概率论

与

数理统计

——研究和揭示 随机现象统计规律性的一 门数学学科

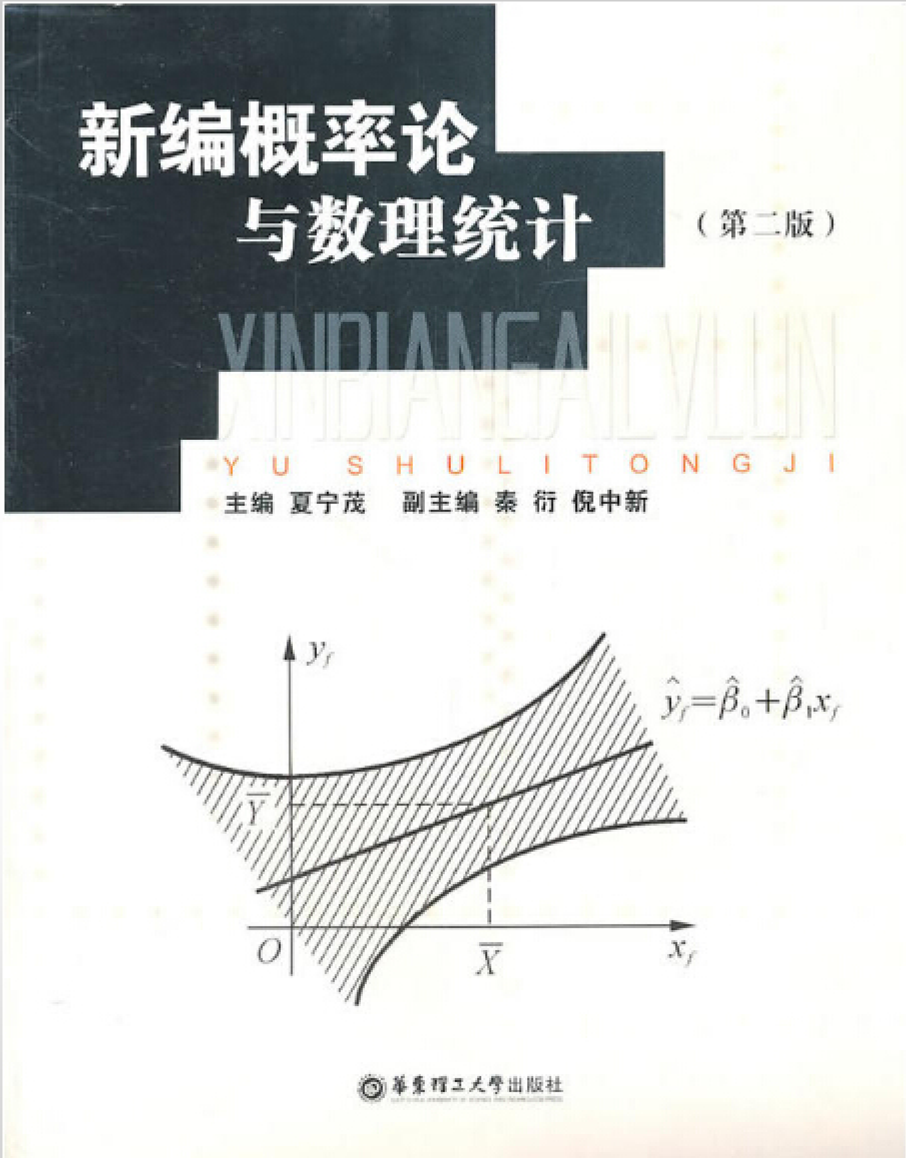
教材:

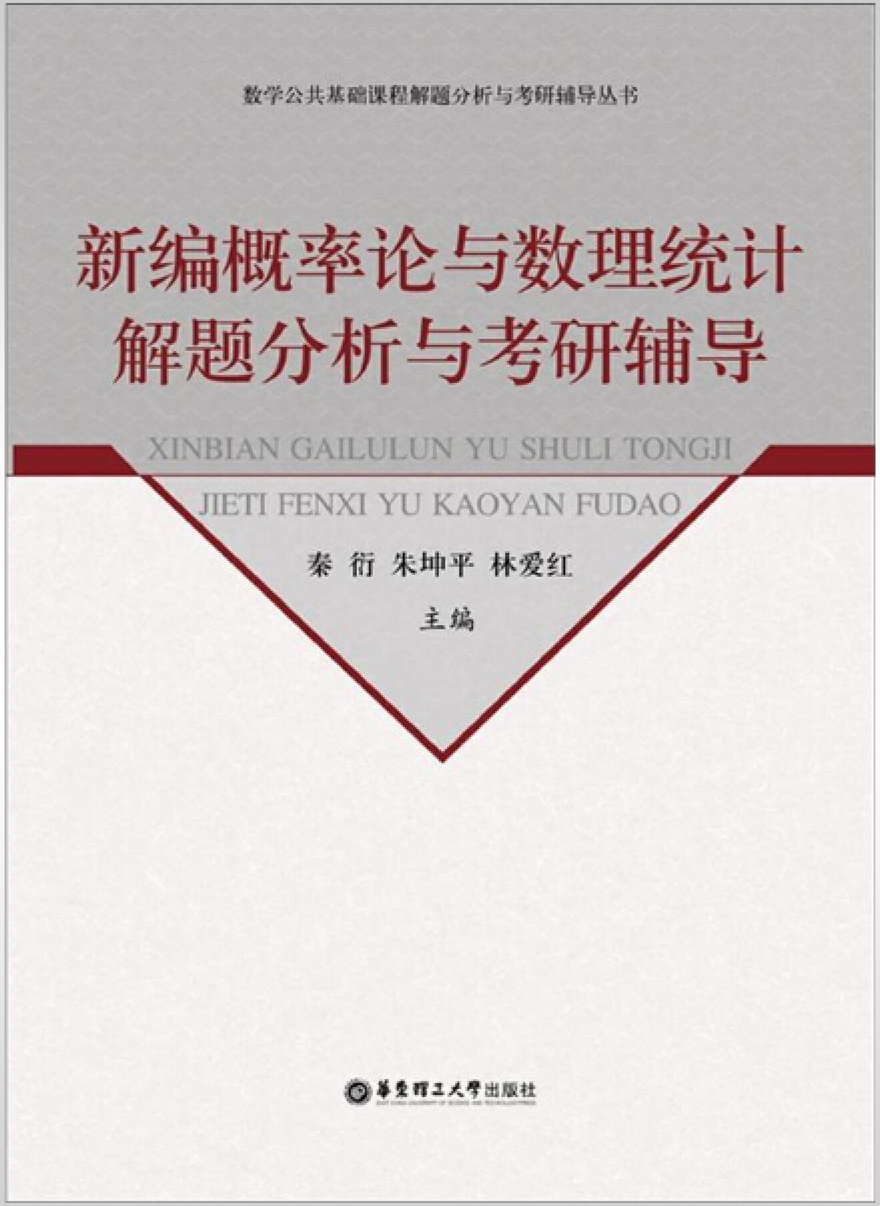
《新编概率论与数理统计》（第二版）

夏宁茂主编，华东理工大学出版社 **2011**年

参考教材:

