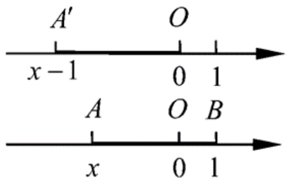
(2017·青岛·23) 数和形是数学的两个主要研究对象, 我们经常运用数形结合、数形转化的方法解决一些数学问题. 下面我们来探究“由数思形, 以形助数”的方法在解决代数问题中的应用.

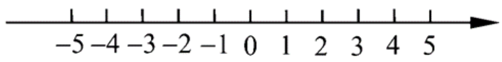
探究一：求不等式 $|x-1|<2$ 的解集

(1) 探究 $|x-1|$ 的几何意义

如图①, 在以 O 为原点的数轴上, 设点 A' 对应的数是 $x-1$, 由绝对值的定义可知, 点 A' 与点 O 的距离为 $|x-1|$, 可记为 $A'O=|x-1|$. 将线段 $A'O$ 向右平移 1 个单位得到线段 AB , 此时点 A 对应的数是 x , 点 B 对应的数是 1. 因为 $AB=A'O$, 所以 $AB=|x-1|$. 因此,$|x-1|$ 的几何意义可以理解为数轴上 x 所对应的点 A 与 1 所对应的点 B 之间的距离 AB .



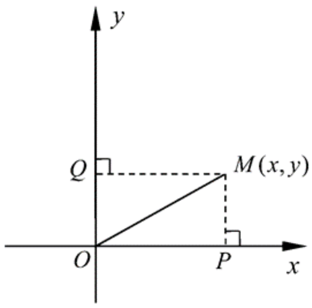
图①



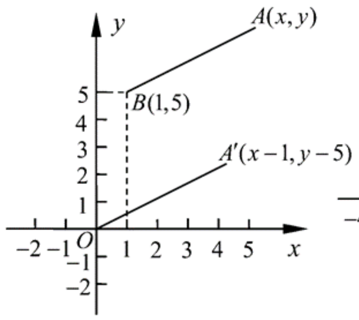
图②

(2) 求方程 $|x-1|=2$ 的解因为数轴上 3 和-1 所对应的点与 1 所对应的点之间的距离都为 2 , 所以方程的解为 3,-1.

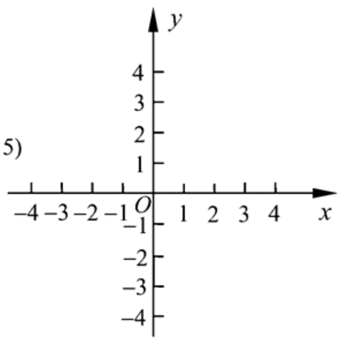
(3) 求不等式 $|x-1|<2$ 的解集因为 $|x-1|$ 表示数轴上 x 所对应的点与 1 所对应的点之间的距离, 所以求不等式解集就转化为求这个距离小于 2 的点对应的数 x 的范围. 请在图②的数轴上表示 $|x-1|<2$ 的解集, 并写出这个解集________.



图③



图④



图⑤

探究二：探究 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 的几何意义

(1) 探究 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的几何意义

如图③, 在直角坐标系中, 设点 M 的坐标为 (x,y), 过 M 作 $MP\perp x$ 轴于 P , 作 $MQ\perp y$ 轴于 Q , 则 P 点坐标为 $(x,0)$,Q 点坐标为 $(0,y)$,$OP=|x|$,$OQ=|y|$, 在 $Rt\triangle OPM$ 中, $PM=OQ=|y|$, 则 $MO=\sqrt{OP^2+PM^2}=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}$. 因此, $\sqrt{x^2+y^2}$ 的几何意义可以理解为点 $M(x,y)$ 与点 $O(0,0)$ 之间的距离 MO .

(2) 探究 $\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$ 的几何意义

如图④, 在直角坐标系中, 设点 A' 的坐标为 $(x-1,y-5)$, 由探究二 (1) 可知, $A'O=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$.将线段 $A'O$ 先向右平移 1 个单位, 再向上平移 5 个单位, 得到线段 AB , 此时点 A 的坐标为 (x,y), 点 B 的坐标为 $(1,5)$.因为 $AB=A'O$, 所以 $AB=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$. 因此, $\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$ 的几何意义可以理解为点 $A(x,y)$ 与点 $B(1,5)$ 之间的距离 AB .

