Assignment20

June 3, 2025

1 9.35

1.1 (a)

$$y(t) + 2\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - \frac{dx(t)}{dt} - 6\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

1.2 (b)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 - s - 6s^2}{1 + 2s + s^2} = \frac{(1-3s)(1+2s)}{(1+s)^2}$$

故系统的极点为 $s = -1$，由于系统为因果系统，且极点在左半平面，故该系统稳定

2 9.40

2.1 (a)

当初始条件均为 0 且输入

$$x(t) = e^{-4t}u(t) \quad \Longrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+4},$$

对方程

$$y'''(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t) = x(t)$$

作单边拉普拉斯变换，由于零初始条件，变换后为

$$\left[s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right] Y(s) = \frac{1}{s+4}.$$

注意因式分解

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+1)(s+2)(s+3),$$

因此

$$Y(s) = \frac{1}{(s+4)(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

接下来对 $Y(s)$ 进行部分分式展开，设

$$Y(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3},$$

利用留数法可求得：

- $s=-4$：

$$A=\lim_{s\to -4}(s+4)Y(s)=\frac{1}{(-3)(-2)(-1)}=-\frac{1}{6}.$$

- $s=-1$：

$$B=\lim_{s\to -1}(s+1)Y(s)=\frac{1}{(3)(1)(2)}=\frac{1}{6}.$$

- $s=-2$：

$$C=\lim_{s\to -2}(s+2)Y(s)=\frac{1}{(2)(-1)(1)}=-\frac{1}{2}.$$

- $s=-3$：

$$D=\lim_{s\to -3}(s+3)Y(s)=\frac{1}{(1)(-2)(-1)}=\frac{1}{2}.$$

因此

$$y_{\text{zs}}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=-\frac{1}{6}e^{-4t}u(t)+\frac{1}{6}e^{-t}u(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t).$$

2.2 (b) 零输入响应

设输入 $x(t)=0$，初始条件为

$$y(0^-)=1,\quad y'(0^-)=-1,\quad y''(0^-)=1.$$

对方程作单边拉普拉斯变换时，需引入初始条件项：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'''(t)\}&=s^3Y(s)-s^2y(0^-)-sy'(0^-)-y''(0^-),\\ \mathcal{L}\{y''(t)\}&=s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-),\\ \mathcal{L}\{y'(t)\}&=sY(s)-y(0^-).\end{aligned}$$

因此变换后方程为

$$\begin{aligned}&s^3Y(s)-s^2(1)-s(-1)-1\\ &\quad+6\Big[s^2Y(s)-s(1)-(-1)\Big]\\ &\quad+11\Big[sY(s)-1\Big]+6Y(s)=0.\end{aligned}$$

整理 $Y(s)$ 项和初始条件项，注意 $s^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)$ 最终可化简得到

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}.$$

因此

$$y_{\text{zi}}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=e^{-t}u(t).$$

2.3 (c)

当输入 $x(t) = e^{-4t}u(t)$ 且初始条件如 (b) 所给时，总响应为零阶状态响应与零输入响应之和：

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{\text{zs}}(t) + y_{\text{zi}}(t) \\ &= -\frac{1}{6}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{6}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) + e^{-t}u(t) \\ &= -\frac{1}{6}e^{-4t}u(t) + \frac{7}{6}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t). \end{aligned}$$

3 10.21

求出下列每个序列的 z 变换，画出零-极点图，指出收敛域，并指出序列的傅立叶变换是否存在

3.1 (a)

$\delta[n+5]$

3.2 (g)

$2^n u[-n] + (\frac{1}{4})^n u[n-1]$

3.3 (a)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+5]\, z^{-n} = \ z^{-(-5)} = z^5.$$

收敛域（ROC）

- 对于有限项序列（有限长度的 z 变换），级数在全平面收敛。
- **ROC:** 全部复平面。

傅立叶变换

- 当取 $z = e^{j\omega}$ 时，$X(e^{j\omega}) = e^{j5\omega}$ 明显存在且连续。
- 因此该序列的离散傅立叶变换存在。

3.3.1 (g)

$$x[n] = 2^n u[-n] + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n-1]$$

分成两部分求 z 变换。

第一部分： $x_1[n] = 2^n\, u[-n]$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n\, z^{-n}.$$

令 $m = -n$（当 $n \le 0$ 时 $m \ge 0$），得

$$X_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m}\, z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{z}{2}},$$

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |z| < 2.$$

因此，$X_1(z) = \dfrac{1}{1 - z/2}$，其唯一极点在 $z = 2$。

第二部分： $x_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n\, u[n-1]$

$$X_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n\, z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/4}{z}\right)^n.$$

该级数为几何级数，其和为

$$X_2(z) = \frac{\frac{1}{4z^{-1}}}{1-\frac{1}{4z^{-1}}} = \frac{(1/4)z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}.$$

$$X_2(z) = \frac{1/4}{z-\frac{1}{4}},$$

$$\left|\frac{1}{4z}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |z| > \frac{1}{4}.$$

