Assignment12

April 10, 2025

1 5.21(j)

计算下列信号的傅立叶变换

$$x[n] = (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$$

1.1 Answer

将求和分为两部分：

- $n \geq 0$ 时，
$$x[n] = (n-1)\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n};$$
- $n < 0$ 时，由于 $|n| = -n$，有
$$x[n] = (n-1)\Big(\frac{1}{3}\Big)^{-n}.$$

傅立叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

将求和分开，记

$$X(e^{j\omega}) = A + B,$$

其中

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n} e^{-j\omega n},$$

$$B = \sum_{n=-\infty}^{-1}(n-1)\Big(\frac{1}{3}\Big)^{-n} e^{-j\omega n}.$$

对于 $n \geq 0$

令 $r = \frac{e^{-j\omega}}{3}$，则

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)r^{n}.$$

利用已知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n} = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\, r^{n} = \frac{r}{(1-r)^2},$$

可得

$$A = \frac{r}{(1-r)^2} - \frac{1}{1-r} = \frac{r-(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{2r-1}{(1-r)^2}.$$

即

$$A = \frac{\dfrac{2e^{-j\omega}}{3} - 1}{\left(1 - \frac{e^{-j\omega}}{3}\right)^2}.$$

对于 $n < 0$

令 $m = -n$（当 $n < 0$ 时，$m = 1, 2, ...$），

$$B = \sum_{n=-\infty}^{-1} (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{m=1}^{\infty} (-m-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{m} e^{j\omega m}.$$

令 $s = \frac{e^{j\omega}}{3}$，则

$$B = -\sum_{m=1}^{\infty} (m+1) s^m.$$

同样利用

$$\sum_{m=1}^{\infty} s^m = \frac{s}{1-s}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} m\, s^m = \frac{s}{(1-s)^2},$$

有

$$B = -\left[\frac{s}{(1-s)^2} + \frac{s}{1-s}\right] = -\frac{s}{1-s}\left[\frac{1}{1-s} + 1\right] = -\frac{s(2-s)}{(1-s)^2}.$$

即

$$B = -\frac{\dfrac{e^{j\omega}}{3}\left(2 - \dfrac{e^{j\omega}}{3}\right)}{\left(1 - \frac{e^{j\omega}}{3}\right)^2}.$$

将 A 和 B 合并，

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{\dfrac{2e^{-j\omega}}{3} - 1}{\left(1 - \frac{e^{-j\omega}}{3}\right)^2} - \frac{\dfrac{e^{j\omega}}{3}\left(2 - \dfrac{e^{j\omega}}{3}\right)}{\left(1 - \frac{e^{j\omega}}{3}\right)^2}.}$$

2 5.26(a)

由图可知，

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Re\{X_1(e^{j(\omega + \frac{2k\pi}{3})})\}$$

故

$$x_2[n] = \mathrm{Ev}\{x_1[n]\} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2k\pi}{3}n}$$

我们注意到，这是一个经典的周期性求和公式，其闭合形式可以写为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{3}kn} = \begin{cases} 3, & \text{if } n \mod 3 = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

也就是说，当 n 是 3 的整数倍时，上式取值为 3，否则为 0。

因此，我们可以将

$$x_2[n] = \mathrm{Ev}\{x_1[n]\} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi k}{3}n}$$

写为

$$x_2[n] = 3\ \mathrm{Ev}\{x_1[n]\} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-3m]$$

3 5.26(d)

$$x_4[n] = x_1[n] * h[n]$$

其中，$h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n}$

3.1 Answer

我们知道，离散时间系统中，若

$$h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n},$$

其 DTFT 为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\pi}{6}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$H(e^{j\omega})$ 就是一个截止频率为 $\pi/6$ 的方波函数。

因此

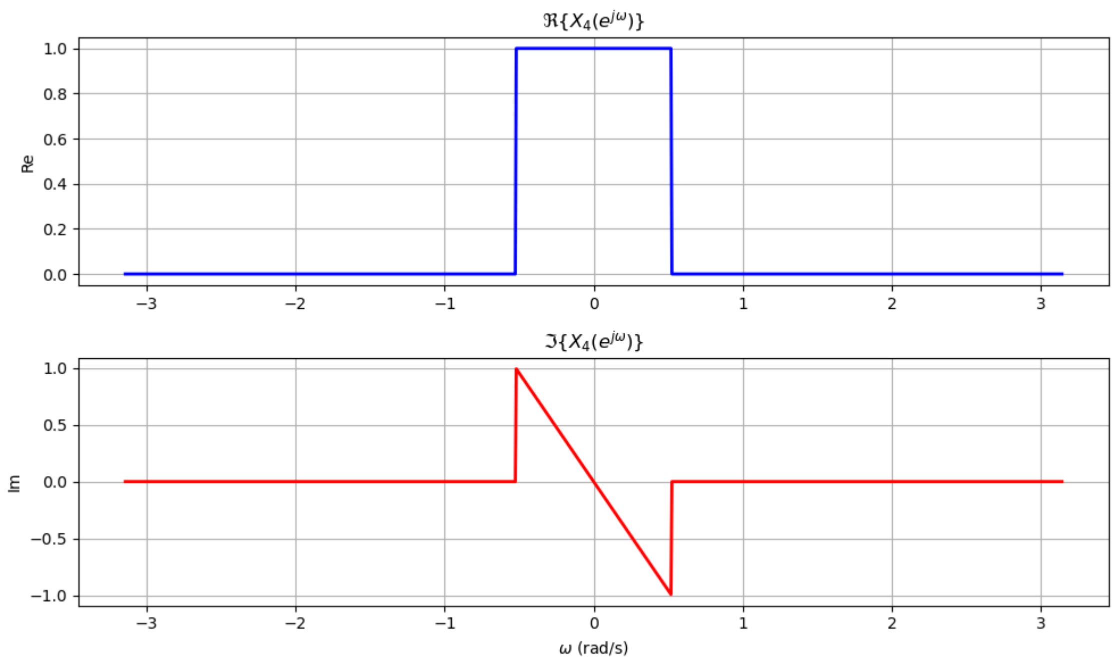
$$X_4(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}).$$