(3) 探究 $\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$ 的几何意义

请仿照探究二 (2) 的方法, 在图⑤中画出图形, 并写出探究过程.

(4) $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 的几何意义可以理解为：____________________.

拓展应用：

(1) $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+5)^2}$ 的几何意义可以理解为：点 $A(x,y)$ 与点 $E(2,-1)$ 的距离和点 $A(x,y)$ 与点 F________(填写坐标) 的距离之和.

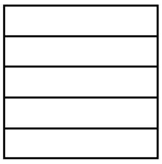
(2) $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+5)^2}$ 的最小值为________. (直接写出结果)

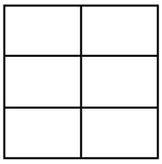
(2016·青岛·23)

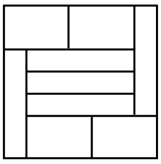
问题提出：如何将边长为 $n(n\geq 5$, 且 n 为整数) 的正方形分割为一些 1×5 或 2×3 的矩形 ($a\times b$ 的矩形指边长分别为 a,b 的矩形)?

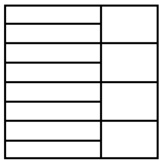
问题探究：我们先从简单的问题开始研究解决, 再把复杂问题转化为已解决的问题.

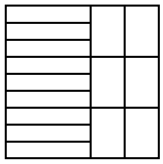
探究一： 如图①, 当 $n=5$ 时, 可将正方形分割为五个 1×5 的矩形. 如图②, 当 $n=6$ 时, 可将正方形分割为六个 2×3 的矩形. 如图③, 当 $n=7$ 时, 可将正方形分割为五个 1×5 的矩形和四个 2×3 的矩形. 如图④, 当 $n=8$ 时, 可将正方形分割为八个 1×5 的矩形和四个 2×3 的矩形. 如图⑤, 当 $n=9$ 时, 可将正方形分割为九个 1×5 的矩形和六个 2×3 的矩形.


图①


图②

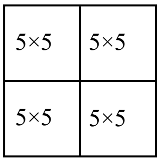

图③


图④

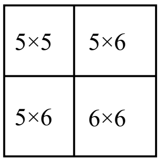

图⑤

探究二：

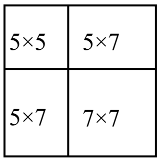
当 $n=10,11,12,13,14$ 时, 分别将正方形按下列方式分割:



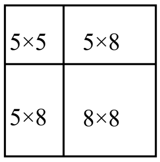
$n=10$
$=5+5$



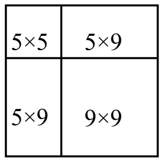
$n=11$
$=5+6$



$n=12$
$=5+7$



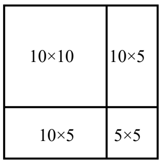
$n=13$
$=5+8$



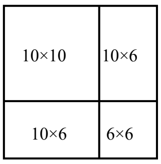
$n=14$
$=5+9$

所以, 当 $n=10,11,12,13,14$ 时, 均可将正方形分割为一个 5×5 的正方形、一个 $(n-5)\times(n-5)$ 的正方形和两个 $5\times(n-5)$ 的矩形. 显然, 5×5 的正方形和 $5\times(n-5)$ 的矩形均可分割为 1×5 的矩形, 而 $(n-5)\times(n-5)$ 的正方形是边长分别为 5,6,7,8,9 的正方形, 用探究一的方法可分割为一些 1×5 或 2×3 的矩形.

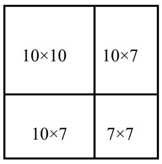
探究三： 当 $n=15,16,17,18,19$ 时, 分别将正方形按下列方式分割:



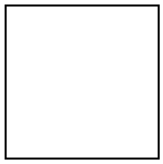
$n=15$
$=5\times2+5$

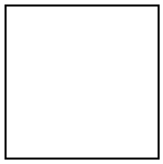


$n=16$
$=5\times2+6$



$n=17$
$=5\times2+7$


$n=18$


$n=19$

请按照上面的方法, 分别画出边长为 18,19 的正方形分割示意图.

