第一章 电磁场的普遍规律

1.1 电磁场与麦克斯韦方程组

1.1.1 麦克斯韦方程组

电磁场的普遍规律体现在麦克斯韦方程组中，其显式协变形式为

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\nu \qquad (1.1.1)$$

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \qquad (1.1.2)$$

其中

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \qquad (1.1.3)$$

为电磁场强张量，$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \boldsymbol{A}\right)$为<u>四维电磁势</u>。

电磁场强的三维矢量形式为

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \partial_t \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \qquad (1.1.4)$$

相应麦克斯韦方程组的三维形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \mathrm{c}^2\mu_0\rho = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\partial_t\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{E} \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

由(1.1.5)式的第一个和最后一个方程，可得电荷守恒定律

$$\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} + \partial_t\rho = \partial_\mu J^\mu = 0 \qquad (1.1.6)$$

其中 $J^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j})$ 为四维电流密度。

1.1.2 介质中的麦克斯韦方程组

介质（含导体）是由大量微观电荷组成的物质，宏观电动力学通常讨论的是微观场的平均效果。为此，我们先写下微观电场 $\boldsymbol{e}$ 和磁场 $\boldsymbol{b}$ 满足的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{e} = \dfrac{\rho_{\mathrm{mic}}}{\varepsilon_0}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{e} = -\partial_t\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b} = \mu_0\rho_{\mathrm{mic}}\boldsymbol{u} + \mu_0\varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{e} \end{cases} \qquad (1.1.7)$$

其中 ρ_{mic} 为微观的电荷分布密度，$\boldsymbol{u}$ 为微观电荷移动速度。相应洛伦兹力体密度为

$$\boldsymbol{f} = \rho_{\mathrm{mic}}\boldsymbol{e} + \rho_{\mathrm{mic}}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b} \qquad (1.1.8)$$

对于宏观无穷小，微观可以包含大量的原子分子的体元取平均，可以定义宏观电场和磁场

$$\boldsymbol{E} = \bar{\boldsymbol{e}}, \qquad \boldsymbol{B} = \bar{\boldsymbol{b}}$$

如此，对方程(1.1.7)两边取平均，便得到宏观麦克斯韦方程(1.1.5)式，相应

$$\rho = \overline{\rho_{\mathrm{mic}}}, \qquad \boldsymbol{j} = \overline{\rho_{\mathrm{mic}}\boldsymbol{u}}$$

宏观（平均后）的电荷可以划分为自由电荷与束缚电荷，即

$$\rho = \rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{b}} \qquad (1.1.9)$$

定义宏观的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 为分子偶极矩 $\boldsymbol{p}_{分}$ 体密度的平均，即

$$\boldsymbol{P} = n\overline{\boldsymbol{p}_{分}}$$

其中 n 为分子的数密度。如此，则束缚电荷密度可以表示为

$$\rho_{\mathrm{b}} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P} \qquad (1.1.10)$$

相应束缚电荷守恒方程为

$$\partial_t\rho_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}_p = 0$$

其中 $\boldsymbol{j}_p = \partial_t\boldsymbol{P}$ 被称为极化电流密度。

宏观（平均后）的电流可以划分为自由电流与束缚电流，在介质静止的参考系中[1]

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{j}_p + \boldsymbol{j}_m \qquad (1.1.11)$$

---

[1] 参见朗道《连续介质电动力学》的 §29 和 §75.

其中

$$\boldsymbol{j}_m = \nabla\times\boldsymbol{M} \qquad (1.1.12)$$

被称为磁化电流密度，相应磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 为分子磁矩 $\boldsymbol{m}_{分}$ 体密度的平均。

考虑到(1.1.9)-(1.1.12)，方程(1.1.5)中的两个含源方程可以被改写为

$$\begin{cases} \varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho_{\mathrm{f}} - \nabla\cdot\boldsymbol{P} \\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \partial_t\boldsymbol{P} + \nabla\times\boldsymbol{M}) + \mu_0\varepsilon_0\partial_t\boldsymbol{E} \end{cases}$$

引入电位移和磁场强度：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\,, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \qquad (1.1.13)$$

