17 分离变量法总结

到现在为止, 我们已经处理了几种典型的偏微分方程定解问题, 介绍了求解这些定解问题的基本方法 — 分离变量法.

在分离变量法中, 本征值问题起着非常重要的作用:

1. 本征函数的完备性.
   特解叠加出一般解也就是定解问题的解按本征函数展开.
   定解问题的解是否一定可以按照某一组本征函数展开?
2. 本征函数的正交性.
   定解的叠加系数.

这一章就要从理论上研究这几个问题, 从而加深对分离变量法的认识.

17.1 内积空间

矢量空间或线性空间 设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是集合 V 的元素

$$\mathbf{x} \in V \qquad \mathbf{y} \in V$$

若对于任意的实数(或复数) α, β

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in V$$

则称 V 为实数(或复数)域上的**矢量空间或线性空间**, 其元素称为矢量空间的**矢量**.

Example 17.1 (三维空间)

$$V_3 = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\}$$

Example 17.2 实变量 t 的所有复系数的多项式的集合.

Example 17.3 (Laplace 方程的解)

$$\nabla^2 u = 0$$

内积空间 若在(实数或复数域 K 上的)矢量空间上定义一个二元标量值函数 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. 满足:

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})^*$
2. $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha^*(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta^*(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ 其中 α 和 β 是数域 K 上的标量;
3. 对于任何 $\mathbf{x}$，$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$
   当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

则称 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 的**内积**. 定义了内积的矢量空间称为**内积空间**. 具有实内积的实矢量空间称为**欧氏(欧几里得)空间** *(Euclidean space)*; 具有复内积的复矢量空间称为**酉空间** *(unitary space)*.

Example 17.4 (三维空间)

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Example 17.5 实变量 t 的所有复系数的多项式的函数空间. 若限制 $0 \leq t \leq 1$, 则此矢量空间中的两个矢量(多项式) $x(t)$ 和 $y(t)$ 的内积可以定义为

$$(x(t), y(t)) = \int_0^1 x^*(t)\, y(t)\, \rho(t)\, \mathrm{d}t,$$

在 $0 \leq t \leq 1$ 内, $\rho(t) \geq 0$, 且 $\rho \not\equiv 0$. 若 $\rho(t) \equiv 1$，

$$(x(t), y(t)) = \int_0^1 x^*(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

根据内积的第1条要求, 可以看出, 不论是欧氏空间或酉空间, 矢量和它自身的内积总是实数. 在此基础上, 才有条件3. 我们把

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}=\|\mathbf{x}\| \tag{1}$$

称为矢量 $\mathbf{x}$ 的**模** (即矢量 $\mathbf{x}$ 的 “长度”).

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 称为 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的 **距离**.

进一步, 我们可以定义内积空间中的**开球**, **闭球**, **内点**, **聚点**, **开集**, **闭集** 等拓扑概念.

在建立了内积定义后, 就可以引入矢量**正交**的概念:

正交 *当且仅当 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ 时, 两矢量 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 正交.*

正交归一 *若对于所有的 i 和 j,*

$$(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\delta_{ij}$$

*则称矢量组 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\}$ 是**正交归一**的.*

正交归一的矢量一定线性无关.

任何一组线性无关的矢量都可以正交归一化.

Schmidt 正交化

任何一组线性无关的矢量 $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3,...$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1&=\mathbf{y}_1\\
\mathbf{x}_2&=\mathbf{y}_2+\alpha_{21}\mathbf{x}_1\\
\mathbf{x}_3&=\mathbf{y}_3+\alpha_{31}\mathbf{x}_1+\alpha_{32}\mathbf{x}_2\\
&...
\end{aligned}$$

满足

$$(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=0 \qquad i\neq j$$

则

$$\alpha_{jk}=-\frac{(\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_j)}{(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_k)} \qquad k<j$$

设在 n 维矢量空间 V 中有一组正交归一矢量

$$\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_k\}, \quad k\leq n.$$

则所有

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{x}_i$$

张成一个 k 维子空间. 则对于任意一个矢量 $\mathbf{x}\in V$, 可求出 $\alpha_i=(\mathbf{x}_i,\mathbf{x})$, 则 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{x}_i$ 是 $\mathbf{x}$ 在 k 维子空间上的投影. 显然, 应当有

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{x}_i\Big\|^2 &\equiv \Big(\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{x}_i,\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{x}_i\Big)\\
&=(\mathbf{x},\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^*\alpha_i\\
&\quad-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\alpha_i^*+\sum_{i,j=1}^{k}\alpha_i^*\alpha_j\delta_{ij}\\
&=(\mathbf{x},\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^*\alpha_i\geq 0,
\end{aligned}$$

由此就得到一个重要的不等式 — **Bessel 不等式**

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq \sum_{i=1}^{k} |(\mathbf{x}_i,\mathbf{x})|^2 \tag{2}$$

即

$$\|\mathbf{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |(\mathbf{x}_i,\mathbf{x})|^2 . \tag{3}$$

由 Bessel 不等式, 可以推出 Schwarz 不等式

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \tag{4}$$

n 维矢量空间中的任何一组 n 个正交归一矢量都可以构成此空间的基, 称为 **正交归一基**, (线性代数中称为正交标准基)

对于 n 维矢量空间中的任何正交归一基, Bessel 不等式中的等号成立, 即对于任意的$\mathbf{x} \in V$, 恒有

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{x}_i,\mathbf{x})|^2 .$$

称为帕塞瓦尔(Parseval)等式, 它是有限维空间正交归一矢量组完备的充分必要条件.

