assn06

May 20, 2025

1 10

试构造高斯型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

1.1 Solution

令权函数 $w(x) = x^{-1/2}$ ，其矩为

$$\mu_k = \int_0^1 x^{k-1/2}\,dx = \frac{1}{k+\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

于是:

$$\mu_0 = \int_0^1 x^{-1/2} dx = \frac{1}{0+\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\mu_1 = \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\mu_2 = \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$\mu_3 = \int_0^1 x^{5/2} dx = \frac{1}{3+\frac{1}{2}} = \frac{2}{7}\,.$$

节点为相对于权函数 $w(x) = x^{-1/2}$ 在 $[0, 1]$ 上的正交多项式 $P_2(x)$ 的两个零点。设

$$P_2(x) = x^2 + b\,x + c.$$

要求 $P_2(x)$ 与低次多项式正交，即

$$\int_0^1 x^{-1/2} P_2(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^{3/2} + b\,x^{1/2} + c\,x^{-1/2}\right) dx = 0,$$

$$\int_0^1 x^{1/2} P_2(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} + b\,x^{3/2} + c\,x^{1/2}\right) dx = 0.$$

可得:

$$\begin{cases} \mu_2 + b\,\mu_1 + c\,\mu_0 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\,b + 2c = 0, \\ \mu_3 + b\,\mu_2 + c\,\mu_1 = \frac{2}{7} + \frac{2}{5}\,b + \frac{2}{3}c = 0. \end{cases}$$

解得

$$b=-\frac{6}{7},\quad c=\frac{3}{35}\,.$$

因此，

$$P_2(x)=x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35}\,.$$

令 $P_2(x)=0$ 解方程得

$$x_{0,1}=\frac{6/7\pm\sqrt{96/245}}{2}=\frac{6/7\pm\frac{4\sqrt{6}}{7\sqrt{5}}}{2}=\frac{3\pm\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}}{7}\,.$$

数值估计：

$$\sqrt{\frac{6}{5}}\approx 1.0954,\quad x_0\approx\frac{3-2.1908}{7}\approx 0.116,\quad x_1\approx\frac{3+2.1908}{7}\approx 0.741.$$

令求积公式对 $f(x)=1$ 和 $f(x)=x$ 精确，则有

$$\begin{cases}A_0+A_1=\mu_0=2,\\ A_0\,x_0+A_1\,x_1=\mu_1=\frac{2}{3}\,.\end{cases}$$

解得

$$A_0=\frac{\mu_1-2\,x_1}{x_0-x_1},\quad A_1=2-A_0.$$

得到近似结果：

$$A_0\approx 1.306,\quad A_1\approx 0.694.$$

因此，两节点高斯求积公式为

$$\boxed{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\,dx\approx 1.306\,f(0.116)+0.694\,f(0.741).}$$

2 18

用三点公式求 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $x=1.0,1.1,1.2$ 处的导数，并估计误差。

x	1.0	1.1	1.2
f(x)	0.2500	0.2268	0.2066

2.1 Solution

根据三点公式，有

$$\begin{cases}f'(1.0)\approx\frac{-3f(1.0)+4f(1.1)-f(1.2)}{2h}\\ f'(1.1)\approx\frac{f(1.2)-f(1.0)}{2h}\\ f'(1.2)\approx\frac{f(1.0)-4f(1.1)+fF(1.2)}{2h}\end{cases}$$

使用 python 计算结果

```
[10]: import numpy as np

# 已知节点及函数值
x = np.array([1.0, 1.1, 1.2])
F = np.array([0.2500, 0.2268, 0.2066])
h = x[1] - x[0]   # h = 0.1

# 三点公式计算
# 前向差分 at x=1.0
Fprime_forward = (-3*F[0] + 4*F[1] - F[2]) / (2*h)
# 中心差分 at x=1.1
Fprime_central = (F[2] - F[0]) / (2*h)
# 后向差分 at x=1.2
Fprime_backward = (F[0] - 4*F[1] + 3*F[2]) / (2*h)

print("前向差分 F'(1.0)  ", Fprime_forward)
print("中心差分 F'(1.1)  ", Fprime_central)
print("后向差分 F'(1.2)  ", Fprime_backward)

# 理论精确值 (F'(x) = -2/(1+x)^3)
def F_exact_prime(x):
    return -2/(x + 1)**3

F_exact = np.array([F_exact_prime(xi) for xi in x])
print("理论精确值:", F_exact)

error = np.abs(np.array([Fprime_forward, Fprime_central, Fprime_backward]) - 
 ↪F_exact)
print("绝对误差:", error)
```

```
前向差分 F'(1.0)   -0.24699999999999978
中心差分 F'(1.1)   -0.21699999999999978
后向差分 F'(1.2)   -0.18699999999999978
理论精确值: [-0.25       -0.2159594 -0.1878287]
绝对误差: [0.003     0.0010406 0.0008287]
```

