assn02

March 28, 2025

1 1(3)

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = -3, \quad f(2) = 4.$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

使用牛顿插值法。

1.1 Answer

牛顿插值多项式可表示为

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{-3 - 0}{-1 - 1} = \frac{3}{2} \\ f[x_1, x_2] &= \frac{4 - (-3)}{2 - (-1)} = \frac{7}{3} \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{\frac{7}{3} - \frac{3}{2}}{2 - 1} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

因此有

$$\boxed{P(x) = \frac{3}{2}(x - 1) + \frac{5}{6}(x - 1)(x + 1)}$$

2 3

给出 $\cos x, 0 \leq x \leq 90^\circ$ 的函数表，步长 $h = 1' = (\frac{1}{60})^\circ$。若函数表具有 5 位有效数字，研究用线性插值求 $\cos x$ 近似值时的总误差界。

2.1 Answer

1. **舍入误差**

   由于表格中的数字保留 5 位有效数字，舍入误差界限为

$$\delta \leq 0.5 \times 10^{-5},$$

2. **线性插值误差**

   当在相邻的表格点 z_i 与 z_{i+1} 之间（间距 $h = 1'$）使用线性插值时，对于一个 C^2 函数 $f(z) = \cos z$，插值误差满足

$$E_{\text{interp}} \leq \frac{M}{8}(z_{i+1} - z_i)^2,$$

   其中

$$M = \max_{z \in [z_i, z_{i+1}]} |f''(z)|.$$

   $f(z) = \cos z$ 时，其二阶导数为 $f'{}'(z) = -\cos z$, 因此有 $|f''(z)| \leq 1$。

   $h = 1' = \pi/10800\,\text{rad}$，则

$$E_{\text{interp}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{10800}\right)^2.$$

   计算得

$$\left(\frac{\pi}{10800}\right)^2 = \frac{\pi^2}{10800^2} \approx \frac{9.87}{116640000} \approx 8.46 \times 10^{-8},$$

   所以

$$E_{\text{interp}} \leq \frac{8.46 \times 10^{-8}}{8} \approx 1.06 \times 10^{-8}.$$

3. **总误差界**

$$E_{\text{total}} \lesssim \delta + E_{\text{interp}} \approx 5 \times 10^{-6} + 1.06 \times 10^{-8},$$

   因此，总误差界主要由舍入误差主导。

   最终我们有

$$\boxed{E_{\text{total}} \lesssim 5 \times 10^{-6}.}$$

3 4(2)

设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是互异节点，求证对于 $k = 1, 2, \cdots, n$，有

$$\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k \ell_j(x) \equiv 0.$$

3.1 Proof

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k\ell_j(x)\equiv\sum_{j=0}^{n}\ell_j(x)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m x^m x_j^{k-m}$$

由公式 2.17 知，

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^k\ell_i(x)\equiv x^k$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k\ell_j(x)&\equiv\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{n}(-1)^m x^m x_j^{k-m}\ell_j(x)\\&\equiv\sum_{m=0}^{k}(-1)^m x^m\sum_{j=0}^{n}x_j^{k-m}\ell_j(x)\\&\equiv\sum_{m=0}^{k}(-1)^m x^m x^{k-m}\\&\equiv(x-x)^k\\&\equiv 0\end{aligned}$$

4 6

给出区间

$$-4\le x\le 4$$

上的等距函数表，用二次插值来近似 $f(x)=e^x$，并要求截断误差不超过 10^{-6}. 问函数表的步长 h 应为多少?

