assn05

May 4, 2025

1 16

给定物体直线运动数据，数据如下：

时间 t (s)	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 s (m)	0	10	30	50	80	110

1.1 Solution

假设运动方程为

$$s(t) = A\,t^2 + B\,t$$

由于 $s(0) = 0$，不需要常数项。

目标是最小化残差平方和：

$$E(A, B) = \sum_{i=1}^{n} \left[s_i - (A\,t_i^2 + B\,t_i)\right]^2$$

对 A 和 B 求偏导数，并令其为零：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial A} &= -2\sum_{i=1}^{n} t_i^2\left[s_i - (A\,t_i^2 + B\,t_i)\right] = 0,\\
\frac{\partial E}{\partial B} &= -2\sum_{i=1}^{n} t_i\left[s_i - (A\,t_i^2 + B\,t_i)\right] = 0.
\end{aligned}$$

整理后得到正规方程：

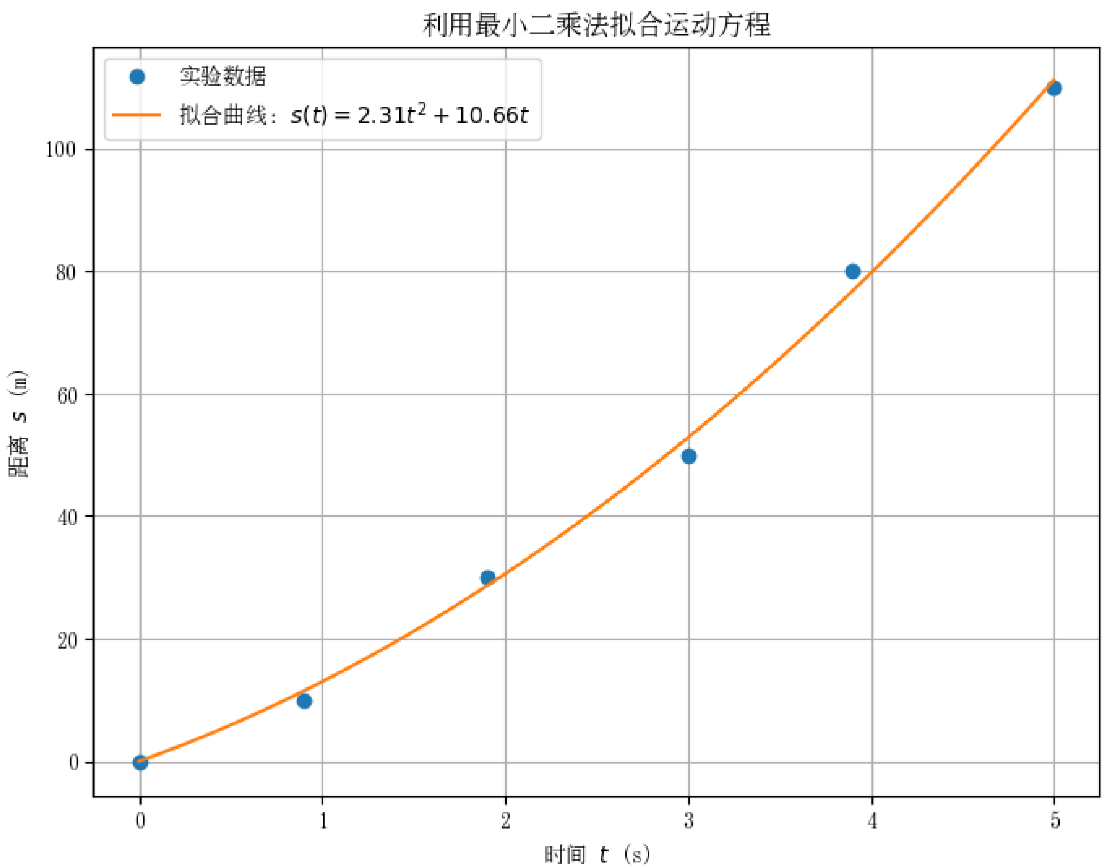
$$\begin{cases}
A\sum t_i^4 + B\sum t_i^3 = \sum t_i^2 s_i,\\
A\sum t_i^3 + B\sum t_i^2 = \sum t_i s_i.
\end{cases}$$

通过求解上述线性方程组，可以得到系数 A 和 B。

[2]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
```

```python
mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimSong']  # 设置中文字体
mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False  # 显示负号

# 给定数据
t = np.array([0, 0.9, 1.9, 3.0, 3.9, 5.0])
s = np.array([0, 10, 30, 50, 80, 110])

# 构建设计矩阵，列分别为 t^2 和 t
X = np.vstack((t**2, t)).T

# 使用最小二乘法求解 A 和 B，使得 s(t) = A*t^2 + B*t
coeff, residuals, rank, s_vals = np.linalg.lstsq(X, s, rcond=None)
A, B = coeff

print("系数 A (t^2) =", A)
print("系数 B (t) =", B)