2.2 误差分析

带余项的三点公式如下：

$$\begin{cases} f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0) \\ f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1) \\ f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2) \end{cases}$$

假设在区间 $[x_0, x_2]$ 内，存在常数

$$M_3 = \max_{x\in[x_0,x_2]} |f'''(x)|,$$

对于 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在区间 [1.0, 1.2] 上，

$$M_3 = \max_{x\in[1.0,1.2]} |f'''(x)| \approx 0.75.$$

则根据余项，可以给出各公式的误差上界：

- 对于前向差分公式（在 x_0 处）：

$$|E(x_0)| = \left|\frac{h^2}{3} f'''(\xi_0)\right| \le \frac{h^2}{3} M_3 \approx 0.00250.$$

- 对于中央差分公式（在 x_1 处）：

$$|E(x_1)| = \left|\frac{h^2}{6} f'''(\xi_1)\right| \le \frac{h^2}{6} M_3 \approx 0.00125.$$

- 对于后向差分公式（在 x_2 处）：

$$|E(x_2)| = \left|\frac{h^2}{3} f'''(\xi_2)\right| \le \frac{h^2}{3} M_3 \approx 0.00250.$$

[14]:

```
import sympy as sp
import numpy as np

# 定义符号变量和函数
x = sp.symbols('x', real=True)
f = 1/(1 + x)**2

# 求三阶导数
f3 = sp.diff(f, x, 3)
print("f'''(x) =", sp.simplify(f3))

# 取绝对值，并创建数值计算函数
f3_abs = sp.Abs(f3)
f3_abs_func = sp.lambdify(x, f3_abs, "numpy")

# 在区间 [1, 1.2] 上采样计算
xs = np.linspace(1.0, 1.2, 10000)
f3_vals = f3_abs_func(xs)
M3 = np.max(f3_vals)
print("在 [1, 1.2] 上 |f'''(x)| 的最大值为:", M3)
```

```
f'''(x) = -24/(x + 1)**5
在 [1, 1.2] 上 |f'''(x)| 的最大值为: 0.75
```

3 1

设 A 是对称矩阵且 $a_{11} \neq 0$，经过一步高斯消元后，A 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

证明：A_2 是对称矩阵。

3.1 Proof

假设对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & \tilde{A} \end{bmatrix},$$

其中 $a_{11} \neq 0$ 且 $\tilde{A}$ 对称（因为 A 对称）。

在第一步高斯消元中，我们用初等变换消去第一列 (除第一个分量外) 的元素。令初等矩阵

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ -\frac{1}{a_{11}}a_1 & I \end{bmatrix}.$$

则消元后矩阵变为

$$EA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & \tilde{A} - \frac{1}{a_{11}}a_1 a_1^T \end{bmatrix}.$$

记

$$A_2 = \tilde{A} - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T.$$

注意到：- $\tilde{A}$ 是对称矩阵；- 外积 $a_1 a_1^T$ 对称。

因此，它们的线性组合 A_2 也对称，即

$$A_2^T = \tilde{A}^T - \frac{1}{a_{11}}(a_1 a_1^T)^T = \tilde{A} - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T = A_2.$$

4 7

用列主元消去法解线性方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

并求出系数矩阵 A 的行列式 $\det(A)$

4.1 Solution

系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ -18 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

通过消元得到上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 & |\,15 \\ 0 & -1.5 & 3.5 & |\,7.5 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & |\,11 \end{pmatrix}.$$

解得

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3).$$

行列式等于各主元的乘积（在没有行交换的情况下）：

$$\det(A) = 12 \times (-1.5) \times \frac{11}{3} = -66\,.$$