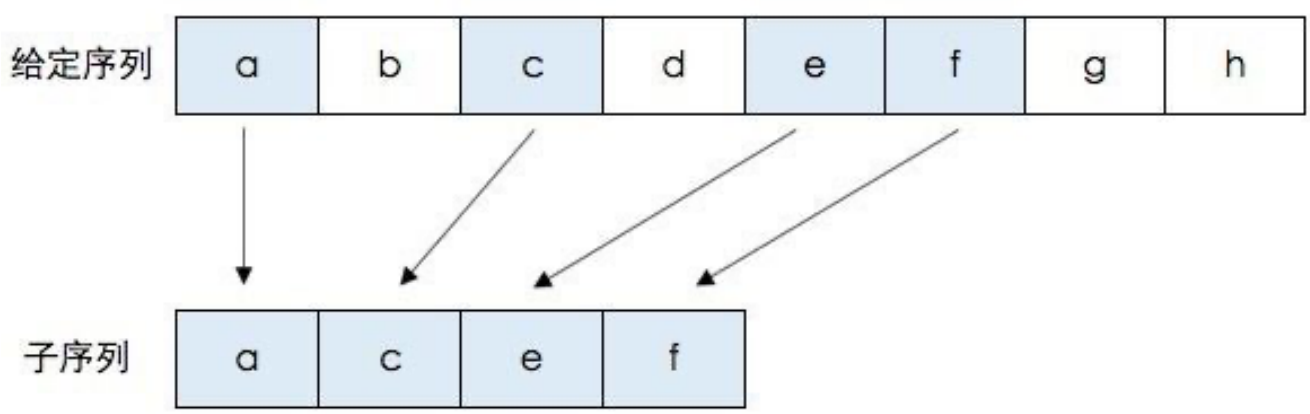
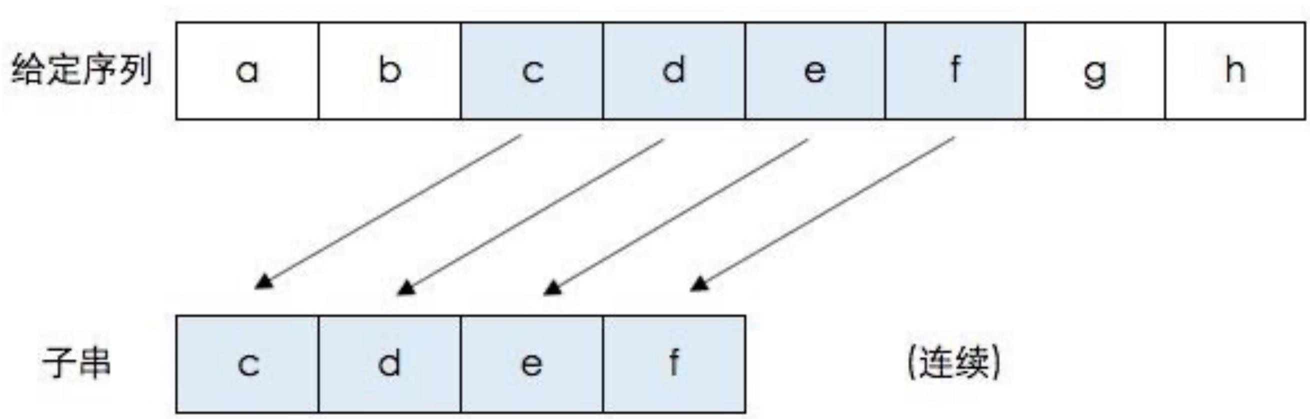
动态规划 最长公共子序列 过程图解

1.基本概念

首先需要科普一下，最长公共子序列（longest common sequence）和最长公共子串（longest common substring）不是一回事儿。什么是子序列呢？即一个给定的序列的子序列，就是将给定序列中零个或多个元素去掉之后得到的结果。什么是子串呢？给定串中任意个连续的字符组成的子序列称为该串的子串。给一个图再解释一下：





