assn04

April 23, 2025

1 3

证明函数

$$1, x, x^2, \cdots, x^n$$

线性无关。

1.1 Proof

我们取实数范围内 $n+1$ 个互异点 $x_0, x_1, \dots, x_n$，考虑下列齐次线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵为 Vandermonde 矩阵，故其行列式为

$$\det(V) \ = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

由于选取的点两两不同，故 $\det(V) \neq 0$，该齐次方程组仅有平凡解

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

因此，集合

$$\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$$

线性无关。

2 4

计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty, \|f\|_1, \|f\|_2$

(1) $f(x) = (x-1)^2$

(2) $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$

(3) $f(x)=x^m(1-x)^n$，m 与 n 为正整数

2.1 Solution

2.1.1 (1)

$$\|f\|_\infty = 1.$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 \left[(x-1)^2\right]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (x-1)^4\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2.1.2 (2)

在 $[0,1]$ 上，$\left|x-\frac{1}{2}\right|$ 的最大值出现在 $x=0$ 和 $x=1$，均有

$$\left|0-\frac{1}{2}\right| = \left|1-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

因此，

$$\|f\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|\,dx = 2\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-x\right)\,dx = \frac{1}{8}.$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

2.2 (3)

对于 $m,n>0$，在 $[0,1]$ 上端点处 $f(0)=f(1)=0$，函数在内部取得最大值。令 $g(x)=\ln f(x)=m\ln x+n\ln(1-x)$，求导得到：

$$g'(x) = \frac{m}{x} - \frac{n}{1-x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{m}{m+n}.$$

代入得最大值：

$$\|f\|_\infty = \left(\frac{m}{m+n}\right)^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^n.$$

根据 Beta 函数，有

$$\|f\|_1 = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = B(m+1,n+1) = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 x^{2m}(1-x)^{2n}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{B(2m+1, 2n+1)},$$

其中,

$$B(2m+1, 2n+1) = \frac{(2m)!\,(2n)!}{(2m+2n+1)!}.$$

3 5

证明

$$\|f-g\| \geqslant \|f\| - \|g\|$$

3.1 Proof

根据三角不等式，对于任意 f, g 有

$$\|f\| = \|(f-g)+g\| \leqslant \|f-g\| + \|g\|.$$

由此可以得到

$$\|f\| - \|g\| \leqslant \|f-g\|.$$

整理后即得:

$$\|f-g\| \geqslant \|f\| - \|g\|.$$

证毕。

4 6

对 $f(x), g(x) \in C^1[a,b]$，定义

(1)

$$(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\, dx$$

(2)

$$(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)\, dx + f(a)g(a)$$

问它们是否构成内积。

4.1 Solution

4.1.1 (1)

对称性和 **线性性**容易验证。检查正定性:
要求对于任意 f 有

$$(f,f)=\int_a^b [f'(x)]^2\,dx \geq 0,$$

且当且仅当 $f\equiv 0$ 时有 $(f,f)=0$。

注意到如果 f 为常数函数（例如 $f(x)=C$，其中 $C\neq 0$），则有

$$f'(x)=0,\quad \forall x\in[a,b],$$

从而

$$(f,f)=\int_a^b 0^2\,dx=0,$$

但 $f\not\equiv 0$。不满足内积的正定性条件。

故定义 (1) 不能构成内积。

4.1.2 (2)

同样，显然该式满足**对称性**和**线性性**。接下来验证**正定性**:
对任意 $f\in C^1[a,b]$，有

$$(f,f)=\int_a^b [f'(x)]^2\,dx+f(a)^2.$$

显然两个部分均非负，因此 $(f,f)\geq 0$。若 $(f,f)=0$，则必有

$$\int_a^b [f'(x)]^2\,dx=0 \quad 且 \quad f(a)^2=0.$$

由积分为零可知 $f'(x)=0$ 几乎处处成立，从而 f 为常数函数；又 $f(a)=0$ 故 $f\equiv 0$。

故定义 (2) 构成内积。

5 7

令

$$T_n^*(x)=T_n(2x-1),\quad x\in[0,1],$$

其中 $T_n(x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式，即

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

证明集合 $\{T_n^*(x)\}_{n\geq 0}$ 在区间 $[0,1]$ 上关于权函数

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

是正交多项式序列，并求出 $T_0^*(x), T_1^*(x), T_2^*(x), T_3^*(x)$ 的显式表达式。

5.1 Proof

对任意连续函数 $f(x)$，作变量代换

$$t = 2x - 1, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t+1}{2}, \quad dx = \frac{dt}{2}.$$

注意到

$$x - x^2 = \frac{t+1}{2}\Big(1 - \frac{t+1}{2}\Big) = \frac{1-t^2}{4},$$

故有

$$\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}, \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}.$$

因此，积分

$$\int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x)\, \rho(x)\, dx$$

经过代换变为

$$\int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t)\, \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{2} = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Chebyshev 多项式具有正交性质