# 生成拟合曲线的数据
t_fit = np.linspace(0, 5, 100)
s_fit = A * t_fit**2 + B * t_fit

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.plot(t, s, 'o', label='实验数据')
plt.plot(t_fit, s_fit, '-', label=f'拟合曲线: $s(t)={A:.2f}t^2+{B:.2f}t$')
plt.xlabel('时间 $t$ (s)')
plt.ylabel('距离 $s$ (m)')
plt.title('利用最小二乘法拟合运动方程')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
系数 A (t^2) = 2.3134643556096797
系数 B (t) = 10.657588258559603
```



2 17

已知实验数据

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

要求拟合模型

$$y = a + bx^2,$$

并计算均方误差 (MSE)。

2.1 Solution

令预测值为

$$\hat{y}_i = a + bx_i^2.$$

构造残差平方和

$$E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i^2)\right]^2.$$

令对 a 和 b 的偏导数为零，可得到正规方程：

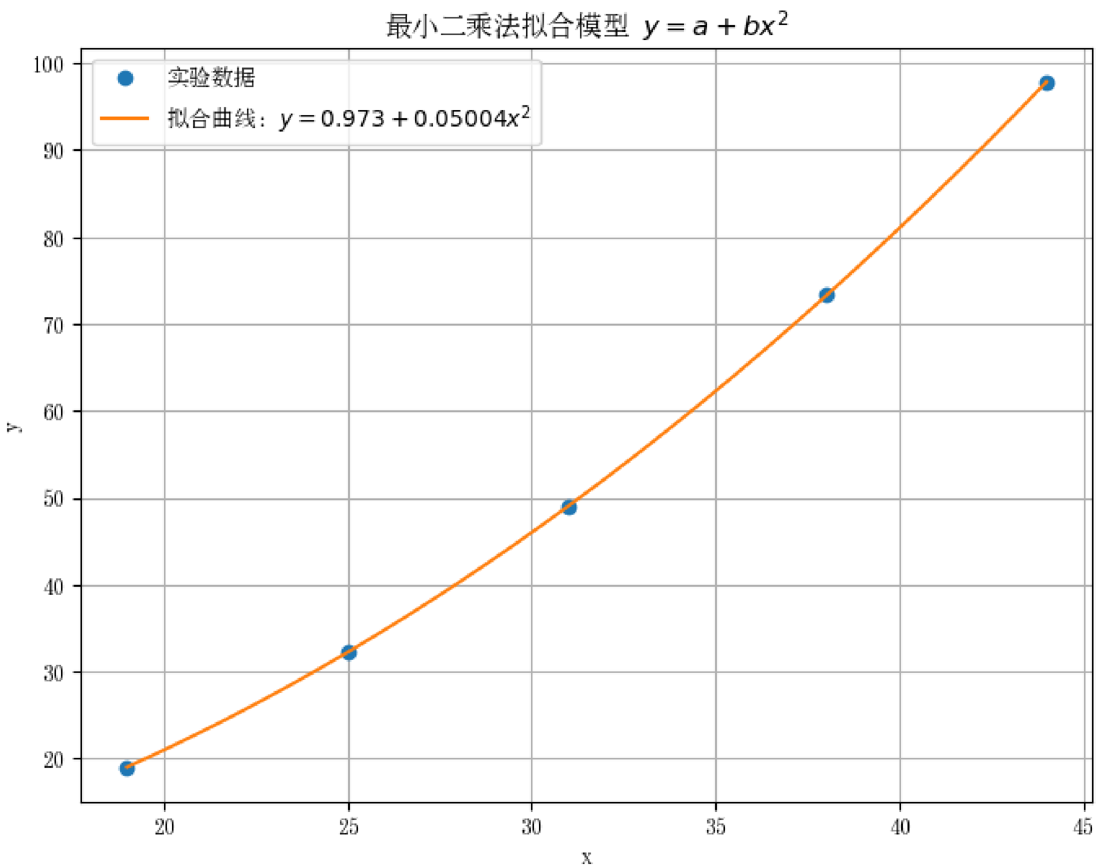
$$\begin{cases} n\,a+b\sum_{i=1}^n x_i^2=\sum_{i=1}^n y_i, \\ a\sum_{i=1}^n x_i^2+b\sum_{i=1}^n x_i^4=\sum_{i=1}^n x_i^2\,y_i. \end{cases}$$

使用 python 进行求解。

[16]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 给定数据
x = np.array([19, 25, 31, 38, 44])
y = np.array([19.0, 32.3, 49.0, 73.3, 97.8])

# 构建设计矩阵 X，其中第一列全为 1，第二列为 x^2
X = np.vstack((np.ones_like(x), x**2)).T

# 求解正规方程，得到最小二乘解 [a, b]
coeff, residuals, rank, s_vals = np.linalg.lstsq(X, y, rcond=None)
a, b = coeff

print("拟合参数 a =", a)
print("拟合参数 b =", b)

# 计算预测值
y_pred = a + b * x**2

# 计算均方误差 (MSE)
MSE = np.mean((y - y_pred)**2)
print("均方误差 MSE =", MSE)

# 生成拟合曲线数据用于绘图
x_fit = np.linspace(min(x), max(x), 200)
y_fit = a + b * x_fit**2

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(x, y, 'o', label='实验数据')
plt.plot(x_fit, y_fit, '-', label=f'拟合曲线: $y={a:.3f}+{b:.5f}x^2$')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('最小二乘法拟合模型 $y=a+bx^2$')
plt.legend()
plt.grid(True)
```

```
plt.show()
```

```
拟合参数 a = 0.9725786569067812
拟合参数 b = 0.05003512421916013
均方误差 MSE = 0.0030046417891329913
```



2.2 18

实验数据为

时间 t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓度 $y\,(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

