Assignment22

June 16, 2025

1 10.16

(a) 非因果的，因为分子阶次高于分母阶次。

(b) $z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}=(z+\frac{3}{4})(z-\frac{1}{4})$，极点均在单位圆内，且为稳定系统，故为右边序列，且收敛域包含无穷远点，因此为因果的。

(c) $z^4+\frac{4}{3}z^3-\frac{1}{2}z-\frac{2}{3}=(z+\frac{4}{3})(z+\frac{\sqrt{2}}{2})(z-\frac{\sqrt{2}}{2})$，为双边序列，故收敛域不包含无穷远点，因此为非因果的。

2 10.33

2.1 (a)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}=\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}$$

由于系统为因果的，故 ROC 为 $|z|>\frac{1}{2}$

2.2 (b)

由 z 变换的卷积性质，有

$$y[n]=h[n]*x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}Y(z)=H(z)X(z)$$

又因为

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

故

$$Y(z)=\frac{z^3}{(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}j}z}{z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}}+\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}j}z}{z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}+\frac{z}{z-\frac{1}{2}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

故

$$y[n]=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin(\frac{\pi}{3}n)u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

3 10.59

(a)

设中间信号为 $w[n]$，即第一个加法器的输出。则有：

$w[n] = x[n] - \frac{k}{3}w[n-1]$

取 z 变换：

$W(z) = X(z) - \frac{k}{3}z^{-1}W(z)$

$W(z)(1 + \frac{k}{3}z^{-1}) = X(z)$

$W(z) = \frac{X(z)}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}$

输出信号 $y[n]$ 为：

$y[n] = w[n] - \frac{k}{4}w[n-1]$

取 z 变换：

$Y(z) = W(z) - \frac{k}{4}z^{-1}W(z)$

$Y(z) = W(z)(1 - \frac{k}{4}z^{-1})$

将 $W(z)$ 代入 $Y(z)$ 的表达式：

$Y(z) = \frac{X(z)}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}(1 - \frac{k}{4}z^{-1})$

所以，系统函数 $H(z)$ 为：

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{k}{4}z^{-1}}{1+\frac{k}{3}z^{-1}}$

将分子分母同乘以 z：

$H(z) = \frac{z-\frac{k}{4}}{z+\frac{k}{3}}$

零点：令分子为 0，$z - \frac{k}{4} = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{k}{4}$。

极点：令分母为 0，$z + \frac{k}{3} = 0 \Rightarrow p_0 = -\frac{k}{3}$。

由于系统是因果的，收敛域 (ROC) 是最外层极点以外的区域：

ROC: $|z| > |-\frac{k}{3}| = |\frac{k}{3}|$。

(b) 对于因果 LTI 系统，其稳定的充要条件是所有极点都在单位圆内部。即 $|p_0| < 1$。$|-\frac{k}{3}| < 1$ $|\frac{k}{3}| < 1$ $|k| < 3$ 所以，系统稳定的条件是 $-3 < k < 3$。

(c) 当 $k = 1$ 时，系统函数为：

$H(z) = \frac{z-\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{3}}$

此时极点为 $p_0 = -\frac{1}{3}$。收敛域为 $|z| > |-\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$。

输入信号 $x[n] = (\frac{2}{3})^n$ 对全部 n 成立。这是一个指数序列，是 LTI 系统的特征函数。

当输入为 $x[n] = a^n$ 时，LTI 系统的输出为 $y[n] = H(a)a^n$，前提是 a 位于 $H(z)$ 的收敛域内。

这里 $a = \frac{2}{3}$。

我们检查 $a=\frac{2}{3}$ 是否在收敛域 $|z|>\frac{1}{3}$ 内:

$|\frac{2}{3}|=\frac{2}{3}$。因为 $\frac{2}{3}>\frac{1}{3}$，所以 $a=\frac{2}{3}$ 在收敛域内。

因此，输出 $y[n]$ 可以通过计算 $H(\frac{2}{3})$ 得到:

$H(\frac{2}{3})=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{8-3}{12}}{\frac{2+1}{3}}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{3}}=\frac{\frac{5}{12}}{1}=\frac{5}{12}$

所以，输出 $y[n]$ 为:

$y[n]=H(\frac{2}{3})\cdot(\frac{2}{3})^n=\frac{5}{12}(\frac{2}{3})^n$

4 10.42(b)

作单边 z 变换

$$Y(z)-\frac{1}{2}y[-1]-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)-\frac{1}{2}x[-1]-\frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

由于 $x[n]=u[n]$，故 $x[-1]=0$

故 $y[-1]=0$，零状态响应为 $y[n]=x[n]=u[n]$