17.2 函数空间

函数空间是一类特殊的矢量空间: 空间的元素是函数.

我们只考虑可测(可积)函数!

重要性质

可测(可积)函数序列 f_n 的极限 $f_n \to f$ 也是可测(可积)函数序列.

Note *如果是连续函数, 要求连续函数序列的极限还是连续函数, 则需要更强的条件, 如序列一致收敛等.*

平方可积函数

定义在一定区间 (为确定起见, 设为闭区间 $a \leq x \leq b$) 上的复值平方可积函数 $f(x)$

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$$

Theorem 17.1 *平方可积函数的集合构成一个矢量空间.*

可以证明, 平方可积函数的线性组合仍然平方可积. 例如, 两个平方可积函数之和仍是平方可积的, 因为

$$|f_1(x)+f_2(x)|^2 + |f_1(x)-f_2(x)|^2 = 2\big[|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\big],$$

所以

$$|f_1(x)+f_2(x)|^2 \leq 2\big[|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\big].$$

推出

$$\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^2 \mathrm{d}x \leq 2\int_a^b |f_1(x)|^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b |f_2(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

Theorem 17.2 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是 *(平方可积)* 函数空间中的两个函数, 则

$$\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$$

存在.

Proof 由于

$$\begin{aligned} &|f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2-2|f_1(x)|\cdot|f_2(x)| \\ =&\big[|f_1(x)|-|f_2(x)|\big]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

因此

$$|f_1^*(x)f_2(x)| = |f_1(x)|\cdot|f_2(x)| \leq \frac{1}{2}\big[|f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2\big],$$

所以, 积分

$$\int_a^b |f_1^*(x)f_2(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

存在. 于是

$$\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$$

也存在. □

内积函数空间

问题
能否在平方可积函数空间定义内积

$$(f_1,f_2) = \int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

从而得到一个内积空间?

回顾一下内积空间定义中的三条要求, 前两条是显然满足的. 而且, 对于空间中的任意函数 $f(x)$, 恒有 $(f,f)\geq 0$.

现在的问题是: 在这样的内积定义下, 如果

$$(f,f)=0$$

$f(x)$ 并不见得在整个区间上处处为0. 准确地说, 如果 $(f,f)=0$, 则 $f(x)$ 可以在测度为零的点集上取非零值.

Lebesgue (勒贝格) 测度和积分

测度可以理解为实轴上的一个实数集合的长度. 例如, 区间 (a,b) 的测度等于 $b-a$; 点 a 的测度则为零; 可数个点(有理数集合)的测度也为零.

Riemann (定)积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于曲线 $f(x)$ 下的面积. 我们可以用另一种方法来计算这个面积.

Lebesgue 积分

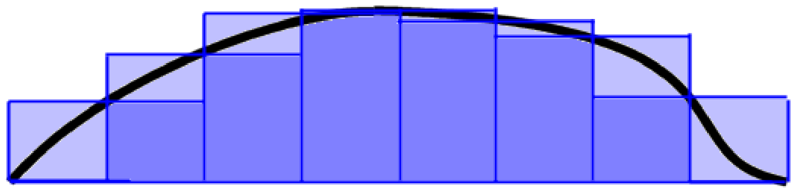
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\Delta y_i\}\to 0}} \{\mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^n \mu_{i-1}\cdot\Delta y_i\}$$

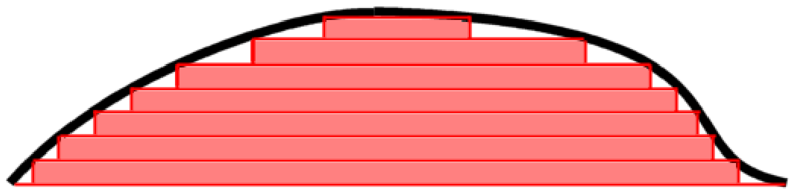
设函数 $y=f(x)$ 的最小值和最大值是 α 和 β.

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_i < y_{i+1} < \cdots < y_n = \beta$$

μ_i 是使 $f(x)\geq y_i$ 的 x 值集合的测度.

Riemann 积分 (蓝色) 与 Lebesgue 积分 (红色)





按照 Lebesgue 积分

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$$

只要求 $f(x)$ 在测度为零的集合上不为零.

如果我们把这类 (几乎处处为0的) 函数定义为**(广义的)零函数**. 在这种零函数的意义下, (5)式定义的内积也就符合内积公理中的第3条要求.

在此内积空间基础上, 就可以定义函数的正交性与归一性, 以及函数的正交归一集合的概念.

