Chapter 5

复数项级数之基础

这一章我们学习复数项级数的一般理论并将其应用到复解析函数中。研究无穷级数的一个重要动机是，解析函数在其解析邻域总可以展开称泰勒级数（证明在这一章给出），因此即使对于不能通过初等函数表示的解析函数，我们也可通过级数来表示。如果我们需要在孤立奇点附近展开解析函数，这时我们需要洛朗展开。

5.1 复数项级数初步

形如

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{5.1}$$

的无穷项求和称为无穷级数。出现无穷的地方往往都有一些违反直觉的现象。这里的无穷指的是求和的项数是无穷多的。在给出无穷级数收敛性的定义和判据前，我们先来看一些例子。

例子 34 *有任意多个长度为 L 的砖块，能否将这些砖块依次垒起来，要求每一层只有一块砖块，但是使得总长度任意长？*

将第一块砖块的左侧放置在坐标原点，其右侧的坐标记为 C_1，显然有 $C_1 = L$。第二块砖块要垒在第一块之上，我们要尽量往右垒，记第二块最右侧的坐标为 C_2。类似的，记第 n 块砖块的最右侧坐标为 C_n。我们要找的就是这样一种垒法，使得 C_n 最大。解决这个问题的关键不是考虑如何从下往上垒，而是考虑从上往下每块砖块的关系。

首先，第 n 块砖块的一半可以超出第 $n-1$ 块砖块而不掉下来。因此我们最多可以有

$$C_n = C_{n-1} + \frac{L}{2}\,. \tag{5.2}$$

第 $n-1$ 块砖块要垒在第 $n-2$ 块之上。为了保证不坍塌，要求第 $n-1$ 和 n 块砖块的整体重心应落在第 $n-2$ 块砖块的右侧边缘以内，不妨就选在边

缘以使得突出的长度最长。这样我们得到关系

$$
\begin{aligned}
C_{n-2} &= \frac{C_n - \frac{L}{2} + C_{n-1} - \frac{L}{2}}{2} \\
&= C_{n-1} - \frac{L}{4}\,,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

或者

$$
C_n = C_{n-2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{4}\,. \tag{5.4}
$$

再来看第 $n-2$ 块如何垒在第 $n-3$ 块之上最好。重复上面的逻辑应有

$$
\begin{aligned}
C_{n-3} &= \frac{1}{3}\left[C_n - \frac{L}{2} + C_{n-1} - \frac{L}{2} + C_{n-2} - \frac{L}{2}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[C_{n-2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{4} - \frac{L}{2} + C_{n-2} + \frac{L}{4} - \frac{L}{2} + C_{n-2} - \frac{L}{2}\right] \\
&= C_{n-2} - \frac{L}{6}\,.
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

或者

$$
C_n = C_{n-3} + \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\,. \tag{5.6}
$$

到这里规律已经明显。容易求的 C_n 的一般表达式

$$
C_n = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\,. \tag{5.7}
$$

我们的问题是，$\lim_{n\to\infty} C_n$ 是否有限。答案是否定的。

定理 23 (调和级数发散) *无穷级数*

$$
S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{5.8}
$$

是发散级数。

为了证明这一点，我们注意到

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\
&= \infty\,.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

如果对调和级数添加负号则可以得到一个有限的交错级数，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2\,. \tag{5.10}$$

但是处理交错级数需要非常小心，因为黎曼重排定理告诉我们，对收敛的交错级数重排列后可以得到任意值。以 (5.10)为例，作如下重排

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\cdots\\
\overset{\text{重排}}{=}\;&1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\cdots\\
=\;&\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\cdots\\
=\;&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)\\
=\;&\frac{1}{2}\ln 2\,.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

