深蓝学院
shenlanxueyuan.com

vio第八期第四章作业讲解

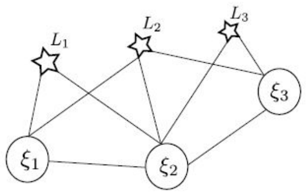
主讲人 梁章科

作业内容

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

作业

1. 某时刻，SLAM 系统中相机和路标点的观测关系如下图所示，其中 ξ 表示相机姿态，L 表示观测到的路标点。当路标点 L 表示在世界坐标系下时，第 k 个路标被第 i 时刻的相机观测到，重投影误差为 $\mathbf{r}(\xi_i, L_k)$。另外，相邻相机之间存在运动约束，如 IMU 或者轮速计等约束。

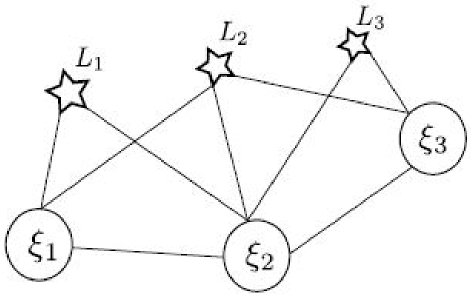


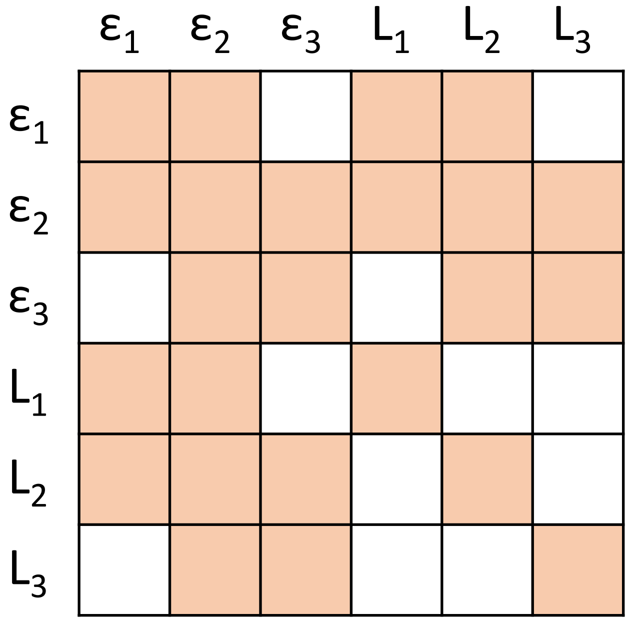
   1. 请绘制上述系统的信息矩阵 Λ.
   2. 请绘制相机 ξ_1 被 marg 以后的信息矩阵 Λ'.

2. 阅读《Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables》. 证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系。

3. 请补充作业代码中单目 Bundle Adjustment 信息矩阵的计算，并输出正确的结果。正确的结果为：奇异值最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为 7.

作业1-绘制信息矩阵





- 最简单的方法：参考SLAM 14讲P252页：所谓邻接矩阵是这样一种矩阵，它的第*i*、*j* 个元素描述了节点*i* 和*j* 是否存在一条边。如果存在此边，设这个元素为1，否则设为0，右图中浅橙色代表1，白色代表0。

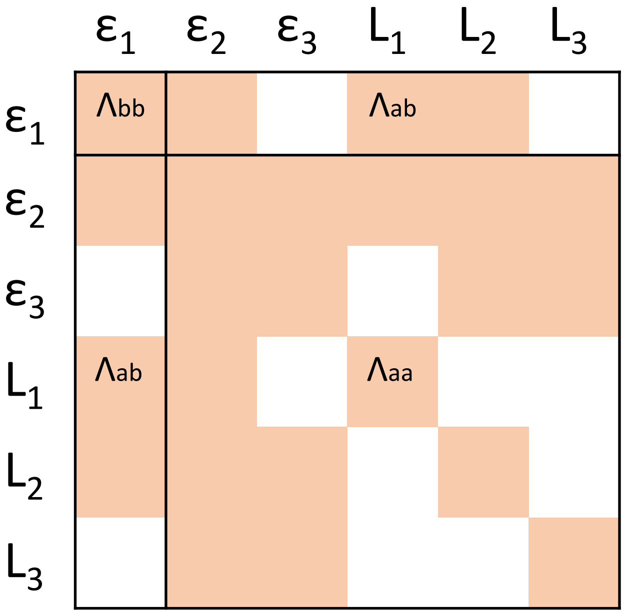
- 方法二：每一条边代表一个残差e_ij，该残差对所有的顶点求雅可比J_ij，利用下面的公式求信息矩阵：