使用最小二乘法求 $y = f(t)$

2.3 Solution

使用更符合化学反应条件的一阶反应的动力学模型进行拟合，其形式为

$$y(t) = C\Big(1 - \exp(-kt)\Big),$$

该模型满足初值条件 $y(0) = 0$ 且当 $t \to \infty$ 时 $y(t) \to C$，比较符合实际反应过程。

目标是最小化残差平方和

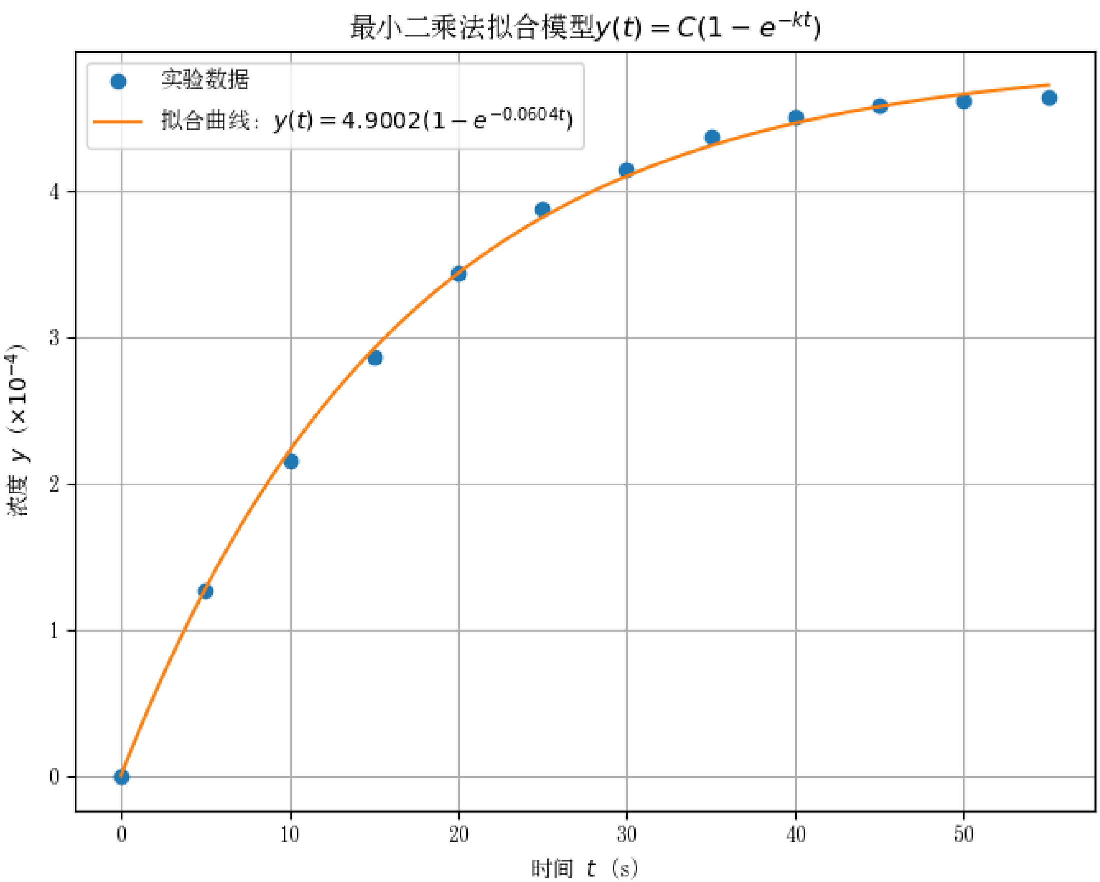
$$E(C, k) = \sum_{i=1}^{n} \Big[y_i - C\Big(1 - \exp(-k\,t_i)\Big)\Big]^2.$$

由于该模型是非线性的，故利用 Python 中的 `curve_fit` 求解参数 C 和 k。

[15]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
import matplotlib as mpl

# 设置中文字体和负号显示
mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimSong']
mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

# 给定数据
t = np.array([0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55])
y = np.array([0, 1.27, 2.16, 2.86, 3.44, 3.87, 4.15, 4.37, 4.51, 4.58, 4.62, 4.
↪64])

# 定义一阶反应模型： y(t) = C * (1 - exp(-k * t))
def model(t, C, k):
    return C * (1 - np.exp(-k * t))

# 提供初始猜测，C 初猜为数据末值，k 初猜可选 0.1
p0 = [4.64, 0.1]

# 使用 curve_fit 进行非线性拟合
params, covariance = curve_fit(model, t, y, p0=p0)
C, k = params

print("拟合参数 C =", C)
print("拟合参数 k =", k)

# 生成拟合曲线数据
t_fit = np.linspace(0, 55, 200)
y_fit = model(t_fit, C, k)

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t, y, 'o', label='实验数据')
plt.plot(t_fit, y_fit, '-', label=f'拟合曲线: $y(t)={C:.4f}(1-e^{{-{k:.
↪4f}t}})$')
```