则介质中的麦克斯韦方程组可以写作

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{f}}\,, & \nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial_t\boldsymbol{B} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, & \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \partial_t\boldsymbol{D} \end{cases} \qquad (1.1.14)$$

自由电荷守恒方程为

$$\partial_t\rho_{\mathrm{f}} + \nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} = 0 \qquad (1.1.15)$$

洛伦兹力体密度为

$$\boldsymbol{f} = \rho_{\mathrm{f}}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\times\boldsymbol{B} \qquad (1.1.16)$$

1.1.3 高斯单位制中的麦克斯韦方程组

首先，高斯单位制中，(1.1.5)被改写为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho\,, & \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{B} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, & \overset{\nabla\times B}{\nabla\times\boldsymbol{H}} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E} \end{cases} \qquad (1.1.17)$$

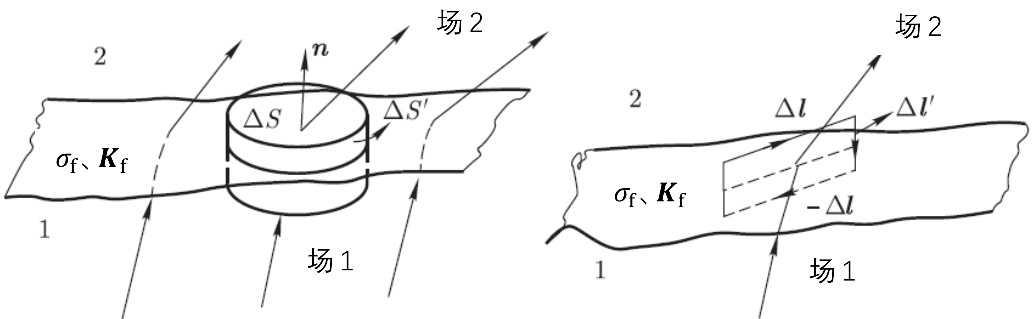
介质中，重新定义电位移和磁场强度

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}\,, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{M} \qquad (1.1.18)$$

则介质中的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}\,, & \nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial_t\boldsymbol{B} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, & \nabla\times\boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \dfrac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{D} \end{cases} \qquad (1.1.19)$$

1.1.4 边值关系



(a) (b)

跨越介质（含导体）分界面时，对图（a）的“高斯扁盒 A ”（$\Delta S' \ll \Delta S$）应用

$$\oiint_A \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \iiint_V \rho_{\mathrm{f}}\mathrm{d}V\,, \qquad \oiint_A \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$$

可得法向边值关系

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma_{\mathrm{f}} \qquad (1.1.20)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \qquad (1.1.21)$$

其中，σ_f 为分界面上的自由电荷面密度。对图（b）的“矩形扁环 L ”（$\Delta l' \ll \Delta l$）应用

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_A \partial_t \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}\,, \qquad \oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_A (\boldsymbol{j}_\mathrm{f}+\partial_t \boldsymbol{D})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

可得切向边值关系

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \qquad (1.1.20)$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K}_\mathrm{f} \qquad (1.1.21)$$

其中，$\boldsymbol{K}_\mathrm{f}$ 分界面上的面电流密度。

1.1.5 介质的本构关系

求解介质中的麦克斯韦方程，还需要介质对电磁场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的响应关系，这些关系被称为介质的本构关系，通常被写做

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}]\,, \qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}]\,, \qquad \boldsymbol{j}_\mathrm{f}=\boldsymbol{j}_\mathrm{f}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}]$$

介质静止的参考系中，最简单的本构关系为

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}\,, \qquad \boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}\,, \qquad \boldsymbol{j}_\mathrm{f}=\sigma\boldsymbol{E} \qquad (1.1.22)$$

其中 χ_e 、χ_m 和 σ 分别被称为极化率、磁化率和电导率。相应

$$\boldsymbol{D}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B}=(1+\chi_m)\mu_0\boldsymbol{H}=\mu_r\mu_0\boldsymbol{H}$$

其中 ε_r 和 μ_r 分别被称为相对介电常量和相对磁导率。

(1.1.22)式反应的并不是最一般性的线性响应关系，考虑到响应在时间上的延迟性，更加普遍的线性响应关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(e)}(\tau)\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(m)}(\tau)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t-\tau)\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{j}_\mathrm{f}(\boldsymbol{r},t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^{(e)}(\tau)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{cases} \qquad (1.1.23)$$