所以, 当 $n = 15, 16, 17, 18, 19$ 时, 均可将正方形分割为一个 10×10 的正方形、一个 $(n-10)\times(n-10)$ 的正方形和两个 $10\times(n-10)$ 的矩形. 显然,10×10 的正方形和 $10\times(n-10)$ 的矩形均可分割为 1×5 的矩形, 而 $(n-10)\times(n-10)$ 的正方形又是边长分别为 5,6,7,8,9 的正方形, 用探究一的方法可分割为一些 1×5 或 2×3 的矩形.

问题解决: 如何将边长为 $n(n \geq 5$, 且 n 为整数) 的正方形分割为一些 1×5 或 2×3 的矩形? 请按照上面的方法画出分割示意图, 并加以说明.

实际应用: 如何将边长为 61 的正方形分割为一些 1×5 或 2×3 的矩形? (只需按照探究三的方法画出分割示意图即可)

(2015·青岛·23)

问题提出: 用 n 根相同的木棒搭一个三角形 (木棒无剩余), 能搭成多少种不同的等腰三角形?

问题探究: 不妨假设能搭成 m 种不同的等腰三角形, 为探究 m 与 n 之间的关系, 我们可以先从特殊入手, 通过试验、观察、类比、最后归纳、猜测得出结论.

探究一:

(1) 用 3 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

此时, 显然能搭成一种等腰三角形.

所以, 当 $n = 3$ 时,$m = 1$.

(2) 用 4 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

只可分成 1 根木棒、1 根木棒和 2 根木棒这一种情况, 不能搭成三角形.

所以, 当 $n = 4$ 时,$m = 0$.

(3) 用 5 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

若分成 1 根木棒、1 根木棒和 3 根木棒, 则不能搭成三角形.

若分成 2 根木棒、2 根木棒和 1 根木棒, 则能搭成一种等腰三角形.

所以, 当 $n = 5$ 时,$m = 1$.

(4) 用 6 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形?

若分成 1 根木棒、1 根木棒和 4 根木棒, 则不能搭成三角形.

若分成 2 根木棒、2 根木棒和 2 根木棒, 则能搭成一种等腰三角形.

所以, 当 $n = 6$ 时,$m = 1$.

综上所述, 可得表①:

n	3	4	5	6
m	1	0	1	1

探究二:

(1) 用 7 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的三角形? (仿照上述探究方法, 写出解答过程, 并将结果填在表②中)

(2) 用 8 根、9 根、10 根相同的木棒搭一个三角形, 能搭成多少种不同的等腰三角形? (只需把结果填在表②中)

表②:

n	7	8	9	10
m				

你不妨分别用 11 根、12 根、13 根、14 根相同的木棒继续进行探究⋯

问题解决：用 n 根相同的木棒搭一个三角形 (木棒无剩余), 能搭成多少种不同的等腰三角形？(设 n 分别等于 $4k-1$,$4k$,$4k+1$,$4k+2$, 其中 k 是正整数, 把结果填在表③中)

表③：

n	$4k-1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$
m				

问题应用：用 2016 根相同的木棒搭一个三角形 (木棒无剩余), 能搭成多少种不同的等腰三角形？(写出解答过程), 其中面积最大的等腰三角形每腰用了________根木棒. (只填结果)

(2014·青岛·23)

数学问题：计算 $\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\cdots+\frac{1}{m^n}$(其中 m,n 都是正整数, 且 $m\geq 2,n\geq 1$).

探究问题：为解决上面的数学问题, 我们运用数形结合的思想方法, 通过不断地分割一个面积为 1 的正方形, 把数量关系和几何图形巧妙地结合起来, 并采取一般问题特殊化的策略来进行探究.

探究一：计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$.