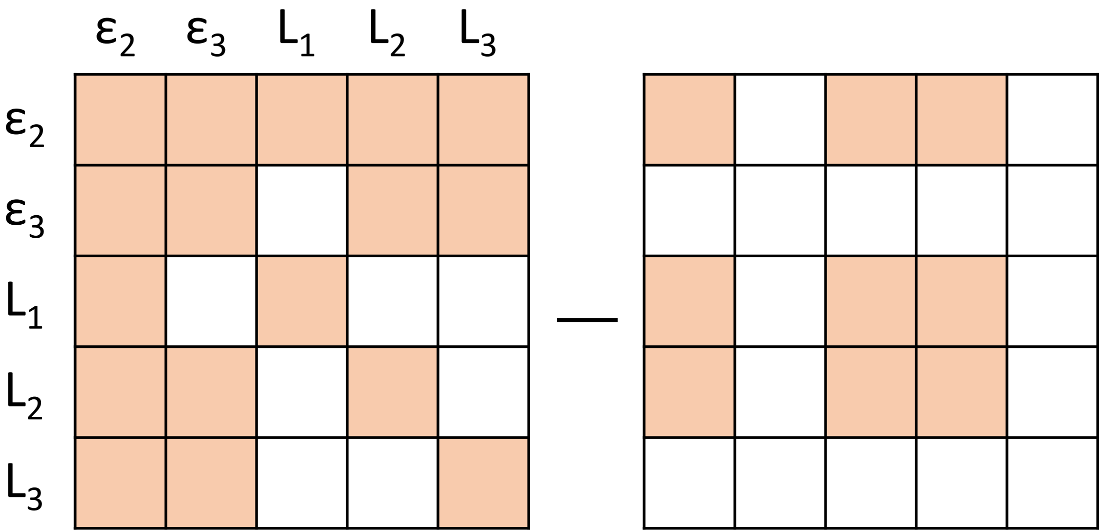
$$\boldsymbol{H} = \sum_{i,j} \boldsymbol{J}_{ij}^T \boldsymbol{J}_{ij}$$

作业1-绘制marg后的信息矩阵

Marg掉ε_1

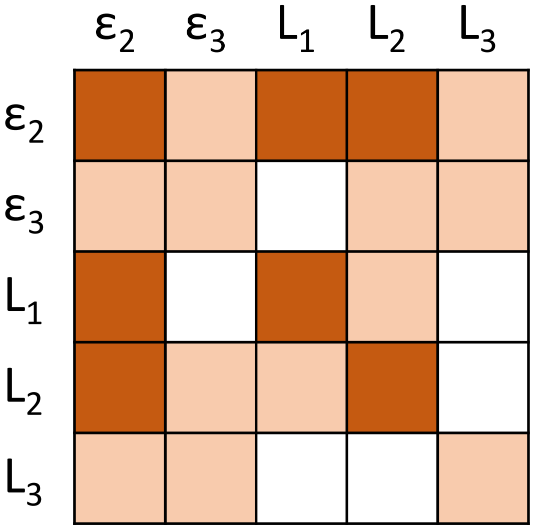
$$\Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba}$$



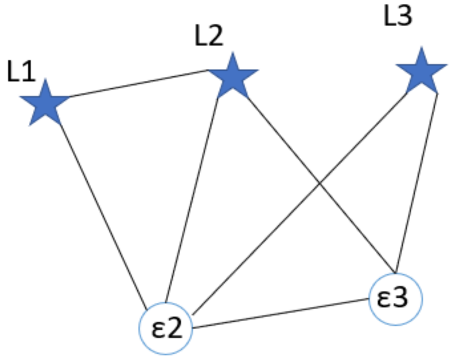


作业1-绘制marg后的信息矩阵

Marg后的信息矩阵



原来互相独立的L1和L2在marg掉ε_1后变成相关



作业2-信息矩阵与协方差逆关系

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

从文献1中公式A.4可以证明高斯分布的负对数似然函数的

Hessian矩阵 = 协方差矩阵的逆

Consider a Gaussian random vector $\boldsymbol{\theta}$ with mean $\boldsymbol{\theta}^\star$ and covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}_\theta$ so its joint probability density function (PDF) is given by:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{N_\theta}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_\theta|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star)^T \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star)\right] \tag{A.1}$$

