assn01

March 28, 2025

1 2

设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差。

1.1 Answer

已知 x 的相对误差为

$$\frac{|x^* - x|}{|x|} = 0.02,$$

考虑函数

$$f(x) = x^n.$$

利用泰勒展开，并忽略高阶项，x^* 对应的 $f(x^*)$ 可近似写为

$$f(x^*) \approx f(x) + f'(x)(x^* - x),$$

其中

$$f'(x) = n\,x^{n-1}.$$

因此，$f(x) = x^n$ 的绝对误差近似为

$$f^* \approx |f'(x)||(x^* - x)| = n\,x^{n-1}\,|x^* - x|.$$

将 $f(x) = x^n$ 代入，可得相对误差

$$\frac{f^*}{f(x)} \approx \frac{n\,x^{n-1}\,|x^* - x|}{x^n} = n\,\frac{|x^* - x|}{x}.$$

带入得，

$$\frac{f^*}{f(x)} \approx n \cdot 0.02.$$

即，x^n 的相对误差为

$$\boxed{2\% \times n.}$$

2 5

计算球体的体积要使相对误差限为 1%，那么测量半径 R 的允许相对误差是多少?

2.1 Answer

球体体积的公式为

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

对 R 的误差进行泰勒展开近似，可得体积的相对误差为

$$\frac{V*}{V} \approx 3\,\frac{R^*}{R}.$$

体积的相对误差不超过 1%，即

$$\frac{V^*}{V} \leq 0.01.$$

因此有：

$$3\,\frac{R^*}{R} \leq 0.01.$$

解得

$$\frac{R^*}{R} \leq \frac{0.01}{3} \approx 0.00333,$$

所以，测量半径 R 的允许相对误差为

$$\boxed{0.33\%.}$$

3 7

求方程的两个根，使它至少具有 4 位有效数字

$$x^2 - 56x + 1 = 0$$

($\sqrt{783} \approx 27.982$)

3.1 Answer

使用求根公式，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

当 $a = 1$, $b = -56$, $c = 1$ 时

$$x = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{56 \pm \sqrt{3132}}{2} = 28 \pm \sqrt{783}.$$

因此两根近似值为

$$\boxed{\begin{aligned} &x_0 \approx 28 + 27.982 = 55.982, \\ &x_1 \approx 28 - 27.982 = 0.018 \end{aligned}}$$

4 9

正方形的边长大约为 $100\,\mathrm{cm}$, 怎样测量才能使其面积误差不超过 $1\,\mathrm{cm}^2$?

4.1 Answer

设正方形边长为 L 绝对误差为 L^*, 则面积 $A = L^2$ 的绝对误差为为:

$$A^* \approx 2L\,L^*.$$

由题意知,

$$2L\,L^* \leq 1.$$

令 $L \approx 100cm$, 有

$$2 \times 100\,L^* \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 200\,L^* \leq 1.$$

所以,

$$\boxed{L^* \leq \frac{1}{200} = 0.005\,\mathrm{cm}.}$$

5 11

给定序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n = 10\,y_{n-1} - 1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

并且初值 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（保留三位有效数字），求计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程是否稳定？

5.1 Answer

由递推关系知，每次迭代，误差变化为

$$|y_n^* - y_n| = 10|y_{n-1}^* - y_{n-1}|$$

即每次迭代会将绝对误差放大 10 倍。

初值的绝对误差为

$$|y_0^* - y_0| = \left|1.41 - \sqrt{2}\right| \lesssim \frac{1}{2} \times 10^{-2}.$$

经过 n 步迭代后，误差放大为

$$|y_n^* - y_n| = 10^n\,|y_0^* - y_0|.$$

当 $n = 10$ 时，误差约为

$$|y_{10}^* - y_{10}| \approx 10^{10}\,|y_0^* - y_0| \approx 5 \times 10^7.$$

绝对误差的数量级大约为 5×10^7，远大于合理的计算值。

这种初始误差的指数级放大表明，该计算过程是不稳定的。

[2]:
```python
import numpy as np

y_exact = np.sqrt(2)
y_approx = 1.41

n = 10

for i in range(1, n+1):
    y_exact = 10 * y_exact - 1
    y_approx = 10 * y_approx - 1

error = abs(y_exact - y_approx)

print("Exact y10:   ", y_exact)
print("Approx y10:  ", y_approx)
print("Error in y10:", error)
```

```
Exact y10:    13031024512.73095
Approx y10:   12988888889.0
Error in y10: 42135623.7309494
```

