Assignment10

April 3, 2025

1 4.25

已知

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -1 \le t \le 0 \\ 2-t, & 0 < t \le 1 \\ t, & 1 < t \le 2 \\ 2, & 2 < t \le 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$X(j\omega)$ 为 $x(t)$ 的傅立叶变换，求：

1.1 (a) $\sphericalangle X(j\omega)$

令 $y(t) = x(t+1)$，则 $y(t)$ 为实偶信号。故 $Y(j\omega)$ 也为实偶函数，有

$$\arg Y(j\omega) = 0$$

又由傅立叶变换的时移性质，有

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega} Y(j\omega)$$

即

$$X(j\omega) = e^{-j\omega} Y(j\omega)$$

故 $\arg(X(j\omega)e^{j\omega}) = 0$，得到

$$\boxed{\sphericalangle X(j\omega) = -\omega.}$$

1.2 (b) $X(j0)$

$$\boxed{X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j0t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 7.}$$

1.3 (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}dt\right]_{t=0} = 2\pi x(0) = 4\pi.}$$

1.4 (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$

令 $z(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 为方波信号，则

$$z(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

故

$$z(t+2) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}$$

由傅立叶变换的卷积性质，

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega = 2\pi[x(t) * z(t+2)]_{t=0} = 7\pi.}$$

1.5 (f) 画出 $\Re\{X(j\omega)\}$ 的逆变换

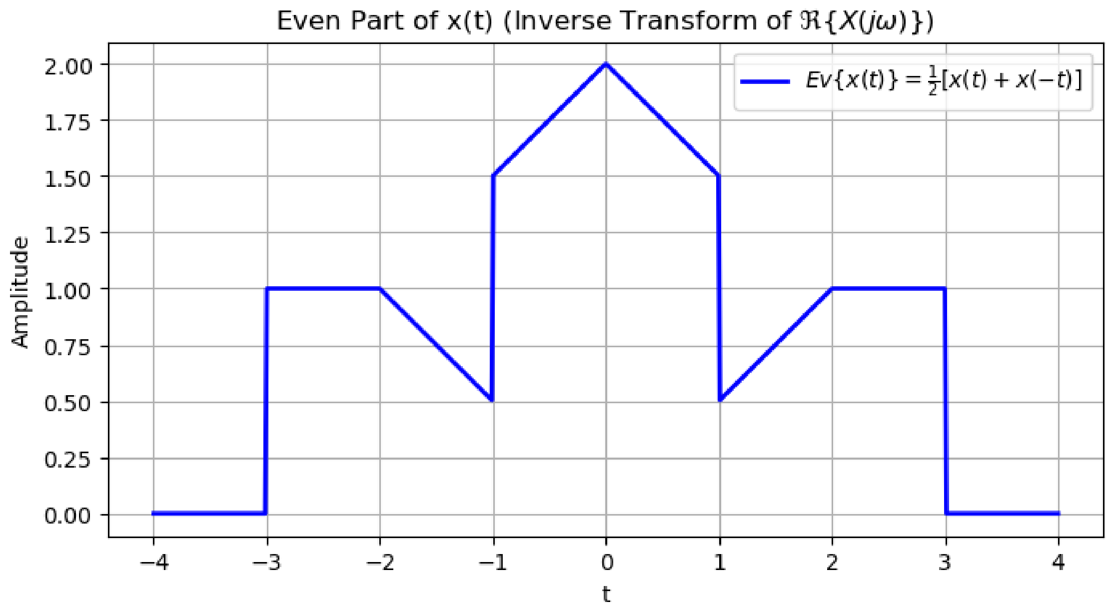
$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{\Re\{X(j\omega)\}\} = \text{Ev}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)].}$$

[2]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def x(t):
    """
    定义输入信号 x(t):
      x(t) = 2                  , -1 <= t <= 0
           = 2 - t              , 0 < t <= 1
           = t                  , 1 < t <= 2
           = 2                  , 2 < t <= 3
           = 0                  , otherwise
    """
    t = np.array(t)
    res = np.zeros_like(t)
    # 区间 -1 <= t <= 0
    mask = (t >= -1) & (t <= 0)
    res[mask] = 2
    # 区间 0 < t <= 1
    mask = (t > 0) & (t <= 1)
    res[mask] = 2 - t[mask]
```