4.1 Answer

对于在三个节点 x_0, x_1, x_2 进行二次插值，在区间 $[x_0,x_2]$ 内任一点 x 的插值误差为

$$R(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

其中 ξ 取自 $[x_0,x_2]$ 内的某一点，节点是等距的，且步长为 h。

设三个连续节点为

$$x_0,\quad x_1=x_0+h,\quad x_2=x_0+2h.$$

设

$$t=x-x_0,\quad 其中t\in[0,2h].$$

则误差可以写成

$$R(t)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\,t\,(t-h)\,(t-2h).$$

当 $t\in[0,2h]$

$$|P(t)|=|t\,(t-h)\,(t-2h)|$$

的最大值。经过求导可以发现，绝对值最大处出现在

$$t = h\Big(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

处，因此有

$$\max_{t\in[0,2h]} |t\,(t-h)\,(t-2h)| = \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}.$$

于是，任意子区间上的最大插值误差限为

$$|R(x)| \le \frac{M_3}{6}\cdot\frac{2h^3}{3\sqrt{3}} = \frac{M_3\,h^3}{9\sqrt{3}},$$

其中

$$M_3 = \max_{x\in[-4,4]} |f^{(3)}(x)|.$$

由于

$$f(x) = e^x, \quad f^{(3)}(x) = e^x,$$

故

$$|f^{(3)}(x)| = e^x.$$

在区间 $[-4,4]$ 上，最大值出现在 $x=4$ 处，因此

$$M_3 = e^4.$$

故截断误差满足

$$\frac{e^4\,h^3}{9\sqrt{3}} \le 10^{-6}.$$

解得

$$h^3 \le \frac{9\sqrt{3}\,10^{-6}}{e^4}.$$

取立方根可得

$$\boxed{h \le \left(\frac{9\sqrt{3}\,10^{-6}}{e^4}\right)^{\frac{1}{3}}.}$$

5 7

证明 n 阶均差有下列性质

5.1 性质 (1)

描述:
若

$$F(x) = c\,f(x),$$

则

$$F[x_0,x_1,\dots,x_n] = c\,f[x_0,x_1,\dots,x_n].$$

证明:
使用数学归纳法。

- **归纳基** ($n = 0$):

$$F[x_0] = F(x_0) = c\,f(x_0) = c\,f[x_0].$$

因此性质（1）对 $n = 0$ 成立.

- **归纳步:**
假设性质（1）对任意 $0 \leq k \leq n-1$ 成立，即证明

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{F[x_1, x_2, \dots, x_n] - F[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

根据归纳假设，我们有

$$F[x_1, x_2, \dots, x_n] = c\,f[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad \text{和} \quad F[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = c\,f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}].$$

因此，

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{c\,f[x_1, x_2, \dots, x_n] - c\,f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = c\,\frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

根据 $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ 的定义，有

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = c\,f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

性质（1）得证。

5.2 性质（2）

描述:
若

$$F(x) = f(x) + g(x),$$

则

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + g[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

证明:
再次运用数学归纳法。

- **归纳基** ($n = 0$):

$$F[x_0] = F(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = f[x_0] + g[x_0].$$

因此性质（2）对 $n = 0$ 成立.

- **归纳步:**
假设性质（2）对 $0 \leq k \leq n-1$ 成立，根据

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{F[x_1, x_2, \dots, x_n] - F[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

使用归纳假设

$$F[x_1, x_2, \dots, x_n] = f[x_1, x_2, \dots, x_n] + g[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

以及

$$F[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] + g[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}].$$

带入得到，

$$\begin{aligned} F[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{\Big(f[x_1, x_2, \dots, x_n] + g[x_1, x_2, \dots, x_n]\Big) - \Big(f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] + g[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]\Big)}{x_n - x_0} \\ &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} + \frac{g[x_1, x_2, \dots, x_n] - g[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \\ &= f[x_0, x_1, \dots, x_n] + g[x_0, x_1, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

性质（2）得证。

6 8

已知

$$f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1,$$

求

$$f[2^0, 2^1, \dots, 2^7] \quad \text{and} \quad f[2^0, 2^1, \dots, 2^8].$$

6.1 Answer

根据 n 阶分差定义我们有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

其中 $\xi \in [x_0, x_n]$

对于 $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$

1. $2^0, 2^1, \dots, 2^7$**：** 7 阶导为 7! 故
$$f[2^0, 2^1, \dots, 2^7] = 1.$$
2. $2^0, 2^1, \dots, 2^8$**：** 8 阶导为 0 故
$$f[2^0, 2^1, \dots, 2^8] = 0.$$