```
plt.xlabel('时间 $t$ (s)')
plt.ylabel('浓度 $y$ ($\\times10^{-4}$)')
plt.title('最小二乘法拟合模型 $y(t) = C(1-e^{-kt})$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
拟合参数 C = 4.900232518079594
拟合参数 k = 0.060402839872791304
```



3 22

求

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

在 $x = 0$ 处的 $(1, 1)$ 阶帕德逼近 $R_{11}(x)$

3.1 Solution

由于

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

故

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots.$$

设 $(1,1)$ 阶帕德逼近为

$$R_{11}(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}.$$

展开 $R_{11}(x)$：

$$R_{11}(x) = (a_0 + a_1 x)\left(1 - b_1 x + b_1^2 x^2 + \cdots\right) = a_0 + (a_1 - a_0 b_1)x + (a_0 b_1^2 - a_1 b_1)x^2 + \cdots.$$

要求 $R_{11}(x)$ 与 $f(x)$ 的展开一致至 x^2 阶，因此需满足：

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 - a_0 b_1 = a_1 - b_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ a_0 b_1^2 - a_1 b_1 = b_1^2 - a_1 b_1 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

令 $a_0 = 1$，则由第二个方程有

$$a_1 = b_1 - \frac{1}{2}.$$

代入第三个方程：

$$b_1^2 - \left(b_1 - \frac{1}{2}\right) b_1 = b_1^2 - b_1^2 + \frac{1}{2} b_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{1}{3}.$$

从而

$$b_1 = \frac{2}{3}.$$

$$a_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}.$$

因此，$(1,1)$ 阶帕德逼近为

$$\boxed{R_{11}(x) = \frac{1 + \frac{1}{6}x}{1 + \frac{2}{3}x}.}$$

4 24

使用 FFT 算法，求函数 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 4 次三角插值多项式 $S_4(x)$

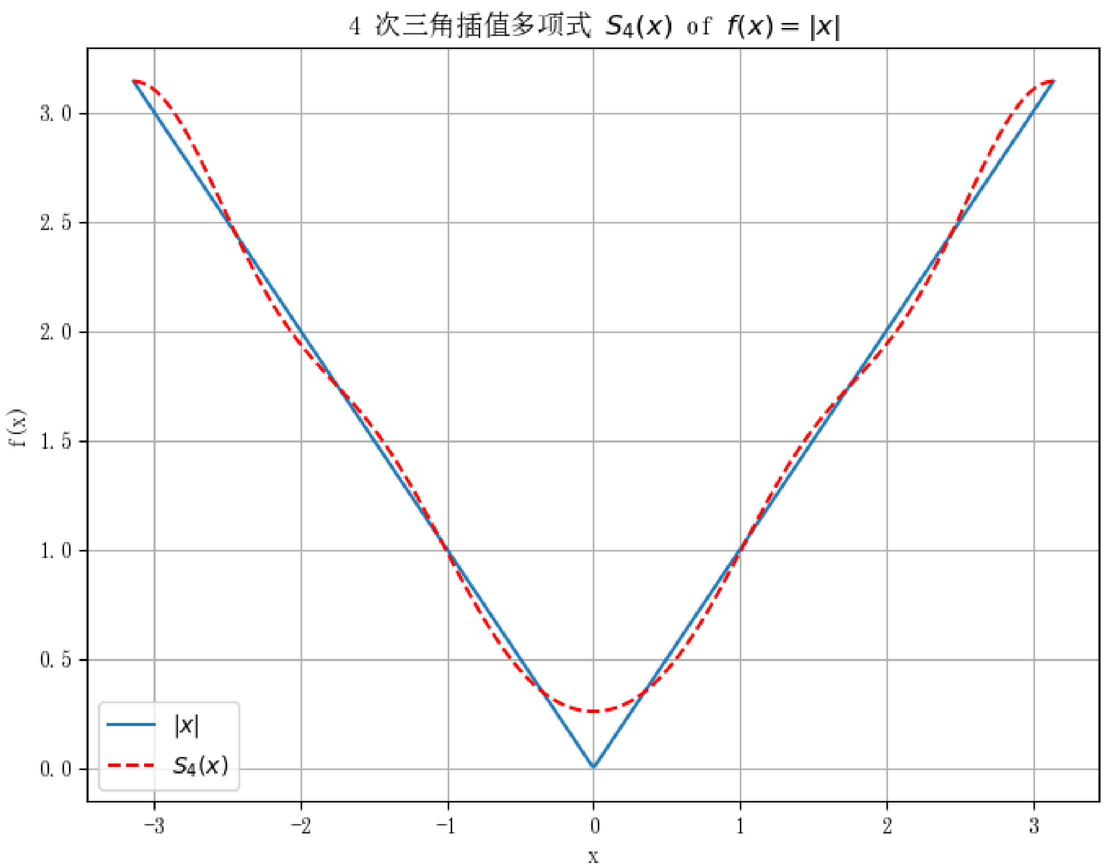
5 Solution

使用 python 完成 FFT 算法的计算。

[25]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def manual_fft(x):
    N = len(x)
    X = []
    for k in range(N):
        s = 0 + 0j
        for j in range(N):
            angle = -2 * math.pi * j * k / N
            s += x[j] * complex(math.cos(angle), math.sin(angle))
        X.append(s)
    return X

# 采样点数 N = 9, 采样区间为 [- , ]
N = 9
j = np.arange(N)
x_samples = -math.pi + 2 * math.pi * j / N
f_samples = [abs(xi) for xi in x_samples]

# 计算 DFT 并归一化
X = manual_fft(f_samples)
X_normalized = [val / N for val in X]

# 由于采样区间为 [- , ], 而标准 DFT 是针对 [0,2 ],
# 因此需要对傅里叶系数乘以修正因子 exp(i k) = (-1)^k。
c0 = X_normalized[0].real  # k = 0 不变
c = []
for k in range(1, 5):
    c_k_corrected = X_normalized[k].real * ((-1)**k)
    c.append(c_k_corrected)

def S4(x_val):
    S = c0
    for k in range(1, 5):
        S += 2 * c[k - 1] * math.cos(k * x_val)
    return S

# 画出原函数 |x| 和 4 次三角插值多项式 S4(x)
x_fine = np.linspace(-math.pi, math.pi, 400)
f_fine = [abs(xi) for xi in x_fine]
S4_fine = [S4(xi) for xi in x_fine]

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(x_fine, f_fine, label=r'$|x|$')
plt.plot(x_fine, S4_fine, '--r', label=r'$S_4(x)$')
```

```python
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('4 次三角插值多项式 $S_4(x)$ of $f(x)=|x|$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

print("傅里叶系数 (归一化): ")
print("c0 =", c0)
for k in range(1, 5):
    print(f"c_{k} =", c[k-1])
```




```
傅里叶系数 (归一化):
c0 = 1.5901888740392778
c_1 = -0.6431235280690197
c_2 = 0.02196156197534019
c_3 = -0.0775701889775252
c_4 = 0.033046610753371515
```