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$(f, g) = \int_a^b f^*(x) g(x) \mathrm{d}x = 0, \tag{6}$$

则称它们在区间 $[a, b]$ 上正交. 若函数 $f(x)$ 和它自身的内积

$$(f, f) = \int_a^b f^*(x) f(x) \mathrm{d}x = 1, \quad \text{亦即} \quad \|f\| = 1, \tag{7}$$

则称 $f(x)$ 是归一化的. 而若对于函数集合 $\{f_i\}$, 恒有

$$(f_i, f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij}, \tag{8}$$

则称此函数集合是正交归一的.

Example 17.6 函数集合 $\left\{\mathrm{e}^{inx}/\sqrt{2\pi},\, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是正交归一的

Hilbert (希尔伯特)空间

函数空间的完备性 *若对于由空间内的函数组成的所有 Cauchy 序列 $\{f_i(x)\}$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, $\forall p, q > N$*

$$\|f_p - f_q\| = \sqrt{(f_p - f_q, f_p - f_q)} < \epsilon$$

总存在该空间的函数 $f(x)$, 使得

$$\lim_{i \to \infty} \|f_i(x) - f(x)\| = 0$$

则称该空间为完备的.

完备的内积空间称为 ***Hilbert 空间***.

这个概念, 在物理学中有广泛的应用.

Theorem 17.3 *平方可积函数构成的上述内积空间是完备的.*

下面的讨论, 都是在 Hilbert 空间的范围内进行的.

正交归一函数集的完备性

如果对于(函数空间中的)任意函数 $f(x)$, 总可表示成正交归一函数集 $\{f_\alpha, \alpha \in A\}$ 的线性组合

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha f_\alpha(x), \tag{9}$$

则称该正交归一函数集 $\{f_\alpha, \alpha \in A\}$ 是完备的.

Theorem 17.4 *Hilbert 空间的完备的正交归一集 (**正交归一基**) 存在.*

正交归一完备函数集

函数空间的任意函数可以用正交归一完备函数集展开

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha f_\alpha(x),$$

这里我们看到,

1. 一般说来, 这个函数集应该含有无穷多个函数. 函数空间是无穷维的矢量空间.
2. 若上式对区间 $[a, b]$ 内的每一点 x 都成立, 则表明对于区间 $[a, b]$ 内的每一点 x, 级数都(逐点)收敛于$f(x)$. 但是, 和广义零函数的概念相适应, 上式在平方可积函数空间应理解为左右两端可相差一个广义的零函数. 换句话说，把

   $$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f_\alpha(x) = f(x)$$

   理解为**平均收敛**于$f(x)$.

   - 由 Bessel 不等式, 对任意有限子集 $A' \subset A$,

     $$\sum_{\alpha \in A'} c_\alpha^2 \le \|f\|^2.$$

     因此, 最多可数个系数 $c_\alpha \neq 0$. 排序, 设为 c_{α_i}, $i = 1, 2, 3...$
   - 则

     $$\lim_{n\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_{\alpha_i} f_{\alpha_i}(x) \right\|^2 = 0. \tag{10}$$

3. 由函数集 $\{f_\alpha, \alpha \in A\}$ 的正交归一性, 可求得展开系数

   $$c_\alpha = \int_a^b f_\alpha^*(x) f(x) \mathrm{d}x = (f_\alpha, f). \tag{11}$$

4. 因为

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left|f(x)-\sum_{i=1}^n c_{\alpha_i} f_{\alpha_i}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\\ =&(f,f)-\sum_{i=1}^n c_{\alpha_i}^*(f_{\alpha_i},f)\\ &-\sum_{i=1}^n c_{\alpha_i}(f,f_{\alpha_i})+\sum_{i=1}^n |c_{\alpha_i}|^2\\ =&(f,f)-\sum_{i=1}^n |c_{\alpha_i}|^2,\end{aligned}$$

因此, 只要函数集 $\{f_\alpha, \alpha\in A\}$是完备的, 那么, 就可以得到函数集$\{f_\alpha, \alpha\in A\}$ 的**完备性关系 — Parseval 方程**,

$$(f,f)=\sum_{\alpha\in A}|c_\alpha|^2=\sum_{\alpha\in A}|(f_\alpha,f)|^2. \tag{12}$$

最后, 还需要指出, 函数内积的定义还可以推广为

$$(f_1,f_2)=\int_a^b f_1^*(x)\, f_2(x)\, \rho(x)\, \mathrm{d}x, \tag{13}$$

其中 $\rho(x)>0$. 这样, 本节中的有关公式只需要作相应的修改. 特别是, 关于函数平方可积的要求也应该修改为要求积分

$$\int_a^b |f(x)|^2\rho(x)\, \mathrm{d}x$$

存在.

17.3 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题

我们讨论过的几个常微分方程的本征值问题

$$X''+\lambda X=0 \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right]R=0 \tag{15}$$

及 Bessel 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0 \tag{16}$$

它们都可以归纳为如下的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0 \tag{17}$$

称为 Sturm-Liouville 型方程. 这里 $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ 限制为实函数.

在给定区间 $[a,b]$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ 为连续函数. 在 (a,b) 之间, $p(x)>0$, $\rho(x)>0$. $\rho(x)$ 称为权重函数. 例如,

1. 方程(14): $p(x)=1$, $\rho(x)=1$, $q(x)=0$.
2. 方程(15): $p(x)=1-x^2$, $\rho(x)=1$, $q(x)=\dfrac{m^2}{1-x^2}$.

