Assignment18

May 20, 2025

1 9.26

考虑一个信号 $y(t)$，它与两个信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的关系是

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(-t+3)$$

其中，

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t), \quad x_2(t) = e^{-3t}u(t)$$

已知

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > -a$$

利用拉普拉斯变换性质，确定 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$

1.1 Solution

令 $x_3(t) = x_1(t-2)$，由拉普拉斯变换的时移性质，有

$$X_3(s) = e^{-2s}X_1(s) = \frac{e^{-2s}}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2$$

令 $x_5(t) = x_4(t-3) = x_2(-t+3)$，由拉普拉斯变换的时域尺度变换和时移性质，有

$$X_4(s) = X_2(-s) = \frac{1}{-s+3}, \quad \Re\{s\} < 3$$
$$X_5(s) = e^{-3s}X_4(s) = \frac{e^{-3s}}{-s+3}, \quad \Re\{s\} < 3$$

由拉普拉斯变换的卷积性质，有

$$Y(s) = X_3(s)X_5(s) = \frac{e^{-5s}}{(s+2)(-s+3)}, \quad -2 < \Re\{s\} < 3$$

2 9.31

有一个连续时间线性时不变系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下列微分方程所关联：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

设 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的拉普拉斯变换，$H(s)$ 是系统单位冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。

1. 求 $H(s)$ 作为 s 的两个多项式之比，画出 $H(s)$ 的零-极点图。
2. 对下列每一种情况求 $h(t)$:
    1. 系统是稳定的。
    2. 系统是因果的。
    3. 系统既不是稳定的又不是因果的。

2.1 Solution

2.1.1 (1)

系统的传递函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2}.$$

即，

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}.$$

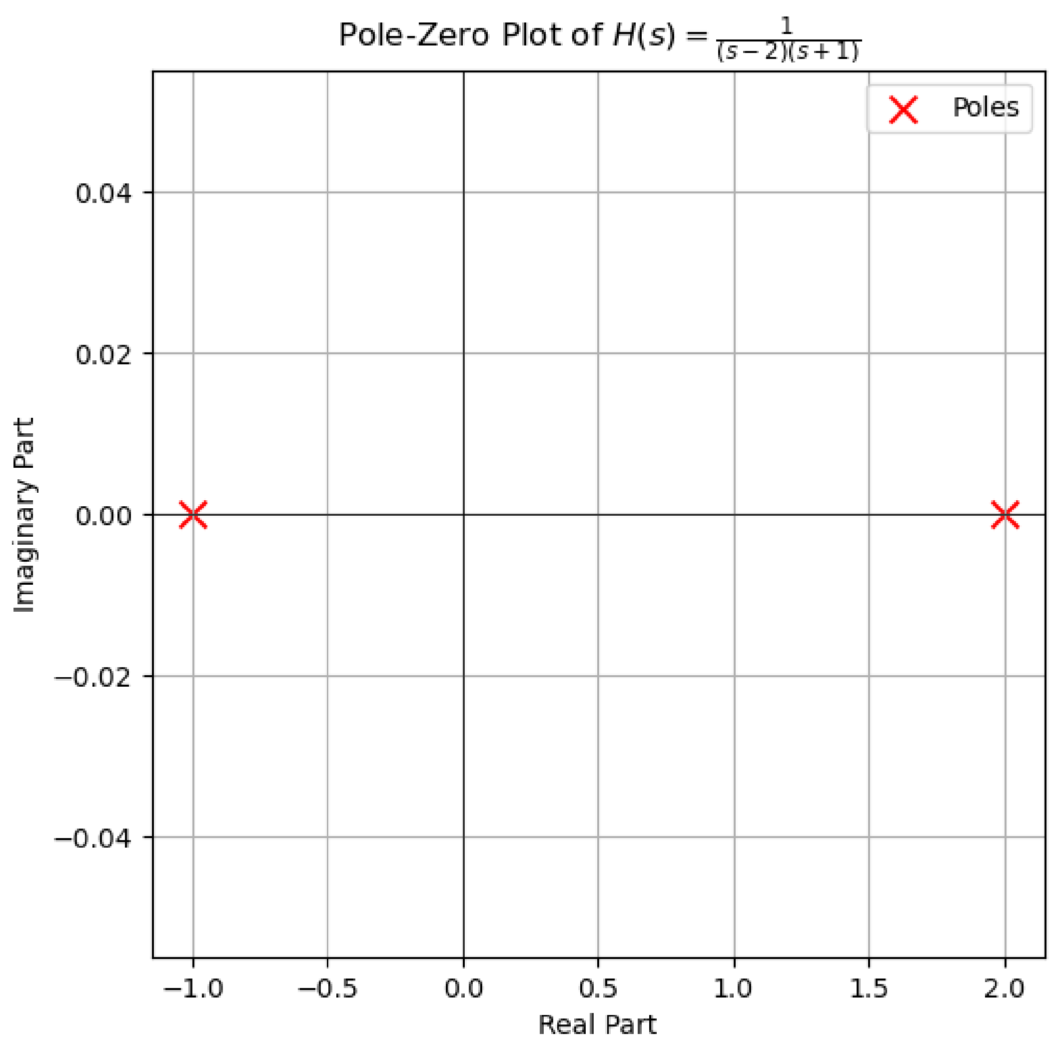
- **零点**：分子为常数 1，故没有有限零点。
- **极点**：满足 $s-2=0$ 和 $s+1=0$，即有两个极点