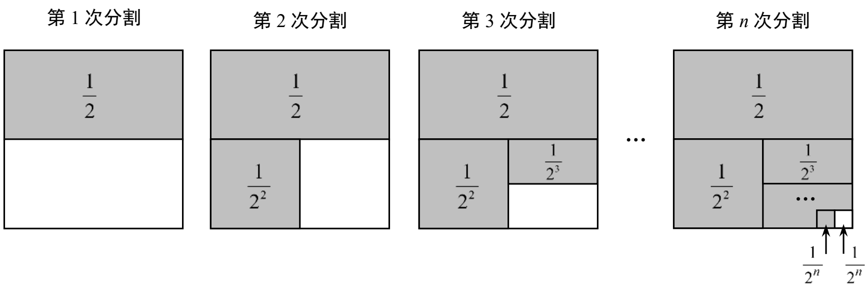
第 1 次分割, 把正方形的面积二等分, 其中阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}$;

第 2 次分割, 把上次分割图中空白部分的面积继续二等分, 阴影部分的面积之和为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$;

第 3 次分割, 把上次分割图中空白部分的面积继续二等分,……;

……

第 n 次分割, 把上次分割图中空白部分的面积最后二等分, 所有阴影部分的面积之和为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$, 最后空白部分的面积是 $\frac{1}{2^n}$.



根据第 n 次分割图可得等式：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$.

探究二：计算 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$.

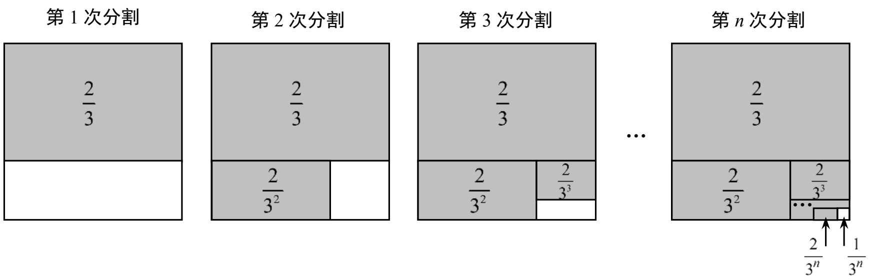
第 1 次分割, 把正方形的面积三等分, 其中阴影部分的面积为 $\frac{2}{3}$;

第 2 次分割, 把上次分割图中空白部分的面积继续三等分, 阴影部分的面积之和为 $\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}$;

第 3 次分割, 把上次分割图中空白部分的面积继续三等分,……;

……

第 n 次分割, 把上次分割图中空白部分的面积最后三等分, 所有阴影部分的面积之和为 $\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}$, 最后空白部分的面积是 $\frac{1}{3^n}$.



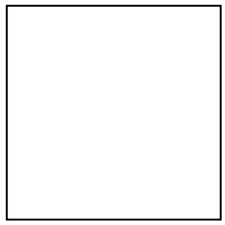
根据第 n 次分割图可得等式：$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}=1-\frac{1}{3^n}$，

两边同除以 2, 得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times3^n}$.

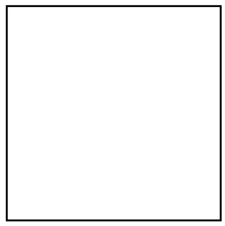
探究三：计算 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$.

(仿照上述方法, 只画出第 n 次分割图, 在图上标注阴影部分面积, 并写出探究过程)

第 n 次分割



第 n 次分割



解决问题：计算 $\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\cdots+\frac{1}{m^n}$.

(只需画出第 n 次分割图, 在图上标注阴影部分面积, 并完成以下填空)

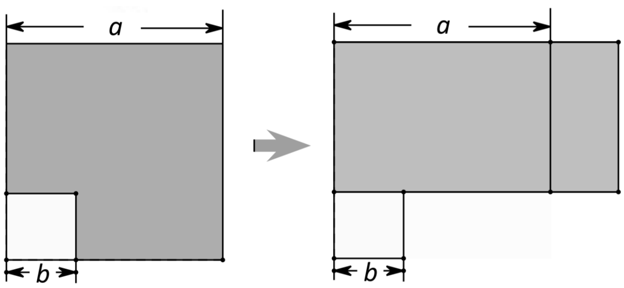
根据第 n 次分割图可得等式：____________________,

所以,$\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\cdots+\frac{1}{m^n}=$____________________.

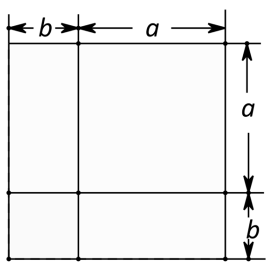
拓广应用：计算 $\frac{5-1}{5}+\frac{5^2-1}{5^2}+\frac{5^3-1}{5^3}+\cdots+\frac{5^n-1}{5^n}$.