3. 方程(16): $p(x)=r$, $\rho(x)=r$, $q(x)=\dfrac{m^2}{r}$.

Sturm-Liouville 方程+端点a, b的齐次边界条件, 构成 Sturm-Liouville 方程的本征值问题. 齐次边界条件可以是

1. 第I, II, III类的齐次边界条件:

$$\begin{array}{lll} y(a)=0 & y'(a)=0 & \alpha_1 y'(a)-\beta_1 y(a)=0 \\ y(b)=0 & y'(b)=0 & \alpha_2 y'(b)-\beta_2 y(b)=0 \end{array}$$

2. 周期性条件 (若 $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ 为周期函数):

$$\begin{aligned} y(a)&=y(b) \\ y'(a)&=y'(b) \end{aligned}$$

3. 端点为正则奇点时

$$\begin{array}{ll} p(a)=0 & y(a)\text{有界} \\ p(b)=0 & y(b)\text{有界} \end{array}$$

Sturm-Liouville 型方程本征值问题性质

1. 本征值为实数.
2. 本征函数正交性.
3. 本征函数完备性.

由 Sturm-Liouville 型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda_i\rho(x)-q(x)]y_i=0 \tag{18}$$

设 $y_j(x)$ 和 λ_j 为另一本征函数和相应的本征值, 也满足 Sturm-Liouville 型方程. 对方程求复共轭, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y_j^*}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda_j^*\rho(x)-q(x)]y_j^*=0 \tag{19}$$

(18) 乘以 y_j^* 减去 (19) 乘以 y_i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y_j^*p(x)\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}-y_ip(x)\frac{\mathrm{d}y_j^*}{\mathrm{d}x}\right]+(\lambda_i-\lambda_j^*)\rho(x)y_iy_j^*=0$$

积分

$$(\lambda_j^*-\lambda_i)\int_a^b\rho(x)y_iy_j^*\mathrm{d}x=p(x)(y_j^*y_i'-y_j'^*y_i)\Big|_a^b$$

无论是何种的齐次边界条件, 上式右端总为零...

$$p(x)(y_j^*y_i'-y_j'^*y_i)\Big|_a^b=0$$

于是

$$(\lambda_j^*-\lambda_i)\int_a^b\rho(x)y_iy_j^*\mathrm{d}x=0$$

1. 令 $i=j$, 因为模方

$$\|y_i(x)\|^2=\int_a^b \rho(x)|y_i(x)|^2\mathrm{d}x>0$$

所以, $\lambda_i^*=\lambda_i$ 为实数.

2. 设 y_i, y_j 的本征值分别为 λ_i, λ_j. 若 $\lambda_i\neq\lambda_j$, 则 $\lambda_i\neq\lambda_j^*$, 所以

$$\int_a^b \rho(x)y_iy_j^*\mathrm{d}x=0 \tag{20}$$

此即正交性.

在周期性条件下, 有可能出现一个本征值有两个 ($y_i(x)$ 和 $y_j(x)$) 线性无关的本征函数的所谓简并情况. 此时 $\lambda_i=\lambda_j$, 可以选择适当的本征函数 (作适当的线性组合) 使简并的本征函数仍满足正交性. 正交性可表为

$$\int_a^b \rho(x)y_iy_j^*\mathrm{d}x=\|y_i\|^2\delta_{ij} \tag{21}$$

3. 完备性: 任意一个在区间 $[a,b]$ 中有连续二阶导数, 且满足相同边界条件的函数 $f(x)$, 均可按本征函数集 $\{y_n(x)\}$ 展开为绝对而且一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ny_n(x) \tag{22}$$

其中系数 c_n 可由正交性求得

$$c_n=\frac{\int_a^b f(x)y_n^*(x)\rho(x)\mathrm{d}x}{\|y_n\|^2} \tag{23}$$

简化的情况

$$y''+[\lambda-q(x)]y=0. \tag{24}$$

对于更一般的二阶常微分方程

$$y''+p(x)y'+[l(x)+\lambda r(x)]y=0$$

通过变换

$$\xi=\int_0^x\sqrt{r(t)}\mathrm{d}t,\quad \eta(\xi)=\Phi(x)y(x),$$
$$\Phi(x)=\sqrt[4]{r(x)}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x p(t)\mathrm{d}t\right).$$

化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}+[\lambda+q(\xi)]\eta=0$$

考虑本征值问题

$$y''+[\lambda-q(x)]y=0 \tag{25}$$
$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0 \tag{26}$$
$$y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0 \tag{27}$$

完备性定理的证明

- 积分方程方法 (Green 函数方法)
- 围道积分方法

积分方程方法

Theorem 17.5 *凡有不恒等于零的连续对称实核*

$$K(x,t)=K(t,x)$$

的积分方程

$$u(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)\mathrm{d}t=0 \tag{28}$$

至少有一个本征函数 $u(x)$ (本征值 λ).