欧拉是应用无穷级数的大师，但他并没有发展出一套严格的无穷级数理论，无穷级数在他手上更像是变魔术般帮助他得到正确结果。严格的无穷级数理论到了柯西手上才建立。

定理 24 (柯西判据) 设有实或复无穷项级数

$$w_1+w_2+w_3+\cdots+w_n+\cdots \tag{5.12}$$

假如其满足如下柯西判据：

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0\,,\exists N\in\mathbb{N}\ \textit{such that}\ \forall n>N\ \textit{and}\ \forall p\geq 1\,,\text{有}\\
&\qquad |w_{n+1}+w_{n+2}+\cdots+w_{n+p}|<\varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

为了理解柯西判据的起源需要从无穷级数的部分和和柯西序列说起，此处不赘述。注意满足柯西判据的收敛级数必有 $\lim_{n\to\infty}|w_n|\to 0$，但反过来满足 $\lim_{n\to\infty}|w_n|\to 0$ 的级数并不一定收敛。调和级数就是这样一个例子。

无穷级数更强的收敛条件是绝对收敛。对于无穷级数

$$w_1+w_2+w_3+\cdots+w_n+\cdots \tag{5.14}$$

如若对每一项求绝对值后的级数

$$|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|+\cdots \tag{5.15}$$

满足柯西判据，则称(5.14)是**绝对收敛级数**。绝对收敛级数本身一定是收敛的，这是因为对于部分和我们总是有三角不等式

$$|w_{n+1}+w_{n+2}+\cdots+w_{n+p}|\leq|w_{n+1}|+|w_{n+2}|+\cdots+|w_{n+p}|\,. \tag{5.16}$$

我们今后讨论的主要是绝对收敛级数。

例子 35 当 $|r|<1$ 时，几何级数

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots \tag{5.17}$$

绝对收敛。

我们记该几何级数各项绝对值的部分和

$$S_n = 1 + |r| + |r|^2 + |r|^3 + \cdots + |r|^n \,. \tag{5.18}$$

容易求得

$$S_n = \frac{1-|r|^{n+1}}{1-|r|} \,. \tag{5.19}$$

当 $|r|<1$ 时显然有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-|r|} \,. \tag{5.20}$$

因此几何级数各项绝对值部分和是收敛序列，因此几何级数绝对收敛。在这个例子里我们并没有直接用到柯西判据，原因是部分和的解析表达式可以求出。在部分和无法解析求出时，柯西判据就变得有用。

绝对收敛级数具有一些好的性质：

- 对绝对收敛级数重排不改变结果。
- 绝对收敛级数之和和乘积仍绝对收敛。

对于无穷级数

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \,, \tag{5.21}$$

有如下常用的绝对收敛判据：

- **比较法**：设有正项收敛级数 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$，且 $|a_n| < b_n$，则 S 绝对收敛。
- **比值法**：若极限 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L$ 存在，则当 $L<1$ 时级数绝对收敛；当 $L>1$ 时级数发散；当 $L=1$ 时无从判断。
- **根式法**：如果极限 $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$ 存在，则当 $L<1$ 时级数绝对收敛；当 $L>1$ 时级数发散；当 $L=1$ 时无从判断。

例子 36 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \tag{5.22}$$

是否收敛。

判别法	优点	缺点	适用范围
柯西收敛准则	最通用	难以直接应用	所有级数
比较判别法	直观，适合正项级数	需要合适比较对象	正项级数
比值判别法	简单，适合阶乘或指数型级数	$L=1$ 时失效	正项级数
根值判别法	更广适用，适合幂次或指数型级数	$L=1$ 时失效	正项级数

Table 5.1: 不同级数收敛判据的优劣对比

例子 37 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} \tag{5.23}$$

是否收敛。(提示：斯特林公式：$\ln n! = n\ln n - n + O(\ln n)$)

当无穷级数

$$w_1(z)+w_2(z)+w_3(z)+\cdots+w_n(z)+\cdots \tag{5.24}$$

的每一项本身也是函数时，称为函数项级数。函数项级数在某一确定点 z_0 变为常数项级数，其收敛判据与常数项级数也一致。定义在某个区域 D 上的函数项级数有两种可能的收敛形式。