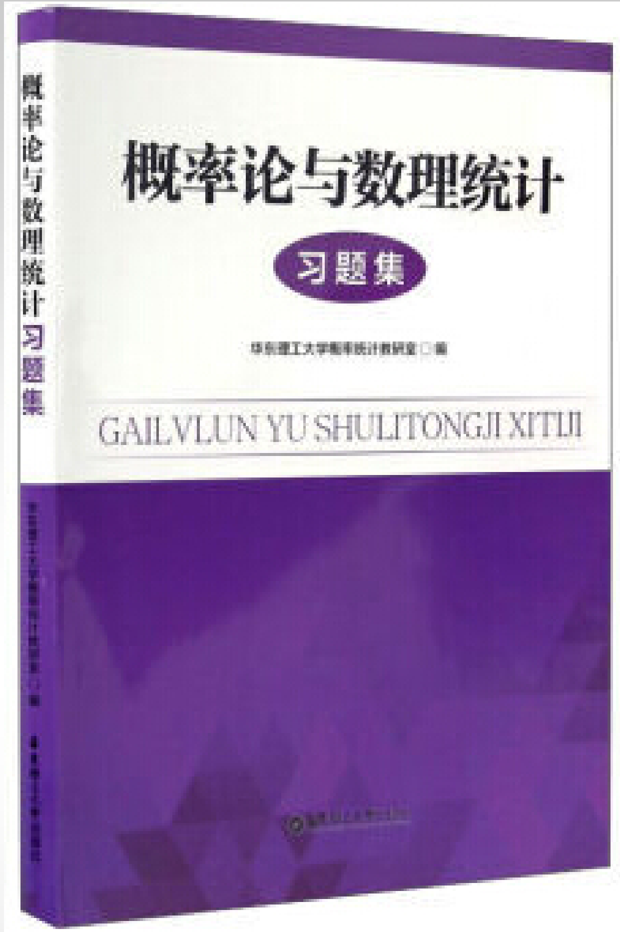
- ✓ 概率论与数理统计,上海交通大学数学系组, 上海交通大学出版社 **2011**
- ✓ 概率论与数理统计,吴赣昌主编, 中国人民大学出版社 **2011**
- ✓ 概率论与数理统计学习辅导, 夏宁茂, 秦衍主编, 华东理工大学出版社，**2005**


新编概率论
与数理统计
（第二版）
XINBIANGAILVLUN
Y U S H U L I T O N G J I
主编 夏宁茂 副主编 秦 衍 倪中新
y_f
$\hat{y}_f=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_f$
$\overline{Y}$
O
$\overline{X}$
x_f
華東理工大學出版社


数学公共基础课程解题分析与考研辅导丛书
新编概率论与数理统计
解题分析与考研辅导
XINBIAN GAILULUN YU SHULI TONGJI
JIETI FENXI YU KAOYAN FUDAO
秦 衍 朱坤平 林爱红
主编
華東理工大學出版社

考核：

平时成绩+考试成绩



课程中心：http://e-learning.ecust.edu.cn

答疑：待定

前　言

概率统计是研究**随机现象**数量规律的学科, 理论严谨, 应用广泛,发展迅速. 不仅高等学校各专业都开设了本课程, 而且在上世纪末，此课程特意被教育部定为本科生考研的数学课程之一，希望大家能认真学好这门不易学好的重要课程.

本学科的 ABC

概率(或然率 / 几率) —— **随机事件** 出现的可能性的量度—— 其起源与博弈问题有关.

16世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题；**17**世纪中叶，法国数学家**B.** 帕斯卡、荷兰数学家**C.** 惠更斯 基于排列组合的方法，研究了较复杂 的赌博问题，解决了“ 合理分配赌注问题”（即所谓“得分问题”）.

概率论是一门研究客观世界随机现象数量规律的 数学分支学科.

“得分问题”

甲、乙两人各出同样的赌注，用掷硬币作为博奕手段.每掷一次，若正面朝上，甲得 1 分乙不得分. 反之，乙得1分，甲不得分. 谁先得到规定分数就赢得全部赌注. 当进行到甲还差 2分乙还差3分，就分别达到规定分数时，发生了意外使赌局不能进行下去，问如何公平分配赌注?

对客观世界中随机现象的分析产生了概率论；使 概率论 成为 数学的一个分支的真正奠基人是瑞士数学家**J.伯努利**；而概率论的飞速发展则在**17**世纪微积分学说建立以后.

数理统计学是一门研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所考察的问题作出推断或预测，直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议的 数学分支学科.

概率论是数理统计学的基础，数理统计学是概率论的一种应用. 但是它们是两个并列的数学分支学科，并无从属关系.

本学科的应用

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中. 例如:

1. 气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与《概率论》紧密相关;

2. 产品的抽样验收，新研制的药品能否在临床中应用，均要用到《假设检验》;

3. 寻求最佳生产方案要进行《实验设计》和《数据处理》；

4. 电子系统的设计, 火箭卫星的研制及其发射都离不开《可靠性估计》；

5. 处理通信问题, 需要研究《信息论》；

6. 探讨太阳黑子的变化规律时,《时间序列分析》方法非常有用;

7. 研究化学反应的时变率，要以《马尔可夫过程》 来描述;

8. 生物学中研究 群体的增长问题时，提出了生灭型《随机模型》，传染病流行问题要用到多变量非线性《生灭过程》；

9. 许多服务系统，如电话通信、船舶装卸、机器维修、病人候诊、存货控制、水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及到 的知识就是 《排队论》.