对于给定的 λ, 设 $u(x,\lambda)$ 满足

$$\begin{aligned}&u''+[\lambda-q(x)]u=0\\&u(0,\lambda)=\sin\alpha,\quad u'(0,\lambda)=-\cos\alpha\end{aligned}$$

$v(x,\lambda)$ 满足

$$\begin{aligned}&v''+[\lambda-q(x)]v=0\\&v(\pi,\lambda)=\sin\beta,\quad v'(\pi,\lambda)=-\cos\beta\end{aligned}$$

如果 $u(x,\lambda)$ 和 $v(x,\lambda)$ 线性无关, 则 λ 不是本征值. 这时它们的 Wronskian 行列式 $W\{u,v\}\neq 0$. 由于微分方程不存在一阶微商项, $W\{u,v\}$ 与 x 无关,

$$W\{u,v\}=\omega(\lambda).$$

引入函数

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\omega(\lambda)}u(x,\lambda)v(t,\lambda), & x\le t\\ \frac{1}{\omega(\lambda)}u(t,\lambda)v(x,\lambda), & x\ge t\end{cases}$$

它是边值问题(25)—(27)的 Green 函数. $G(x,t;\lambda)$ 对 x, t 是对称的, 并且当 λ 取实数时是实函数.

可以证明, 函数

$$y(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t;\lambda)f(t)\mathrm{d}t$$

满足微分方程

$$y''+[\lambda-q(x)]y=f(x)$$

并满足边界条件 (25), (26).

证明如下.

$$\begin{aligned}y(x,\lambda)=&\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{v(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\right.\\&\left.+u(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t\right\}.\end{aligned}$$

两次微分, 得 $f''(x)$

$$\begin{aligned}=&\frac{1}{\omega}\left\{v''(x)\int_0^x u(t)f(t)\mathrm{d}t+u''(x)\int_x^\pi v(t)f(t)\mathrm{d}t\right\}\\&+\frac{1}{\omega}\{v'(x)u(x)f(x)-u'(x)v(x)f(x)\}\\=&\frac{q(x)-\lambda}{\omega}\left\{v(x)\int_0^x u(t)f(t)\mathrm{d}t+u(x)\int_x^\pi v(t)f(t)\mathrm{d}t\right\}\\&+f(x)\\=&[q(x)-\lambda]y(x)+f(x).\end{aligned}$$

容易验证, $y(x,\lambda)$ 满足边界条件 (25), (26).

我们可以假设 $\lambda=0$ 不是本征值. 因为我们可以对问题做“平移”, 任取实数 η, 转而考虑本征值问题:

$$\begin{aligned} y''+[(\lambda+\eta)-q(x)]y=0 \\ y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0 \\ y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0 \end{aligned}$$

显然本征函数没有改变.

以下, 固定 $\lambda=0$. 记 $G(x,y;0)\equiv G(x,y)$. 那么

$$y(x)=\int_0^\pi G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

满足微分方程

$$y''-q(x)y=f(x)$$

微分方程

$$y''-q(x)y=f(x)-\lambda y$$

等价于积分方程

$$\begin{aligned} y(x)+\lambda\int_0^\pi G(x,t)y(t)\mathrm{d}t \\ =\int_0^\pi G(x,t)f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

特别地, 本征值问题等价于

$$y(x)+\lambda\int_0^\pi G(x,t)y(t)\mathrm{d}t=0 \tag{29}$$

设 λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_n, ... 是问题的所有本征值, 而 $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$, ... 是相应的归一化本征函数. 考虑核

$$H(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)v_n(t)}{\lambda_n}.$$

可以证明上式中的级数绝对一致收敛, 因此 $H(x,t)$ 是连续函数.

进一步, 考虑核

$$Q(x,t)=G(x,t)+H(x,t)$$

它显然具有对称性和连续性. 我们要证明 $Q(x,t)\equiv 0$.

首先, 由 v_n 满足积分方程 (29)

$$\int_0^\pi G(x,t)v_n(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{\lambda_n}v_n(x)$$

所以

$$\int_0^\pi Q(x,t)v_n(t)\mathrm{d}t=0$$

如果 $Q(x,t)$ 不恒等于零, 则它有至少一个本征值 μ_0, 相应本征函数 $u_0(x)$, 满足

$$u_0(x)+\mu_0\int_0^\pi Q(x,t)u_0(t)\mathrm{d}t=0$$

则 $u_0(x)$ 与所有 $v_n(x)$ 正交. 由上式

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi u_0(x)v_n(x)\mathrm{d}x\\
=&-\mu_0\int_0^\pi v_n(x)\left\{\int_0^\pi Q(x,t)u_0(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x\\
=&-\mu_0\int_0^\pi u_0(t)\left\{\int_0^\pi Q(x,t)v_n(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\\
=&0
\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
0=&u_0(x)+\mu_0\int_0^\pi Q(x,t)u_0(t)\mathrm{d}t\\
=&u_0(x)+\mu_0\int_0^\pi G(x,t)u_0(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

即 $u_0(x)$ 是本征值问题 (25)—(27) 的本征函数, 这与 $u_0(x)$ 与所有 $v_n(x)$ 正交矛盾. 因此 $Q(x,t)\equiv 0$.

