Assignment11

April 8, 2025

1 5.21(e)

计算下列信号的离散傅立叶变换

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)$$

1.1 Answer

令 $x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n-1], \quad x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}, \quad x_2[n-1] = \cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)$

则,

$$\begin{aligned}
X_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)^m \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} \\
&= \frac{3}{5-4\cos\omega}
\end{aligned}$$

我们有

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{8}n} + e^{-j\frac{\pi}{8}n}\right).$$

因此（利用 DTFT 中冲激函数对),

$$X_2(e^{j\omega}) = \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{8}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{8}\right)\right].$$

利用时移性质:

$$\mathcal{DTFT}\{x_2[n-1]\} = e^{-j\omega\cdot 1}\, X_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\,\pi\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{8}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{8}\right)\right].$$

因为

$$x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n-1],$$

所以它的 DTFT 为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\Big[X_1(e^{j\omega}) * \Big\{e^{-j\omega}\,\pi\Big[\delta(\omega-\frac{\pi}{8})+\delta(\omega+\frac{\pi}{8})\Big]\Big\}\Big].$$

也就是说，

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})\, e^{-j(\omega-\theta)}\,\Big[\delta((\omega-\theta)-\frac{\pi}{8})+\delta((\omega-\theta)+\frac{\pi}{8})\Big]d\theta.$$

利用冲激函数的抽样性质，积分将“采样”到两点：- 当 $\omega-\theta=\frac{\pi}{8}$ 时，即 $\theta=\omega-\frac{\pi}{8}$；- 当 $\omega-\theta=-\frac{\pi}{8}$ 时，即 $\theta=\omega+\frac{\pi}{8}$。

于是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\Big\{e^{-j\frac{\pi}{8}}\,X_1\Big(e^{j(\omega-\frac{\pi}{8})}\Big)+e^{j\frac{\pi}{8}}\,X_1\Big(e^{j(\omega+\frac{\pi}{8})}\Big)\Big\}.$$

将 $X_1(e^{j\theta})=\frac{3}{5-4\cos\theta}$ 代入，得

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\Bigg[e^{-j\frac{\pi}{8}}\frac{3}{5-4\cos\Big(\omega-\frac{\pi}{8}\Big)}+e^{j\frac{\pi}{8}}\frac{3}{5-4\cos\Big(\omega+\frac{\pi}{8}\Big)}\Bigg].}$$

2 5.22(a)

求相应于下列傅立叶变换的信号

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases}1, & \frac{\pi}{4}\le|\omega\le\frac{3\pi}{4}\\ 0, & \frac{3\pi}{4}\le|\omega|\le\pi, 0\le|\omega|<\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

2.1 Answer

观察给定的 $X(e^{j\omega})$ 可看作两个方波函数的差：- 令

$$X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases}1, & |\omega|\le\frac{3\pi}{4},\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

- 令

$$X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases}1, & |\omega|\le\frac{\pi}{4},\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

则显然有

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) - X_2(e^{j\omega}).$$

利用标准结论：对于

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}d\omega,$$

计算可得

$$\tilde{x}[n]=\frac{\sin(Wn)}{\pi n},\quad n\neq 0,\quad \tilde{x}[0]=\frac{W}{\pi}.$$

因此：- 对于 $X_1(e^{j\omega})$（这里 $W=\frac{3\pi}{4}$）有

$$x_1[n]=\frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n},\quad n\neq 0,\quad x_1[0]=\frac{3\pi/4}{\pi}=\frac{3}{4}\,.$$

- 对于 $X_2(e^{j\omega})$（这里 $W=\frac{\pi}{4}$）有

$$x_2[n]=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n},\quad n\neq 0,\quad x_2[0]=\frac{\pi/4}{\pi}=\frac{1}{4}\,.$$

由频域的线性叠加（差分）关系，其对应的时域信号为

$$x[n]=x_1[n]-x_2[n].$$

即，对于 $n\neq 0$ 有

$$x[n]=\frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n},$$

而 $n=0$ 时，

$$x[0]=x_1[0]-x_2[0]=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\,.$$

综上，

$$\boxed{x[n]=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=0,\\ \frac{1}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right], & n\neq 0\,.\end{cases}}$$