10. 社会领域，随机优化等等……

某城市只有两种颜色的出租车：蓝和绿（市场比率15:85）。一辆出租车夜间肇事后逃逸，但还好当时有一位目击证人，这位目击者认定肇事的出租车是蓝色的。但是，他“目击的可信度”如何呢？警察经过在相同环境下对该目击者进行“蓝绿”测试而得到：80%的情况下识别正确，20%的情况不正确。试问：肇事之车是蓝色的几率应该是多少？

也许有读者立刻就得出了结论：肇事之车是蓝色的几率应该是80%吧？！

概率论与数理统计研究的是什么？

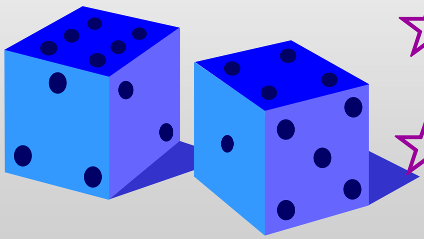
研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

主 要 内 容

- 随机事件及其概率
- **随机变量**及其分布
- 随机变量的数字特征
- 多维随机变量
- 大数定律与中心极限定理
- 数理统计的基本知识
- 参数估计
- 假设检验
- 回归分析

第一章　随机事件与概率

- ☆ 基本概念
- ☆ 事件关系和运算
- ☆ 频率和概率
- ☆ 古典概型
- ☆ 条件概率
- ☆ 全概率公式和贝叶斯公式
- ☆ 事件的独立性
- ☆ 贝努利概型和二项概率公式
- ☆ 概率论的公理化体系



1.1 随机事件及其运算

一、基本概念

现象——分为确定性现象和不确定性现象.

确定性现象.

- 电荷同性相斥，异性相吸.
- 向上抛一枚硬币硬币会落下.

随机性现象——在个别试验中，其结果可能有多种，在结果出现以前不知出现哪一个结果.

- 单位时间内落入某区域的电荷数.
- 向上抛一枚硬币，硬币落下后，可能正面朝上，可能反面朝上.
- 灯泡的寿命.

随机现象的统计规律——在相同条件下大量重复试验中， 各种结果的出现具有 一定的规律性.

多次抛一枚均匀硬币，出现正面的次数是总次数的**1/2.**
即出现正面的可能性是**1/2.** (皮而逊试验 **P7** 表格)

概率统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

♣ 随机试验

- 可在相同条件下重复进行。(可重复性)
- 每次试验的可能结果不止一个，并且事先明确试验的所有可能结果。（明确性）
- 试验前无法预知究竟哪个结果出现。（随机性）

♣ 样本空间

所有可能的结果放在一起构成的集合，记为 Ω 。

♣ 样本点

每一个可能的结果，记为 ω 。

♣ 随机事件

样本空间的一个子集，简称事件。

事件常用大写字母A、B、C等表示。

(必然事件Ω, 不可能事件Φ —— 平凡子集).

例 1.一袋中有三个白球（编号 1，2，3）与二个黑球（编号 4，5），现从中任取两个，观察两球的 1）颜色；2）号码。

解：1）令 ω_1 表示两个白球，ω_2 表示两个黑球，ω_3 表示一黑一白，

则 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

2）令 $\omega_{ij}(i<j, i, j=1,2,3,4,5)$ 表示两球的号码为 i 和 j，

则 $\Omega=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}$

注意：同一随机试验可能有不同的样本空间。即样本点和样本空间是由试验内容而确定的。

例 2.一袋中有三个白球（编号 1，2，3）与二个黑球（编号 4，5），现从中任取两个，观察两球的号码。试表示事件“两个球的号码为双数”、“两个球的号码为单数”、“两个球的号码不超过 3”。

解：令 $\omega_{ij}(i<j,i,j=1,2,3,4,5)$ 表示两球的号码为 i 和 j，

已知 $\Omega=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}$

事件 A 表示两个球的号码为双数，

则 $A=\{\omega_{24}\}$

事件 B 表示两个球的号码为单数，

则 $B=\{\omega_{13},\omega_{15},\omega_{35}\}$

事件 C 表示两个球的号码均不超过 3，

则 $C=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{23}\}$

“两个球的号码都不超过5”= Ω

“有一个球的号码是6”= $\varnothing$

事件 A 发生——该子集 A 中至少有一个样本点出现。

● 几种特殊的事件

必然事件：Ω

不可能事件：$\varnothing$

基本事件——由单个样本点构成的样本空间的子集,记作 $\{\omega\}$ 。

抛一枚硬币： $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}=\{\text{正},\text{反}\}$

样本空间含有有限个元素

单位时间内落下的粒子数：

$$\Omega_2=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}=\{0,1,2,\cdots\}$$

可列无穷多元素

灯泡寿命： $\Omega_3=[0,+\infty)$

不可列无穷多

$$A=\{\text{灯泡的寿命大于200小时}\}=(200,+\infty)\subset\Omega_3$$

我们希望试验结果和数字发生联系，以便于利用高等数学的理论来分析对待随机现象.

二、随机变量

随机机试验的结果 $\xrightarrow{\text{数量化}}$ 随机变量。

?

