Assignment15

April 29, 2025

1 7.23

1.1 (a)

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(t - 2k\Delta) - \delta(t - (2k+1)\Delta)]$$

注意到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\Delta) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{2\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{2\Delta})$$

由傅立叶变换的时移性质，有

$$\begin{aligned}
P(j\omega) &= \frac{\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-j\pi n})\delta(\omega - n\frac{\pi}{\Delta}) \\
&= \frac{\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - (-1)^n)\delta(\omega - n\frac{\pi}{\Delta}) \\
&= \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - (2n+1)\frac{\pi}{\Delta})
\end{aligned}$$

故

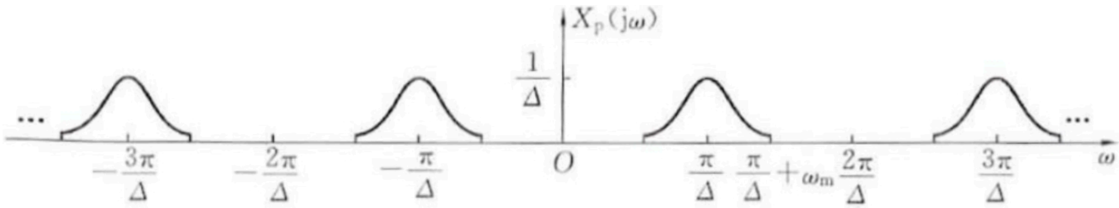
$$x_p(t) = x(t)p(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * P)(j\omega)$$

故

$$\begin{aligned}
X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[X(j\omega) * \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - (2n+1)\frac{\pi}{\Delta}) \right] \\
&= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - (2n+1)\frac{\pi}{\Delta}))
\end{aligned}$$

注意到 $\Delta < \frac{\pi}{2\omega_M}$，即 $\frac{\pi}{\Delta} > 2\omega_M$，故不重叠。

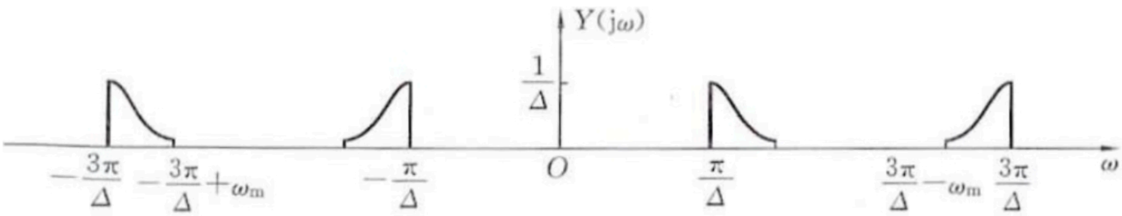
如图所示



又因为

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X_p(j\omega)$$

故图像为



1.2 (b)

采样后信号的频谱为

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\Big(j\Big(\omega - (2n+1)\frac{\pi}{\Delta}\Big)\Big)$$

我们注意到基带信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 出现在 $n=0$ 项中，但其位置被平移到了 $\omega = \pi/\Delta$（即 $X(j(\omega - \pi/\Delta))$）。

因此采用以下两步恢复 $x(t)$：

1. **频谱搬移**

   设

   $$y(t) = x_p(t)e^{-j\pi t/\Delta}$$

   则根据调制定理，频谱平移后有

   $$Y(j\omega) = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\Big(j\Big(\omega + \frac{\pi}{\Delta} - (2n+1)\frac{\pi}{\Delta}\Big)\Big) = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\Big(j\Big(\omega - 2n\frac{\pi}{\Delta}\Big)\Big).$$

   在 $n=0$ 时，恰好有 $Y(j\omega) = X(j\omega)/\Delta$。

2. **理想低通滤波**
   由于采样条件保证了频谱不重叠，所以可以设计一个带通带宽覆盖基带（$|\omega| < \omega_M$）的理想低通滤波器 $H(j\omega)$，使得

   $$H(j\omega) = \begin{cases} \Delta, & |\omega| \le \omega_M \\ 0, & |\omega| > \omega_M \end{cases}.$$

则通过滤波器后，有

$$X_r(j\omega) = H(j\omega)Y(j\omega) = \Delta \cdot \frac{1}{\Delta} X(j\omega) = X(j\omega), \quad |\omega| \le \omega_M,$$

也就是重建得到了原始信号 $x(t)$。

因此，整个重建系统可以总结为：

$$x_p(t) \to \quad e^{-j\pi t/\Delta} \to y(t) \to \qquad \to x(t)$$

1.3 (c)