(2013·青岛·23) 在前面的学习中, 我们通过对同一面积的不同表达和比较, 根据图①和图②发现并验证了平方差公式和完全平方公式

这种利用面积关系解决问题的方法, 使抽象的数量关系因集合直观而形象化。

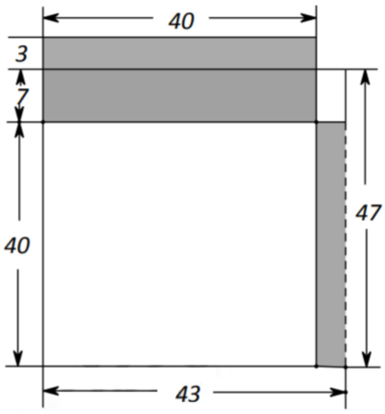


第 23 题图①



第 23 题图②

【研究速算】



提出问题：47×43,56×54,79×71 是一些十位数字相同，且个位数字之和是 10 的两个两位数相乘的算式，是否可以找到一种速算方法？

几何建模：用矩形的面积表示两个正数的乘积，以 47×43 为例：

(1) 画长为 47，宽为 43 的矩形，如图③，将这个 47×43 的矩形从右边切下长 40，宽 3 的一条，拼接到原矩形的上面。

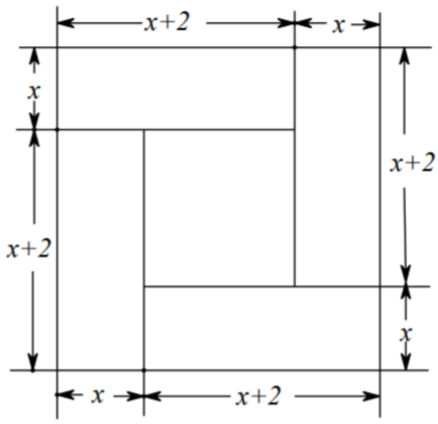
(2) 分析：原矩形面积可以有两种不同的表达方式,47×43 的矩形面积或 (40+7+3)×40 的矩形与右上角 3×7 的矩形面积之和，即 47×43=(40+10)×40+3×7=5×4×100+3×7=2021

用文字表述 47×43 的速算方法是：十位数字 4 加 1 的和与 4 相乘，再乘以 100，加上个位数字 3 与 7 的积，构成运算结果

归纳提炼：

两个十位数字相同，并且个位数字之和是 10 的两位数相乘的速算方法是 (用文字表述)

【研究方程】



第 23 题图④

提出问题：怎么图解一元二次方程 $x^2+2x-35=0(x>0)$?

几何建模：

(1) 变形：$x(x+2)=35$

(2) 画四个长为 $x+2$，宽为 x 的矩形，构造图④

(3) 分析：图中的大正方形面积可以有两种不同的表达方式,$(x+x+2)^2$ 或四个长 $x+2$，宽 x 的矩形之和，加上中间边长为 2 的小正方形面积

即：$(x+x+2)^2=4x(x+2)+2^2$

$\because x(x+2)=35$

$\therefore (x+x+2)^2=4\times 35+2^2$

$\therefore (2x+2)^2=144$

$\because x>0$

$\therefore x=5$

归纳提炼：求关于 x 的一元二次方程 $x(x+b)=c(x>0,b>0,c>0)$ 的解

要求参照上述研究方法，画出示意图，并写出几何建模步骤 (用钢笔或圆珠笔画图，并标注相关线段的长)

【研究不等关系】

提出问题: 怎么运用矩形面积表示 $(y+2)(y+3)$ $2y+5$ 的大小关系 (其中 $y>0$)?

