Assignment8

March 27, 2025

1 3.35

考虑一个连续时间线性时不变系统 S，其频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq 250 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当输入到系统的信号 $x(t)$ 的基波周期为 $T = \frac{\pi}{7}$，傅立叶级数系数为 a_k 时，发现输出 $y(t) = x(t)$。问对于什么样的 k 值，才有 $a_k = 0$?

1.1 Answer

输入信号基波频率为

$$T = \frac{\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 14,$$

又因为系统输入

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 t}$$

故响应信号 $y(t)$ 为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(j\omega_0 k) e^{j\omega_0 kt}$$

第 k 个谐波对应频率为

$$\omega_k = 14k.$$

由于系统频率响应

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq 250, \\ 0, & |\omega| < 250, \end{cases}$$

要求 $y(t) = x(t)$ 则输入信号中被滤除的部分（即 $|\omega| < 250$）不存在，因此必须满足

$$|\omega_k| < 250 \quad \Rightarrow \quad |14k| < 250 \quad \Rightarrow \quad |k| < \frac{250}{14} < 18.$$

因为 k 为整数，所以当

$$|k| \le 17 \quad (k = -17, -16, \dots, 0, \dots, 16, 17)$$

时，必有 $a_k = 0$。

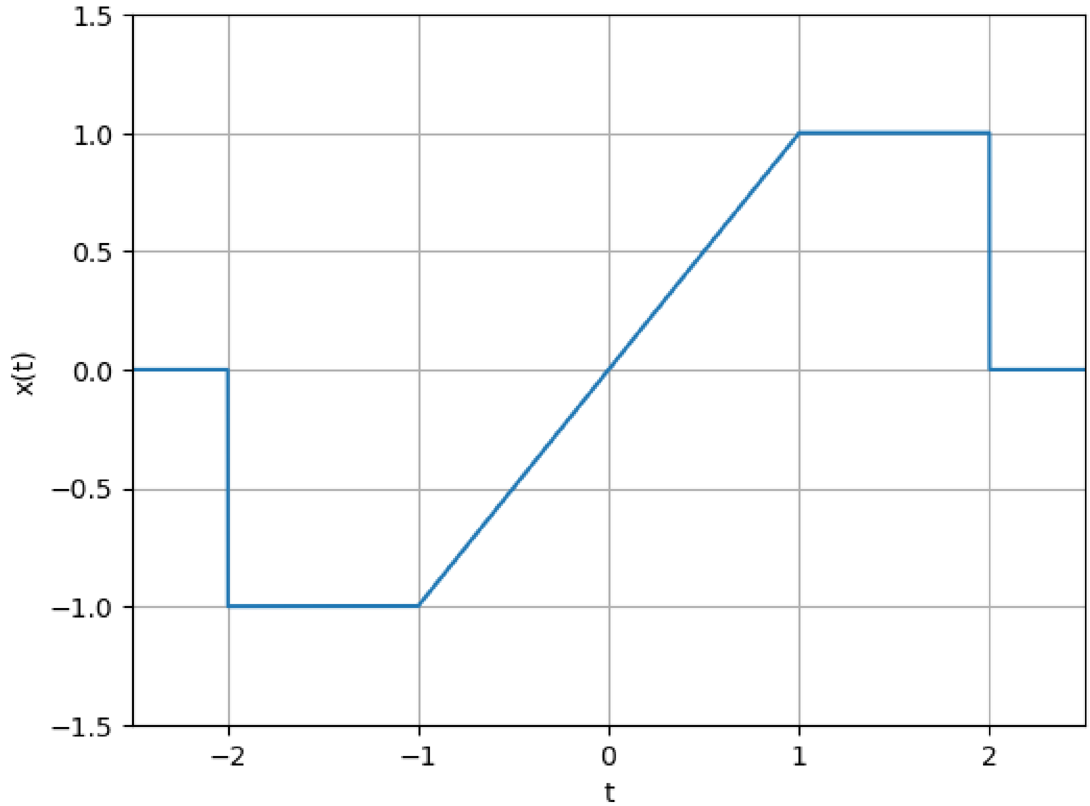
2 4.21(g)