```python
    # 区间 1 < t <= 2
    mask = (t > 1) & (t <= 2)
    res[mask] = t[mask]
    # 区间 2 < t <= 3
    mask = (t > 2) & (t <= 3)
    res[mask] = 2
    return res

def ev_x(t):
    """
    求 x(t) 的偶部，即：
      Ev{x(t)} = (x(t) + x(-t)) / 2
    """
    return 0.5 * (x(t) + x(-t))

# 选取足够覆盖非零部分的 t 范围
# x(t) 非零区间为 [-1, 3]，x(-t) 非零区间为 [-3, 1]，故 ev{x(t)} 非零区间为 [-3,␣
↪3]
t_vals = np.linspace(-4, 4, 600)
y_vals = ev_x(t_vals)

# 绘图
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t_vals, y_vals, 'b-', linewidth=2,␣
↪label=r'$Ev\{x(t)\}=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Even Part of x(t) (Inverse Transform of $\Re\{X(j\omega)\}$)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
<>:45: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\R'
<>:45: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\R'
/var/folders/c8/c991tv453sl7r0wy6k3h9zjr0000gn/T/ipykernel_41050/3953701225.py:4
5: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\R'
  plt.title('Even Part of x(t) (Inverse Transform of $\Re\{X(j\omega)\}$)')
```



2 4.35

有一个连续时间线性时不变系统，其频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

其中，$a > 0$。

2.1 (a) $|H(j\omega)|$ 是多少？$\angle H(j\omega)$ 是多少？该系统的单位冲激响应是什么？

计算分子分母的模：$|a - j\omega| = \sqrt{a^2 + \omega^2}$ $|a + j\omega| = \sqrt{a^2 + \omega^2}$

因此，

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{|a - j\omega|}{|a + j\omega|} = \frac{\sqrt{a^2 + \omega^2}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = 1.}$$

利用复数的极角运算法则：

$$\angle H(j\omega) = \angle(a - j\omega) - \angle(a + j\omega).$$

- 对于 $a - j\omega$（实部正、虚部负），其相角为

$$\angle(a - j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

- 对于 $a + j\omega$（实部正、虚部正），其相角为

$$\angle(a + j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

因此，

$$\boxed{\angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) = -2\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right).}$$

因为

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega} = \frac{2a}{a + j\omega} - 1$$

已知当 $a > 0$ 时，有

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega}, \quad \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

故单位冲激响应为

$$\boxed{h(t) = 2ae^{-at}u(t) - \delta(t)}$$

2.2 (b) 当 $a = 1$，$x(t) = \cos(t/\sqrt{3}) + \cos t + \cos\sqrt{3}t$ 时，求系统的输出 $y(t)$

对于线性时不变系统，频率响应为 $H(j\omega)$，若输入为一个余弦信号

$$\cos(\omega_0 t),$$

则对应的输出为

$$y(t) = |H(j\omega_0)|\cos\Big(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)\Big).$$

由于 $H(j\omega)$ 是全通系统（幅度为 1），所以各频率分量的幅度不变，仅增加相位偏移。

令 $a = 1$ 后，

$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega},$$

各频率分量的相位为：

$$\angle H(j\omega) = -2\arctan(\omega).$$

1. **对于** $\cos\Big(\frac{t}{\sqrt{3}}\Big)$：

   设 $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$，则