程序运行结果表明，估计是准确的。

5.2 12

计算

$$f = (\sqrt{2} - 1)^6,$$

取近似值 $\sqrt{2} \approx 1.4$，并利用下列等式计算

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^6}, \quad (3-2\sqrt{2})^3, \quad \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}, \quad 99 - 70\sqrt{2},$$

哪一个得到的结果最好?

6 Answer

$$若 f(x) \text{ 依赖于} x, \quad f^* \approx |f'(x)||x^* - x|, \quad 则相对误差为 \frac{f^*}{f(x)} \approx \left|\frac{d\ln f}{dx}\right| |x^* - x|.$$

令 $x = \sqrt{2}$, $x^* = 1.4$，则 $|x^* - x| \lesssim 0.5 \times 10^{-1}$

1. $f = \frac{1}{(1+x)^6}$

   记 $g(x) = (1+x)^{-6}$。则

$$\ln g(x) = -6\ln(1+x), \quad \frac{d\ln g(x)}{dx} = -\frac{6}{1+x}.$$

   用近似值 $x \approx 1.4$ 得

$$\left|\frac{d\ln g}{dx}\right| \approx \frac{6}{1+1.4} = \frac{6}{2.4} = 2.5.$$

即近似 $\sqrt{2}$ 的相对误差会被放大约 2.5 倍。

2. $f=(3-2x)^3$

   令 $h(x)=(3-2x)^3$。则

$$\ln h(x)=3\ln(3-2x), \quad \frac{d\ln h(x)}{dx}=\frac{-6}{3-2x}.$$

   对 $x\approx 1.4$ 有

$$\left|\frac{d\ln h(x)}{dx}\right|\approx\frac{6}{0.2}=30.$$

   这表示相对误差被放大 30 倍。

3. $f=\frac{1}{(3+2x)^3}$

   记 $q(x)=(3+2x)^{-3}$。则

$$\ln q(x)=-3\ln(3+2x), \quad \frac{d\ln q(x)}{dx}=-\frac{6}{3+2x}.$$

   当 $x\approx 1.4$ 时，

$$\left|\frac{d\ln q(x)}{dx}\right|\approx\frac{6}{5.8}\approx 1.03.$$

   相对误差仅放大约 1.03 倍。

4. $f=99-70x$ 记 $p(x)=99-70x$。则

$$\ln p(x)=\ln(99-70x), \quad \frac{d\ln p(x)}{dx}=-\frac{70}{99-70x}$$

   当 $x\approx 1.4$ 时，

$$\left|\frac{d\ln p(x)}{dx}\right|\approx\frac{70}{1}=70$$

   相对误差被放大 70 倍。

结论：

在这四种表达中，使用

$$\boxed{f=\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}}$$

的表达对 $\sqrt{2}$ 的近似误差最不敏感，因此给出的计算结果最准确。

7 14

用秦九韶算法求多项式

$$p(x)=3x^5-2x^3+x+7$$

在 $x=3$ 处的值。

7.1 Answer

$$p(3) = 3 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 7$$

$$= (((3 \cdot 3 + 0) \cdot 3 - 2) \cdot 3 + 0) \cdot 3 + 1) \cdot 3 + 7$$

$$\text{故} b_5 = 3,$$

$$b_4 = 3 \cdot 3 + 0 = 9,$$

$$b_3 = 9 \cdot 3 - 2 = 27 - 2 = 25,$$

$$b_2 = 25 \cdot 3 + 0 = 75,$$

$$b_1 = 75 \cdot 3 + 1 = 225 + 1 = 226,$$

$$b_0 = 226 \cdot 3 + 7 = 678 + 7 = 685.$$

因此，

$$\boxed{p(3) = 685.}$$

8 1

当 $x = 1, -1, 2$ 时

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = -3, \quad f(2) = 4,$$

求 $f(x)$ 的二次插值多项式.