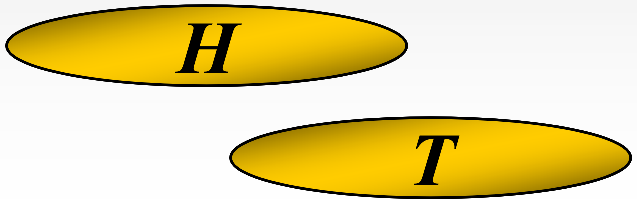
目的：全面研究随机试验，揭示客观存在的统计规律性。

1.例子

引例 1. 抛硬币，H表示正面，T表示反面，抛一次硬币，得样本空间$\Omega=\{H,T\}$

引入变量ξ，将随机试验的结果与ξ的取值 **1-1** 对应起来，

假设：$\xi=\begin{cases}1, & \omega=H\\ 0, & \omega=T\end{cases}$



$\therefore \xi=\xi(\omega)$

ξ是样本点的函数, 是因变量, 所以称

★ $\xi(\omega)$是随机变量。

$\xi(\omega)$的所有可能取值为$R_\xi=\{0,1\}$，R_ξ即为$\xi(\omega)$的值域。

由于ω为随机的，所以，$\xi(\omega)$的取值也是随机的，即$\xi(\omega)$是随机变量。

引例 2.测试灯泡的寿命。

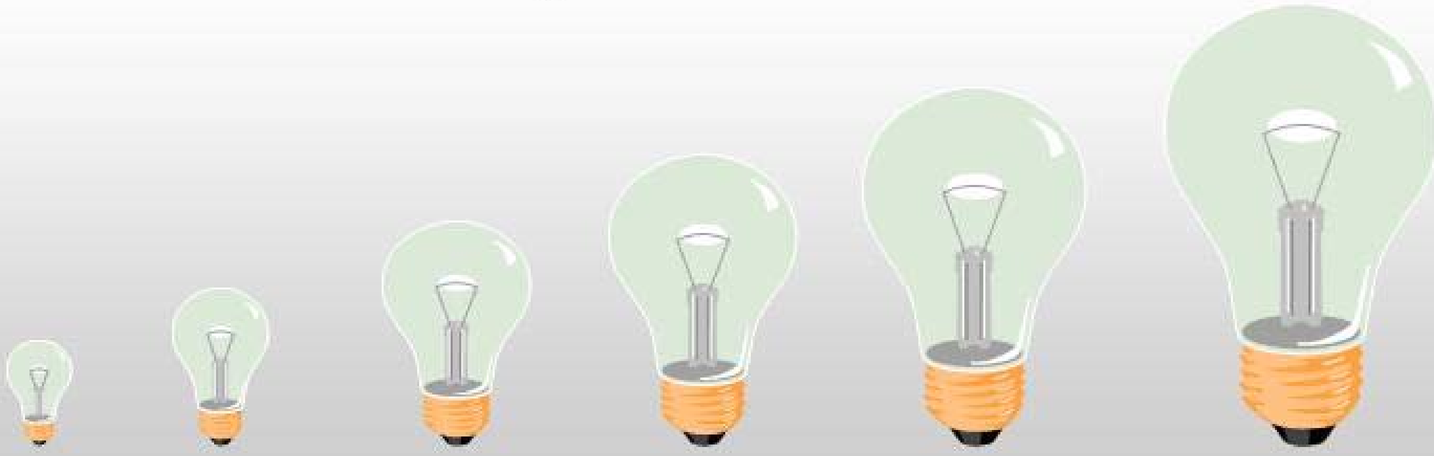
样本空间 $\Omega = \{t|t \geq 0\}$

引入变量ξ，将随机试验的结果与ξ的取值对应起来，ξ是定义在样本空间$\Omega = \{\omega\} = \{t|t \geq 0\}$上的函数，即

$$\xi = \xi(\omega) = t, \qquad \omega = t \in \Omega$$

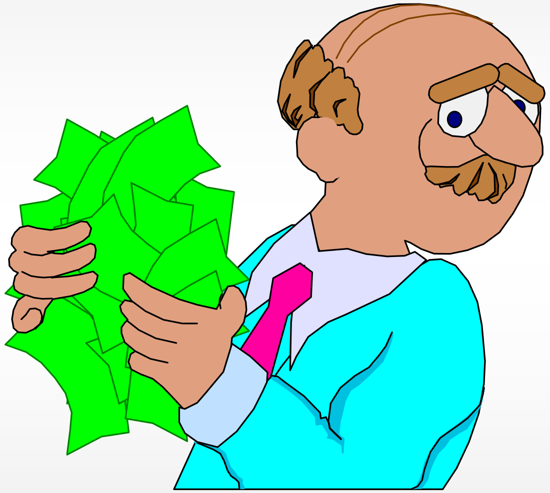
$\because \omega$ 是随机的，$\therefore \xi(\omega)$ 也是随机的，

$\xi(\omega)$的值域$R_\xi = [0, +\infty)$。



2.定义：

设随机试验的样本空间$\Omega=\{\omega\}$，若对每一个$\omega\in\Omega$，有一个实数$\xi(\omega)$与之对应，则得到一个定义在Ω上的单值实值函数$\xi=\xi(\omega)$称为**随机变量**.