$$G(x,t)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)v_n(t)}{\lambda_n}.$$

现在, 假设 $f(x)$ 有连续二阶导数, 并满足相同的边界条件 (26), (27). 令

$$f''(x)-q(x)f(x)=h(x)$$

我们有

$$\begin{aligned}
f(x)=&\int_0^\pi G(x,t)h(t)\mathrm{d}t\\
=&-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)}{\lambda_n}\int_0^\pi v_n(t)h(t)\mathrm{d}t\equiv\sum_{n=0}^{\infty}c_nv_n(x).
\end{aligned}$$

最后由 $\{v_n(x)\}$ 的正交归一性, 得

$$c_n=\int_0^\pi f(x)v_n(x)\mathrm{d}x$$

17.4 Sturm–Liouvelle 方程本征值问题的简并现象

在第15章中, 我们曾经遇到过对应一个本征值有两个线性无关的本征函数的简并现象. 到底在什么条件下, S-L 型方程的本征值问题可能是简并的呢?

Theorem 17.6 *设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是 S-L 型方程本征值问题的两个实的线性无关的本征函数, 并且在 $x=a$ 和 $x=b$ 点都满足*

$$p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)=0,\tag{30}$$

则 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 不可能对应于同一个本征值 λ.

Proof 反证法. 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 对应于同一个本征值 λ, 容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)\right]=0.\tag{31}$$

于是

$$p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)=\text{常数}C. \tag{32}$$

而根据定理给出的已知条件, 定出 $C=0$. 所以

$$p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)\equiv 0. \tag{33}$$

但因为 $p(x)\not\equiv 0$, 故必有 Wronski 行列式

$$W[y_1(x),y_2(x)]\equiv p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)\equiv 0. \tag{34}$$

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关, 矛盾. □

这个定理说明, 在一、二、三类(齐次)边条件或有界条件下, S-L 型方程本征值问题不可能是简并的. 就我们所讨论的几种类型的边界条件而言, 只有在周期条件之下, 才有可能发生简并现象.

Theorem 17.7 *若 $\lambda\rho(x)-q(x)$ 在一对相邻零点之间恒为正, 则解 $u(x,\lambda)$ 在此区间仅有一个极大(或极小)值.*

Proof 如若不然, 设其有两个极值点 x_1 和 x_2, 期间没有零点, u 恒正或恒负. 对 S-L 方程从 x_1 积分到 x_2, 得

$$0=-\left[p(x)u'(x)\right]_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}[\lambda\rho(x)-q(x)]u(x)\mathrm{d}x.$$

左边积分不可能为零! 矛盾. □

Theorem 17.8 (Sturm 比较定理) *考虑 S-L 型方程在一、二、三类(齐次)边条件下的本征值问题. 设 $\lambda_1<\lambda_2$, 则在非零解 $u(x,\lambda_1)$ 的任意两个零点之间一定有 $u(x,\lambda_2)$ 的一个零点.*

Proof 这一定理比较的是两个不同本征值 λ_1 和 λ_2 的本征函数. 记

$$u(x,\lambda_1)\equiv u_1(x),\qquad u(x,\lambda_2)\equiv u_2(x).$$

容易得到

$$p(x)(u_2u_1'-u_1u_2')\Big|_{x_1}^{x_2}=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{x_1}^{x_2}u_1u_2\rho\mathrm{d}x. \tag{35}$$

首先设 ξ 是 $u_1(x)$ 的第一个零点 $\xi>a$. 令 $x_1=a$, $x_2=\xi$, 得

$$p(x)u_2(\xi)u_1'(\xi)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_a^{\xi}u_1u_2\rho\mathrm{d}x. \tag{36}$$

容易由函数图像看出: 若在区间 (a,ξ) 之间 $u_1(x)>0$ 则 $u_1'(\xi)<0$; 反之 $u_1(x)<0$ 则 $u_1'(\xi)>0$. 所以 u_2 在此区间必变号, 因此必有一个零点.

同理若 ξ 是 $u_1(x)$ 的最后一个零点 $\xi<b$, 则在区间 (ξ,b) 之间必有 u_2 的零点.

现在考虑 $u_1(x)$ 的两个相邻零点 ζ 和 ξ: $u_1(\zeta)=u_1(\xi)=0$. 这时令 $x_1=\zeta$, $x_2=\xi$, 得

$$p(\xi)u_2(\xi)u'(\xi)-p(\zeta)u_2(\zeta)u'(\zeta)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{\zeta}^{\xi}u_2u_1\rho\mathrm{d}x. \tag{37}$$

这时容易由函数图像看出: 若在区间 (ζ,ξ) 之间 $u_1(x)>0$ 则 $u_1'(\zeta)>0$, $u_1'(\xi)<0$; 反之 $u_1(x)<0$ 则 $u_1'(\zeta)<0$, $u_1'(\xi)>0$. 仍然得到结论 u_2 在此区间必变号, 必有一个零点. □

17.5 从 Sturm–Liouvelle 方程的本征值问题看分离变量法

仍以弦的横振动问题为例. 对于两端固定弦的自由振动, 定解问题是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l,\ t>0; \tag{38a}$$

$$u\big|_{x=0}=0,\qquad u\big|_{x=l}=0,\qquad t>0; \tag{38b}$$

$$u\big|_{t=0}=\phi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),\quad 0<x<l. \tag{38c}$$