如上图，给定的字符序列：{a,b,c,d,e,f,g,h}，它的子序列示例：{a,c,e,f} 即元素b,d,g,h被去掉后，保持原有的元素序列所得到的结果就是子序列。同理，{a,h},{c,d,e}等都是它的子序列。

它的字串示例：{c,d,e,f} 即连续元素c,d,e,f组成的串是给定序列的字串。同理，{a,b,c,d},{g,h}等都是它的字串。

这个问题说明白后，最长公共子序列（以下都简称LCS）就很好理解了。

给定序列s1={1,3,4,5,6,7,7,8},s2={3,5,7,4,8,6,7,8,2}，s1和s2的相同子序列，且该子序列的长度最长，即是LCS。

s1和s2的其中一个最长公共子序列是 {3,4,6,7,8}

2.动态规划

求解LCS问题，不能使用暴力搜索方法。一个长度为n的序列拥有 2的n次方个子序列，它的时间复杂度是指数阶，太恐怖了。解决LCS问题，需要借助动态规划的思想。

动态规划算法通常用于求解具有某种最优性质的问题。在这类问题中，可能会有许多可行解。每一个解都对应于一个值，我们希望找到具有最优值的解。动态规划算法与分治法类似，其基本思想也是将待求解问题分解成若干个子问题，先求解子问题，然后从这些子问题的解得到原问题的解。与分治法不同的是，适合于用动态规划求解的问题，经分解得到子问题往往不是互相独立的。若用分治法来解这类问题，则分解得到的子问题数目太多，有些子问题被重复计算了很多次。如果我们能够保存已解决的子问题的答案，而在需要时再找出已求得的答案，这样就可以避免大量的重复计算，节省时间。我们可以用一个表

来记录所有已解的子问题的答案。不管该子问题以后是否被用到，只要它被计算过，就将其结果填入表中。这就是动态规划法的基本思路。

3.特征分析

解决LCS问题，需要把原问题分解成若干个子问题，所以需要刻画LCS的特征。

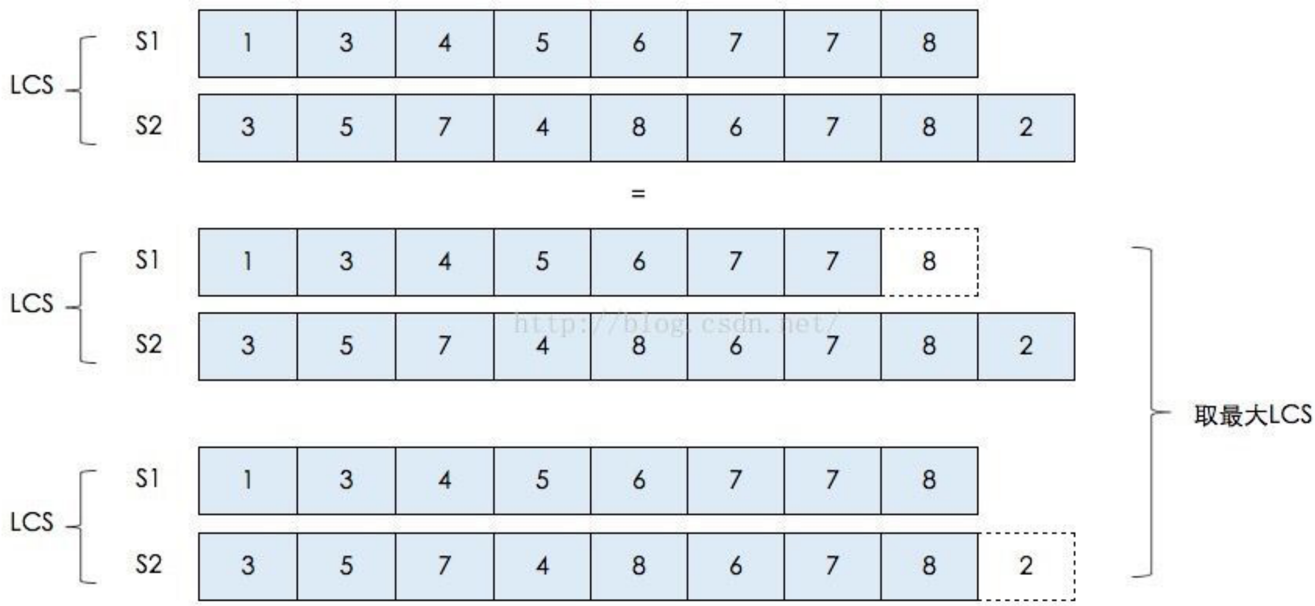
设A=“a0，a1，…，am”，B=“b0，b1，…，bn”，且Z=“z0，z1，…，zk”为它们的最长公共子序列。不难证明有以下性质：

