Assignment16

May 6, 2025

1 9.21

确定下列时间函数的拉普拉斯变换、收敛域以及零-极点图：

1.1 (b)

$$x(t) = e^{-4t}u(t) + e^{-5t}(\sin 5t)u(t)$$

1.2 (j)

$$x(t) = \delta(3t) + u(3t)$$

1.3 Solution

1.3.1 (b)

- 第一项

$$L\{e^{-4t}u(t)\} = \frac{1}{s+4}, \quad \text{ROC: } \Re(s) > -4.$$

- 第二项

$$L\{e^{-at}\sin(bt)u(t)\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}, \quad \text{ROC: } \Re(s) > -a,$$

  其中 $a = 5$, $b = 5$

$$L\{e^{-5t}\sin(5t)u(t)\} = \frac{5}{(s+5)^2+25}, \quad \text{ROC: } \Re(s) > -5.$$

因此，整体拉普拉斯变换为

$$X(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{5}{(s+5)^2+25},$$

其 ROC 为两部分 ROC 的交集，即

$$\Re(s) > -4.$$

- **极点**
  - 第一项在 $s = -4$ 有一个极点。

– 第二项中解方程

$$(s+5)^2+25=0 \quad \Rightarrow \quad s+5=\pm j5 \quad \Rightarrow \quad s=-5\pm j5.$$

因此，另外得到一对复共轭极点：$s=-5\pm j5$。

- **零点**
若对两个分式统一通分后得到合并表达式，分子为

$$N(s)=(s+5)^2+25+5(s+4),$$

展开计算可得

$$N(s)=s^2+15s+70.$$

零点满足

$$s^2+15s+70=0.$$

因为判别式

$$\Delta=15^2-4\cdot 70=225-280=-55,$$

得到一对复零点：

$$s=-\frac{15}{2}\pm j\frac{\sqrt{55}}{2}.$$

1.3.2 (j)

- 对于 $\delta(3t)$，利用冲激函数的缩放性质

$$\delta(3t)=\frac{1}{3}\delta(t) \quad \Rightarrow \quad L\{\delta(3t)\}=\frac{1}{3}.$$

- 对于 $u(3t)$，由于单位阶跃函数在 $t\geq 0$ 下恒成立

$$u(3t)=u(t) \quad \Rightarrow \quad L\{u(3t)\}=L\{u(t)\}=\frac{1}{s}, \quad \text{ROC: } \Re(s)>0.$$