根据前几节的讨论可知, 如果存在一个S–L方程的本征值问题

$$\boldsymbol{L}X=\lambda\rho X, \tag{39a}$$

$$X(0)=0,\qquad X(l)=0, \tag{39b}$$

并且为方便起见, 假设本征函数均已正交归一化

$$(X_n,\,X_m)=\int_0^l X_n^*(x)\,X_m(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{nm}. \tag{40}$$

由于定解问题的边界条件(38b)的形式和边界条件(39b)相同, 因此可以将定解问题的解 $u(x,t)$ 按照本征函数组 $\{X_n(x)\}$, $n=1,\,2,\,3,\,\cdots$ 展开,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x). \tag{41}$$

代入方程(38a), 有

$$\sum_{m=1}^{\infty}T_m''(t)X_m(x)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)X_m''(x)=0. \tag{42}$$

将上式两端同乘以 $X_n^*(x)\,\rho(x)$, 然后在区间 $[0,\,l]$ 上积分, 就得到

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\,X_m'')T_m(t)=0,\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{43}$$

一般说来, 这是关于未知函数 $T_n(t)$ 的常微分方程组.

同样, 再将初始条件(38c)也按这一组本征函数展开, 还可以得到

$$T_n(0)=(X_n,\,\phi),\quad T_n'(0)=(X_n,\,\psi). \tag{44}$$

由 (43) 和 (44) 求出 $T_n(t)$, 也就求出了定解问题的解 $u(x,t)$.

这里, 本征函数组的完备性起了决定性的作用. 为了保证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$ 能够表示解 $u(x,t)$, 求和必须遍及 **全部**本征函数. 绝不可以无理由地摈弃其中的任何一部分.

弄清楚了本征函数组在分离变量法中的决定性作用后, 就不难求解由非齐次方程和齐次边界条件构成的定解问题. 把定解问题中的方程改为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{45}$$

那么, 现在看来, 求解过程并没有太大的差异, 不同之处只在于要将方程的非齐次项 $f(x,t)$ 也按本征函数展开, 于是, 齐次的常微分方程组(43)变成了非齐次的方程组

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,\,X_m'')T_m(t)=(X_n,\,f),\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{46}$$

当然要求 $f(x,t)$ 作为 x 的函数, 和 $\{X_n(x)\}$ 同属一个函数空间, 满足同样的边界条件.

同样就不难理解, 如果定解问题的边界条件是非齐次的, 就必须先将边界条件齐次化.

到现在为止, 我们着重分析了齐次边界条件在分离变量法中的决定性作用. 对于本征函数所满足的微分方程并没有任何限制. 选择不同的本征函数组 $\{X_n(x),\, n=1,2,3,\cdots\}$ (它们当然都必须满足和定解问题相同的边界条件), 得到的关于 $T_n(t)$ 的常微分方程组的形式也不相同, 因而求得的 $T_n(t)$ 也不相同. 但是, 定解问题的解的存在唯一性, 保证了最后求得的是同一个 $u(x,t)$.

但是，并不是任何常微分方程组都是容易求解的. 这样, 在实际的求解过程中, 我们就应当恰当地选择本征函数组 $\{X_n(x),\, n=1,2,3,\cdots\}$, 使得 $T_n(t)$ 的求解问题尽可能地简单. 最简单的情形当然就是 $T_n(t)$ 满足的是常微分方程, 而非常微分方程组. 在(43)或(46)式中, 就应当要求本征函数满足

$$(X_n,\, X_m'') = -\lambda_n \delta_{nm}, \tag{47}$$

即本征函数满足常微分方程

$$-X_n''(x) = \lambda_n X_n(x), \tag{48}$$

这正是分离变量法中得到的微分方程. 相应地, 方程组(43)和(46)就变成常微分方程

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0 \tag{49}$$

和

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = (X_n,\, f). \tag{50}$$

所以, 分离变量法实际上提供了一个选择本征函数组的最佳方案. 如果说, 本征函数的完备性是在理论上保证了一定可以将定解问题的解按该本征函数组展开(这是有条件的, 定解问题和本征函数要满足相同的齐次边界条件), 而选用 **相应齐次问题的本征函数**则保证了可以方便地求出展开系数(实际上是函数), 保证了这种解法在实用上的可行性.