引入随机变量ξ后，就可以用随机变量ξ来描述事件。

★引例 1 中，$\{\xi=1\}=\{H\}$={正面}，$\{\xi=0\}=\{T\}$={反面}

$$P\{\xi=1\}=P\{H\}=\frac{1}{2},\quad P\{T\}=\frac{1}{2}=P\{\xi=0\}$$

★一般地，对任意实数集合L,有

$$\{\xi\in L\}=\{\omega\,|\,\xi(\omega)\in L\}.$$

注：一般用希腊字母$\xi,\eta\ldots$表示随机变量，或用大写字母$X,Y\ldots$表示。

随机变量与普通函数的区别

1） 随机变量随着试验结果而取不同的值，在试验前只知道它可能取值的范围，而不能预知它取什么值。

2) 随机变量取各个值有一定的概率。

3) 普通函数定义在实数轴上（一元），而随机变量是定义在样本空间上的，样本空间的元素不一定是实数。

以上 1）和 2）是本质差异。

★随机变量的优点：

可以用数学分析（微积分）的方法来研究随机试验。

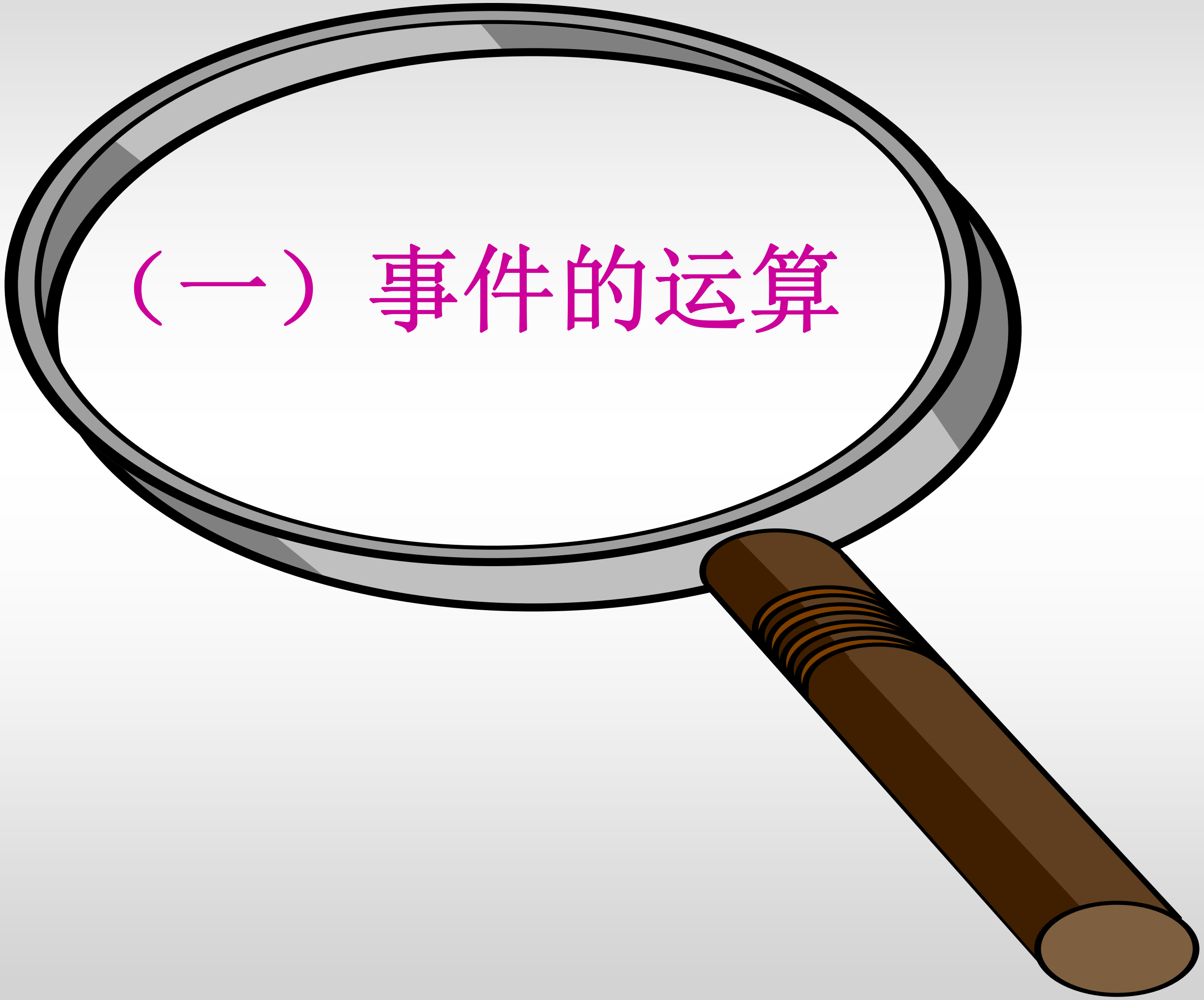
★随机变量的分类：（按随机变量可能取值范围）

1） 离散型随机变量（有限或可列个值）

2) 连续型随机变量（某一区间内）

3) 混合型随机变量 （本课程不研究）

三、事件的运算和关系



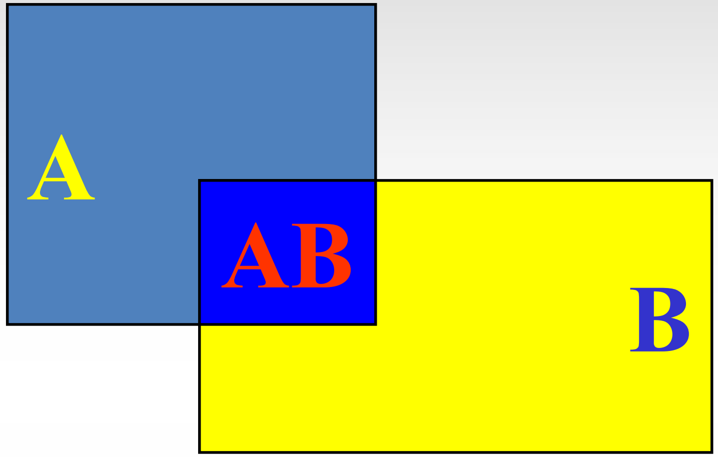
（一）事件的运算

* 三种运算——交、并、差

1.事件 A 与事件 B 的交（或积）：

事件 A 与 B 同时发生，

记为： $A\cap B$ 或 $A\,B$ 。



推广：

1)有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，

记为： $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 。

2)可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积：

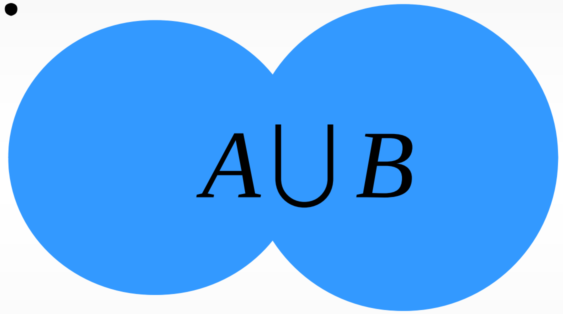
$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生，

记为：$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

2.事件 A 与事件 B 的并（或和）：

A， B 中至少有一个发生，

记作 $A \cup B$ 或 $A+B$.



推广：

1)有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，记为：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 。

2)可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ **的和：**

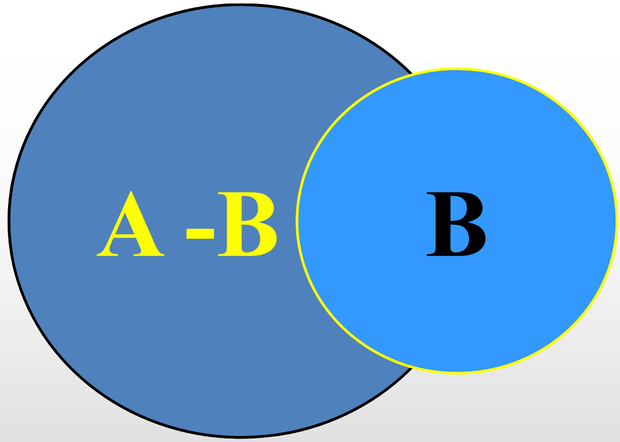
$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生，

记为：$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

★**3.事件** A **与事件** B **的差：**

***A* 发生，而 *B* 不发生.**

记为： $\boldsymbol{A-B}$.



