# 第 3 章 复变函数的积分

## 3.1 复线积分和围道积分

**定义 3.1 (光滑曲线)**

复平面上的光滑曲线用 $\gamma$ 标记。设其具有参数化形式：

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)\,, \qquad a \le t \le b\,. \tag{3.1}$$

其中 $\gamma(t)$ 一般取复值。当 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 时，这是一条封闭曲线，这时用记号 $C$ 来标记。注意对于同一曲线可以又无穷多种参数化形式。♣

**例题 3.1** 复平面上连接 $z = 0$ 和 $z = 1 + i$ 的直线可以参数化为

$$\gamma_1(t) = (1 + i)t\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

或者

$$\gamma_2(t) = (1 + i)\frac{e^t - 1}{e - 1}\,, \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

**定义 3.2 (围道积分)**

$f(z)$ 是复变函数，其沿曲线 $\gamma$ 的积分定义为

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,, \tag{3.2}$$

又称作 $f(z)$ 的围道积分。注意这里的 $f(z)$ 不需要是解析函数。♣

由于曲线参数化的任意性，我们希望围道积分的值与曲线参数化无关，但这在上述定义中并不显然。为此我们需要如下定理。

**定理 3.1 (围道积分的参数化独立性)**

复变函数围道积分的取值与参数化的具体形式无关。这个性质称作重参数不变性。♡

证明：设 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)\,, a \le t \le b$ 是 $\gamma$ 的一种参数化形式。一个新的参数化形式可通过单调递增函数 $t = g(\tau)\,, \alpha \le \tau \le \beta$ 表示，使得

$$g(\alpha) = a\,, \qquad g(\beta) = b\,.$$

这时的参数曲线写为

$$\gamma(g(\tau)) : x(g(\tau)) + iy(g(\tau))\,, \qquad \alpha \le \tau \le \beta\,.$$

利用 $\tau$ 参数化的围道积分写作

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\gamma(g(\tau)))\gamma'(g(\tau))g'(\tau)d\tau &= \int_a^b f(\gamma(g(\tau)))\gamma'(g(\tau))dg(\tau) \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

与原参数化一致，证毕。

围道积分的另一种表示形式为

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)\,. \tag{3.4}$$

注意以这种形式进行具体计算时仍需指定 $x(t)$ 和 $y(t)$，其结果与(3.2)无异。围道积分具有性质

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz\,, \tag{3.5}$$

其中 $\int_{-\gamma}$ 指的是沿曲线的反向积分，即此时的积分起点为 $\gamma(b)$，积分终点为 $\gamma(a)$。

**例题 3.2** 沿 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线计算 $\int_\gamma z^2dz$。

**例题 3.3** 沿 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线计算 $\int_\gamma \bar{z}dz$。

**例题 3.4** 沿单位圆逆时针（通常也称为正定向）计算 $\int_C z^2dz$。

**例题 3.5** 沿单位圆逆时针计算 $\int_C z^{-1}dz$。

关于围道积分我们有如下不等式

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\cdot|dz| \le ML\,, \tag{3.6}$$

其中 $M$ 是 $|f(z)|$ 在 $\gamma$ 上的极大值，$L=\int_\gamma |dz|$ 是 $\gamma$ 的长度。第二个不等式是显然的，我们只证明第一个不等式。令

$$\theta = \arg\left[\int_\gamma f(z)dz\right]. \tag{3.7}$$

则

$$\begin{aligned}
|\int_\gamma f(z)dz| &= \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)dz\right] \\
&= \int_\gamma \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}f(z)dz\right] \\
&\le \int_\gamma |f(z)dz| \\
&= \int_\gamma |f(z)|\cdot|dz|\,.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

证毕。

## 3.2 复线积分的基本定理

单变量微积分的基本定理将函数积分通过原函数的差表示，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\,, \tag{3.9}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，$F'(x)=f(x)$。复线积分也有类似的基本定理：

**定理 3.2 (复线积分的基本定理)**

$f(z)$ 是区域 $D$ 上的解析函数，$\gamma$ 是 $D$ 上从 $z_0$ 到 $z_1$ 的曲线，$f(z)$ 在 $D$ 上的原函数为 $F(z)$，即 $F'(z)=f(z)$，则

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1)-F(z_0)\,. \tag{3.10}$$

♡

证明：等式左边可以写为

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma F'(z)dz &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt}dt \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\
&= F(z_1) - F(z_0)\,. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