其中 $\chi^{(e)}(\tau)$ 、$\chi^{(m)}(\tau)$ 和 $\sigma^{(e)}(\tau)$ 是含时的响应函数，因果性要求这些函数在 $\tau<0$ 时恒等于零。如果是瞬时响应，即

$$\chi^{(e)}(\tau)=\chi_e\delta(\tau)\,, \qquad \chi^{(m)}(\tau)=\chi_m\delta(\tau)\,, \qquad \sigma^{(e)}(\tau)=\sigma\delta(\tau)$$

则回到了最简单的(1.1.22)式。(1.1.23)是第四章讨论电磁波在色散介质中传播的基础。

1.2 电磁场的能量、动量和角动量守恒定律

1.2.1 能量守恒定律

考虑空间固定区域 V $(\partial V=A)$ ，内部分布有自由电荷 ρ_f 及电流 $\boldsymbol{j}_\mathrm{f}=\rho_\mathrm{f}\boldsymbol{v}$ ，则电磁场对自由电荷做功的功率体密度为

$$p=\boldsymbol{j}_\mathrm{f}\cdot\boldsymbol{E}=(\nabla\times\boldsymbol{H}-\partial_t\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}$$

利用

$$(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{H}\cdot\partial_t\boldsymbol{B}$$

则有

$$p=\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot\partial_t\boldsymbol{D}-\boldsymbol{H}\cdot\partial_t\boldsymbol{B} \qquad (1.2.1)$$

对于线性介质

$$p=-\nabla\cdot\boldsymbol{S}-\partial_t u \qquad (1.2.2)$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \qquad u=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (1.2.3)$$

(1.2.2)式的积分形式为

$$\iiint_V p\mathrm{d}V+\iint_A \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=-\iiint_V \partial_t u\mathrm{d}V \qquad (1.2.4)$$

这个积分式启发我们可以将 u 解释为线性介质内的电磁场能密度，而将 $\boldsymbol{S}$ 解释为电磁场的能流密度，也被称为坡印廷矢量。方程(1.2.2)或(1.2.4)被称为电磁场的能量守恒方程。

1.2.2 动量守恒定律

考虑空间固定区域 V ($\partial V=A$)，内部分布有自由电荷 ρ_f 及电流 $\boldsymbol{j}_\mathrm{f}=\rho_\mathrm{f}\boldsymbol{v}$，则电磁场对自由电荷作用力的体密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=\rho_\mathrm{f}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}_\mathrm{f}\times\boldsymbol{B}=(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}-\partial_t\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\\&=[(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}]+[(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{H}+(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}]-\partial_t(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) \qquad (1.2.5)\end{aligned}$$

对于线性介质，考虑到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{D}\boldsymbol{E})=(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$$

$$\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}$$

则有

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}=-\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}\right]$$

类似地

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{H}+(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}=-\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\right]$$

这样，(1.2.5)被改写为

$$\boldsymbol{f}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}-\partial_t\boldsymbol{g} \qquad (1.2.6)$$

其中

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \qquad (1.2.7)$$

为电磁场的动量密度，而张量

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}\right]+\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\right] \qquad (1.2.8)$$

为电磁场的动量流密度，其负值 $-\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}$ 也被称为电磁场应力张量，或麦克斯韦张量。

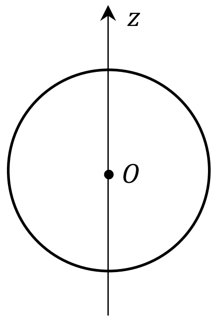
(1.2.6) 式为电磁相互作用的动量守恒方程，对固定区域 V 体积分得

$$\iiint_V\boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\iiint_V\partial_t\boldsymbol{g}\mathrm{d}V=-\iint_A\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \qquad (1.2.9)$$

左边第一项为该区域内的电荷(及电流)所受的电磁力，也是该电荷系统机械动量的变化率，左边第二项为该区域内的电磁场动量的变化率，右边代表通过边界面 A 单位时间净流入的电磁动量。对于恒定电磁场（$\partial_t\boldsymbol{g}=0$），给定区域 V 内的电荷（及电流）所受的电磁力为

$$\boldsymbol{F}=\iiint_V\boldsymbol{f}\mathrm{d}V=-\iint_A\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

例题 1-1 求半径为 R 、电荷面密度为 σ 的均匀带电球壳北半球受力 $\boldsymbol{F}$.