**事件的运算性质

1.交换律: $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$

2.结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

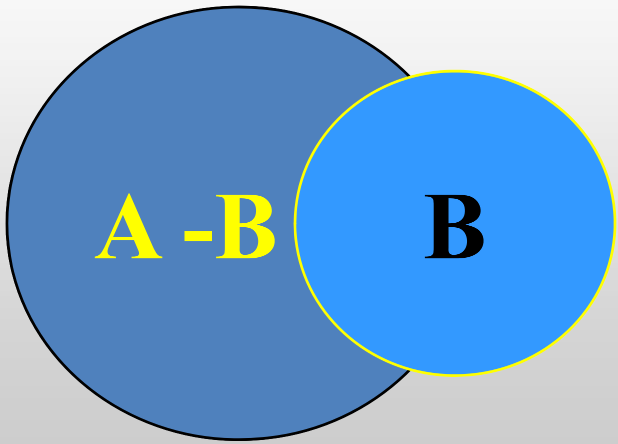
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3.分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

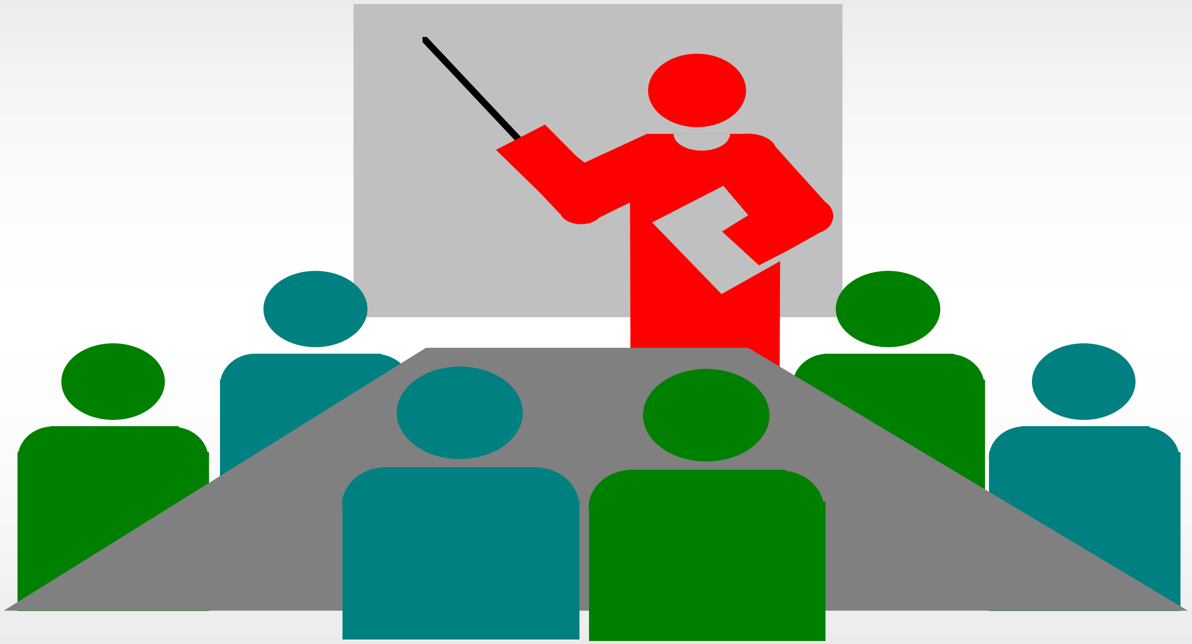
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i) \qquad A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i$$

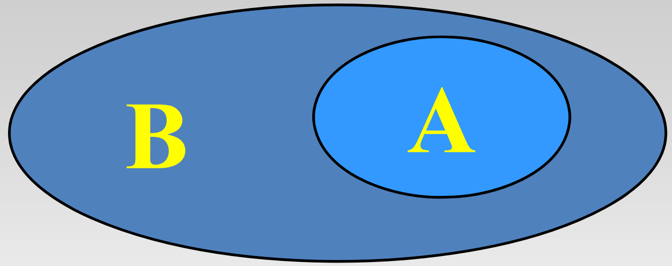
★4. $A - B = A - AB = A\overline{B}$.



（二）事件间的关系



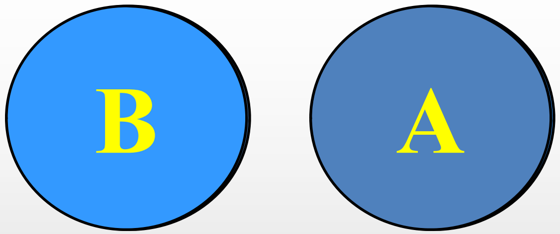
1.事件 B 包含事件 A：



A 发生必然导致 B 发生，

记为 $B \supset A$，或 $A \subset B$。

2.事件 A 与事件 B 相等：



若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，

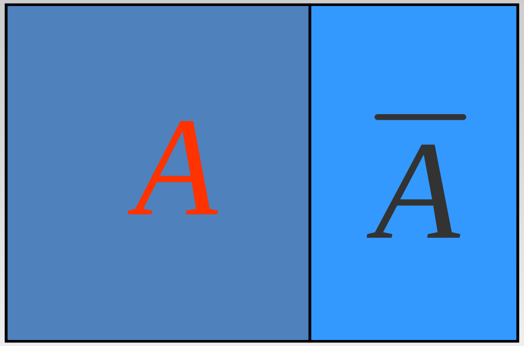
记为 $A = B$。

3. 事件A与B对立(互逆):

A、B中有且仅有一个发生.

即 $A\cup B=\Omega$， $AB=\varnothing$。

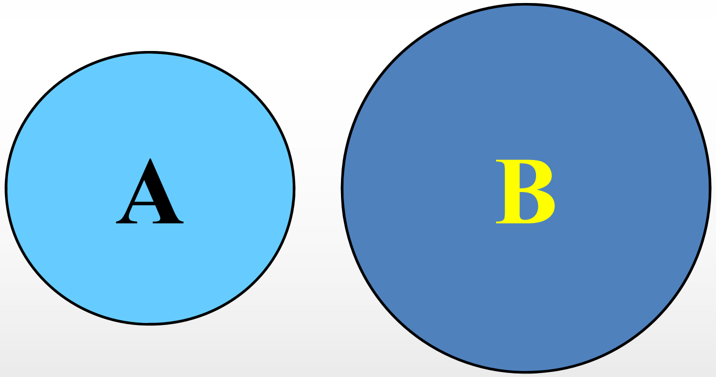
A的对立事件记为$\overline{A}=\Omega-A$.