利用上面的方波函数，便有

$$X_4(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}), & |\omega| \le \frac{\pi}{6}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
omega = np.linspace(-np.pi, np.pi, 1000)
X1 = 1 - 1j * omega * 6 / np.pi
# 定义理想低通滤波器 H(e^(j ))
# 当 | | <= /6 时 H=1, 否则 H=0
```

```
H = np.zeros_like(omega)
H[np.abs(omega) <= np.pi/6] = 1
# 计算 X4(e^(j )) = X1(e^(j )) * H(e^(j ))
X4 = X1 * H
# 绘制 X4(e^(j )) 的实部和虚部
plt.figure(figsize=(10, 6))
# 实部
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(omega, np.real(X4), 'b-', lw=2)
plt.title(r'$\Re\{X_4(e^{j\omega})\}$')
plt.ylabel('Re')
plt.grid(True)
# 虚部
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(omega, np.imag(X4), 'r-', lw=2)
plt.title(r'$\Im\{X_4(e^{j\omega})\}$')
plt.xlabel(r'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel('Im')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



4 5.21(k)

求傅立叶变换

$$x[n] = \left(\frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right)$$

4.1 Answer

1. **理想低通滤波器的 DTFT：**
   设
   $$h[n] = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n},$$
   则已知其 DTFT 为
   $$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\pi}{5}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{5}. \end{cases}$$
   也就是说，$H(e^{j\omega})$ 就是一个截止频率为 $\pi/5$ 的矩形函数。

2. **乘以余弦的调制性质：**
   利用欧拉公式，有
   $$\cos\Bigl(\frac{7\pi}{2}n\Bigr) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{7\pi}{2}n} + e^{-j\frac{7\pi}{2}n}\right).$$
   根据傅立叶变换的调制性质，如果信号 $h[n]$ 的傅立叶变换为 $H(e^{j\omega})$，则
   $$h[n]\,e^{\pm j\frac{7\pi}{2}n} \quad \Longleftrightarrow \quad H\Bigl(e^{j(\omega\mp\frac{7\pi}{2})}\Bigr).$$

因此，由线性性和调制定理，我们可将

$$x[n] = h[n]\cos\Bigl(\frac{7\pi}{2}n\Bigr)$$

写成

$$x[n] = \frac{1}{2}\Bigl\{h[n]e^{j\frac{7\pi}{2}n} + h[n]e^{-j\frac{7\pi}{2}n}\Bigr\}.$$

对应的 DTFT 为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{H\Bigl(e^{j(\omega-\frac{7\pi}{2})}\Bigr) + H\Bigl(e^{j(\omega+\frac{7\pi}{2})}\Bigr)\right\}.$$

由于 $H(e^{j\omega})$ 是理想低通型，我们可写出

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\Bigl\{\mathbf{1}_{|\omega-\frac{7\pi}{2}|\le\pi/5} + \mathbf{1}_{|\omega+\frac{7\pi}{2}|\le\pi/5}\Bigr\},$$

其中 $\mathbf{1}_A$ 表示当条件 A 成立时取 1，否则取 0。

接下来我们将这两个频带移动到主频带 $(-\pi, \pi]$（因为 DTFT 具有 2π 周期性）。

有

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{ll} 1, & \omega \in [-0.7\pi,\, -0.3\pi] \cup [0.3\pi,\, 0.7\pi], \\ 0, & \text{otherwise}. \end{array} \right.$$

5 5.33

差分方程为

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

求系统响应

5.1 (b. iv) 输入为 $x[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$

由差分方程的性质，有

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{\sum_{k=0}^{m}b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{n}a_k e^{-jk\omega}}$$

故当 $a_0=1$， $a_1=\frac{1}{2}$， $b_0=1$ 时，有

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

故

$$h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

根据线性时不变系统的卷积原理，

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,h[n-k].$$

由于 $x[n]$ 只有在 $n=0$ 与 $n=1$ 处非零，上式可以写为

$$y[n]=x[0]\,h[n]+x[1]\,h[n-1]=h[n]-\frac{1}{2}\,h[n-1].$$

接下来代入 $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$：

- 当 $n=0$ 时，由于 $h[-1]=0$（因果性），

$$y[0]=h[0]-\frac{1}{2}\,h[-1]=1-0=1.$$

- 当 $n\geq 1$ 时，

$$y[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

因此，

$$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

综上所述，

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 1, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

5.2 (c. i) $X(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{-1/2}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}} + \frac{3/2}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}$$

利用常用变换对，有

$$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{4}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$