6　1

确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

(2)

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

(3)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \left[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)\right]/3$$

(4)

$$\int_{0}^{h} f(x)dx \approx h[f(0) + f(h)]/2 + ah^2[f'(0) - f'(h)]$$

6.1　(2) 求积公式

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h).$$

令其对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3, ...$ 精确，建立以下条件：

1. 当 $f(x) = 1$ 时，

$$\int_{-2h}^{2h} 1\,dx = 4h, \quad A_{-1} + A_0 + A_1 = 4h.$$

2. 当 $f(x) = x$ 时，

$$\int_{-2h}^{2h} x\,dx = 0, \quad -hA_{-1} + 0 \cdot A_0 + hA_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = A_{-1}.$$

3. 当 $f(x) = x^2$ 时，

$$\int_{-2h}^{2h} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2h}^{2h} = \frac{16h^3}{3},$$

   而右侧为

$$A_{-1}(h^2) + A_0 \cdot 0^2 + A_1(h^2) = (A_{-1} + A_1)h^2 = 2A_{-1}\,h^2.$$

   故有

$$2A_{-1}\,h^2 = \frac{16h^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad A_{-1} = \frac{8h}{3}.$$

   从而 $A_1 = \frac{8h}{3}$。

4. 由条件 (1) 得：

$$\frac{8h}{3} + A_0 + \frac{8h}{3} = 4h \quad \Longrightarrow \quad A_0 = 4h - \frac{16h}{3} = -\frac{4h}{3}.$$

检验 (f(x)=x^3) 时：

$$\int_{-2h}^{2h} x^3\,dx = 0, \quad -A_{-1}h^3 + A_1h^3 = 0,$$

自动成立。

但对于 $f(x)=x^4$ 不精确，因此此公式在多项式上的最大精度为 **3**。

$$\boxed{A_{-1}=\frac{8h}{3}, \quad A_0=-\frac{4h}{3}, \quad A_1=\frac{8h}{3}.}$$

,

6.2 (3) 求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3}.$$

设对多项式 $f(x)=1,x,x^2$ 精确。

1. 当 $f(x)=1$ 时，

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \quad \frac{1+2+3}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

   自动成立。

2. 当 $f(x)=x$ 时，

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \quad \frac{(-1)+2x_1+3x_2}{3}=0 \quad \Longrightarrow \quad -1+2x_1+3x_2=0.$$

   记作（ ）：

$$2x_1+3x_2=1.$$

3. 当 $f(x)=x^2$ 时，

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}, \quad \frac{1+2x_1^2+3x_2^2}{3}=\frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad 1+2x_1^2+3x_2^2=2.$$

   即（ ）：

$$2x_1^2+3x_2^2=1.$$

从（ ）可解得

$$x_1=\frac{1-3x_2}{2}.$$

将其代入（ ）：

$$2\left(\frac{1-3x_2}{2}\right)^2+3x_2^2=1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(1-3x_2)^2}{2}+3x_2^2=1.$$

解二次方程：

$$x_2 = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{15}.$$

为使节点按递增顺序（且落在 ([-1,1]) 内），取

$$x_2 = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{15} \quad (\text{约}0.5266),$$

则从（ ）有

$$x_1 = \frac{1 - 3x_2}{2} = \frac{1 - \sqrt{6}}{5} \quad (\text{约} - 0.2899).$$

验证：- 对 $f(x) = 1$ 和 $f(x) = x$ 均满足，- 检验 $f(x) = x^2$ 自动成立。

对于 $f(x) = x^3$ 不满足，因此此公式能精确积分次数不超过 2。

$$\boxed{x_1 = \frac{1 - \sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{15}.}$$

6.3 (4) 求积公式

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h[f(0) + f(h)]}{2} + a\,h^2\Big[f'(0) - f'(h)\Big].$$

利用泰勒展开，令

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{6} + \cdots.$$

积分展开为

$$I = \int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \Big[f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{6} + \cdots\Big]dx$$
$$= f(0)h + \frac{f'(0)h^2}{2} + \frac{f''(0)h^3}{6} + \frac{f'''(0)h^4}{24} + \cdots.$$

先展开

$$\frac{h[f(0) + f(h)]}{2}.$$

注意 $f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \frac{f'''(0)h^3}{6} + \cdots$；因此，

$$\frac{h[f(0) + f(h)]}{2} = \frac{h}{2}\Big[2f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \frac{f'''(0)h^3}{6} + \cdots\Big]$$
$$= f(0)h + \frac{f'(0)h^2}{2} + \frac{f''(0)h^3}{4} + \frac{f'''(0)h^4}{12} + \cdots.$$