因此，拉普拉斯变换为

$$X(s)=\frac{1}{3}+\frac{1}{s}=\frac{s+3}{3s},$$

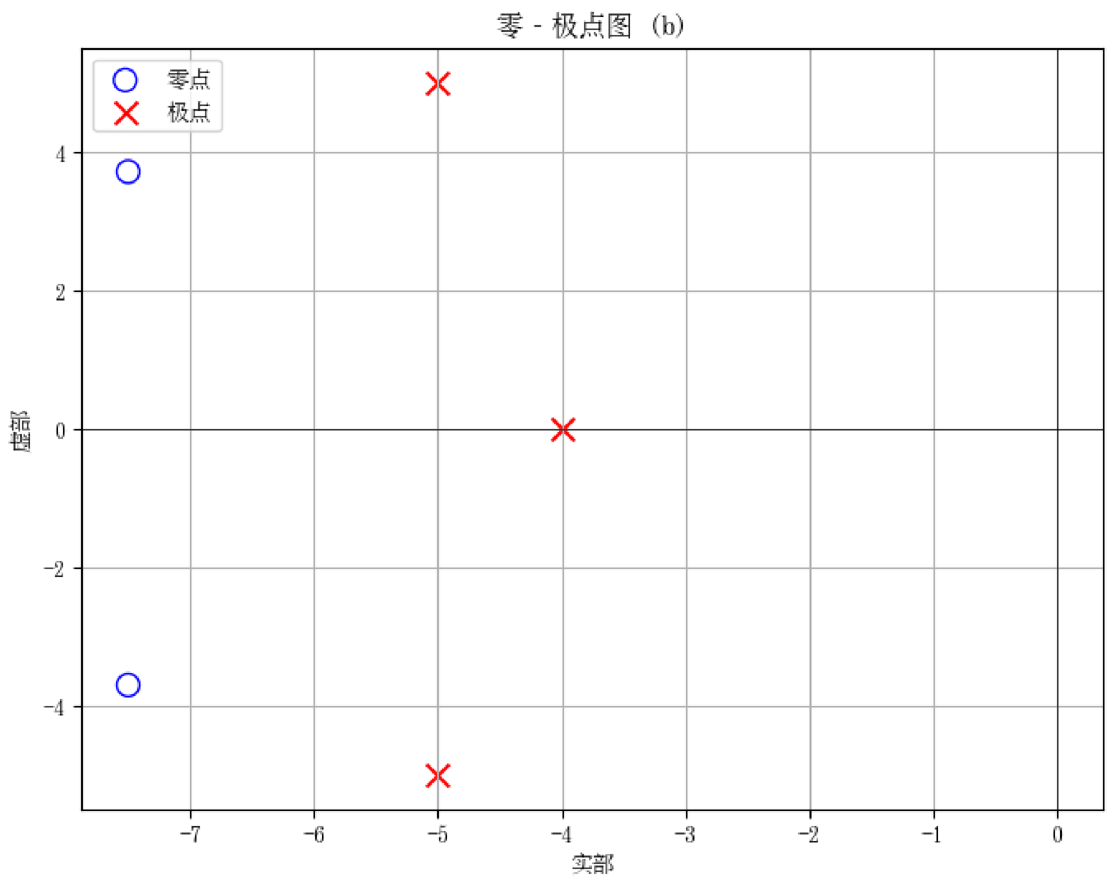
其 ROC 为

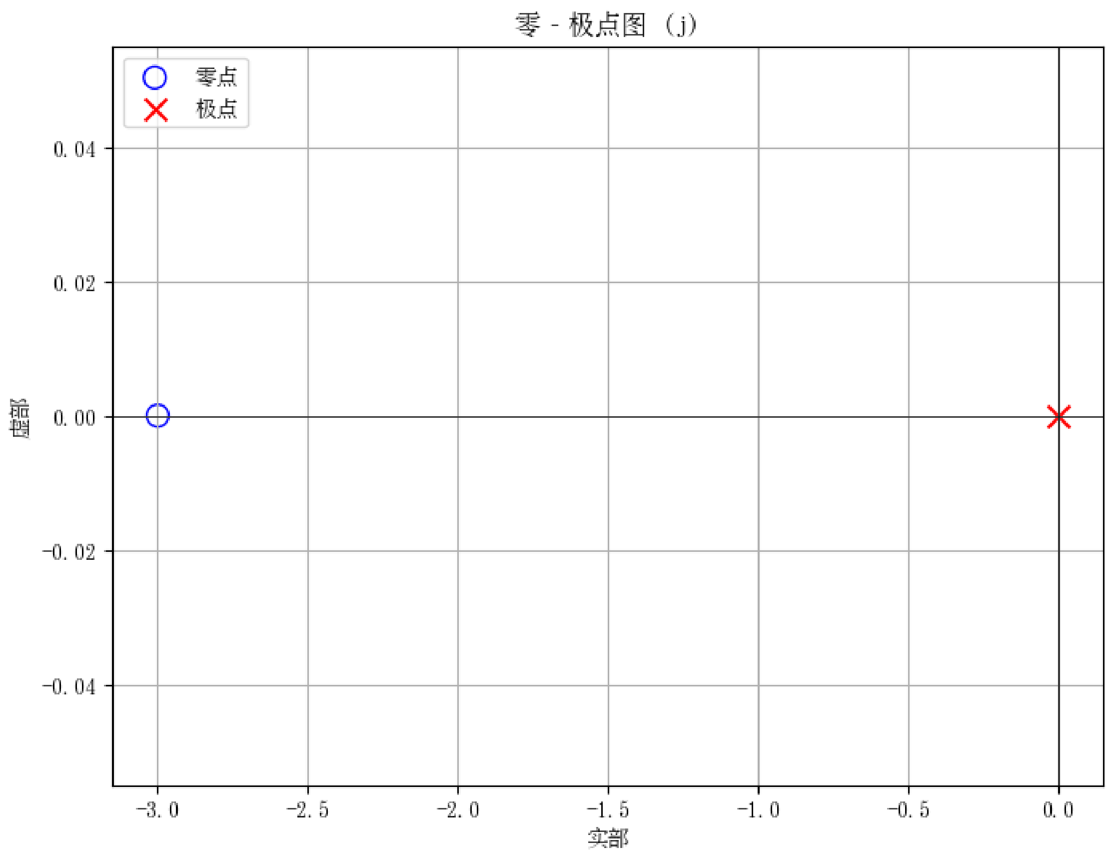
$$\Re(s)>0.$$

- **极点**
  分式 $\frac{1}{s}$ 提供一个极点在 $s = 0$。
- **零点**
  分子 $s + 3 = 0$ 给出一个零点在 $s = -3$。

[2]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import matplotlib as mpl
mpl.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimSong']  # 设置中文字体
mpl.rcParams['axes.unicode_minus'] = False  # 显示负号

# ------------------ (b) 部分 ------------------
# 已知拉普拉斯变换 X(s) = (s^2 + 15s + 70) / [(s+4)*((s+5)^2+25)]
# 零点: 解 s^2 + 15s + 70 = 0, 判别式 Δ = -55
zero_real = -15/2
zero_im = np.sqrt(55) / 2
zeros_b = [complex(zero_real, zero_im), complex(zero_real, -zero_im)]
# 极点:
# 第一项: s = -4;
# 第二项: 解 (s+5)^2+25 = 0  => s = -5 ± j5
poles_b = [complex(-4, 0), complex(-5, 5), complex(-5, -5)]

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
# 绘制零点 (空心圆)
plt.scatter([z.real for z in zeros_b], [z.imag for z in zeros_b],
            marker='o', facecolors='none', edgecolors='b', s=100, label='零点')
# 绘制极点 (交叉标记)
plt.scatter([p.real for p in poles_b], [p.imag for p in poles_b],
            marker='x', color='r', s=100, label='极点')