- **逐点收敛**：对于 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$，当下列条件满足时，

$$\forall\varepsilon>0\,,\quad \exists N(z)\,,\quad \text{s.t. } \forall n>N(z)\,,p\geq 1\,,\quad |\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k|<\varepsilon \tag{5.25}$$

  则称该函数项级数逐点收敛。

- **一致收敛**：对于 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$，当下列条件满足时，

$$\forall\varepsilon>0\,,\quad \exists N\,,\quad \text{s.t. } \forall n>N\,,p\geq 1\,,\quad |\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k|<\varepsilon \tag{5.26}$$

  则称该函数项级数一致收敛。

对于一致收敛级数，级数给出的函数

$$f(z)=w_1(z)+w_2(z)+\cdots+w_n(z)+\cdots \tag{5.27}$$

也是连续的。而对于逐点收敛级数则不然。

例子 38

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \tag{5.28}$$

在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛，但在 $x=0$ 出不连续。

如果一个函数项级数在某个区域上既是一致收敛的也是绝对收敛的，则称为一致绝对收敛级数。魏尔斯特拉斯给出了一致收敛级数的 **M 判别法**。对于区域 D 上的函数项级数 $\sum w_n(z)$，如果一个绝对收敛常数项级数 $\sum a_n$ 和某个常数 M，使得当 n 充分大时，

$$|w_n(z)| < M a_n \tag{5.29}$$

在 D 上恒成立，则 $\sum w_n(z)$ 一致绝对收敛。对于一致绝对收敛级数允许我们逐项积分或逐项求导。

5.2 幂级数

一类非常重要的函数项级数是幂级数，定义为

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{5.30}$$

其中 a_k 是复系数。更一般的可以定义在 z_0 附近展开的幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \,. \tag{5.31}$$

几何级数

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \tag{5.32}$$

是最简单的一类幂级数。前面我们知道，当 $|z|<1$ 是几何级数收敛，

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1\,. \tag{5.33}$$

因此，几何级数在以 $z=0$ 为圆心，1 为半径的圆内收敛，在圆上及其外部发散，其和函数在该圆上有奇点。

例子 39 对于任何 $r>0$，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{5.34}$$

在 $|z| \le r$ 一致绝对收敛。事实上，这个级数给出的正是指数函数 $\exp(z)$。

关于幂级数的一个重要定理是由阿贝尔证明的。

定理 25 (阿贝尔定理) *abel* 对于任意幂次级数(5.30)，总存在实数 R，$0 \leq R \leq \infty$，R 称为该级数的收敛半径，该级数有如下性质，

- 该级数对于 $|z| < R$ 上的任意一点绝对收敛。如果有 $0 \leq \rho < R$，则该级数在 $|z| \leq \rho$ 上一致绝对收敛。
- 当 $|z| > R$ 时该级数发散。
- 该级数在 $|z| < R$ 上是解析函数，该解析函数的导数可通过对级数逐项求导得到，且导数的收敛半径不变。

$|z| = R$ 称为收敛圆。

注意这个定理无法判断在收敛圆上的级数收敛行为。通过根式判别法可以给出 R 的具体表达式，称作阿达玛的收敛半径公式，

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}\,, \tag{5.35}$$

其中 $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ 称作序列 $\{|a_n|\}$ 的 limit superior。如果定义 $\alpha_n = \sup\{|a_n|\Big|k \geq n\}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n\,. \tag{5.36}$$

当极限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 存在时，有

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{5.37}$$

lim superior 的好处是不管极限存不存在，lim superior 肯定存在。一个简单的例子是

$$a_n = 1 + (-1)^n \tag{5.38}$$

这个级数在 0 和 2 震荡，极限不存在，但 $\lim_{n\to\infty} \sup|a_n| = 2$. 下面我们证明阿贝尔定理。

首先我们证明对于 $|z| < R$ 上的任意点级数绝对收敛。为此我们选取 ρ 使得 $|z| < \rho < R$。因此

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}\,. \tag{5.39}$$

由(5.35)可知存在 n_0，当 $n > n_0$ 时

$$\frac{1}{\rho} > \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{5.40}$$

