

assn04

April 22, 2025

1 3

证明函数

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

线性无关。

1.1 Proof

我们取实数范围内 $n+1$ 个互异点 x_0, x_1, \dots, x_n , 考虑下列齐次线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵为 Vandermonde 矩阵, 故其行列式为

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

由于选取的点两两不同, 故 $\det(V) \neq 0$, 该齐次方程组仅有平凡解

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

因此, 集合

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

线性无关。

2 4

计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0, 1]$ 的 $\|f\|_\infty, \|f\|_1, \|f\|_2$

2.1 (1) $f(x) = (x-1)^2$

2.2 (2) $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$

2.3 (3) $f(x) = x^m(1-x)^n$, **m 与 n 为正整数**

2.4 Solution

2.4.1 (1)

$$\|f\|_{\infty} = 1.$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 [(x-1)^2]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (x-1)^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2.4.2 (2)

在 $[0, 1]$ 上, $|x - \frac{1}{2}|$ 的最大值出现在 $x = 0$ 和 $x = 1$, 均有

$$\left| 0 - \frac{1}{2} \right| = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

因此,

$$\|f\|_{\infty} = \frac{1}{2}.$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = 2 \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x \right) dx = \frac{1}{8}.$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

2.5 (3)

对于 $m, n > 0$, 在 $[0, 1]$ 上端点处 $f(0) = f(1) = 0$, 函数在内部取得最大值. 令 $g(x) = \ln f(x) = m \ln x + n \ln(1-x)$, 求导得到:

$$g'(x) = \frac{m}{x} - \frac{n}{1-x} = 0 \implies x = \frac{m}{m+n}.$$

代入得最大值:

$$\|f\|_{\infty} = \left(\frac{m}{m+n} \right)^m \left(\frac{n}{m+n} \right)^n.$$

根据 Beta 函数, 有

$$\|f\|_1 = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = B(m+1, n+1) = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}.$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 x^{2m} (1-x)^{2n} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{B(2m+1, 2n+1)},$$

其中,

$$B(2m+1, 2n+1) = \frac{(2m)!(2n)!}{(2m+2n+1)!}.$$

3 5

证明

$$\|f - g\| \geq \|f\| - \|g\|$$

3.1 Proof

根据三角不等式, 对于任意 f, g 有

$$\|f\| = \|(f - g) + g\| \leq \|f - g\| + \|g\|.$$

由此可以得到

$$\|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|.$$

整理后即得:

$$\|f - g\| \geq \|f\| - \|g\|.$$

证毕。

4 6

对 $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$, 定义

(1)

$$(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x) dx$$

(2)

$$(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x) dx + f(a)g(a)$$

问它们是否构成内积。

4.1 Solution

4.2 (1)

对称性和**线性性**容易验证。检查**正定性**：
要求对于任意 f 有

$$(f, f) = \int_a^b [f'(x)]^2 dx \geq 0,$$

且当且仅当 $f \equiv 0$ 时有 $(f, f) = 0$ 。

注意到如果 f 为常数函数（例如 $f(x) = C$ ，其中 $C \neq 0$ ），则有

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

从而

$$(f, f) = \int_a^b 0^2 dx = 0,$$

但 $f \neq 0$ 。不满足内积的正定性条件。

故定义 (1) 不能构成内积。

(2) 同样，显然该式满足**对称性**和**线性性**。接下来验证**正定性**：
对任意 $f \in C^1[a, b]$ ，有

$$(f, f) = \int_a^b [f'(x)]^2 dx + f(a)^2.$$

显然两个部分均非负，因此 $(f, f) \geq 0$ 。若 $(f, f) = 0$ ，则必有

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx = 0 \quad \text{且} \quad f(a)^2 = 0.$$

由积分为零可知 $f'(x) = 0$ 几乎处处成立，从而 f 为常数函数；又 $f(a) = 0$ 故 $f \equiv 0$ 。

故定义 (2) 构成内积。

5 7

令

$$T_n^*(x) = T_n(2x - 1), \quad x \in [0, 1],$$

其中 $T_n(x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式，即

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

证明集合 $\{T_n^*(x)\}_{n \geq 0}$ 在区间 $[0, 1]$ 上关于权函数

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$$

是正交多项式序列，并求出 $T_0^*(x)$, $T_1^*(x)$, $T_2^*(x)$, $T_3^*(x)$ 的显式表达式。

5.1 Proof

对任意连续函数 $f(x)$, 作变量代换

$$t = 2x - 1, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t+1}{2}, \quad dx = \frac{dt}{2}.$$

注意到

$$x - x^2 = \frac{t+1}{2} \left(1 - \frac{t+1}{2} \right) = \frac{1-t^2}{4},$$

故有

$$\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}, \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}.$$

因此, 积分

$$\int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x) \rho(x) dx$$

经过代换变为

$$\int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{2} = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Chebyshev 多项式具有正交性质