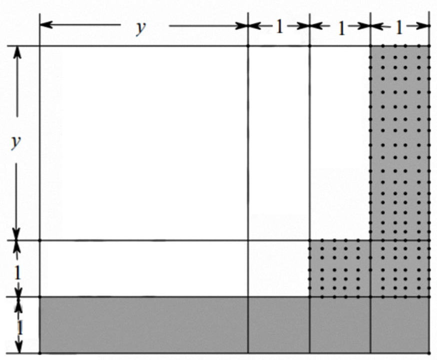
几何建模:

(1) 画长 $y+3$, 宽 $y+2$ 的矩形, 按图⑤方式分割

(2) 变形: $2y+5=(y+2)+(y+3)$

(3) 分析: 图⑤中大矩形的面积可以表示为 $(y+2)(y+3)$; 阴影部分面积可以表示为 $(y+3)\times 1$,

画点部分的面积可表示为 $y+2$, 由图形的部分与整体的关系可知: $(y+2)(y+3)>(y+2)+(y+3)$, 即 $(y+2)(y+3)>2y+5$



第 23 题图⑤

归纳提炼:

当 $a>2,b>2$ 时, 表示 ab 与 $a+b$ 的大小关系

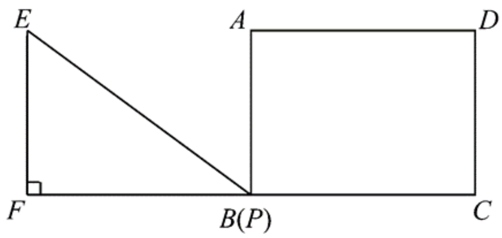
根据题意, 设 $a=2+m,b=2+n(m>0,n>0)$, 要求参照上述研究方法, 画出示意图, 并写出几何建模步骤 (用钢笔或圆珠笔画图, 并标注相关线段的长)

(2017·青岛·24) 已知: Rt$\triangle EFP$ 和矩形 $ABCD$ 如图①摆放 (点 P 与点 B 重合), 点 $F, B(P), C$ 在同一直线上,$AB = EF = 6$ cm,$BC = FP = 8$ cm,$\angle EFP = 90^\circ$. 如图②,$\triangle EFP$ 从图①的位置出发, 沿 BC 方向匀速运动, 速度为 1 cm/s,EP 与 AB 交于点 G; 同时, 点 Q 从点 C 出发, 沿 CD 方向匀速运动, 速度为 1 cm/s. 过点 Q 作 $QM \perp BD$, 垂足为 H, 交 AD 于点 M, 连接 AF, PQ. 当点 Q 停止运动时,$\triangle EFP$ 也停止运动. 设运动时间为 t(s)$(0 < t < 6)$, 解答下列问题:

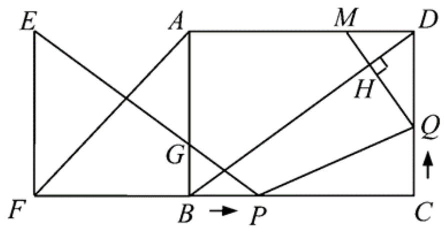
(1) 当 t 为何值时,$PQ // BD$?

(2) 设五边形 $AFPQM$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$, 求 y 与 t 之间的函数关系式; (3) 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t, 使 S 五边形 $AFPQM : S_{\text{矩形}ABCD} = 9 : 8$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;

(4) 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t, 使点 M 在线段 PG 的垂直平分线上? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



图①



图②

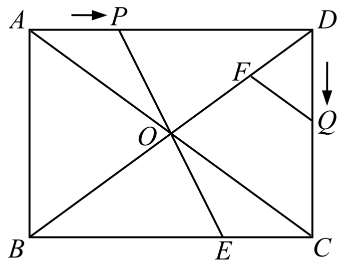
(2016·青岛·24) 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中,$AB=6$cm,$BC=8$cm，对角线 AC,BD 交于点 O．点 P 从点 A 出发，沿 AD 方向匀速运动，速度为 1cm/s；同时，点 Q 从点 D 出发，沿 DC 方向匀速运动，速度为 1cm/s；当一个点停止运动时，另一个点也停止运动．连接 PO 并延长，交 BC 于点 E，过点 Q 作 $QF//AC$，交 BD 于点 F．设运动时间为 t(s)(0<t<6)，解答下列问题：

(1) 当 t 为何值时,$\triangle AOP$ 是等腰三角形?

(2) 设五边形 $OECQF$ 的面积为 $S(\text{cm}^2)$，试确定 S 与 t 的函数关系式；

(3) 在运动过程中，是否存在某一时刻 t，使 $S_{五边形OECQF}:S_{\triangle ACD}=9:16$？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由；

(4) 在运动过程中，是否存在某一时刻 t，使 OD 平分 $\angle COP$？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.