再展开

$$a\,h^2\Big[f'(0) - f'(h)\Big].$$

由于

$$f'(h) = f'(0) + f''(0)h + \frac{f'''(0)h^2}{2} + \cdots,$$

有

$$f'(0) - f'(h) = -f''(0)h - \frac{f'''(0)h^2}{2} - \cdots,$$

因此，

$$a\,h^2\Big[f'(0) - f'(h)\Big] = -a\,f''(0)h^3 - \frac{a\,f'''(0)h^4}{2} + \cdots.$$

合并后，求积公式给出

$$\begin{aligned} Q &= f(0)h + \frac{f'(0)h^2}{2} + \Big(\frac{f''(0)}{4} - a\,f''(0)\Big)h^3 + \Big(\frac{f'''(0)}{12} - \frac{a\,f'''(0)}{2}\Big)h^4 + \cdots \\ &= f(0)h + \frac{f'(0)h^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - a\right) f''(0)h^3 + \left(\frac{1}{12} - \frac{a}{2}\right) f'''(0)h^4 + \cdots. \end{aligned}$$

要求 Q 与真实积分展开一致，即：- h^1 与 h^2 项自动匹配，- 对 h^3 项要求

$$\frac{1}{4} - a = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

- 此时 h^4 项为

$$\frac{1}{12} - \frac{a}{2} = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24},$$

同真实值一致。

故

$$\boxed{a = \frac{1}{12}.}$$

此时该公式对 $f(x)$ 的泰勒展开至 h^4 项吻合，即它对多项式的精度达到 **3**。

7 2(3)

分别用梯形公式和辛普森公式计算下列积分

$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{4 - \sin^2(\varphi)}\,d\varphi, \quad n = 6$$

7.1 Solution

积分区间为 $[a, b] = [0, \pi/6]$，步长

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{\pi/6}{6} = \frac{\pi}{36}.$$

复合梯形公式为

$$T = \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\Big],$$

复合辛普森公式为

$$S = \frac{h}{6}\Big[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\Big].$$

[29]:
```
import numpy as np

def f(phi):
    return np.sqrt(4 - np.sin(phi)**2)

# 积分区间 [a, b] = [0,  /6], 分割数 n = 6
a = 0
b = np.pi / 6
n = 6
h = (b - a) / n  # h =  /36

# 生成节点: x0, x1, ..., x6
x = np.linspace(a, b, n+1)
# 计算每个小区间的中点
x_mid = (x[:-1] + x[1:]) / 2

# 按照复合梯形公式计算
T = h/2 * ( f(x[0]) + f(x[-1]) + 2 * np.sum(f(x[1:-1])) )
print("复合梯形公式近似: ", T)

# 按照复合辛普森公式计算
S = h/6 * ( f(x[0]) + f(x[-1])
            + 4 * np.sum(f(x_mid))
            + 2 * np.sum(f(x[1:-1]) ) )

print("复合辛普森公式近似: ", S)
```

```
复合梯形公式近似:  1.0356219003136578
复合辛普森公式近似:  1.0357638857574465
```

8 3

直接验证柯特斯公式

$$C = \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right]$$

其中，$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{4}$

具有 5 次代数精度。

8.1 Solution

8.1.1 1. 当 $f(x) = 1$ 时

- **精确积分：**

$$I = \int_0^4 1\,dx = 4.$$

- **柯特斯公式计算：**

$$C(1) = \frac{4}{90}\Big[7 \cdot 1 + 32 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 32 \cdot 1 + 7 \cdot 1\Big] = 4.$$

因此，二者相等。

8.1.2 2. 当 $f(x) = x$ 时

- **精确积分：**

$$I = \int_0^4 x\,dx = \frac{4^2}{2} = 8.$$

- **柯特斯公式计算：**

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{4}{90}\Big[7 \cdot 0 + 32 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 32 \cdot 3 + 7 \cdot 4\Big] \\ &= 8. \end{aligned}$$

8.1.3 3. 当 $f(x) = x^2$ 时

- **精确积分：**

$$I = \int_0^4 x^2\,dx = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}.$$

- **柯特斯公式计算：**

$$\begin{aligned} C(x^2) &= \frac{4}{90}\Big[7 \cdot 0^2 + 32 \cdot 1^2 + 12 \cdot 2^2 + 32 \cdot 3^2 + 7 \cdot 4^2\Big] \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

8.1.4 4. 当 $f(x) = x^3$ 时

- **精确积分：**

$$I = \int_0^4 x^3\,dx = \frac{4^4}{4} = 64.$$

- **柯特斯公式计算：**

$$
\begin{aligned}
C(x^3) &= \frac{4}{90}\Big[7\cdot 0^3 + 32\cdot 1^3 + 12\cdot 2^3 + 32\cdot 3^3 + 7\cdot 4^3\Big] \\
&= 64.
\end{aligned}
$$

8.1.5 5. 当 $f(x) = x^4$ 时

- **精确积分：**

$$
I = \int_0^4 x^4\,dx = \frac{4^5}{5} = \frac{1024}{5}.
$$

- **柯特斯公式计算：**

$$
\begin{aligned}
C(x^4) &= \frac{4}{90}\Big[7\cdot 0^4 + 32\cdot 1^4 + 12\cdot 2^4 + 32\cdot 3^4 + 7\cdot 4^4\Big] \\
&= \frac{1024}{5}.
\end{aligned}
$$