如果am=bn，则zk=am=bn，且“z0，z1，…，z(k-1)”是“a0，a1，…，a(m-1)”和“b0，b1，…，b(n-1)”的一个最长公共子序列；

如果am!=bn，则若zk!=am，蕴涵“z0，z1，…，zk”是“a0，a1，…，a(m-1)”和“b0，b1，…，bn”的一个最长公共子序列；

如果am!=bn，则若zk!=bn，蕴涵“z0，z1，…，zk”是“a0，a1，…，am”和“b0，b1，…，b(n-1)”的一个最长公共子序列。

有些同学，一看性质就容易晕菜，所以我给出一个图来让这些同学理解一下：



以我在第1小节举的例子（S1={1,3,4,5,6,7,7,8}和S2={3,5,7,4,8,6,7,8,2}），并结合上图来说：

假如S1的最后一个元素 与 S2的最后一个元素相等，那么S1和S2的LCS就等于 {S1减去最后一个元素} 与 {S2减去最后一个元素} 的 LCS 再加上 S1和S2相等的最后一个元素。

假如S1的最后一个元素 与 S2的最后一个元素不等（本例子就是属于这种情况），那么S1和S2的LCS就等于：{S1减去最后一个元素} 与 S2 的LCS， {S2减去最后一个元素} 与 S1 的LCS 中的最大的那个序列。

4.递归公式

第3节说了LCS的特征，我们可以发现，假设我需要求 a1 ... am 和 b1 .. b(n-1)的LCS 和 a1 ... a(m-1) 和 b1 .. bn 的LCS，一定会递归地并且重复地把如a1... a(m-1) 与 b1 ... b(n-1) 的 LCS 计算几次。所以我们需要一个数据结构来记录中间结果，避免重复计算。

假设我们用c[i,j]表示Xi 和 Yj 的LCS的长度（直接保存

最长公共子序列的中间结果不现实，需要先借助LCS的长度）。其中X = {x1 … xm}， Y ={y1…yn}， Xi = {x1 … xi}, Yj={y1… yj}。可得递归公式如下：

$$C[i,j]=\begin{cases}0 & 若\ i=0或j=0\\ C[i-1,j-1]+1 & 若\ i,j>0,x_i=y_j\\ \max\{C[i,j-1],C[i-1,j]\} & 若\ i,j>0,x_i\neq y_j\end{cases}$$

5.计算LCS的长度

这里我不打算贴出相应的代码，只想把这个过程说明白。还是以s1={1,3,4,5,6,7,7,8},s2={3,5,7,4,8,6,7,8,2}为例。我们借用《算法导论》中的推导图：

下标i	下标j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$										
1	1										
2	3										
3	4										
4	5										
5	6										
6	7										
7	7										
8	8										

图中的空白格子需要填上相应的数字（这个数字就是c[i,j]的定义，记录的LCS的长度值）。填的规则依据递归公式，简单来说：如果横竖（i,j）对应的两个元素相等，该格子的值 = c[i-1,j-1] + 1。如果不等，取c[i-1,j] 和 c[i,j-1]的最大值。首先初始化该表：

下标j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
下标i		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0									
2	3	0									
3	4	0									
4	5	0									
5	6	0									
6	7	0									
7	7	0									
8	8	0									