因此当 $n > n_0$ 时有

$$|a_n||z|^n < \frac{|z|^n}{\rho^n}\,. \tag{5.41}$$

由于 $|z|<\rho$，不等号右侧是一个收敛几何级数的第 n 项。由比较判别法知道级数绝对收敛。为了证明级数在 $|z|\le\rho<R$ 上一致收敛，我们可以选取 ρ'，使得 $\rho<\rho'<R$。对于充分大的 n 我们同样有

$$|a_n||z|^n < \frac{|z|^n}{\rho'^n} \le \frac{\rho^n}{\rho'^n}\,. \tag{5.42}$$

上面不等式最右端是一个绝对收敛的常数项级数，由魏尔斯特拉斯 M 判别法知道级数在 $|z|\le\rho<R$ 上一致收敛。

为了证明当 $|z|>R$ 是级数发散，我们取 ρ 使得 $R<\rho<|z|$，此时有

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{\rho}\,, \tag{5.43}$$

因此对于充分大的 n 总是有

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{\rho}\,. \tag{5.44}$$

因此

$$|a_n||z|^n > \frac{z^n}{\rho^n} \to \infty\,. \tag{5.45}$$

因此这个级数显然不收敛。

幂级数在其一致绝对收敛区域内的导数可以记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\,. \tag{5.46}$$

为了证明导数具有同样的收敛半径 R，只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{n} = 1\,. \tag{5.47}$$

为此我们令 $\sqrt[n]{n}=1+\delta_n$，显然 $\delta_n>0$。两边求 n 次方得到

$$n=(1+\delta_n)^n = 1+n\delta_n+\frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2+\cdots > 1+\frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2 \tag{5.48}$$

由此得到

$$\delta_n^2 < \frac{2}{n-1}\,, \tag{5.49}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$。

讨论 4

- 当 $R=\infty$ 时，级数对应的解析函数是整函数。
- 当 $R=0$ 是级数仅在一点收敛，此时级数没有对应的解析函数。
- 除了根式判别法给出的收敛半径外，有时也能用比值判别法求收敛半径，

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\,. \tag{5.50}$$

例子 40 求下述级数的收敛半径。

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n\,. \tag{5.51}$$

注意不管幂级数在收敛圆上收敛与否，其所对应的解析函数在其收敛圆上必然存在奇点。此处不作证明，但给出一些例子。

- $1+z+z^2+\cdots = 1/(1-z)$ 在 $|z|=1$ 上不收敛。$z=1$ 是对应解析函数的奇点。
- $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n = -\ln(1-z)$ 在 $z=1$ 发散，其余各处收敛。
- $$\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{z^n}{n(n-1)}+\cdots = z+(1-z)\ln(1-z) \tag{5.52}$$

  在 $|z|=1$ 处处收敛，但其对应解析函数在 $z=1$ 处有奇点。

5.3 泰勒级数展开

定理 26 (泰勒展开定理) *Taylor* 设复变函数 $f(z)$ 在区域 D 上解析，z_0 是 D 上一点。则 $f(z)$ 在 z_0 处有幂级数表示

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,, \tag{5.53}$$

该幂级数的收敛半径是 z_0 离 D 的边界的最短距离，记为 r。因此上述泰勒展开只对 $|z-z_0|<r$ 有效。幂级数的系数由下式唯一确定

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,, \tag{5.54}$$

其中 C 是 D 上以正定向绕 z_0 的简单封闭围道。

证明：对于以 z_0 为圆心，r 为半径的开圆盘 $D_r(z_0)$ 内任意一点 z，总可以选取 r_1，使得

$$|z-z_0| < r_1 < r\,. \tag{5.55}$$

有柯西公式知道

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw\,, \tag{5.56}$$

其中 C 是以 z_0 为圆心，r_2 为半径的正定向圆，显然在积分围道上有 $|w-z_0| = r_1$，因此

$$\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1\,. \tag{5.57}$$

因此对(5.56)的分母有

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0+z_0-z}=\frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}=\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n. \tag{5.58}$$