证毕。有了这个定理，我们之前的一些例子可以用这个定理直接得到答案。

**定理 3.3 (解析函数积分的路径独立性)**

如果解析函数在区域 $D$ 内解析且有原函数，则复线积分

$$\int_\gamma f(z)dz$$

的取值只依赖于 $\gamma$ 的端点，而与 $\gamma$ 的具体形状无关。♡

这个定理是显然的。进一步我们有如下定理：

**定理 3.4 (路径独立和闭围道积分退化的等价性)**

如下两个命题等价：

1. 复线积分 $\int_\gamma f(z)dz$ 是路径独立的。
2. 对于任何封闭围道 $C$，$\int_C f(z)dz = 0$。

♡

**例题 3.6** 计算下述积分，其中积分路径沿单位圆周正向（逆时针）。

$$\text{a)}\ \int_{|z|=1}\frac{1}{z^n}dz\,,\quad n\in\mathbb{Z}\,,\qquad \text{b)}\ \int_{|z|=1}\ln z dz\,,$$

其中第二个积分定义在主值分支内。

下述定理是本节的主要定理。

**定理 3.5 (柯西定理)**

如果 $f(z)$ 是单连通区域 $D$ 上的解析函数，$C$ 是 $D$ 上的任意封闭围道，则有

$$\int_C f(z)dz = 0\,. \qquad (3.12)$$

♡

关于这个定理的证明有不同的方法。第一种方法利用平面积分的格林定理，需要假定 $f(z)$ 的一阶导数连续。更绝妙的方法是 Goursat 的证明，其中不需要假定导数连续，而且 $D$ 可以是闭区域。我们先看利用格林定理的证明。为此我们先回忆格林定理：

**定理 3.6 (格林定理)**

$C$ 是平面上的正定向封闭曲线，$D$ 是 $C$ 所包围的区域，$L(x,y)$ 和 $M(x,y)$ 在包含 $C$ 及其内部的某个区域上的偏导数存在且连续，则

$$\int_C (Ldx + Mdy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

♡

关于格林定理有一个物理的理解。把积分左侧写成

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{s}\,, \tag{3.13}$$

其中 $\vec{v}(x,y) = (L(x,y), M(x,y))$ 是一个流速场，$d\vec{s} = (dx, dy)$ 是流线微元。因此这个积分的物理意义可以看成是某种宏观速度场的闭曲线积分。如果想象宏观速度场是由无穷多小的涡旋构成，则这个线积分也能写成这些小的涡旋的面积分，或者更准确说是速度场的旋度的面积分，

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_D (\text{curl}\vec{v})\, dxdy\,, \tag{3.14}$$

其中

$$\text{curl}\vec{v} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ L & M \end{vmatrix} = M_x - L_y\,. \tag{3.15}$$

有了格林定理后，柯西定理的证明顺理成章。

证明（柯西定理）：令 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$z = x+iy$，则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) \\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx) \\ &\overset{\text{格林定理}}{=} \iint (-u_y - v_x)dxdy + i\iint (u_x - v_y)dxdy \\ &\overset{\text{柯西-黎曼方程}}{=} 0\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中二重积分的区域是 $C$ 的内部。定理得证。

下面我们给出 Goursat 对柯西定理的绝妙证明。这个证明的强大之处在于无须用到函数导数的连续性条件[1]。因此这个定理人们也称作 Cauchy-Goursat 定理。事实上，Goursat 证明的并非一般的封闭围道，而是一个矩形围道。我们下面的证明针对的也是矩形围道。当然，有了矩形围道和三角形围道后可以构造出任意围道。

证明（柯西-Goursat 定理）：我们考虑由如下不等式定义的矩形闭区域 $R$

$$a \le x \le b\,, \qquad c \le y \le d\,.$$

矩形的边界线记为 $\partial R$。我们的积分围道即沿着 $\partial R$ 正向绕行。我们要证明的柯西-Goursat 定理是对于 $R$ 上的解析函数 $f(z)$，有

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0\,.$$

我们定义

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z)dz\,. \tag{3.17}$$

将 $R$ 等分为四个更小的矩形，记为 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$。此时原积分可以写为

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)})\,. \tag{3.18}$$

由三角不等式有

$$|\eta(R)| \le |\eta(R^{(1)})| + |\eta(R^{(2)})| + |\eta(R^{(3)})| + |\eta(R^{(4)})| \le 4|\eta(R^{(k)})|\,, \tag{3.19}$$

[1]事实上，柯西一直想给出一个不用到导数连续性的证明，但直到柯西去世时这个证明也还没找到。这个证明直到 Goursat 出现才找到。巧合的是，Goursat 出生在柯西去世后的一年。

其中 $\eta(R^{(k)})$ 是四个小矩形的绝对值中最大的一个。我们得到不等式

$$|\eta(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4}|\eta(R)|\,. \tag{3.20}$$