解答:

方法一 面上场强：根据面上场强满足的平均值定理可以确定面上场强为

$$\boldsymbol{E}_S=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

其中 $\boldsymbol{n}=\hat{\boldsymbol{r}}$ 为面元法向。故北半球受力为

$$\boldsymbol{F}=\iint_{\text{北半球}}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\iint_{\text{北半球}}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi R^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

方法二 应力场积分：取刚好包裹住北半球的的半球体表面 A 。

半球面：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E^{R^+}\right)^2\boldsymbol{n}=-\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$

赤道圆面：$\boldsymbol{E}=0\ \Rightarrow\ \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n}=0$

因此

$$\boldsymbol{F}=\iint_{\text{北半球}}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi R^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

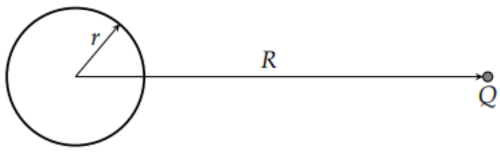
附注：也可以取整个赤道面和无穷大半径的上半球面作为闭合曲面 A，而上半球面的应力场积分为零（为什么？）。在赤道面 $r>R$ 处

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(-\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(-\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\frac{R^4}{r^4}(-\hat{\boldsymbol{z}})$$

因此

$$\boldsymbol{F}=\hat{\boldsymbol{z}}\int_R^\infty\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\frac{R^4}{r^4}\cdot2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi R^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

例题 1-2 ：Schockley − James 佯谬—— “隐藏动量”问题。



如图，光滑水平面上有半径为 r 的电流环，及距环心 $R(R\gg r)$ 处的点电荷 $Q(>0)$ 。开始时电流环通以（逆时针方向）电流 I，某时刻开始让圆环电流迅速减小至 0（但过程中的电磁辐射可以忽略不计——似稳近似）。求电流减小的过程中，点电荷和电流环各自受到的冲量，并分析它们各自的来源。

解答:

1） 考虑电流变化在 Q 处引起的感应电场（法拉第场）E_F 。假想半径为 R 的圆环与小圆环同心，在 $r\ll R$ 的极限下，两个圆环线圈的互感为

$$M=\frac{\mu_0}{2R}\cdot\pi r^2$$

设小圆环电流为 $i=i(t)$，相应感应电场（图中向上方向为投影正向）

$$E_F=-\frac{1}{2\pi R}\,M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0r^2}{4R^2}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

点电荷受到的冲量为

$$K_Q=\int QE_F\mathrm{d}t=-\frac{\mu_0Qr^2}{4R^2}\int_I^0\mathrm{d}i=\frac{\mu_0QIr^2}{4R^2}$$

方向向上。它实际上来自于初始时刻的电磁场动量的转化。可以证明初始时刻的电磁场动量

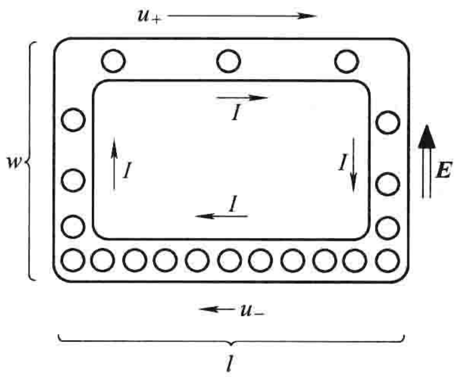
$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{em}}=\iiint_{\text{全空间}}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}_Q\times\boldsymbol{B}\right)\mathrm{d}V=Q\boldsymbol{A} \qquad (1.2.10)$$

其中，$\boldsymbol{E}_Q$ 为点电荷激发的电场，$\boldsymbol{B}$ 为初始电流环激发的磁场，$\boldsymbol{A}$ 为 Coulomb 规范下的矢势，在点电荷处近似有