求下列信号的傅立叶变换。

[34]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

eps = 1e-3
x = np.linspace(-2.5, 2.5, 100000)
y = []
for xi in x:
    if xi < -2:
        y.append(0)
        continue
    if xi > 2:
        y.append(0)
        continue
    if np.abs(xi + 2) < eps:
        y.append(0)
    elif xi <= -1:
        y.append(-1)
    elif xi <= 1:
        y.append(xi)
    elif np.abs(xi - 2) < eps:
        y.append(0)
    else:
        y.append(1)
plt.plot(x, y)
# 设置坐标轴刻度
plt.grid()
plt.xlim(-2.5, 2.5)
plt.ylim(-1.5, 1.5)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x(t)')
plt.show()
```



给定信号

$$x(t)=\begin{cases}0, & t<-2\ \text{或} t>2,\\ -1, & -2\le t<-1,\\ t, & -1\le t\le 1,\\ 1, & 1<t\le 2,\end{cases}$$

其傅立叶变换定义为

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt.$$

由 $x(t)$ 的分段定义，上式可分为三部分积分：

$$X(j\omega)=I_1+I_2+I_3,$$

其中

$$I_1=-\int_{-2}^{-1} e^{-j\omega t}\,dt,\quad I_2=\int_{-1}^{1} t\,e^{-j\omega t}\,dt,\quad I_3=\int_{1}^{2} e^{-j\omega t}\,dt.$$

2.1 1. 计算 I_1

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{-2}^{-1} e^{-j\omega t}\,dt = -\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{t=-2}^{-1} \\
&= \frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega(-1)} - e^{-j\omega(-2)}\right) = \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{2j\omega}\right).
\end{aligned}
$$

2.2 2. 计算 I_2

利用分部积分法，令

$$
u = t,\quad dv = e^{-j\omega t}\,dt,\quad du = dt,\quad v = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}.
$$

则

$$
\begin{aligned}
I_2 &= t\cdot\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\bigg|_{t=-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\,dt \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\,t\right]_{t=-1}^{1} + \frac{1}{j\omega}\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\,dt \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega}\cdot 1 - (-1)\,e^{j\omega}\right) - \frac{1}{(j\omega)^2}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right) - \frac{1}{(j\omega)^2}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right).
\end{aligned}
$$

注意到

$$
e^{-j\omega} + e^{j\omega} = 2\cos\omega,\quad e^{-j\omega} - e^{j\omega} = -2j\sin\omega,\quad (j\omega)^2 = -\omega^2,
$$

从而

$$
\frac{1}{(j\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2},
$$

故

$$
I_2 = -\frac{2\cos\omega}{j\omega} + \frac{2j\sin\omega}{\omega^2} = 2j\left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right).
$$

2.3 3. 计算 I_3

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{1}^{2} e^{-j\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{t=1}^{2} \\
&= \frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}\right).
\end{aligned}
$$

故信号的傅立叶变换为

$$
\boxed{X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{2j\omega} + e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}\right) + 2j\left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right).}
$$

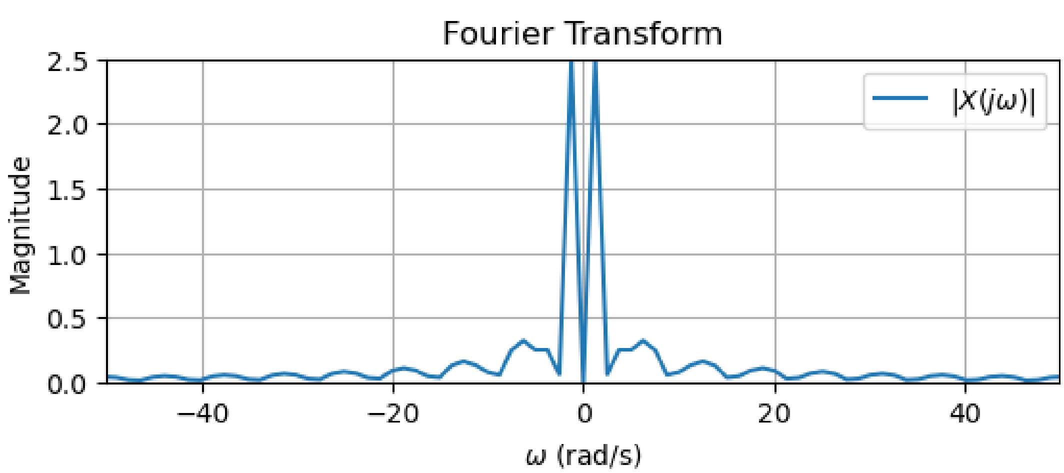
[35]:

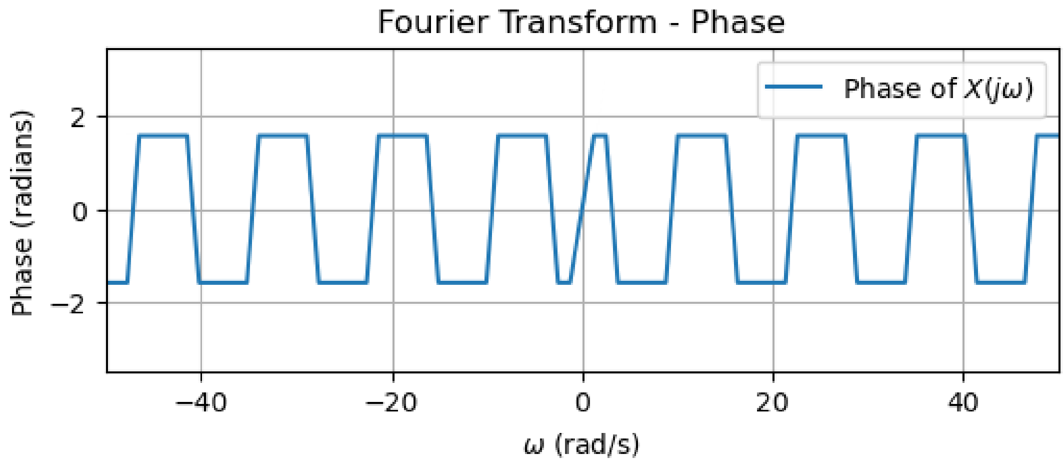
```python
# 计算傅立叶变换（采用 FFT 离散近似连续 FT）
N = len(y)
dt = x[1] - x[0]  # 采样间隔
```