然后，一行一行地从上往下填：

下标i \ 下标j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1								
3	4	0									
4	5	0									
5	6	0									
6	7	0									
7	7	0									
8	8	0									

S1的元素3 与 S2的元素3 相等，所以 c[2,1] = c[1,0] + 1。继续填充：

下标i \ 下标j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	4	0									
4	5	0									
5	6	0									
6	7	0									
7	7	0									
8	8	0									

S1的元素3 与 S2的元素5 不等，c[2,2] =max(c[1,2],c[2,1])，图中c[1,2] 和 c[2,1] 背景色为浅黄色。

继续填充：

[利用C++实现最长公共子序列与最长公共子串](#)

[下载](#)

下标i	下标j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
4	5	0									
5	6	0									
6	7	0									
7	7	0									
8	8	0									

	下标j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
下标i		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
4	5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
5	6	0									
6	7	0									
7	7	0									
8	8	0									

	下标j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
下标i		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
4	5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
5	6	0	1	2	2	2	2	3	3	3	3
6	7	0									
7	7	0									
8	8	0									

中间几行填写规则不变，直接跳到最后一行：

	下标j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
下标i		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
4	5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
5	6	0	1	2	2	2	2	3	3	3	3
6	7	0	1	2	3	3	3	3	4	4	4
7	7	0	1	2	3	3	3	3	4	4	4
8	8	0	1	2	3	3	4	4	4	5	5

至此，该表填完。根据性质，c[8,9] = S1 和 S2 的 LCS的长度，即为5。

6.构造LCS

本文S1和S2的最LCS并不是只有1个，本文并不是着重讲输出两个序列的所有LCS，只是介绍如何通过上表，输出其中一个LCS。

我们根据递归公式构建了上表，我们将从最后一个元素c[8][9]倒推出S1和S2的LCS。

c[8][9] = 5，且S1[8] != S2[9]，所以倒推回去，c[8][9]的值来源于c[8][8]的值(因为c[8][8] > c[7][9])。

c[8][8] = 5，且S1[8] = S2[8], 所以倒推回去，c[8][8]的值来源于 c[7][7]。

以此类推，如果遇到S1[i] != S2[j]，且c[i-1][j] = c[i][j-1] 这种存在分支的情况，这里请都选择一个方向（之后遇到这样的情况，也选择相同的方向）。

第一种结果为：

下标j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
下标i		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	**1**	**1**	**1**	1	1	1	1	1	1
3	4	0	1	1	1	**2**	2	2	2	2	2
4	5	0	1	2	2	**2**	**2**	2	2	2	2
5	6	0	1	2	2	2	2	**3**	3	3	3
6	7	0	1	2	3	3	3	**3**	4	4	4
7	7	0	1	2	3	3	3	3	**4**	4	4
8	8	0	1	2	3	3	4	4	4	**5**	5

这就是倒推回去的路径，棕色方格为相等元素，即LCS = {3,4,6,7,8}，这是其中一个结果。

C语言求解最长公共子字符串问题及相关的算法分析

下载

如果如果遇到S1[i] != S2[j]，且c[i-1][j] = c[i][j-1] 这种存在分支的情况，选择另一个方向，会得到另一个结果。

	下标j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
下标i		$S2_j$	3	5	7	4	8	6	7	8	2
0	$S1_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	4	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
4	5	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
5	6	0	1	2	2	2	2	3	3	3	3
6	7	0	1	2	3	3	3	3	4	4	4
7	7	0	1	2	3	3	3	3	4	4	4
8	8	0	1	2	3	3	4	4	4	5	5

即LCS ={3,5,7,7,8}。

7.关于时间复杂度

构建c[i][j]表需要Θ(mn)，输出1个LCS的序列需要Θ(m+n)。

本文内容参考如下：

【1】http://baike.baidu.com/link?url=iKrtEZXAQ3LeQLL7Z0HQWpy7EO7BZInUR17C63lAIDFBJ_COm8e3KmKVxQCD6DlOvji2F9W6achz49Z_anZCfa

【2】《算法导论》第3版 15.4节