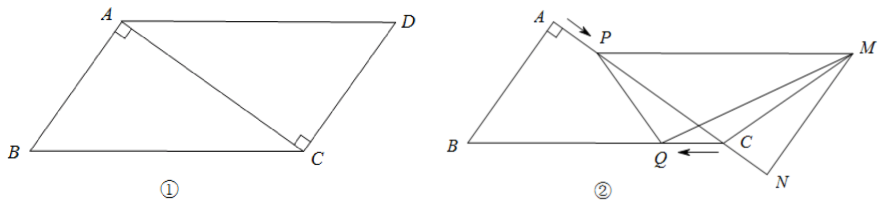
(2015·青岛·24) 已知, 如图①, 在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=3$cm,$BC=5$cm,$AC\perp AB$,$\triangle ACD$ 沿 AC 的方向匀速平移得到 $\triangle PNM$, 速度为 1cm/s; 同时, 点 Q 从点 C 出发, 沿 CB 方向匀速移动, 速度为 1cm/s, 当 $\triangle PNM$ 停止平移时, 点 Q 也停止移动, 如图②, 设移动时间为 t(s)(0<t<4), 连接 PQ,MQ,MC, 解答下列问题:

(1) 当 t 为何值时,$PQ//MN$?

(2) 设 $\triangle QMC$ 的面积为 y(cm^2), 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(3) 是否存在某一时刻 t, 使 $S_{\triangle QMC}:S_{四边形ABQP}=1:4$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

(4) 是否存在某一时刻 t, 使 $PQ\perp MQ$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由



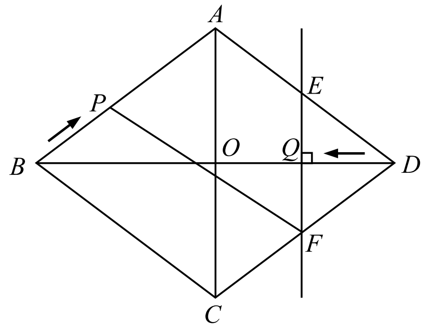
① ②

(2014·青岛·24) 已知: 如图, 菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O, 且 $AC = 12\text{cm}, BD = 16\text{cm}$. 点 P 从点 B 出发, 沿 BA 方向匀速运动, 速度为 1cm/s; 同时, 直线 EF 从点 D 出发, 沿 DB 方向匀速运动, 速度为 1cm/s,$EF \perp BD$, 且与 AD, BD, CD 分别交于点 E, Q, F; 当直线 EF 停止运动时, 点 P 也停止运动. 连接 PF, 设运动时间为 t(s)(0<t<8). 解答下列问题:

(1) 当 t 为何值时, 四边形 $APFD$ 是平行四边形?

(2) 设四边形 $APFE$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$, 求 y 与 t 之间的函数关系式;

(3) 是否存在某一时刻 t, 使 $S_{\text{四边形}APFE} : S_{\text{菱形}ABCD} = 17 : 4$? 若存在, 求出 t 的值, 并求出此时 P, E 两点间的距离; 若不存在, 请说明理由.



(2013·青岛·24) 已知, 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中,$AD=3\text{cm}$,$CD=1\text{cm}$,$\angle B=45°$, 点 P 从点 A 出发, 沿 AD 方向匀速运动, 速度为 3cm/s; 点 Q 从点 C 出发, 沿 CD 方向匀速运动, 速度为 1cm/s, 连接并延长 QP 交 BA 的延长线于点 M, 过 M 作 $MN\perp BC$, 垂足是 N, 设运动时间为 t(s)(0<t<1), 解答下列问题:

(1) 当 t 为何值时, 四边形 $AQDM$ 是平行四边形?

(2) 设四边形 $ANPM$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$, 求 y 与 t 之间的函数关系式;

(3) 是否存在某一时刻 t, 使四边形 $ANPM$ 的面积是平行四边形 $ABCD$ 面积的一半, 若存在, 求出相应的 t 值, 若不存在, 说明理由

(4) 连接 AC, 是否存在某一时刻 t, 使 NP 与 AC 的交点把线段 AC 分成 $2:1$ 的两部分? 若存在, 求出相应的 t 值, 若不存在, 说明理由