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0, \quad n \neq m.$$

因此可知

$$\int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \quad n \neq m,$$

正交性得证。

5.2 Solution

已知 Chebyshev 多项式的标准表达式为

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

由定义 $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$，直接计算可得：

1. 当 $n = 0$ 时，

$$T_0^*(x) = T_0(2x-1) = 1.$$

2. 当 $n=1$ 时,

$$T_1^*(x) = T_1(2x-1) = 2x-1.$$

3. 当 $n=2$ 时,

$$\begin{aligned} T_2^*(x) &= T_2(2x-1) = 2(2x-1)^2 - 1 \\ &= 2\Big[4x^2 - 4x + 1\Big] - 1 = 8x^2 - 8x + 2 - 1 \\ &= 8x^2 - 8x + 1. \end{aligned}$$

4. 当 $n=3$ 时,

$$\begin{aligned} T_3^*(x) &= T_3(2x-1) = 4(2x-1)^3 - 3(2x-1). \\ &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1. \end{aligned}$$

6 8

对权函数 $\rho(x) = 1 + x^2$，区间 $[-1, 1]$，求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, 3$

6.1 Solution

采用施密特（Gram–Schmidt）正交化方法

取基中最低次项:

$$\varphi_0(x) = 1.$$

其首项系数为 1。

取 $f_1(x) = x$。正交化公式为

$$\varphi_1(x) = f_1(x) - \frac{\langle f_1, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0(x).$$

计算

$$\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} x(1+x^2)\, dx.$$

注意积分区间下 $x(1+x^2)$ 为奇函数，其积分为 0，因此

$$\varphi_1(x) = x.$$

取 $f_2(x) = x^2$，先写出

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0(x) - \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \varphi_1(x).$$

计算各内积:

1. 与 $\varphi_0(x) = 1$：

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + x^4)\, dx = \frac{16}{15},$$

而

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (1 + x^2)\, dx = \frac{8}{3}.$$

因此第一投影系数为

$$a_{20} = \frac{16/15}{8/3} = \frac{2}{5}.$$

2. 与 $\varphi_1(x) = x$：

$$\langle x^2, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^3(1 + x^2)\, dx,$$

因为 (x^{3(1+x}2)) 奇函数，积分为 0，因此第二投影系数为 0。

综上，

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}.$$

取 $f_3(x) = x^3$。由于 x^3 为奇函数，我们可设形式为

$$\varphi_3(x) = x^3 + \beta\, x,$$

（此时不含偶次项，保证不受前面偶函数的影响）。

要求 $\varphi_3(x)$ 与 $\varphi_1(x) = x$ 正交，即

$$\langle x^3 + \beta x,\, x\rangle = 0.$$

计算：

$$\langle x^3, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^4(1 + x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} (x^4 + x^6)\, dx = \frac{24}{35},$$

且

$$\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2(1 + x^2)\, dx = \frac{16}{15}.$$

故有

$$\frac{24}{35} + \beta\frac{16}{15} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \beta = -\frac{9}{14}.$$

因此，

$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{9}{14}\, x.$$

其他正交条件（与 φ_0 和 φ_2）可通过奇偶性验证（因为奇函数与偶函数正交）。

综上所述，

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1,\\
\varphi_1(x) &= x,\\
\varphi_2(x) &= x^2 - \frac{2}{5},\\
\varphi_3(x) &= x^3 - \frac{9}{14}\,x.
\end{aligned}
$$

7 11

用 $T_3(x)$ 的零点做插值点，求 $f(x) = e^x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的二次插值多项式，并估计最大误差界。

7.1 Solution

已知第一类 Chebyshev 多项式

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

其零点为

$$x_0 = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = -\cos\frac{3\pi}{6} = 0, \quad x_2 = -\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此选取插值节点为

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

构造 Lagrange 基函数

- 对于 $L_0(x)$：

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{2}{3}x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

- 对于 $L_1(x)$：

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{3 - 4x^2}{3}.$$

- 对于 $L_2(x)$：

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{2}{3}x\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

利用 Lagrange 插值公式得：

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x).$$

由于

$$f(x) = e^x, \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

故

$$P_2(x) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{2}{3}x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3-4x^2}{3} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{2}{3}x\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

根据定理 7 有

$$\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - L_n(x)| \le \frac{1}{2^n(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}(x)\right\|_\infty$$

故二次插值（$n=2$）的最大误差满足

$$|f(x)-P_2(x)| \le \frac{1}{2^2\cdot 3!}\max_{-1\le x\le 1}|f^{(3)}(x)|.$$

对于 $f(x)=e^x$，其三阶导数仍为 e^x，在区间 $[-1,1]$ 上有最大值 e。因此，

$$\max_{-1\le x\le 1}|e^x-P_2(x)| \le \frac{e}{24}.$$

因此，该二次插值多项式在 $[-1,1]$ 上的最大误差界为 $e/24$。