我们选取 $R^{(k)}$ 继续这个四等分过程，并再从中选取一个绝对值最大的矩形，然后再把四等分过程无限进行下去。这个过程给出一个不断缩小的矩形序列：$R \supset R_1 \supset R_2 \supset R_3 \cdots \supset R_n \supset \cdots$。这个序列满足

$$\eta(R_n) \geq \frac{1}{4}\eta(R_{n-1})\,,$$

或

$$\eta(R_n) \geq \frac{1}{4^n}\eta(R)\,. \tag{3.21}$$

这个无穷矩形序列收敛于一个点 $z_0$，

$$\{z_0\} = \cap_{n=1}^{\infty} R_n\,.$$

$f(z)$ 在 $z_0$ 可导给出条件

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)\,. \tag{3.22}$$

我们回忆这个极限的定义是对于任意 $\epsilon > 0$，总是存在 $\delta > 0$，使得当 $|z-z_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon\,, \tag{3.23}$$

或者写成

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| < \epsilon|z-z_0|\,. \tag{3.24}$$

对于沿序列中第 $n$ 个矩形 $R_n$ 边界线的积分有

$$\int_{\partial R_n} dz = 0\,, \qquad \int_{\partial R_n} z dz = 0\,. \tag{3.25}$$

这两个等式可以通过直接线积分或从原函数得到。利用这两个结果我们有

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} \Big[(f(z)-f(z_0)) - f'(z_0)(z-z_0)\Big]dz\,. \tag{3.26}$$

利用(3.24)中的不等式我们得到对于任意小的 $\epsilon$，我们总能找到 $n$ 使得

$$\eta(R_n) < \epsilon \int_{\partial R_n} |z-z_0|\cdot|dz| \leq \epsilon d_n L_n\,, \tag{3.27}$$

其中 $d_n$ 是 $R_n$ 的对角线长度，$L_n$ 是 $\partial R_n$ 的长度，满足

$$d_n = \frac{1}{2^n}d\,, \qquad L_n = \frac{1}{2^n}L\,, \tag{3.28}$$

其中 $d$ 是 $R$ 的对角线长度，$L$ 是 $\partial R$ 的长度。综上我们有不等式

$$\eta(R_n) < \epsilon\frac{1}{4^n}dL\,. \tag{3.29}$$

与(3.21)结合我们得到

$$\epsilon\frac{1}{4^n}dL > \frac{1}{4^n}\eta(R)\,. \tag{3.30}$$

或

$$\epsilon dL > \eta(R)\,. \tag{3.31}$$

由于 $\epsilon$ 可以任意小，而 $d$ 和 $R$ 有限，因此必有

$$\eta(R) = 0\,. \tag{3.32}$$

得证。

**问题 3.1** 思考如何从矩形和三角形的柯西定理得到任意封闭曲线的柯西定理。

事实上，单连通区域中的柯西定理可以表述为下述等价命题：

**定理 3.7 (单连通区域中的柯西定理)**

设 $D$ 是单连通区域，$f(z)$ 在 $D$ 上解析，$C$ 是 $D$ 上任意封闭曲线，则下述命题等价：

1. $\int_C f(z)dz = 0$。
2. $f(z)$ 在 $D$ 上的任意复线积分都是路径独立的。
3. $f(z)$ 在 $D$ 上有原函数。

关于这三个命题的等价性证明此处从略。

**定理 3.8 (复连通区域上的柯西定理)**

设 $D$ 是复连通区域，其边界为 $\partial D = C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_n$。$f(z)$ 在 $D$ 上解析。则

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)dz = 0\,, \tag{3.33}$$

其中积分路径沿这 $C_k$ 的正定向。

**注** 沿着某个围道积分的过程中，如果解析区域总是在前进方向的左手边，则称为正定向。

柯西得到柯西定理的一个重要动机是用其来求积分。我们看一些例子。一些常见的积分围道。

**例题 3.7** 证明：

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx\,. \tag{3.34}$$

**例题 3.8** 证明

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{3.35}$$

**定理 3.9 (复连通区域上的柯西定理)**

设 $D$ 是 $\mathbb{C}$ 上的复连通区域，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 $D$ 上的闭曲线，$R$ 是 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 所包围的区域，$f(z)$ 在 $R$ 上解析，定义沿围道 $C_k$ 前进时 $R$ 在 $C_k$ 的左侧为正定向，则下述正定向积分为零，

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)\,dz = 0\,. \tag{3.36}$$

## 3.3 柯西积分公式

柯西积分公式是解析函数理论的核心内容。如果学完这门课有什么一定要记住的话，柯西积分公式必居其中。