Assignment13

April 15, 2025

1 6.23

已知低通滤波器

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

求单位冲激响应

1.1 (a) $\angle H(j\omega) = 0$

当其相位全部为零时，频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用傅立叶逆变换得到单位冲激响应：

$$\boxed{h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}.}$$

1.2 (b) $\angle H(j\omega) = \omega T$，其中 T 为常数

在 (b) 部分中，给定低通滤波器频率响应为（设 $H_0(j\omega) = |H(j\omega)|$

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{j\omega T} H_0(j\omega), & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用傅立叶变换的时移性质：
若

$$f(t) \longleftrightarrow \mathcal{F} F(j\omega),$$

则有

$$f(t+T) \longleftrightarrow \mathcal{F} e^{j\omega T} F(j\omega).$$

由此，频率响应 $H(j\omega) = e^{j\omega T} H_0(j\omega)$ 对应的时域响应即为

$$h(t) = h_0(t+T) = \frac{\sin[\omega_c(t+T)]}{\pi(t+T)}.$$

因此，单位冲激响应为

$$\boxed{h(t) = \frac{\sin[\omega_c(t+T)]}{\pi(t+T)}.}$$

1.3 (c) $\angle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$

该滤波器的频率响应写为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{j\pi/2} = j, & 0 < \omega < \omega_c, \\ e^{-j\pi/2} = -j, & -\omega_c < \omega < 0, \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c. \end{cases}$$

可以等效写成

$$H(j\omega) = j\ \mathrm{sgn}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\{|\omega|<\omega_c\}},$$

其中 $\mathrm{sgn}(\omega)$ 为符号函数。

利用傅立叶逆变换公式，单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

将 $H(j\omega)$ 的表达式代入，并将积分分为正、负频率两部分，有

$$h(t) = \frac{j}{2\pi}\left[\int_0^{\omega_c} e^{j\omega t}\,d\omega - \int_{-\omega_c}^{0} e^{j\omega t}\,d\omega\right].$$

分别计算这两个积分：

- 对于正频率部分，

$$I_1 = \int_0^{\omega_c} e^{j\omega t}\,d\omega = \left.\frac{e^{j\omega t}}{j\,t}\right|_0^{\omega_c} = \frac{e^{j\omega_c t}-1}{j\,t}.$$

- 对于负频率部分，

$$I_2 = \int_{-\omega_c}^{0} e^{j\omega t}\,d\omega = \left.\frac{e^{j\omega t}}{j\,t}\right|_{-\omega_c}^{0} = \frac{1-e^{-j\omega_c t}}{j\,t}.$$

因此，

$$h(t) = \frac{j}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega_c t}-1}{j\,t} - \frac{1-e^{-j\omega_c t}}{j\,t}\right] = \frac{1}{2\pi t}\Big[(e^{j\omega_c t}-1)-(1-e^{-j\omega_c t})\Big].$$

故有

$$h(t) = \frac{2\cos(\omega_c t)-2}{2\pi t} = \frac{\cos(\omega_c t)-1}{\pi t}.$$

可以写为

$$h(t) = -\frac{2\sin^2(\frac{\omega_c t}{2})}{\pi t}.$$

因此，(c) 部分的单位冲激响应为

$$\boxed{h(t) = \frac{\cos(\omega_c t)-1}{\pi t} \;=\; -\frac{2\sin^2(\frac{\omega_c t}{2})}{\pi t}.}$$