   $$\angle H\Big(j\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = -2\arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

   我们知道 $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$，故相位为

   $$-2 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}.$$

   输出分量为

   $$y_1(t) = \cos\Big(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\Big).$$

2. **对于** $\cos t$:

   设 $\omega_2 = 1$，则

   $$\angle H(j1) = -2\arctan(1) = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

   输出分量为

   $$y_2(t) = \cos\Big(t - \frac{\pi}{2}\Big).$$

3. **对于** $\cos\Big(\sqrt{3}\,t\Big)$:

   设 $\omega_3 = \sqrt{3}$，则

   $$\angle H(j\sqrt{3}) = -2\arctan(\sqrt{3}) = -2 \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

   输出分量为

   $$y_3(t) = \cos\Big(\sqrt{3}\,t - \frac{2\pi}{3}\Big).$$

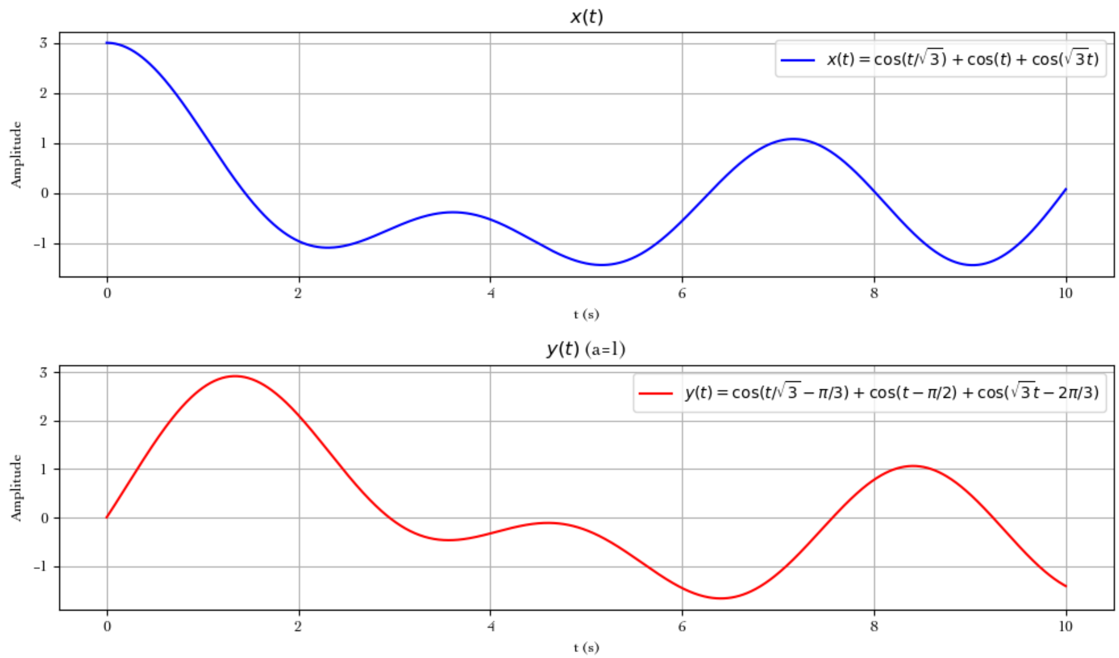
由于系统是线性时不变的，各分量独立经过系统后叠加，所以系统输出为

$$\boxed{y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \cos\Big(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\Big) + \cos\Big(t - \frac{\pi}{2}\Big) + \cos\Big(\sqrt{3}\,t - \frac{2\pi}{3}\Big).}$$

这就是当 $a = 1$ 时系统的输出。

[9]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams['font.family'] = ['Cochin']
# 参数设置
a = 1  # 题目中令 a = 1
sqrt3 = np.sqrt(3)

# 定义时间区间
t = np.linspace(0, 10, 1000)  # 选取 0 到 10 秒，足够显示波形

# 输入信号 x(t)
# x(t) = cos(t/√3) + cos(t) + cos(√3 t)
x_t = np.cos(t/sqrt3) + np.cos(t) + np.cos(sqrt3 * t)

# 系统频率响应为 H(j ) = (1 - j )/(1 + j )
# 对于余弦输入，LTI 系统的输出只改变相位:
# 当输入为 cos( 0 t) 时，输出 y(t)= cos( 0 t + angle(H(j 0)))
# 其中，angle(H(j 0)) = -2 arctan( 0)
# 分别对分量进行处理:
# 分量 1:  1 = 1/√3, 相位偏移 = -2*arctan(1/√3) = -2*( /6) = - /3
# 分量 2:  2 = 1,     相位偏移 = -2*arctan(1)   = - /2
# 分量 3:  3 = √3,    相位偏移 = -2*arctan(√3)  = -2*( /3) = -2 /3
```

```python
y1 = np.cos(t/sqrt3 - np.pi/3)
y2 = np.cos(t - np.pi/2)
y3 = np.cos(sqrt3 * t - 2*np.pi/3)

# 输出信号为各分量的叠加
y_t = y1 + y2 + y3

# 绘图
plt.figure(figsize=(10, 6))

# 绘制输入信号
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t, x_t, 'b', label=r'$x(t)=\cos(t/\sqrt{3})+\cos(t)+\cos(\sqrt{3}t)$')
plt.title('$x(t)$')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)

# 绘制输出信号
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t, y_t, 'r', label=r'$y(t)=\cos(t/\sqrt{3}-\pi/3)+\cos(t-\pi/
  ↪2)+\cos(\sqrt{3}t-2\pi/3)$')
plt.title('$y(t)$ (a=1)')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```



3 4.22(a)

对下列变换求对应的连续时间信号

$$X(j\omega) = \frac{2\sin(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi}$$

3.1 Answer

已知 $x_1(t) = \begin{cases} 1, & -T_1 < t < T_1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$，则

$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$$

由傅立叶变化的频移性质，有

$$e^{j2\pi t}x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j(\omega - 2\pi))$$

即