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0, \quad n \neq m.$$

因此可知

$$\int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x) \rho(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

正交性得证。

5.2 Solution

已知 Chebyshev 多项式的标准表达式为

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

由定义 $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$, 直接计算可得:

1. 当 $n=0$ 时,

$$T_0^*(x) = T_0(2x-1) = 1.$$

2. 当 $n = 1$ 时,

$$T_1^*(x) = T_1(2x - 1) = 2x - 1.$$

3. 当 $n = 2$ 时,

$$\begin{aligned} T_2^*(x) &= T_2(2x - 1) = 2(2x - 1)^2 - 1 \\ &= 2[4x^2 - 4x + 1] - 1 = 8x^2 - 8x + 2 - 1 \\ &= 8x^2 - 8x + 1. \end{aligned}$$

4. 当 $n = 3$ 时,

$$\begin{aligned} T_3^*(x) &= T_3(2x - 1) = 4(2x - 1)^3 - 3(2x - 1). \\ &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1. \end{aligned}$$

6 8

对权函数 $\rho(x) = 1 + x^2$, 区间 $[-1, 1]$, 求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, 3$

6.1 Solution

采用施密特 (Gram-Schmidt) 正交化方法

取基中最低次项:

$$\varphi_0(x) = 1.$$

其首项系数为 1。

取 $f_1(x) = x$ 。正交化公式为

$$\varphi_1(x) = f_1(x) - \frac{\langle f_1, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0(x).$$

计算

$$\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x(1 + x^2) dx.$$

注意积分区间下 $x(1 + x^2)$ 为奇函数, 其积分为 0, 因此

$$\varphi_1(x) = x.$$

取 $f_2(x) = x^2$, 先写出

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} \varphi_0(x) - \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \varphi_1(x).$$

计算各内积:

1. 与 $\varphi_0(x) = 1$:

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 + x^4) dx = \frac{16}{15},$$

而

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = \frac{8}{3}.$$

因此第一投影系数为

$$a_{20} = \frac{16/15}{8/3} = \frac{2}{5}.$$

2. 与 $\varphi_1(x) = x$:

$$\langle x^2, x \rangle = \int_{-1}^1 x^3(1 + x^2) dx,$$

因为 $(x^3(1+x^2))$ 奇函数, 积分为 0, 因此第二投影系数为 0。

综上,

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}.$$

取 $f_3(x) = x^3$ 。由于 x^3 为奇函数, 我们可设形式为

$$\varphi_3(x) = x^3 + \beta x,$$

(此时不含偶次项, 保证不受前面偶函数的影响)。

要求 $\varphi_3(x)$ 与 $\varphi_1(x) = x$ 正交, 即

$$\langle x^3 + \beta x, x \rangle = 0.$$

计算:

$$\langle x^3, x \rangle = \int_{-1}^1 x^4(1 + x^2) dx = \int_{-1}^1 (x^4 + x^6) dx = \frac{24}{35},$$

且

$$\langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2(1 + x^2) dx = \frac{16}{15}.$$

故有

$$\frac{24}{35} + \beta \frac{16}{15} = 0 \implies \beta = -\frac{9}{14}.$$

因此,

$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{9}{14}x.$$

其他正交条件 (与 φ_0 和 φ_2) 可通过奇偶性验证 (因为奇函数与偶函数正交)。

综上所述,

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_1(x) &= x, \\ \varphi_2(x) &= x^2 - \frac{2}{5}, \\ \varphi_3(x) &= x^3 - \frac{9}{14}x.\end{aligned}$$

7 11

用 $T_3(x)$ 的零点做插值点, 求 $f(x) = e^x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的二次插值多项式, 并估计最大误差界。

7.1 Solution

已知第一类 Chebyshev 多项式

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

其零点为

$$x_0 = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = -\cos \frac{3\pi}{6} = 0, \quad x_2 = -\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此选取插值节点为

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

构造 Lagrange 基函数

- 对于 $L_0(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{2}{3}x \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

- 对于 $L_1(x)$:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{3 - 4x^2}{3}.$$

- 对于 $L_2(x)$:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{2}{3}x \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

利用 Lagrange 插值公式得:

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x).$$

由于

$$f(x) = e^x, \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

故

$$P_2(x) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{2}{3}x \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{3-4x^2}{3} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{2}{3}x \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

根据定理 7 有

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \|f^{(n+1)}(x)\|_\infty$$

故二次插值 ($n=2$) 的最大误差满足

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{2^2 \cdot 3!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(3)}(x)|.$$

对于 $f(x) = e^x$, 其三阶导数仍为 e^x , 在区间 $[-1, 1]$ 上有最大值 e 。因此,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |e^x - P_2(x)| \leq \frac{e}{24}.$$

因此, 该二次插值多项式在 $[-1, 1]$ 上的最大误差界为 $e/24$ 。