因此

$$\boxed{f[2^0, 2^1, \dots, 2^7] = 1 \quad \text{and} \quad f[2^0, 2^1, \dots, 2^8] = 0.}$$

7 9

证明

$$\Delta(f_k g_k) = f_k \, \Delta g_k + g_{k+1} \, \Delta f_k.$$

7.1 Proof

根据差分的定义我们有

$$\Delta(f_k g_k) = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k.$$

故

$$f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k = \Big[f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_{k+1}\Big] + \Big[f_k g_{k+1} - f_k g_k\Big].$$

$$f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_{k+1} = g_{k+1}(f_{k+1} - f_k) = g_{k+1}\,\Delta f_k,$$

$$f_k g_{k+1} - f_k g_k = f_k(g_{k+1} - g_k) = f_k\,\Delta g_k.$$

$$\Delta(f_k g_k) = g_{k+1}\,\Delta f_k + f_k\,\Delta g_k,$$

因此

$$\boxed{\Delta(f_k g_k) = f_k\,\Delta g_k + g_{k+1}\,\Delta f_k.}$$

原式得证。

8 10

证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k,$$

8.1 Proof

裂项得到

$$f_n g_n - f_0 g_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k\Big).$$

又因为

$$\Delta(f_k g_k) = f_k\,\Delta g_k + g_{k+1}\,\Delta f_k.$$

所以

$$f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k = f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k.$$

代入得到

$$f_n g_n - f_0 g_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k + \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k.$$

因此

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k.}$$

原式得证。

9 11

证明

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta^2 y_j = \Delta y_n - \Delta y_0$$

9.1 Proof

裂项得到

$$\Delta y_n - \Delta y_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta y_{j+1} - \Delta y_j = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^2 y_j$$

原式得证。

10 12

给定多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

有 n 个互不相同的根。证明

$$\sum \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le n-2 \\ a_n^{-1}, & k = n-1 \end{cases}$$

10.1 Proof

设

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

原式可化为

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{a_n \omega_n'(x_j)}$$

$$\omega_n'(x_j) = \prod_{k \ne j} (x_j - x_k)$$

令 $g(x) = x^k$，则 $g[\ldots] = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$

又因为

$$g[\cdots] = \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

故

$$= \frac{1}{a_n} g[\dots] = \begin{cases} 0, & k \le n-2 \\ a_n^{-1}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

原式得证。

11 13

构造一个 3 次的多项式 $P(x)$，使得它满足

$$\begin{aligned} P(x_0) &= f(x_0), \\ P'(x_0) &= f'(x_0), \\ P''(x_0) &= f''(x_0), \\ P(x_1) &= f(x_1). \end{aligned}$$

11.1 Answer

令

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3.$$

那么有

$$\begin{aligned} &P(x_0) = a_0, \\ &P'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2, \quad \text{所以} \quad P'(x_0) = a_1, \\ &P''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0), \quad \text{所以} \quad P''(x_0) = 2a_2. \end{aligned}$$

由给定条件可得

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0), \\ a_1 &= f'(x_0), \\ 2a_2 &= f''(x_0) \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}. \end{aligned}$$

另外，

$$P(x_1) = f(x_1).$$

由于

$$P(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) + a_2(x_1-x_0)^2 + a_3(x_1-x_0)^3,$$

将 a_0, a_1, a_2 的表达式代入，得到

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2 + a_3(x_1-x_0)^3 = f(x_1).$$

求解 a_3 得

$$a_3 = \frac{f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^3}.$$

因此，所求的多项式为

$$\boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^3}(x - x_0)^3.}$$