Example 17.7 (周边固定圆形薄膜)　振动方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

边界条件

$$...$$

Solution　先将解按 ϕ 的本征函数展开

$$u(r,\phi,t) = \sum f_m(r,t)\Phi_m(\phi)$$

考虑到算符 $L_\phi = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\phi^2$, 本征函数满足的本征方程选为

$$L_\phi \Phi_m(\phi) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi_m(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2\phi$$

本征函数为(周期性边界条件)

$$\Phi_m(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...$$

这样

$$u(r,\phi,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

而 $f_m(r,t)$ 满足的方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f_m}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}f_m - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_m}{\partial t^2} = 0$$

接下来, 再将 $f_m(r,t)$ 按 r 的本征函数展开

$$f_m(r,t) = \sum T_{mn}(t)R_n(r)$$

现在考虑算符

$$L_r = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{m^2}{r^2}$$

r- 本征函数满足的本征方程选为

$$L_r R_n(r) = \frac{\mathrm{d}^2 R_n}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}r} - \frac{m^2}{r^2}R_n = -k_{mn}^2 R_n$$

本征函数为(边界条件...)

$$R_n(r) = J_m(k_{mn}r), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

在圆周 $r = a$ 上 $J_m(k_{mn}a) = 0$. 这样

$$f_m(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) J_m(k_{mn}r)$$

而 $T_{mn}(t)$ 满足的方程为

$$k_{mn}^2 T_{mn}(t) + \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 T_{mn}}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

其解为 ($\omega_{mn} = ck_{mn}$)

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t$$

所以, 一般解为

$$\begin{aligned} u(r,\phi,t) = &\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \\ &\times (A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t) \end{aligned}$$

□

在深入理解了分离变量法的精神实质后, 我们对于各种类型的定解问题(方程齐次或非齐次, 边界条件齐次或非齐次)的求解就有了一个统一的更深入的认识, 而且, 对于求解偏微分方程定解问题也就获得了更大的自由, 这表现为拓宽了对于某些定解问题的求解思路. 例如, 对于单位球内的稳定问题,

$$\nabla^2 u = f, \qquad x^2 + y^2 + z^2 < 1; \tag{51a}$$

$$u\big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0, \tag{51b}$$

采用球坐标系求解, 按照过去的做法, 应当将 $u(r,\theta,\phi)$ 按相应齐次问题的本征函数展开,

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} R_{lm}(r) Y_l^m(\theta,\phi), \tag{52}$$

然后, 根据方程

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R_{lm}}{\mathrm{d}r}\right] - \frac{l(l+1)}{r^2}R_{lm}(r) \\ &= \iint Y_l^{m*}(\theta,\phi)\, f(r,\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

(其中的积分遍及整个 4π 立体角)和边界条件

$$R_{lm}(0)\text{有界}, \qquad R_{lm}(1) = 0 \tag{53}$$

求出$R_{lm}(r)$.

但是, 按照本节中前面的分析, 如果能找到一组本征函数, 只要它也满足此定解问题的齐次边界条件, 那么, 就可以将 $u(r,\theta,\phi)$ 按这一组本征函数展开. 具体说来, 可以先求解本征值问题

$$-\nabla^2 w = \lambda w, \qquad x^2+y^2+z^2<1; \tag{54a}$$

$$w\big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0, \tag{54b}$$

得到本征值[1]和本征函数

$$\lambda_{nl} = k_{nl}^2, \quad n=1,2,3,\cdots, l=0,1,2,\cdots \tag{55}$$

$$w_{nlm}(r,\theta,\phi) = j_l(k_{nl}r)\,Y_l^m(\theta,\phi), \tag{56}$$

k_{nl} 是 l 阶球贝塞耳函数 $j_l(x)$ 的第 n 个正零点. 然后将 $u(r,\theta,\phi)$ 按 $w_{nlm}(r,\theta,\phi)$ 展开,

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{nlm}\, j_l(k_{nl}r) Y_l^m(\theta,\phi), \tag{57}$$

代入方程(51a), 就得到

$$\begin{aligned}&-k_{nl}^2 c_{nlm}\int_0^1 j_l^2(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r\\ &=\int_0^1 j_l(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r\iint Y_l^{m*}(\theta,\phi)f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\end{aligned}$$

可以求得

$$\begin{aligned}\int_0^1 j_l^2(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r &= \frac{\pi}{2k_{nl}}\int_0^1 J_{l+1/2}^2(k_{nl}r)r\,\mathrm{d}r\\ &=\frac{\pi}{4k_{nl}}\left[J'_{l+1/2}(k_{nl})\right]^2 = \frac{1}{2}\left[j'_l(k_{nl})\right]^2,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}c_{nlm} = -&\frac{2}{k_{nl}^2\left[j'_l(k_{nl})\right]^2}\int_0^1 j_l(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r\\ &\times\iint Y_l^{m*}(\theta,\phi)f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

前面在求解本征函数时, 已经用到了全部边界条件(包括在转换到球坐标系时出现的周期条件和有界条件), 这样, 就自动保证了解 $u(r,\theta,\phi)$ 也满足这些边界条件.

这种解法的优点是除了要找到合适的本征函数外, 无需再去求解常微分方程. 这是以多作了一重级数展开为代价的. 这正是相当于将 $R_{lm}(r)$ 也按球贝塞耳函数 $j_l(k_{nl}r)$ 展开而得的结果.

这种做法也有局限性, 它只适用于不含时间的稳定问题, 并且还要求相应的本征值问题有解, 甚至还要求0不是本征值.

以上的做法,可以方便地推广到其他几何形状的三维区域, 或二维平面上的一定区域.

[1]这里的本征值与 $m=0,\pm1,\cdots,\pm l$ 无关, 换句话说, 此本征值问题是对 m 简并的, 简并度为 $2l+1$.