrm{i}\epsilon)-f(x-\mathrm{i}\epsilon)]/g(x)}{x-z}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{e}^x/g(x)}{x-z}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

注意到在 $f(z)$ 中加上任意的单值解析函数 $h(z)$ 仍然满足条件，因此存在一族解

$$f(z)=\frac{g(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{e}^x/g(x)}{x-z}\,\mathrm{d}x+h(z).$$

特别地，如果取 $g(z)=\mathrm{e}^z, h(z)=0$ 就有

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{1}{x-z}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^z}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{z-a}{z+a}.$$ □

注. 还可以对不同的解进行线性组合得到更多的解.

附录

题 5 中按正方向绕支点移动一周的路径示意图.

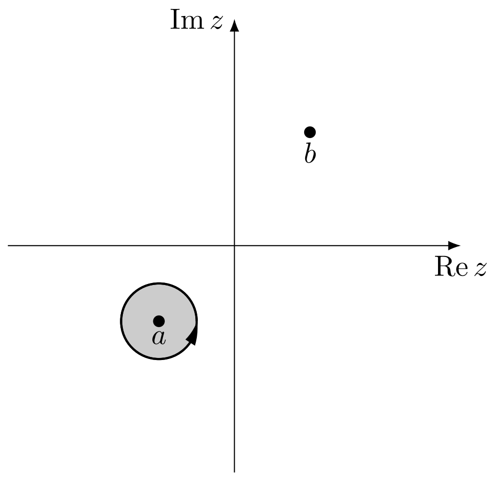

图 5: 题 5 中按正方向绕 a 点移动一周的路径示意图

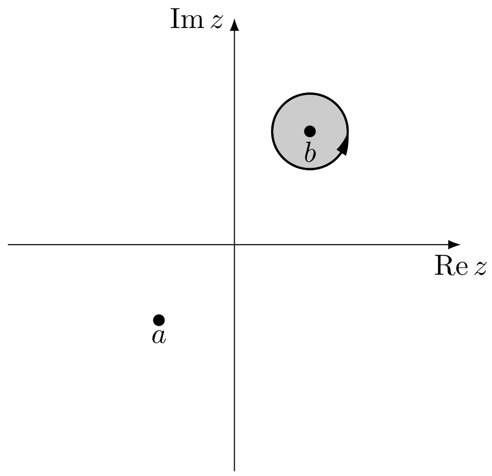

图 6: 题 5 中按正方向绕 b 点移动一周的路径示意图

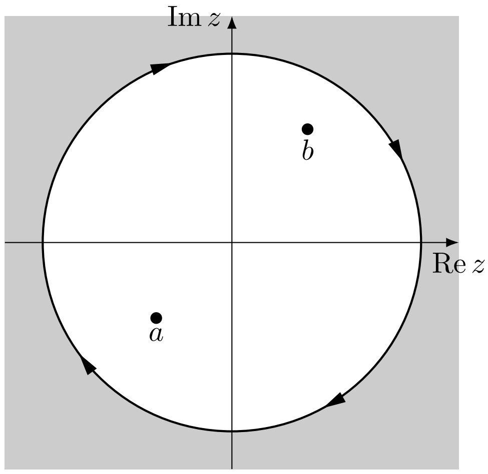

图 7: 题 5 中按正方向绕 ∞ 点移动一周的路径示意图

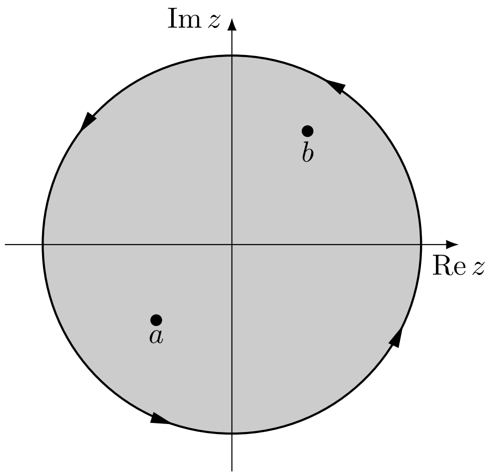

图 8: 题 5 中按正方向绕 a, b 点移动一周的路径示意图

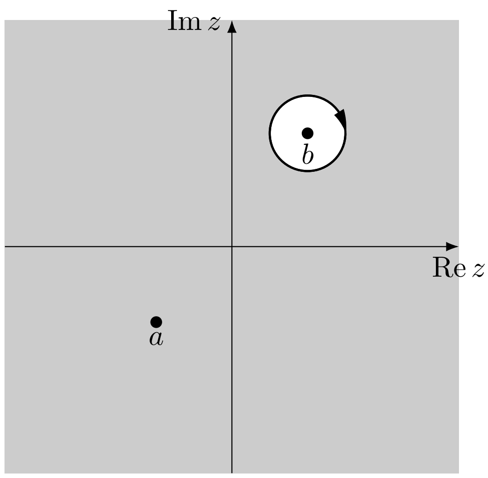

图 9: 题 5 中按正方向绕 a, ∞ 点移动一周的路径示意图

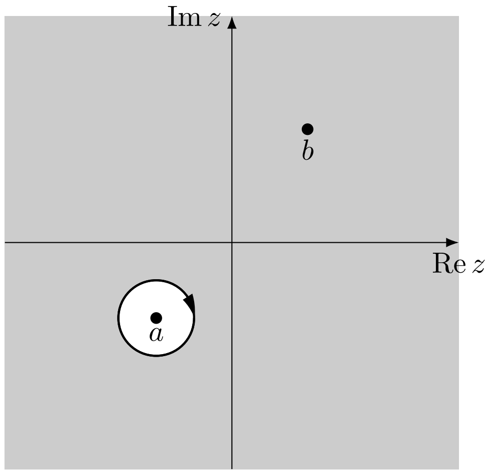

图 10: 题 5 中按正方向绕 b, ∞ 点移动一周的路径示意图

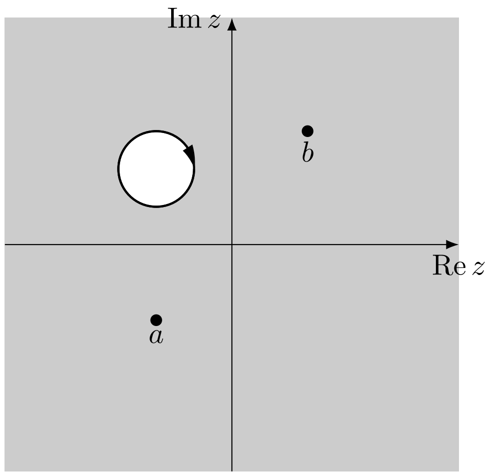

图 11: 题 5 中按正方向绕 a, b, ∞ 点移动一周的路径示意图