```python
# FFT 计算后乘以 dt 作为离散傅立叶变换的近似积分
Y = np.fft.fftshift(np.fft.fft(y)) * dt
# 对应频率轴 & 转换到角频率 omega
freq = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N, d=dt))  # 单位: Hz
omega = 2 * np.pi * freq  # 单位: rad/s

# 绘制傅立叶变换幅度谱
plt.figure()
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(omega, np.abs(Y), label='|$X(j\\omega)$|')
plt.xlim(-50, 50)
plt.ylim(0, 2.5)
plt.xlabel(r'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel('Magnitude')
plt.title('Fourier Transform')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# 计算相位谱
phase = np.angle(Y)
# 绘制傅立叶变换相位谱
plt.figure()
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(omega, phase, label='Phase of $X(j\\omega)$')
plt.xlim(-50, 50)
plt.xlabel(r'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel('Phase (radians)')
plt.title('Fourier Transform - Phase')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```





3 4.22

求下列变换对应的连续信号。

3.1 (c)

给定变换

$$|X(j\omega)| = \begin{cases} -\omega, & -1 \le \omega \le 0, \\ \omega, & 0 \le \omega \le 1, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\angle X(j\omega) = -3\omega.$$

由此有

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)} = \begin{cases} -\omega\, e^{-j3\omega}, & -1 \le \omega \le 0, \\ \omega\, e^{-j3\omega}, & 0 \le \omega \le 1, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

连续信号由傅立叶反变换给出

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

将积分分为两部分，

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-1}^{0}(-\omega)e^{-j3\omega}e^{j\omega t}d\omega + \int_{0}^{1}\omega\, e^{-j3\omega}e^{j\omega t}d\omega\right].$$

对第一项，令 $\omega = -\nu$，则

$$\int_{-1}^{0} (-\omega) e^{-j3\omega} e^{j\omega t} d\omega = \int_{1}^{0} \nu\, e^{-j3(-\nu)} e^{j(-\nu)t} (-d\nu)$$
$$= \int_{0}^{1} \nu\, e^{j3\nu} e^{-j\nu t} d\nu.$$

因此，

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{0}^{1} \nu\, e^{j3\nu} e^{-j\nu t} d\nu + \int_{0}^{1} \omega\, e^{-j3\omega} e^{j\omega t} d\omega \right]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} \omega \Big[e^{j\omega(3-t)} + e^{-j\omega(3-t)} \Big] d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} 2\omega\, \cos(\omega(3-t)) d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \omega\, \cos(\omega(3-t)) d\omega.$$

令 $a = 3 - t$，使用积分公式

$$\int \omega \cos(a\omega) d\omega = \frac{\omega \sin(a\omega)}{a} + \frac{\cos(a\omega)}{a^2} + C,$$

则

$$\int_{0}^{1} \omega \cos(a\omega) d\omega = \frac{\sin a}{a} + \frac{\cos a - 1}{a^2}.$$

故最终连续信号为

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(3-t)}{3-t} + \frac{\cos(3-t) - 1}{(3-t)^2} \right].}$$

3.2 (d)

给出

$$X(j\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$$

连续信号为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(2(e^{j} - e^{-j}) + 3(e^{2\pi j} + e^{-2\pi j}) \right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \Big\{ 2\Big(2j \sin t\Big) + 3\Big(2\cos(2\pi t)\Big) \Big\}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(4j \sin t + 6\cos(2\pi t) \right)$$
$$= \frac{2j \sin t}{\pi} + \frac{3\cos(2\pi t)}{\pi}.$$

因此，信号的时域表达式为

$$\boxed{x(t) = \frac{2j\sin t}{\pi} + \frac{3\cos(2\pi t)}{\pi}}\,.$$