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{R^2}\hat{\boldsymbol{y}}=\frac{\mu_0 Ir^2}{4R^2}\hat{\boldsymbol{y}}$$

其中 $m=I\cdot\pi r^2$ 为小电流环的磁矩，$\hat{\boldsymbol{y}}$ 为向上方向的方向向量。由此可见初态的电磁场动量转换为电流减小过程中对点电荷的冲量。

2) 接下来我们来考查电流减小过程中圆环线圈所受到的反冲。上述这个过程中，圆环并没有受到来自于外部的电磁力，所以容易误判过程中圆环并没有受到任何反冲。其实圆环会受到内部电磁力的冲量，或者说初态圆环（包括内部的载流子）携带有隐藏的机械动量，这完全是一种相对论效应。



为了看清隐藏动量的来源，我们先来考查如图所示的小矩形电流环，其长、宽分别为 l 和 w，电流为 I，外电场为 $\boldsymbol{E}$，方向如图所示。

设载流子电荷为 $q(q>0)$、质量为 m_0，则电场对左侧载流子加速，对右侧载流子减速，但左右对称，所以只有上、下两段导线的载流子运动的差异才会贡献到总的机械动量中。设上方载流子数为 N_+、速度为 u_+，下方载流子数为 N_-、速度为 u_-，电流连续性方程要求

$$N_+u_+=N_-u_-=\frac{Il}{q}$$

引入

$$\gamma_\pm=1/\sqrt{1-u_\pm^2/c^2}$$

对于单个载流子，相对论性能量方程为

$$qEw=m_0c^2(\gamma_+-\gamma_-)$$

相应（向右方向）总的机械动量为

$$P_{\mathrm{mech}}=N_+u_+m_0\gamma_+-N_-u_-m_0\gamma_-=N_+u_+m_0(\gamma_+-\gamma_-)=\frac{qEw}{c^2}\frac{Il}{q}=\frac{E\cdot Ilw}{c^2}$$

考虑到方向

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{mech}}=\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{E}}{c^2} \qquad (1.2.11)$$

这里 $\boldsymbol{m}$ 是线圈的磁矩。公式(1.2.11)其实不依赖于小线圈的形状，对于本例，初态的载流子机械动量为

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{mech}}=-\left(\frac{I\cdot\pi r^2}{c^2}\right)\cdot\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}=-\frac{\mu_0IQr^2}{4R^2}\hat{\boldsymbol{y}}$$

所以，考虑到隐藏在载流子运动中的机械动量，初态的总动量其实为零，即

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{mech}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{em}}=0$$

而电流减小的过程中，线圈受到的反冲来自于初态的隐藏动量，故它受到的冲量为

$$\boldsymbol{K}_I=-\frac{\mu_0IQr^2}{4R^2}\hat{\boldsymbol{y}}$$

附注：(1.2.10)式的证明。

点电荷 Q 激发电场

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad ①$$

满足

$$\nabla\times\vec{E} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{r}) \qquad ②$$

处于外磁场 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ 中，相应电磁场动量密度

$$\vec{g} = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \varepsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A}) \qquad ③$$

其中

$$\begin{aligned}\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A}) &= \nabla(\vec{E}\cdot\vec{A}) - \vec{E}\cdot\nabla\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\vec{E} - \vec{A}\times(\nabla\times\vec{E}) \\ &= \nabla(\vec{E}\cdot\vec{A}) - \vec{E}\cdot\nabla\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\vec{E} \qquad ④\end{aligned}$$

此外

$$\nabla\cdot(\vec{E}\vec{A}) = (\nabla\cdot\vec{E})\vec{A} + \vec{E}\cdot\nabla\vec{A}$$
$$\nabla\cdot(\vec{A}\vec{E}) = (\nabla\cdot\vec{A})\vec{E} + \vec{A}\cdot\nabla\vec{E}$$

考虑 Coulomb 规范下[2]，$\nabla\cdot\vec{A} = 0$，则

$$\vec{E}\cdot\nabla\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\vec{E} = \nabla\cdot(\vec{E}\vec{A} + \vec{A}\vec{E}) - (\nabla\cdot\vec{E})\vec{A} \qquad ⑤$$