4. 事件A与B互不相容(互斥):

A， B不能同时发生,

记为： $AB=\varnothing$。



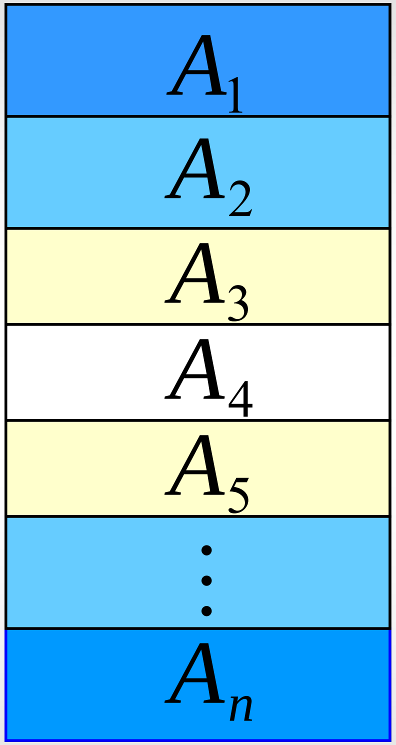
注意：对立$\neq$互斥

5. 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件一定发生，

即 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,

则称这 n 个事件构成完备事件组。



互不相容的完备事件组：

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：

（1） $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,

（2） $A_i A_j = \varnothing, (1 \le i < j \le n)$

注意：

样本空间Ω中，所有的基本事件构成互不相容的完备事件组。

例3：掷骰子，观察掷得的点数。

若$\boldsymbol{A}$表示掷出奇数点，则 $A=\{1,3,5\}$

$\boldsymbol{B}$表示掷出点数不超过五点，则 $B=\{1,2,3,4,5\}$

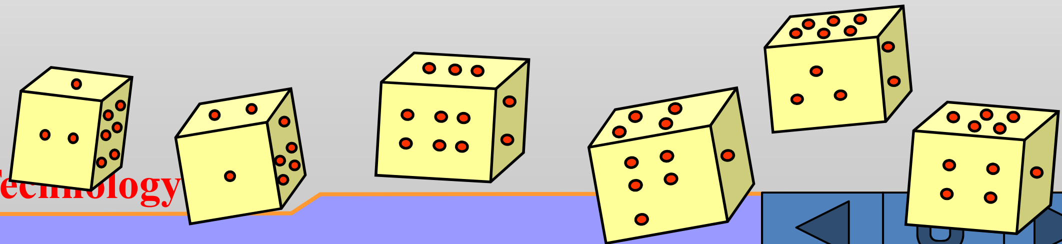
$\therefore A\subset B$，$\boldsymbol{B-A=\{2,4\}}$.

若$\boldsymbol{D}$表示不超过4的偶数点，即 $D=\{2,4\}$

由 $\boldsymbol{AD=\varnothing}$, 知 $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{D}$互不相容（互斥）.

若$\boldsymbol{E}$表示掷出的是偶数点，即 $E=\{2,4,6\}$

$A\bigcup E=\Omega,\ A\bigcap E=\varnothing$ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}$对立（互逆）



$B_1 = \{1,2,3\}$， $B_2 = \{4,5\}$， $B_3 = \{5,6\}$ 是一个完备事件组

$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$ 是一个互不相容的完备事件组

**事件的运算性质（续）

5.德·摩根律： $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

6.对立事件的性质： $\overline{\overline{A}}=A, A+\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing.$

事件间的运算

1.事件 A 与事件 B 的积　　$A \cap B$ 或 AB.

2.事件 A 与事件 B 的和　　$A \cup B$ 或 $A+B$.

3.事件 A 与事件 B 的差　　$A-B$.

事件间的关系

1.事件 B 包含事件 A　　$A \subset B$.

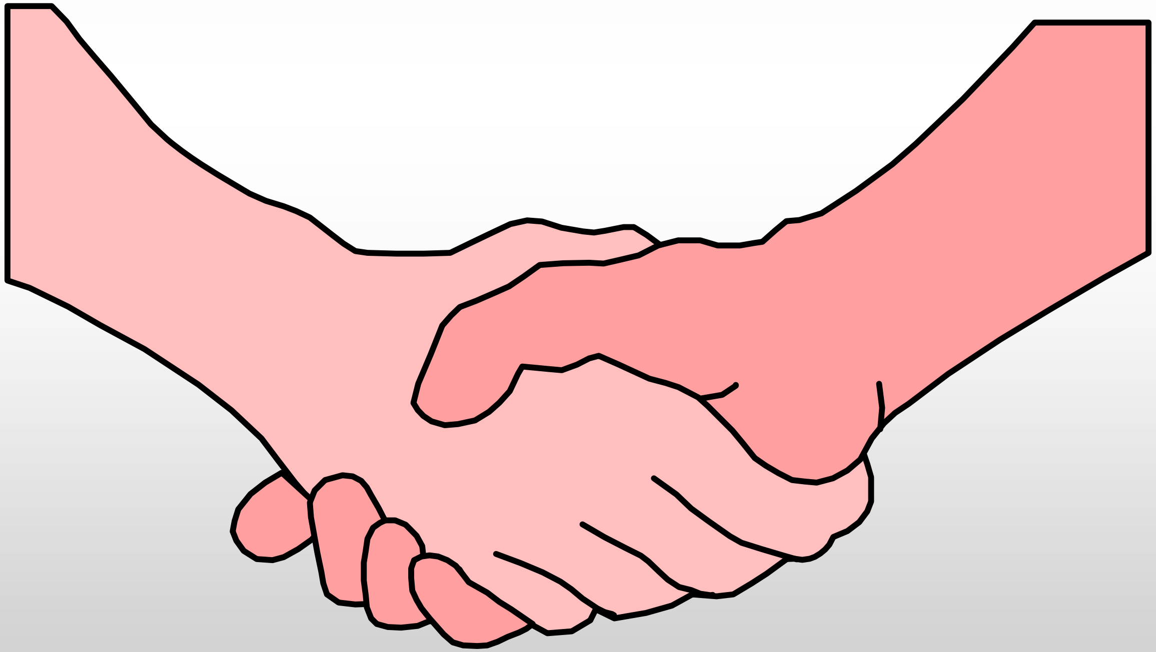
2.事件 A 与事件 B 相等　　$A=B$.

3.事件 A 和事件 B 对立（互逆）　　$B=\Omega-A$.

4.事件 A 与事件 B 互不相容（互斥）　　$A \cap B=\Phi$.