8.1.6 6. 当 $f(x) = x^5$ 时

- **精确积分：**

$$
I = \int_0^4 x^5\,dx = \frac{4^6}{6} = \frac{2048}{3}.
$$

- **柯特斯公式计算：**

$$
\begin{aligned}
C(x^5) &= \frac{4}{90}\Big[7\cdot 0^5 + 32\cdot 1^5 + 12\cdot 2^5 + 32\cdot 3^5 + 7\cdot 4^5\Big] \\
&= \frac{2048}{3}
\end{aligned}
$$

使用 python 进行验证。

[10]:
```python
import sympy as sp

# 定义变量和区间
x = sp.symbols('x', real=True)
a_val = sp.Integer(0)
b_val = sp.Integer(4)
h = (b_val - a_val) / 4  # h = 1

# 定义节点（符号表达式）和权重（符号）
nodes = [a_val + i * h for i in range(5)]  # x0, x1, x2, x3, x4
weights = [sp.Integer(7), sp.Integer(32), sp.Integer(12), sp.Integer(32), sp.
↪Integer(7)]
```

```python
# 定义柯特斯公式 (Boole 公式) 的符号近似
def cotes_approx(f_expr):
    approx = (b_val - a_val) / sp.Integer(90) * sum(w * f_expr.subs(x, xi) for␣
↪w, xi in zip(weights, nodes))
    return sp.simplify(approx)

# 定义符号化的精确积分
def exact_integral(f_expr):
    return sp.integrate(f_expr, (x, a_val, b_val))

# 验证多项式 f(x)=x^k, k = 0,...,5 的精确性, 并以符号形式显示近似值与精确积分
for k in range(7):
    f_expr = x**k
    approx_val = cotes_approx(f_expr)
    exact_val = sp.simplify(exact_integral(f_expr))
    print(f"对于 f(x)=x^{k}, 柯特斯公式:{sp.pretty(approx_val)}, 精确积分: {sp.
↪pretty(exact_val)}")
```

```
对于 f(x)=x^0, 柯特斯公式:4, 精确积分: 4
对于 f(x)=x^1, 柯特斯公式:8, 精确积分: 8
对于 f(x)=x^2, 柯特斯公式:64/3, 精确积分: 64/3
对于 f(x)=x^3, 柯特斯公式:64, 精确积分: 64
对于 f(x)=x^4, 柯特斯公式:1024/5, 精确积分: 1024/5
对于 f(x)=x^5, 柯特斯公式:2048/3, 精确积分: 2048/3
对于 f(x)=x^6, 柯特斯公式:7040/3, 精确积分: 16384/7
```

9 4

用辛普森公式求

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

并估计误差。

9.1 Solution

对于区间 $[a,b]=[0,1]$ ，辛普森公式为

$$S=\frac{b-a}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\Big].$$

对于 $f(x)=e^{-x}$，有

$$f(0)=1,\quad f\Big(\frac{0+1}{2}\Big)=e^{-1/2},\quad f(1)=e^{-1}.$$

因此，近似值为

$$\boxed{S = \frac{1}{6}\Big[1 + 4e^{-1/2} + e^{-1}\Big].}$$

而精确积分为

$$I = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1}.$$

辛普森公式的截断误差表达式为

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,f^{(4)}(\xi),$$

其中 $\xi \in [0,1]$，该公式实际上等价于 $n = 2$ 的情形。

对于 $f(x) = e^{-x}$，其四阶导数为

$$f^{(4)}(x) = e^{-x},$$

在 $[0,1]$ 上取最大值为 $e^0 = 1$。因此，误差绝对值满足

$$\boxed{|E_S| \le \frac{1^5}{180 \cdot 2^4} = \frac{1}{2880}.}$$

10　5

推导下列三种矩形求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$$

10.1　Proof

10.1.1　(1)

考虑对任意 $x \in [a,b]$ 应用中值定理：存在 $\xi = \xi(x)$ 使得

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a).$$

对两边从 a 到 b 积分，有

$$\int_a^b [f(x) - f(a)]\, dx = \int_a^b f'(\xi)(x-a)\, dx.$$

左侧为

$$\int_a^b f(x)\, dx - (b-a)f(a).$$

利用中值定理，存在 $\eta \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f'(\xi)(x-a)\, dx = f'(\eta) \int_a^b (x-a)\, dx = f'(\eta)\, \frac{(b-a)^2}{2}.$$

因此得到

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2.$$

10.1.2　(2)

对任意 $x \in [a,b]$，利用中值定理可写成

$$f(b) - f(x) = f'(\xi)(b-x).$$

则

$$f(x) = f(b) - f'(\xi)(b-x).$$

对 x 从 a 到 b 积分，

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(b) - \int_a^b f'(\xi)(b-x)\, dx.$$

利用积分中值定理，存在 $\eta \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f'(\xi)(b-x)\, dx = f'(\eta) \int_a^b (b-x)\, dx = f'(\eta)\, \frac{(b-a)^2}{2}.$$

因此有

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2.$$

10.1.3 (3)

记 $m=\frac{a+b}{2}$ 为区间中点，在 $x=m$ 处作泰勒展开

$$f(x)=f(m)+f'(m)(x-m)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-m)^2,$$