将⑤代入④式得

$$\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\vec{E}\cdot\vec{A}) - \nabla\cdot(\vec{E}\vec{A} + \vec{A}\vec{E}) + (\nabla\cdot\vec{E})\vec{A} \qquad ⑥$$

利用广义 Stokes 公式得

$$\iiint \nabla(\vec{E}\cdot\vec{A})\mathrm{d}V = \oiint_{S_\infty}(\vec{E}\cdot\vec{A})\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad ⑦$$

其中 S_∞ 为半径 $R_\infty(R_\infty\to\infty)$ 球面，其上

$$E_\infty \to \frac{1}{R_\infty^2}, \qquad A_\infty \to \frac{1}{R_\infty^2}$$

故⑦式的积分为零。类似的

$$\iiint \nabla\cdot(\vec{E}\vec{A} + \vec{A}\vec{E})\mathrm{d}V = \oiint_{S_\infty}(\vec{E}\vec{A} + \vec{A}\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad ⑧$$

综上系统的电磁动量

$$\vec{p}_{\mathrm{em}} = \iiint \vec{g}\mathrm{d}V = \iiint \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{A}\,\mathrm{d}V = \iiint Q\delta^3(\vec{r})\vec{A}\,\mathrm{d}V = Q\vec{A} \qquad ⑨$$

1.2.3 自由电磁场的能动量张量

自由无源的电磁场拉氏量（密度）为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\mu_0}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \qquad (1.2.12)$$

考虑无穷小时空整体平移

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \qquad (1.2.13)$$

其中 $\epsilon^\mu = \delta x^\mu$ 为不依赖于时空位置的无穷小参量。相应

$$\delta A^\mu = A^\mu(x') - A^\mu(x) = \partial^\rho A^\mu \epsilon_\rho$$
$$\delta(\partial^\nu A^\mu) = \partial'^\nu A^\mu(x') - \partial^\nu A^\mu(x) = \partial^\nu(\delta A^\mu)$$

电磁场的拉氏量不显含坐标，则

[2] 考虑电流环矢势 $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L \frac{I\mathrm{d}\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 满足 Coulomb 规范条件，故其偶极展开项 $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$ $(\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$ 满足 Coulomb 规范条件，这一点也可以利用矢量分析公式加以证明。

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu}\delta A^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)}\partial^\nu(\delta A^\mu) = \partial^\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)}\delta A^\mu\right]$$
$$= \partial^\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)}\partial^\rho A^\mu \epsilon_\rho\right] \qquad (1.2.14)$$

其中第二个等式应用了运动方程。另一方面，$\mathcal{L}$ 作为洛伦兹标量，在无穷小时空平移下

$$\delta\mathcal{L} = \partial^\rho\mathcal{L}\epsilon_\rho = \partial^\nu\left(\eta_\nu^\rho\mathcal{L}\epsilon_\rho\right) \qquad (1.2.15)$$

因此有

$$\partial_\nu\Theta^{\nu\rho} = 0 \qquad (1.2.16)$$

其中

$$\Theta^{\nu\rho} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}\partial^\rho A^\mu - \eta^{\nu\rho}\mathcal{L} = -\frac{1}{\mu_0}F^{\nu\mu}\partial^\rho A_\mu + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{\nu\rho}F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma} \qquad (1.2.17)$$

注意到（运用运动方程）

$$0 = \partial_\nu\partial_\mu(F^{\nu\mu}A^\rho) = \partial_\nu\left(F^{\nu\mu}\partial_\mu A^\rho\right)$$

因此

$$\partial_\nu T^{\nu\rho} = 0 \qquad (1.2.18)$$

其中

$$T^{\nu\rho} = -\frac{1}{\mu_0}\left(F^{\nu\mu}\partial^\rho A_\mu - F^{\nu\mu}\partial_\mu A^\rho\right) + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{\nu\rho}F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}$$
$$= \frac{1}{\mu_0}F^{\nu\mu}F_\mu{}^\rho + \frac{1}{4\mu_0}\eta^{\nu\rho}F^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma} \qquad (1.2.19)$$

$T^{\nu\rho}(=T^{\rho\nu})$ 为二阶对称张量，被称为（自由）电磁场的<u>能动量张量</u>。其分量分别为

$$T^{00} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right) = u \qquad (1.2.20)$$
$$T^{0i} = \frac{S_i}{c} = cg_i \qquad (1.2.21)$$
$$T^{ij} = \sigma^{ij} \qquad (1.2.22)$$