plt.title("零-极点图 (b)")
plt.xlabel("实部")
plt.ylabel("虚部")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

# ------------------ (j) 部分 ------------------
# 已知 X(s) = (s+3)/(3s)
# 零点:  s + 3 = 0  =>  s = -3
zeros_j = [complex(-3, 0)]
# 极点:  s = 0
poles_j = [complex(0, 0)]

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
```

```
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.scatter([z.real for z in zeros_j], [z.imag for z in zeros_j],
            marker='o', facecolors='none', edgecolors='b', s=100, label='零点')
plt.scatter([p.real for p in poles_j], [p.imag for p in poles_j],
            marker='x', color='r', s=100, label='极点')
plt.title("零-极点图 (j)")
plt.xlabel("实部")
plt.ylabel("虚部")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```





2 9.23

对于下面关于 $x(t)$ 的说法，确定在收敛域上的相应限制

(1) $x(t)e^{-3t}$ 是绝对可积的

2.1 Solution

设

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \mathrm{ROC} = R$$

则

$$x(t)e^{-3t} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s+3), \quad \mathrm{ROC} = R - 3$$

故

- 对于图 1，ROC 为 $\Re\{s\} > 2$
- 对于图 2，ROC 为 $\Re\{s\} > -2$

- 对于图 3，ROC 为 $\Re\{s\} > 2$
- 对于图 4，ROC 为整个复平面