其中 ξ 介于 m 与 x 之间。

由于对称性有

$$\int_a^b (x-m)\,dx=0,$$

而

$$\int_a^b (x-m)^2dx=\frac{(b-a)^3}{12},$$

故

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(m)+\frac{1}{2}\,\frac{(b-a)^3}{12}\,f''(\eta)=\,(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3,$$

其中 $\eta\in[a,b]$。

11 7

若 $f''(x)>0$ 证明用梯形公式计算积分

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

所得结果比准确值 I 大，并说明其几何意义。

11.1 Proof

由泰勒展开，在 $x\in[a,b]$ 上有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,\quad \xi\in[a,x].$$

对 x 在 $[a,b]$ 上积分得

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(a)(b-a)^2}{2}+\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2\,dx.$$

梯形公式给出的 T 可写为

$$T=(b-a)f(a)+\frac{f'(a)(b-a)^2}{2}+\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{2}(b-a).$$

注意到

$$f(b)-f(a)=f'(a)(b-a)+\frac{f''(\eta)}{2}(b-a)^2 \quad (\eta\in[a,b]),$$

则

$$T=(b-a)f(a)+\frac{f'(a)(b-a)^2}{2}+\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{4}.$$

而真实积分的余项为

$$I=(b-a)f(a)+\frac{f'(a)(b-a)^2}{2}+\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2\,dx.$$

计算积分有

$$\int_a^b(x-a)^2dx=\frac{(b-a)^3}{3},$$

则

$$I=(b-a)f(a)+\frac{f'(a)(b-a)^2}{2}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{3},$$

其中 $\xi\in[a,b]$（利用中值定理推广）。

因为 $f''(x)>0$，所以存在某 $\eta,\xi\in[a,b]$ 使得

$$T-I=\frac{f''(\eta)(b-a)^3}{4}-\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{6}>0,$$

（注意 $\frac{1}{4}>\frac{1}{6}$ 且 $f''(\cdot)>0$）。

11.2 几何意义

当 $f(x)$ 为下凸函数时，连接两端点 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线处处高于 $f(x)$（除端点外）。因此，用这条直线构成的梯形面积必然大于曲线下面积，也就是说梯形公式对凸函数给出的是过估计。

12 8(1)

用龙贝格求积方法计算下列积分，使误差不超过 10^{-5}

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$$

12.1 Solution

设

$$T(h)=\frac{h}{2}\Big[f(0)+f(1)\Big]$$

为用步长 h 的复合梯形公式值（当只有一个小区间时）；然后将区间均匀二等分得到更精的近似值，再利用外推公式

$$R(k+1,m)=\frac{4^m\,R(k+1,m-1)-R(k,m-1)}{4^m-1}$$

逐级消去误差的低阶项。

令 $h_0=1$。由于 $f(x)=e^{-x}$ 得 $f(0)=1,\quad f(1)=e^{-1}$. 因此，初始梯形公式

$$R(0,0)=T(1)=\frac{1}{2}\Big[1+e^{-1}\Big].$$

二等分，步长 $h_1=\frac{1}{2}$。复合梯形公式为

$$R(1,0)=T\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{h_1}{2}\Big[f(0)+f(1)\Big]+h_1\,f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{1/2}{2}\Big[1+e^{-1}\Big]+\frac{1}{2}\,e^{-1/2}.$$

即

$$R(1,0)=\frac{1}{4}\Big[1+e^{-1}\Big]+\frac{1}{2}\,e^{-1/2}.$$

利用 Richardson 外推消去截断误差，得到

$$R(0,1)=\frac{4\,R(1,0)-R(0,0)}{3}.$$

按照该过程继续下去，直到计算精度达到 10^{-5}

下面用 python 完成计算。

[5]:
```python
import math

def romberg_integration(f, a, b, tol=1e-5, max_steps=20):
    # 初始化第一行: T(0,0) 即用一个区间的复合梯形公式
    R = [[0.0] * (max_steps) for _ in range(max_steps)]
    R[0][0] = (b - a) / 2 * (f(a) + f(b))
    # 如果 max_steps == 1 则直接返回
    for i in range(1, max_steps):
        # 计算使用 2^i 子区间的复合梯形公式
        h = (b - a) / (2**i)
        summation = 0.0
        # 累加中间点: 有 2^(i-1) 个新加入的中点
        num_new_points = 2**(i-1)
        for k in range(1, num_new_points + 1):
            x = a + (2 * k - 1) * h
            summation += f(x)
        R[i][0] = 0.5 * R[i-1][0] + h * summation

        # 使用 Richardson 外推计算其余列
```

```python
        for j in range(1, i+1):
            R[i][j] = (4**j * R[i][j-1] - R[i-1][j-1]) / (4**j - 1)

        # 检查误差：比较当前最高外推列与上一次同列结果的差值
        if i > 0 and abs(R[i][i] - R[i-1][i-1]) < tol:
            return R[i][i]

    # 若达到 max_steps 后仍未满足 tol，则返回最后一个计算值
    return R[max_steps-1][max_steps-1]

def main():
    # 被积函数 f(x) = exp(-x)
    def f(x):
        return math.exp(-x)

    a = 0.0
    b = 1.0
    tol = 1e-5
    I = romberg_integration(f, a, b, tol=tol, max_steps=20)
    Q = (2 / math.sqrt(math.pi)) * I
    print("Romberg integration approximate value:", Q)

if __name__ == "__main__":
    main()
```

```
Romberg integration approximate value: 0.7132716698141803
```