$$s = 2 \quad (\text{右半平面}) \quad \text{和} \quad s = -1 \quad (\text{左半平面}).$$

[1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# 定义系统的极点和零点
poles = [2, -1]         # 极点在 s=2 和 s=-1
zeros = []              # 无有限零点

plt.figure(figsize=(6,6))

# 绘制极点，使用红色 'x'
plt.scatter(np.real(poles), np.imag(poles), marker='x', color='red', s=100,␣
↪label='Poles')

# 如果有零点，则绘制零点（此处为空）
if zeros:
```

```
    plt.scatter(np.real(zeros), np.imag(zeros), marker='o', color='blue',␣
↪s=100, label='Zeros')
else:
    print("No finite zeros.")

# 绘制实轴和虚轴
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)

plt.xlabel('Real Part')
plt.ylabel('Imaginary Part')
plt.title('Pole-Zero Plot of $H(s)=\\frac{1}{(s-2)(s+1)}$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
No finite zeros.
```



2.1.2 (2)

由

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)},$$

设

$$\frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}.$$

解之：两边乘 $(s-2)(s+1)$ 得

$$1 = A(s+1) + B(s-2).$$

令 $s=2$ 得

$$1 = A(3) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{3}.$$

令 $s=-1$ 得

$$1 = B(-3) \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{1}{3}.$$

因此，

$$H(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}.$$

下面讨论三种不同 ROC 下的逆变换。

---

(1) 系统稳定的情况

稳定系统要求 $h(t)$ 必须绝对可积，且 ROC 必须包含虚轴。由于两个极点分别为 $s=-1$ 和 $s=2$，因此必须选取两极之间的 ROC：

$$-1 < \Re\{s\} < 2.$$

在这种 ROC 下，- 对于 $t>0$：闭合右半平面时只包围位于 ROC 左侧的极点 $s=-1$。由标准公式，当 $s=a$ 位于左侧时，

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}u(t).$$

故 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t)$.

- 对于 $t<0$：闭合左半平面时包围 ROC 右侧的极点 $s=2$，但积分方向反向，故多了负号。标准结果为

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = -e^{2t}u(-t).$$

因此，

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{3}\Big\{-e^{2t}u(-t)1/(s-2)\Big\} - \frac{1}{3}\Big\{e^{-t}u(t)\Big\} \\ &= -\frac{1}{3}\,e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}\,e^{-t}u(t). \end{aligned}$$

---

(2) 系统因果的情况

因果系统要求 $h(t)=0$ 当 $t<0$，这对应的 ROC 必须在所有极点右侧，即

$$\Re\{s\} > 2.$$

在这种 ROC 下，均采用右侧逆变换：

- $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-2)\} = e^{2t}u(t)$,
- $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+1)\} = e^{-t}u(t)$.

因此，

$$h(t) = \frac{1}{3}\,e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}\,e^{-t}u(t) = \frac{1}{3}\Big(e^{2t} - e^{-t}\Big)u(t).$$

---

(3) 系统既不稳定也不因果的情况

若选择 ROC 在所有极点左侧，即

$$\Re\{s\} < -1,$$

则得到反因果系统。此时使用反因果公式：
对反因果信号，标准公式为

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = -\,e^{at}u(-t) \quad (\text{当}\Re\{s\} < \Re\{a\}).$$

于是，- $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-2)\} = -\,e^{2t}u(-t)$, - $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+1)\} = -\,e^{-t}u(-t)$.

因此，

$$h(t) = \frac{1}{3}\Big[-e^{2t}u(-t)\Big] - \frac{1}{3}\Big[-e^{-t}u(-t)\Big] = \frac{1}{3}\Big[-e^{2t} + e^{-t}\Big]u(-t).$$