事件关系和运算的作用

——将复杂事件化为简单事件



例 4.射击三枪，A_i 表示第 i 枪打中，$i=1,2,3$

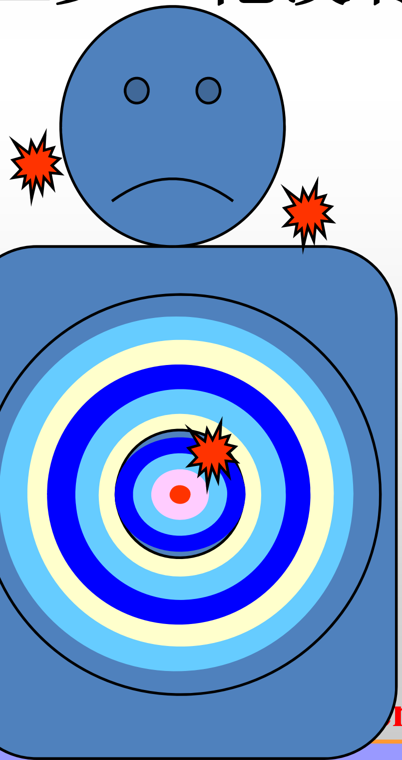
只击中第一枪：$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

只击中一枪：$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

至少击中一枪：$A_1 \cup A_2 \cup A_3$

三枪都未击中：$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

至少一枪没有击中：$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 = \overline{A_1A_2A_3}$.



#

例 5.检查产品质量，从一批产品中任取 5 件样品。

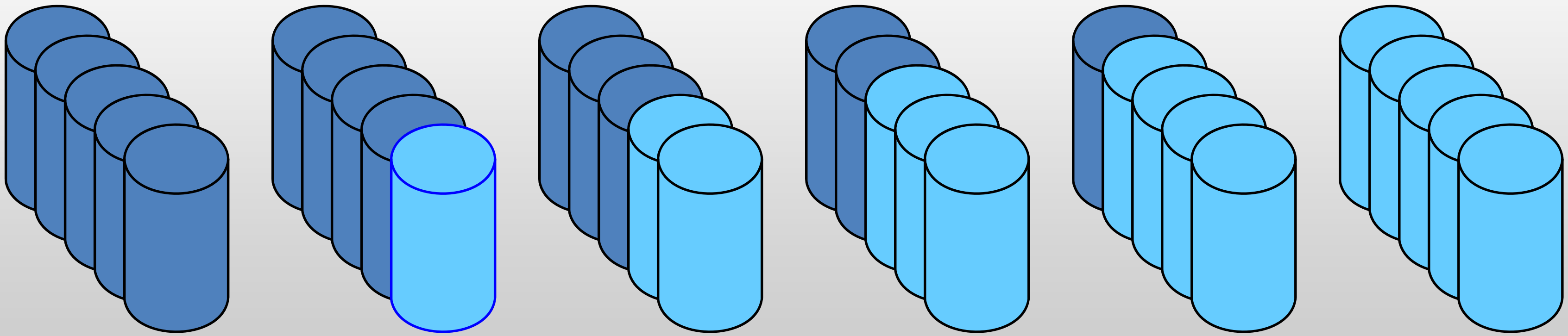
A_i 表示发现 i 件次品， $i = 0,1,2,3,4,5$ ，

设 B 表示发现两件或三件次品，$B = A_2 + A_3$

C 表示最多发现两件次品，$C = A_0 + A_1 + A_2$

D 表示至少发现一件次品，$D = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$$D = \overline{A_0}$$



如果用随机变量ξ表示5件样品中的次品数，则

$$\{\xi=0\}=A_0,\ \{\xi=1\}=A_1,\ \ldots\ldots,\ \{\xi=5\}=A_5.$$

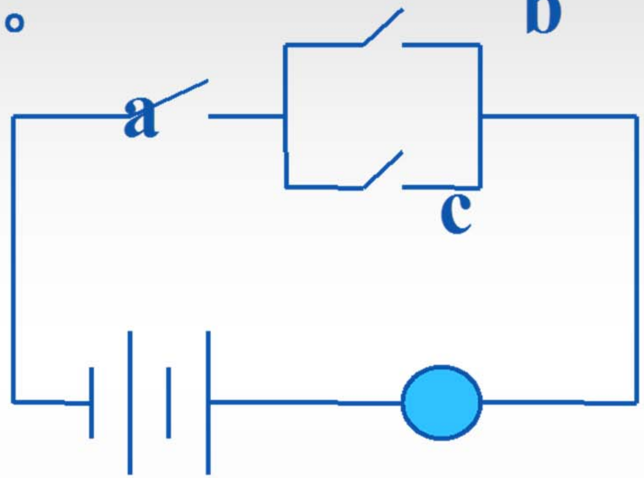
设B表示发现两件或三件次品，

则

$$B=\{\xi=2\}+\{\xi=3\}.$$

#

例 6.电路如图所示，A、B、C分别表示继电器 a、b、c 闭合，D表示指示灯亮，问如何用A、B、C表示D和$\overline{D}$。



解：$D = A\cap(B\cup C)$

$$\overline{D} = \overline{A\cap(B\cup C)} = \overline{A}\cup(\overline{B}\cap\overline{C})$$

#

例题 在图书馆中随意抽取一本书，

事件 A 表示数学书，

B 表示中文书，

C 表示平装书.

则

$AB\overline{C}$ —— 精装中文版数学书

$\overline{C} \subset B$ —— 非平装书都是中文书

$\overline{A} = B$ —— 非数学书都是中文版的，且中文版的书都是非数学书

例题 设A，B都是随机事件。

试证：$\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{AB}$

证明：右边 $=\overline{A}\cup\overline{B}$ **(德摩根律)**

$$=(\overline{A}\Omega)\cup(\Omega\overline{B})$$

$$=\overline{A}(B+\overline{B})\cup(A+\overline{A})\overline{B}$$

$$=(\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B})\cup(A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B})$$

$$=\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\text{左边}$$

#

练习 设A，B,C是随机事件。

试证:$(A+B)-AB=A\overline{B}+\overline{A}B$

证明: 左边$=(A+B)\overline{AB}$

$$=(A+B)(\overline{A}\cup\overline{B})$$

$$=(A\overline{A}\cup A\overline{B})+(B\overline{A}\cup B\overline{B})$$

$$=\varnothing+A\overline{B}+B\overline{A}+\varnothing$$

$$=A\overline{B}+B\overline{A}=\text{右边}$$

#

随机现象

随机试验

随机事件

样本点（基本事件）

样本空间（所有样本点的集合）

随机变量

随机事件的关系及运算