其中，u 为自由电磁场的能量密度，S_i 和 g_i 为自由电磁场的能流密度（分量）和动量密度（分量），σ^{ij} 为自由电磁场的应力张量（分量）。

方程(1.2.18)可以改写为

$$\frac{1}{c}\partial_t T^{0\rho} = -\nabla^i T^{i\rho}$$

其中 $T^{0\rho} = (u, c\boldsymbol{g})$ 分量的空间体积分分别对应于电磁场的能量 U_{em} 和动量 $c\boldsymbol{P}_{\mathrm{em}}$，它们分别是守恒的，这是因为

$$\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{全空间}T^{0\rho}\mathrm{d}V = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_{\mathrm{em}}, c\boldsymbol{P}_{\mathrm{em}}) = -\oiint_{A_\infty}T^{i\rho}\mathrm{d}a_i = 0 \qquad (1.2.23)$$

这里默认了无穷远处是没有场分布的。

1.2.4 角动量守恒定律

对于给定的参考点，自由电磁场的角动量可以由如下积分给出

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{em}} = \iiint_{全空间}\boldsymbol{r}\times(\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V \qquad (1.2.24)$$

对于自由电磁场，其角动量为守恒量。对于含源的情况，角动量守恒要考虑带电粒子所携带的角动量部分。

1.3 电磁势与规范的选取

1.3.1 库仑规范与洛伦茨（Lorenz）规范

将(1.1.3)代入(1.1.1)，可以得到用电磁势表达的含源麦克斯韦方程

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = \mu_0 J_\nu \qquad (1.3.1)$$

其中

$$\partial^\mu \partial_\mu = \Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2, \qquad \partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t \phi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$$

(1.3.1)式的三维形式为

$$\begin{cases} \Box\,\phi - \partial_t\left(\dfrac{1}{c^2}\partial_t\phi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right) = \rho/\varepsilon_0 \\ \Box\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{1}{c^2}\partial_t\phi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right) = \mu_0\boldsymbol{j} \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

对于静态电磁场（$\partial_t \to 0$），通常选取库仑规范

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0 \qquad (1.3.3)$$

如此便得到泊松方程

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla}^2\phi = \rho/\varepsilon_0 \\ -\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} \end{cases} \qquad (1.3.4)$$

无界空间的解为

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \end{cases} \qquad (1.3.5)$$

对于含时的情形，库仑规范可以推广至协变规范，或 Lorenz-Lorentz 规范

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t\phi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0 \qquad (1.3.6)$$

如此便得到含源的波动方程

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\phi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \left(\dfrac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} \end{cases} \qquad (1.3.7)$$

1.3.2 推迟势解

方程(1.3.7)伴随的无源齐次方程为波动方程，它的一般解为真空电磁波场，这是第四章将要探讨的一个主要课题。本小节的目标是给出方程(1.3.7)在无界空间的一个特解——推迟势解。

考虑方程

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\phi(t,\boldsymbol{r}) = f(t,\boldsymbol{r}) \qquad (1.3.8)$$

对时间参量 t 作傅里叶变换得

$$(-k^2 - \boldsymbol{\nabla}^2)\,\phi(\omega,\boldsymbol{r}) = f(\omega,\boldsymbol{r}) \qquad (1.3.9)$$

其中 $k = \omega/c$，

$$\phi(\omega,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t,\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\,, \qquad f(\omega,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \qquad (1.3.10)$$

构造方程(1.3.9)的点源响应函数——格林函数 $G(k,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 使之满足

$$(-k^2 - \boldsymbol{\nabla}^2)\,G(k,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (1.3.11)$$

如此方程(1.3.9)的解便可以表示为

$$\phi(\omega,\boldsymbol{r}) = \iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\,G(k,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\omega,\boldsymbol{r}') \qquad (1.3.13)$$

定义

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$$

根据方程(1.3.11)的平移不变性和各向同性，格林函数仅会依赖于 $R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，在无界空间

中两个特解为

$$G^{(\pm)}(k,R)=\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \qquad (1.3.14)$$