观察 $Y(j\omega)$ 图像可以发现，将 $Y(j(\omega - \frac{\pi}{\Delta}))$ 和 $Y(j(\omega + \frac{\pi}{\Delta}))$ 叠加后，再通过低通滤波器即可重建 $x(t)$

1. **频谱搬移**
   将 $y(t)$ 分为两路：

   - 第一分支调制：令

     $$y_1(t) = y(t)e^{j\pi t/\Delta},$$

     对应频谱平移为 $Y(j(\omega - \pi/\Delta))$；

   - 第二分支调制：令

     $$y_2(t) = y(t)e^{-j\pi t/\Delta},$$

     对应频谱平移为 $Y(j(\omega + \pi/\Delta))$。

2. **频谱叠加**
   叠加两条分支得

   $$z(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

   在频域，叠加后正好使 $X(j\omega)$ 再次出现在基带（中心附近），且幅度叠加为 $\frac{2}{\Delta}X(j\omega)$

3. **理想低通滤波**
   设计一个理想低通滤波器，其频率响应为

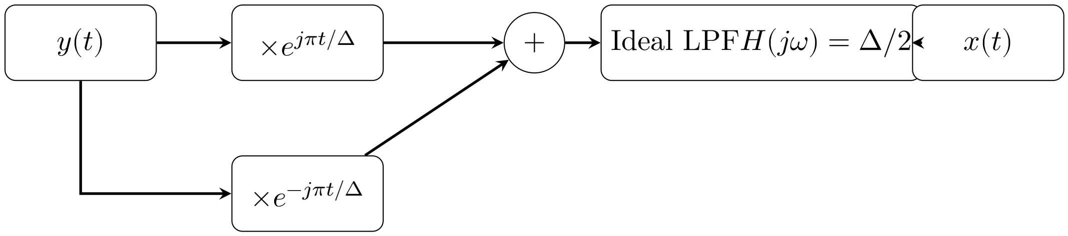
   $$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\Delta}{2}, & |\omega| \le \omega_M, \\ 0, & |\omega| > \omega_M. \end{cases}$$

   经过滤波，输出的频谱为

   $$X_r(j\omega) = H(j\omega) \cdot \frac{2}{\Delta} X(j\omega) = X(j\omega), \quad |\omega| \le \omega_M,$$

   从而恢复 (x(t))。

整个系统的框图可以描述为：



1.4 (d)

由图像可知，有 $\frac{\pi}{\Delta}+\omega_M \le \frac{3\pi}{\Delta}-\omega_M$

故

$$\Delta_{\max}=\frac{\pi}{\omega_M}$$

2 8.24

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT-\Delta) \quad\Longrightarrow\quad S(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-jk\omega_c\Delta}\,\delta(\omega-k\omega_c),$$

2.1 (a)

1. 相乘后频谱表示为

$$x(t)s(t) \;\longleftrightarrow\; \frac{1}{2\pi}X(j\omega)*S(j\omega) \;=\; \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\big(j(\omega-k\omega_c)\big).$$

   因为

$$2\omega_M \;=\; \frac{\pi}{T} \;<\; \omega_c \;=\; \frac{2\pi}{T}.$$

   故不重叠。

2. 经过滤波器后

$$Y(j\omega)=H(j\omega)\,X_s(j\omega)=A\Big[X\big(j(\omega-\omega_c)\big)+X\big(j(\omega+\omega_c)\big)\Big].$$

3. 逆变换得到

$$y(t)=A\Big[x(t)e^{j\omega_c t}+x(t)e^{-j\omega_c t}\Big]=2A\,x(t)\cos(\omega_c t).$$

2.2 (b)

有题意知，有

$$S(j\omega)=\tfrac{2\pi}{T}\sum_{k}e^{-jk\omega_c\Delta}\,\delta(\omega-k\omega_c),$$

故

$$y(t) = A\big[e^{-j\omega_c\Delta}x(t)e^{j\omega_c t} + e^{+j\omega_c\Delta}x(t)e^{-j\omega_c t}\big] = 2A\,x(t)\cos\!\big(\omega_c t - \omega_c\Delta\big).$$

$$\boxed{y(t) \propto x(t)\ \cos\!\big(\omega_c t + \theta_0\big), \quad \omega_c = \tfrac{2\pi}{T}, \quad \theta_0 = -\omega_c\,\Delta.}$$

2.3 (c)

当以 ω_c 的倍数进行平移后，各个频谱副本不会相互重叠，因此需要

$$2\,\omega_M \ \le\ \omega_c \implies \boxed{\omega_M \le \frac{\omega_c}{2} = \frac{\pi}{T}\,.}$$