因此，$X_2(z)$ 的唯一极点在 $z = \frac{1}{4}$。

总 z 变换为

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1/4}{z-\frac{1}{4}}.$$

收敛域（ROC）

因此，两部分共同 ROC 为

$$\frac{1}{4} < |z| < 2.$$

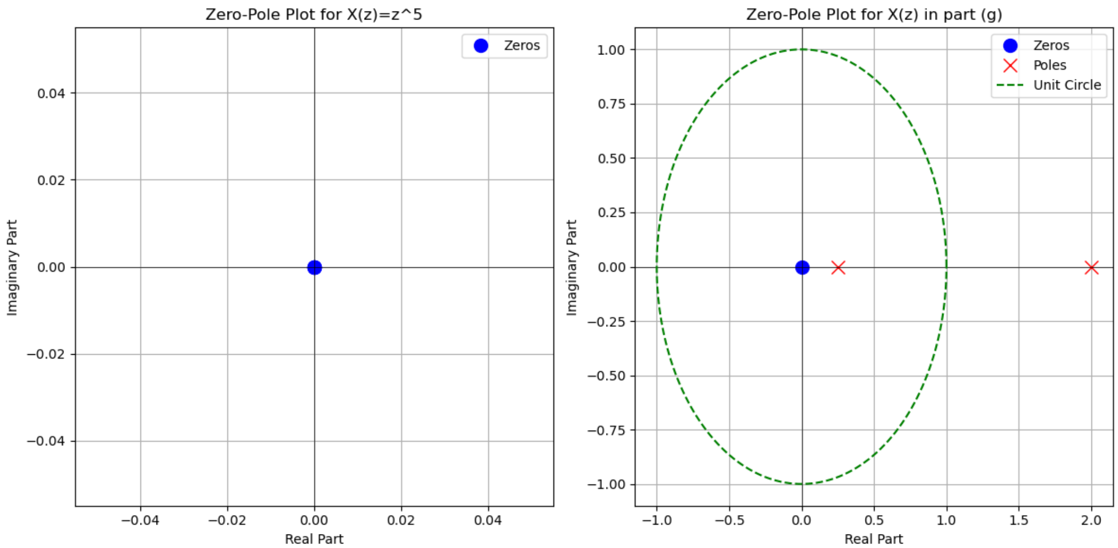
傅立叶变换

- 离散傅立叶变换是取 $z = e^{j\omega}$ 的值。
- 由 ROC $\frac{1}{4} < |z| < 2$ 可知单位圆 $|z| = 1$ 属于 ROC。
- 因此序列的傅立叶变换存在。

[7]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
# 创建包含两个子图的图形
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6))

# -----------------------------
# (a) 序列 X(z)=z^5 的零-极点图
zeros_a = np.zeros(5)       # 5 个零在 z=0
poles_a = np.array([])      # 没有有限极点

axs[0].plot(np.real(zeros_a), np.imag(zeros_a), 'bo', markersize=10,␣
 ↪label='Zeros')
if poles_a.size > 0:
    axs[0].plot(np.real(poles_a), np.imag(poles_a), 'rx', markersize=10,␣
 ↪label='Poles')
axs[0].axhline(0, color='black', lw=0.5)
axs[0].axvline(0, color='black', lw=0.5)
axs[0].set_title("Zero-Pole Plot for X(z)=z^5")
axs[0].set_xlabel("Real Part")
axs[0].set_ylabel("Imaginary Part")
axs[0].legend()
axs[0].grid(True)

# -----------------------------
# (g) 部分的零-极点图
# 合成表达式: X(z)= -(7/4)*z / ((z-2)(z-1/4))
# 零点: z = 0 (单零)
# 极点: z = 2 和 z = 1/4
zeros_g = np.array([0])
poles_g = np.array([2, 0.25])

axs[1].plot(np.real(zeros_g), np.imag(zeros_g), 'bo', markersize=10,␣
 ↪label='Zeros')
axs[1].plot(np.real(poles_g), np.imag(poles_g), 'rx', markersize=10,␣
 ↪label='Poles')
axs[1].axhline(0, color='black', lw=0.5)
axs[1].axvline(0, color='black', lw=0.5)
# 绘制单位圆 (用于验证单位圆属于 ROC: 1/4<|z|<2)
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 400)
axs[1].plot(np.cos(theta), np.sin(theta), 'g--', label='Unit Circle')

axs[1].set_title("Zero-Pole Plot for X(z) in part (g)")
axs[1].set_xlabel("Real Part")
axs[1].set_ylabel("Imaginary Part")
axs[1].legend()
axs[1].grid(True)

plt.tight_layout()
```

```
plt.show()
```


Zero-Pole Plot for X(z)=z^5
Zeros
Imaginary Part
Real Part
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
Zero-Pole Plot for X(z) in part (g)
Zeros
Poles
Unit Circle
1.00
0.75
0.50
0.25
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0