将其带入柯西积分公式后得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw(z-z_0)^n. \tag{5.59}$$

与(5.53)比较得到

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{5.60}$$

得证。

我们看到解析函数在解析邻域内一定有泰勒级数展开表示。事实上这正是“解析”一词的来源。对于复变函数其神奇之处在于:

- 在一个区域上只要一次导数处处存在，则任意阶导数也处处存在;
- 一定存在泰勒级数表示，而且其系数由柯西公式唯一确定；换句话说，解析函数的泰勒级数是唯一的。

注意上述性质在实变量函数里并不存在。事实上，对于实函数，甚至无穷阶导数存在也不能一定得到泰勒级数表示存在。

例子 41 函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \tag{5.61}$$

的所有阶导数存在且连续，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有泰勒级数展开。

泰勒展开提供了对任意复杂解析函数在解析邻域内计算的方便手段。对于多值函数，在指定了分支和割线后，同样能在解析邻域内做泰勒展开。

例子 42 求 $\sin(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开并给出收敛半径。

例子 43 求

$$f(z)=\frac{e^z}{1-z}$$

在 $z=0$ 处的泰勒展开并给出收敛半径。

例子 44 求出

$$f(z)=\frac{1}{1-z}$$

在 $z=5$ 处的泰勒展开并给出收敛半径。

例子 45 求

$$f(z) = \ln(1+z)$$

在 $z=0$ 的泰勒展开和收敛半径。

定理 27 (解析函数的零点孤立性定理) *isolatezero* 如果 $f(z)$ 是区域 D 上的解析函数且不恒为零，则 $f(z)$ 在 D 上的零点一定是孤立零点，即对 $f(z)$ 的任意零点 z_0，一定能找到一个邻域 $D_\varepsilon(z_0)$，使得 $f(z)$ 在 $D_\varepsilon(z_0)$ 上除了 z_0 外不再有零点。

证明：设 z_0 是 $f(z)$ 的零点，$f(z)$ 在 z_0 处有泰勒级数展开

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,. \tag{5.62}$$

由于 $f(z)$ 不恒为零，故其展开系数 a_n 不能恒为零。不妨令第一个非零的 a_n 为 a_N，则

$$f(z) = (z-z_0)^N \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n}(z-z_0)^n\right) := (z-z_0)^N g(z)\,. \tag{5.63}$$

由于 $a_N \neq 0$，因此 $g(z_0) \neq 0$。由 $g(z)$ 的连续性可知一定存在 z_0 的某个邻域使得 $g(z_0) \neq 0$，因此在这个邻域内 $f(z) \neq 0$。证毕。

5.4 洛朗展开

泰勒展开对于解析函数在解析邻域内的计算非常有用，但实际情况中我们也会碰到解析函数在非解析邻域内的计算问题。一个简单的例子是

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

在 $z=0$ 处的展开。显然 $0<|z|<1$ 是这个函数的解析邻域，但这是一个复连通区域，$z=0$ 是函数的奇点。为了讨论解析函数在孤立奇点（关于孤立奇点的定义我们后面再讨论，此处只需从字面上理解）处的展开问题，我们需要洛朗展开。

定理 28 (洛朗级数展开定理) *Laurent* 设函数 $f(z)$ 在带形区域

$$D:\ r_1 < |z-z_0| < r_2$$

上解析，则 $f(z)$ 在该带形区域上可展开成如下无穷级数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,, \tag{5.64}$$