$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi t}x_1(t)\} = \frac{2\sin((\omega - 2\pi)T_1)}{\omega - 2\pi}$$

令 $T_1 = 3$，则得到该变换对应的连续时间信号

$$x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & -3 < t < 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

4 4.28(a)

设 $x(t)$ 有傅立叶变换 $X(j\omega)$，令 $p(t)$ 为基波频率为 ω_0 的周期信号，其傅立叶级数表示是

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

求

$$y(t) = x(t)p(t)$$

的傅立叶变换表达式。

4.1 Answer

由傅立叶变换的相乘性质，有

$$y(t) = x(t)p(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * P)(j\omega)$$

由周期信号的傅立叶变换性质可知，

$$P(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

故

$$\boxed{\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}(X * P)(j\omega) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n X(j(\omega - n\omega_0)) \end{aligned}}$$

5 4.36

考虑一个线性时不变系统，输入 $x(t)$ 为

$$x(t) = \left[e^{-t} + e^{-3t}\right] u(t)$$

响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = \left[2e^{-t} - 2e^{-4t}\right] u(t)$$

5.1 (a) 求系统的频率响应

设 $y(t) = (h * x)(t)$, 则有

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

又因为,

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} \\
&= \frac{2(2+j\omega)}{(1+j\omega)(3+j\omega)}. \\
Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{4+j\omega} \\
&= \frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}.
\end{aligned}$$

因此，由 $H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ 得

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}}{\frac{2(2+j\omega)}{(1+j\omega)(3+j\omega)}} = \frac{6}{2(2+j\omega)} \cdot \frac{(3+j\omega)}{(4+j\omega)} = \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}\,.}$$

5.2 (b) 确定系统的单位冲激响应

注意到根据傅立叶变换对

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega},$$

我们可以逆变换简单分式。先对下面的分式作部分分式展开:

$$\frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+2)(j\omega+4)}.$$

设

$$\frac{j\omega+3}{(j\omega+2)(j\omega+4)} = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+4}\,.$$

两边通分后比较:

$$j\omega + 3 = A(j\omega+4) + B(j\omega+2) = (A+B)j\omega + (4A+2B).$$

由此，必须有

$$A + B = 1, \quad 4A + 2B = 3.$$

解得:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

所以

$$\frac{j\omega + 3}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\omega + 2} + \frac{1}{j\omega + 4}\right].$$

再乘上系数 3 得

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{j\omega + 2} + \frac{1}{j\omega + 4}\right].}$$

5.3 (c) 求关联该系统输入和输出的微分方程

连续时间线性时不变系统输入输出满足如下微分方程形式,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

同时,根据

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k} = \frac{3(j\omega + 3)}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)}$$

有,

$$b_0 = 9, \quad b_1 = 3, \quad a_0 = 8, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 1$$

故微分方程形式为

$$\boxed{\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8 = 3\frac{dx(t)}{dt} + 9.}$$