The objective function can be defined as its negative logarithm:

$$J(\boldsymbol{\theta}) \equiv -\ln p(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N_\theta}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}_\theta| + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star)^T \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star) \tag{A.2}$$

which is a quadratic function of the components in $\boldsymbol{\theta}$. By taking partial differentiations with respect to θ_l and $\theta_{l'}$, the (l, l') component of the Hessian matrix can be obtained:

$$\mathcal{H}^{(l,l')}(\boldsymbol{\theta}^\star) = \left.\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l \partial\theta_{l'}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^\star} = (\boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1})^{(l,l')} \tag{A.3}$$

so the Hessian matrix is equal to the inverse of the covariance matrix:

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^\star) = \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} \tag{A.4}$$

[1] Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables.

作业2-信息矩阵与协方差逆关系

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

文献 2 中证明了负对数似然函数的

信息矩阵 = **Hessian 矩阵的期望**

另外有，**Hessian矩阵的期望 = Hessian矩阵**

结合上一页ppt, **Hessian矩阵 = 协方差矩阵的逆**

那么，**信息矩阵 = 协方差矩阵的逆**

高斯随机变量的Hessian的期望等于Hessian本身，贺博给的解释是：渐近近似。期望的information我们得不到，在观测数据下，我们只能得到观测的information matrix。当数据足够多的时候， expected information渐近等于我们的observed information

[2] https://wiseodd.github.io/techblog/2018/03/11/fisher-information/

Proof. The Hessian of the log likelihood is given by the Jacobian of its gradient:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_{\log p(x|\theta)} &= \mathrm{J}\left(\frac{\nabla p(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right) \\
&= \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}\, p(x|\theta) - \nabla p(x|\theta)\, \nabla p(x|\theta)^{\mathrm{T}}}{p(x|\theta)\, p(x|\theta)} \\
&= \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}\, p(x|\theta)}{p(x|\theta)\, p(x|\theta)} - \frac{\nabla p(x|\theta)\, \nabla p(x|\theta)^{\mathrm{T}}}{p(x|\theta)\, p(x|\theta)} \\
&= \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x|\theta)} - \left(\frac{\nabla p(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right)\left(\frac{\nabla p(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

where the second line is a result of applying quotient rule of derivative. Taking expectation wrt. our model, we have:

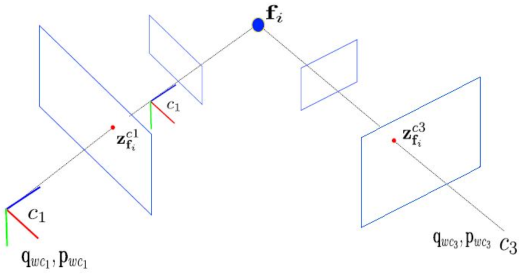
$$
\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{p(x|\theta)}\left[\mathrm{H}_{\log p(x|\theta)}\right] &= \mathop{\mathbb{E}}_{p(x|\theta)}\left[\frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x|\theta)} - \left(\frac{\nabla p(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right)\left(\frac{\nabla p(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{p(x|\theta)}\left[\frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x|\theta)}\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{p(x|\theta)}\left[\left(\frac{\nabla p(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right)\left(\frac{\nabla p(x|\theta)}{p(x|\theta)}\right)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{H}_{p(x|\theta)}}{p(x|\theta)} p(x|\theta)\, \mathrm{d}x - \mathop{\mathbb{E}}_{p(x|\theta)}\left[\nabla \log p(x|\theta)\, \nabla \log p(x|\theta)^{\mathrm{T}}\right] \\
&= \mathrm{H}_{\int p(x|\theta)\, \mathrm{d}x} - \mathrm{F} \\
&= \mathrm{H}_1 - \mathrm{F} \\
&= -\mathrm{F}.
\end{aligned}
$$

Thus we have $\mathrm{F} = -\mathbb{E}_{p(x|\theta)}\left[\mathrm{H}_{\log p(x|\theta)}\right]$. □

