Assignment21

June 10, 2025

1 10.7

假设 $x[n]$ 的 z 变换代数表示式是

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-2})(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2})}$$

问 $X(z)$ 可能有多少种不同的收敛域?

1.1 Solution

$X(z)$ 可以写作:

$$X(z) = \frac{\frac{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}{z^2}}{\left(\frac{(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})}{z^2}\right)\left(\frac{(z+\frac{3}{4})(z+\frac{1}{2})}{z^2}\right)} = \frac{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})z^2}{(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})(z+\frac{3}{4})(z+\frac{1}{2})}$$

分子中有一个零点 $z = -\frac{1}{2}$，分母中有一个极点 $z = -\frac{1}{2}$。它们可以相互抵消 (假设 $z \neq -\frac{1}{2}$)。抵消后，$X(z)$ 变为:

$$X(z) = \frac{(z-\frac{1}{2})z^2}{(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})(z+\frac{3}{4})} = \frac{(z-\frac{1}{2})z^2}{(z^2+\frac{1}{4})(z+\frac{3}{4})}$$

简化后的极点由分母 $(z^2 + \frac{1}{4})(z + \frac{3}{4}) = 0$ 给出:

- $z^2 + \frac{1}{4} = 0 \implies z = \pm\frac{i}{2}$
- $z + \frac{3}{4} = 0 \implies z = -\frac{3}{4}$

所以，极点为 $z_1 = \frac{i}{2}$，$z_2 = -\frac{i}{2}$，$z_3 = -\frac{3}{4}$。

- $|z_1| = |\frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$
- $|z_2| = |-\frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$
- $|z_3| = |-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$

不同的极点模长为 $r_1 = \frac{1}{2}$ 和 $r_2 = \frac{3}{4}$。

因此，$X(z)$ 可能有 3 种不同的收敛域。

2 10.24

利用指定的方法求下列 z 变换对应的序列

2.1 (a)

部份分式展开法

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}, \quad x[n]$$

2.2 (b)

长除法

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad x[n]$$

2.3 Solution

2.3.1 (a)

$x[n]$ 绝对可和意味着收敛域 (ROC) 必须包含单位圆 $|z|=1$。

$$X(z) = \frac{z^2-2z}{z^2+\frac{5}{2}z+1}$$

$z^2+\frac{5}{2}z+1=0 \implies 2z^2+5z+2=0 \implies (2z+1)(z+2)=0$
极点为 $p_1=-\frac{1}{2}$ 和 $p_2=-2$。
极点的模为 $|p_1|=\frac{1}{2}$ 和 $|p_2|=2$。因为 $x[n]$ 绝对可和，ROC 必须包含单位圆 $|z|=1$。所以，ROC 为 $\frac{1}{2}<|z|<2$。

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}}$$

计算可得 $A=-\frac{5}{3}$，$B=\frac{8}{3}$。所以，

$$X(z) = \frac{-\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{8}{3}}{1+2z^{-1}}$$

第一项，极点 $z=-\frac{1}{2}$。由于 ROC 的这部分为 $|z|>\frac{1}{2}$，对应右边序列：

$$-\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

第二项，极点 $z=-2$。由于 ROC 的这部分为 $|z|<2$，对应左边序列：

$$\frac{8}{3}\left(-(-2)^n u[-n-1]\right) = -\frac{8}{3}(-2)^n u[-n-1]$$

因此，

$$x[n] = -\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{8}{3}(-2)^n u[-n-1]$$

2.3.2 (b)

极点由 $1+\frac{1}{2}z^{-1}=0 \implies z=-\frac{1}{2}$ 给出。因为 $x[n]$ 是右边序列，ROC 为 $|z|>|-\frac{1}{2}|$，即 ROC 为 $|z|>\frac{1}{2}$。

$X(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3} + ...$

我们可以得到 z^{-n} 的系数：$x[0]=1$ $x[1]=-1$ $x[2]=\frac{1}{2}$ $x[3]=-\frac{1}{4}$ ...

可以表示为形如 $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ 的式子。

故

$X(z) = 1 - z^{-1}(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-...) = 1 - z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2}z^{-1})^k = 1 - z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

所以，

$$x[n] = \delta[n] - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$