Assignment17

May 13, 2025

1 9.22(e)

对于下列拉普拉斯变换，确定时间函数 $x(t)$

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad -3 < \Re\{s\} < -2$$

1.1 Solution

首先因式分解分母:

$$s^2+5s+6=(s+2)(s+3).$$

写成部分分式有

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}.$$

两边乘 $(s+2)(s+3)$ 我们得到:

$$s+1=A(s+3)+B(s+2).$$

比较系数:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 3A+2B=1. \end{cases}$$

解得 $A=-1,\ B=2$。

由 ROC $(-3,-2)$ 可知：- $\frac{1}{s+2}$ 对应左侧信号 $e^{-2t}u(-t)$，- $\frac{1}{s+3}$ 对应右侧信号 $e^{-3t}u(t)$。

因此，

$$x(t)=-e^{-2t}u(-t)+2e^{-3t}u(t).$$

最终答案:

$$x(t)=2e^{-3t}u(t)-e^{-2t}u(-t).$$

2 9.25(c)

当把拉普拉斯变换 $X(s)$ 在 $s=j\omega$ 处取值时，就得到了傅里叶变换 $X(j\omega)$（假设收敛域允许）。表达式通常可以写为

$$X(j\omega)=K\frac{\prod_{k=1}^{N}(j\omega-z_k)}{\prod_{l=1}^{M}(j\omega-p_l)},$$

其中 $\{z_k\}$ 和 $\{p_l\}$ 分别是零点和极点，K 为常数。

$$c|X(j\omega)|=|K|\frac{\prod_{k=1}^{N}|j\omega-z_k|}{\prod_{l=1}^{M}|j\omega-p_l|}.$$

可以观察到，当 $s=j\omega$ 接近坐标原点时，$|X(j\omega)|$ 趋于固定值 $\frac{|z_k|}{|p_l|}$（在 $j\omega=0$ 时相等）；当 $s=j\omega$ 远离坐标原点时，$|X(j\omega)|$ 趋于常数 1。

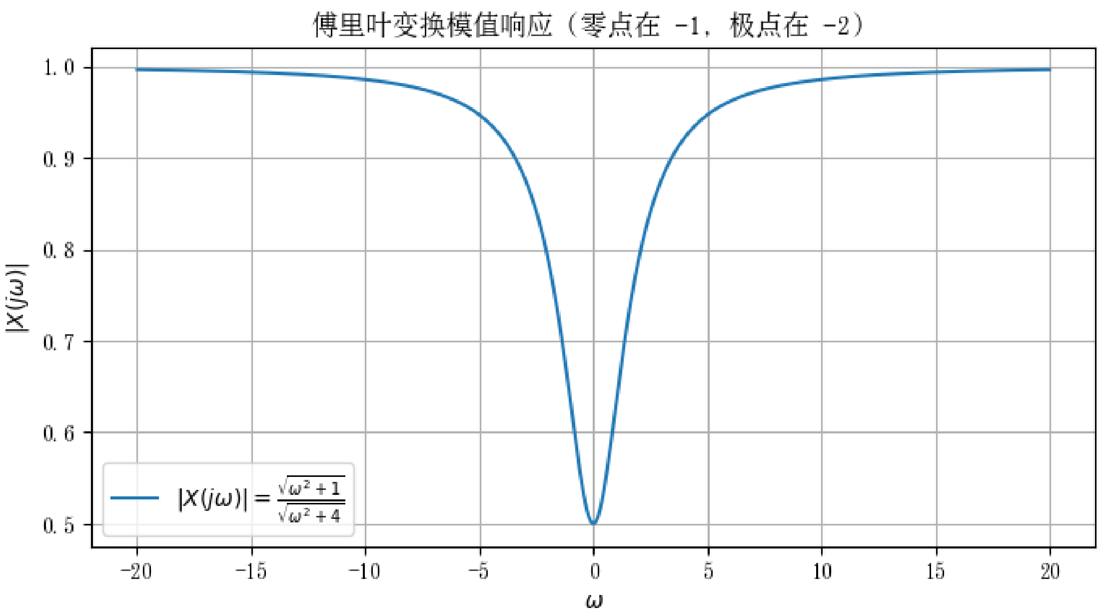
可以以 $z=-1,p=-2$ 为例画出如下图像。

[3]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl
from matplotlib import RcParams

# 设置字体
mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimSong']  # 设置中文字体
mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False  # 显示负号

# 设置频率范围
omega = np.linspace(-20, 20, 500)
# 定义幅频响应 |X(j )| = sqrt( ^2+1) / sqrt( ^2+4)
H_mag = np.sqrt(omega**2 + 1) / np.sqrt(omega**2 + 4)

plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(omega, H_mag, label=r'$|X(j\omega)|=\frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+4}}$')
plt.xlabel(r'$\omega$')
plt.ylabel(r'$|X(j\omega)|$')
plt.title("傅里叶变换模值响应（零点在 -1，极点在 -2）")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



傅里叶变换模值响应（零点在 -1，极点在 -2）
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
$|X(j\omega)|$
$|X(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+4}}$
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
ω