可以直接验证(1.3.14)式的解满足方程(1.3.9)。首先，对于 $R\neq 0$，

$$\boldsymbol{\nabla}^2 G^{(\pm)}(k,R)=\frac{1}{R}\partial_R^2\left(RG^{(\pm)}(k,R)\right)=\frac{1}{4\pi R}\partial_R^2\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kR}=-k^2G^{(\pm)}(k,R)$$

如此则

$$(-k^2-\boldsymbol{\nabla}^2)\,G^{(\pm)}(k,R)=0\,, \qquad \text{for } R\neq 0$$

其次

$$\lim_{r\to 0}\iiint_{\text{球}r}\boldsymbol{\nabla}^2\,G^{(\pm)}(k,R)\mathrm{d}^3\boldsymbol{R}=\lim_{r\to 0}4\pi r^2\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\right)=-1$$

即

$$\lim_{r\to 0}\iiint_{\text{球}r}(-k^2-\boldsymbol{\nabla}^2)\,G^{(\pm)}(k,R)\mathrm{d}^3\boldsymbol{R}=1$$

因此 $G^{(\pm)}(k,R)$ 为方程(1.3.9)的解。

将(1.3.14)代入 (1.3.13)并作逆傅里叶变换得

$$\begin{aligned}\phi^{(\pm)}(t,\boldsymbol{r})&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\iiint\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kR}}{4\pi R}f(\omega,\boldsymbol{r}')\\&=\iiint\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\frac{1}{4\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t\mp\frac{R}{c}\right)}f(\omega,\boldsymbol{r}')\\&=\iiint\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\frac{f\left(t\mp\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c},\boldsymbol{r}'\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{aligned} \qquad (1.3.14)$$

(1.3.14)式中的负号/正号分别表明：$\boldsymbol{r}'$ 处的源会影响之后/之前的 $\boldsymbol{r}$ 的场，它们分别继承于 $G^{(+)}$ 和 $G^{(-)}$，因此 $G^{(\pm)}(k,R)$ 分别被称为方程(1.3.9)的推迟/超前格林函数，相应$\phi^{(+)}(t,\boldsymbol{r})$和$\phi^{(-)}(t,\boldsymbol{r})$分别被称为方程(1.3.8)的推迟解和超前解。物理上，推迟解才满足因果性的要求，即物理上我们总是选择推迟解。

对应于方程(1.3.7)，我们便有推迟势解

$$\begin{cases}\phi(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(t_r,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\rho(t_r,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{cases} \qquad (1.3.15)$$

其中

$$t_r=t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c} \qquad (1.3.16)$$

被称为推迟时刻，它对应于 $\boldsymbol{r}'$ 处的源对 $\boldsymbol{r}$ 处 t 时刻的场有影响的时刻，而推迟时刻对两者距离的依赖体现了信号是以光速传播的。推迟势解(1.3.15)将是我们在第五章讨论电磁辐射的基本出发点。

数学附注：事实上我们可以直接给出方程(1.3.8)在无界空间的格林函数 $G(t,\boldsymbol{r};t',\boldsymbol{r}')=G(t-t',R)$，它满足

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\boldsymbol{\nabla}^2\right)G(t,\boldsymbol{r};t',\boldsymbol{r}')=\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \qquad (1.3.17)$$

方程(1.3.17)的解与方程(1.3.11)的解之间存在傅里叶变换关系，因此(1.3.17)式对应的推迟/超前格林函数为

$$G^{(\pm)}(t,R)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}G^{(\pm)}(k,R)=\frac{\delta\left(t\mp\frac{R}{c}\right)}{4\pi R} \tag{1.3.18}$$

相应方程(1.3.8)的推迟/超前解为

$$\phi^{(\pm)}(t,\boldsymbol{r})=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}t\frac{\delta\left(t\mp\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}f(t,\boldsymbol{r})=\iiint \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\frac{f\left(t\mp\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c},\boldsymbol{r}'\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

此外，若方程(1.3.11)中 $k=0$ ，则可得到 Poisson 方程的格林函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi R}=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{1.3.19}$$

于是，方程(1.3.5)也可以表示为

$$\begin{cases}\phi(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\mu_0\displaystyle\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{cases}$$