8.1 (1) 用单项式基底

8.1.1 Answer

$$\begin{aligned} \text{令} p(x) &= ax^2 + bx + c. \\ \text{得} x = 1: \quad & a + b + c = 0, \\ x = -1: \quad & a - b + c = -3, \\ x = 2: \quad & 4a + 2b + c = 4. \end{aligned}$$

因此解得

$$a = \frac{5}{6}$$
$$b = \frac{3}{2}$$
$$c = -\frac{7}{3}$$

因此，

$$\boxed{p(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}.}$$

8.2 (2) 使用拉格朗日基底

8.2.1 Answer

$$(1, 0), \quad (-1, -3), \quad (2, 4).$$

拉格朗日多项式表示如下

$$p(x) = \sum_{j=1}^{3} f(x_j) L_j(x),$$

拉格朗日函数为

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{3} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

设

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2,$$

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = -3, \quad f(2) = 4,$$

计算：

1. $x_1 = 1$:
$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(1 - (-1))(1 - 2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(2)(-1)} = -\frac{(x + 1)(x - 2)}{2}.$$

2. $x_2 = -1$:
$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(-1 - 1)(-1 - 2)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(-2)(-3)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{6}.$$

3. $x_3 = 2$:
$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(2 - 1)(2 - (-1))} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(1)(3)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{3}.$$

故多项式可表示为

$$p(x) = 0 \cdot L_1(x) - 3 \cdot L_2(x) + 4 \cdot L_3(x).$$

即

$$\boxed{p(x) = -3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)}{6} + 4 \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{3}.}$$

9 3

给出 $f(x) = \ln x$ 的数值表:

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

使用线性插值和二次插值计算 $\ln(0.54)$ 的近似值.

9.1 Answer

线性插值

选取 $x_0 = 0.5$，$f(x_0) = \ln(0.5) = -0.693147$ 以及 $x_1 = 0.6$，$f(x_1) = \ln(0.6) = -0.510826$. 有

$$\ln(0.54) \approx \ln(0.5) + \frac{\ln(0.6) - \ln(0.5)}{0.6 - 0.5}(0.54 - 0.5).$$

即,

$$\ln(0.54) \approx -0.693147 + \frac{-0.510826 + 0.693147}{0.1}(0.04)$$

$$\ln(0.54) \approx -0.693147 + \frac{0.182321}{0.1}(0.04)$$

$$\ln(0.54) \approx -0.693147 + 1.82321 \times 0.04 \approx -0.693147 + 0.072928 \approx -0.620219.$$

二次插值

选取三个点 $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0.7$,

$$f(0.5) = -0.693147, \quad f(0.6) = -0.510826, \quad f(0.7) = -0.356675.$$

$x = 0.54$ 时，拉格朗日基底为:

$$L_0(0.54) = \frac{(0.54 - 0.6)(0.54 - 0.7)}{(0.5 - 0.6)(0.5 - 0.7)} = \frac{(-0.06)(-0.16)}{(-0.1)(-0.2)} = \frac{0.0096}{0.02} = 0.48,$$

$$L_1(0.54) = \frac{(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.7)}{(0.6 - 0.5)(0.6 - 0.7)} = \frac{(0.04)(-0.16)}{(0.1)(-0.1)} = \frac{-0.0064}{-0.01} = 0.64,$$

$$L_2(0.54) = \frac{(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)}{(0.7 - 0.5)(0.7 - 0.6)} = \frac{(0.04)(-0.06)}{(0.2)(0.1)} = \frac{-0.0024}{0.02} = -0.12.$$

故，二次插值估计为

$$\ln(0.54) \approx f(0.5)L_0(0.54) + f(0.6)L_1(0.54) + f(0.7)L_2(0.54)$$

$$\ln(0.54) \approx (-0.693147)(0.48) + (-0.510826)(0.64) + (-0.356675)(-0.12).$$

$$\ln(0.54) \approx -0.332711 - 0.326928 + 0.042801 \approx -0.616838.$$

因此，

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{线性插值:} & \ln(0.54) \approx -0.6202, \\ \text{二次插值:} & \ln(0.54) \approx -0.6168. \end{array}}$$