作业3-单目BA信息矩阵零空间

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

单目 SLAM 系统 7 自由度不可观：6 自由度姿态 + 尺度。



参考slam 14讲7.7章节：代码中的矩阵**jacobian_Ti** 和**jacobian_Pj** 分别对应视觉slam14 讲的公式7.45(**前三列与后三列顺序对调**) 和7.47，注意书上是观测值减预测值，代码是预测值减观测值，因此这里去掉公式7.45和7.47的负号：

将这两项相乘，就得到了 2×6 的雅可比矩阵：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \delta \boldsymbol{\xi}} = -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} & -\frac{f_x X'Y'}{Z'^2} & f_x + \frac{f_x X^2}{Z'^2} & -\frac{f_x Y'}{Z'} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} & -f_y - \frac{f_y Y'^2}{Z'^2} & \frac{f_y X'Y'}{Z'^2} & \frac{f_y X'}{Z'} \end{bmatrix}. \tag{7.45}$$

这个雅可比矩阵描述了重投影误差关于相机位姿李代数的一阶变化关系。我们保留了前面的负号，因为这是由于误差是由**观测值减预测值**定义的。它当然也可反过来，定义成“预测减观测”的形式。在那种情况下，只要去掉前面的负号即可。此外，如果 $\mathfrak{se}(3)$ 的定义方式是旋转在前，平移在后时，只要把这个矩阵的前三列与后三列对调即可。

另一方面，除了优化位姿，我们还希望优化特征点的空间位置。因此，需要讨论 $\boldsymbol{e}$ 关于空间点 $\boldsymbol{P}$ 的导数。所幸这个导数矩阵相对来说容易一些。仍利用链式法则，有：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}} = \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}'} \frac{\partial \boldsymbol{P}'}{\partial \boldsymbol{P}}. \tag{7.46}$$

第一项已在前面推导了，第二项，按照定义

$$\boldsymbol{P}' = \exp(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}) \boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{t}.$$

我们发现 $\boldsymbol{P}'$ 对 $\boldsymbol{P}$ 求导后只剩下 $\boldsymbol{R}$。于是

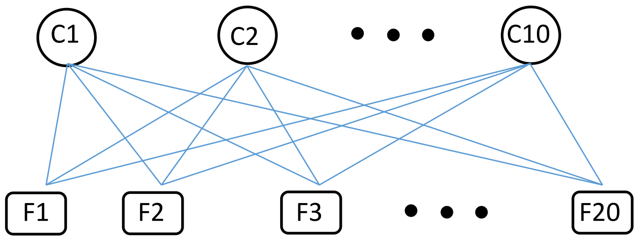
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}} = -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{R}. \tag{7.47}$$

证明思路：

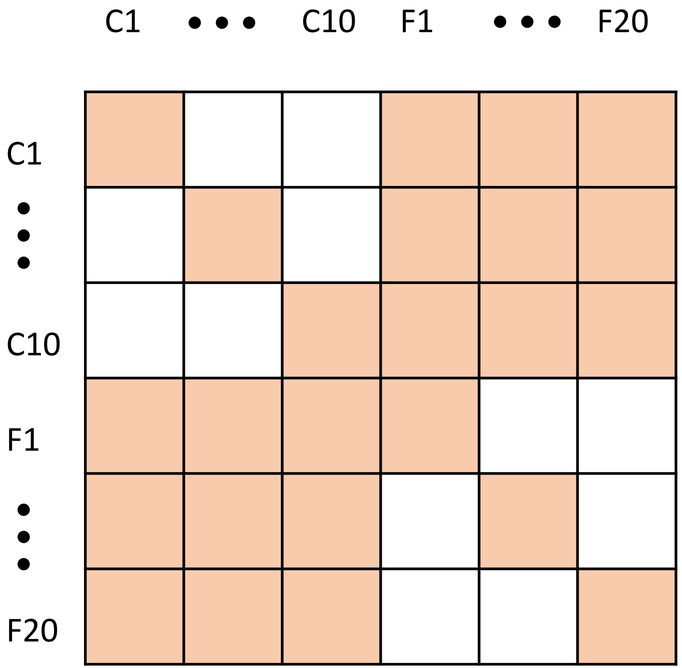
信息矩阵存在7维零空间 → SVD分解信息矩阵求奇异值，存在7个等于0的奇异值

作业3-单目BA信息矩阵零空间

Camera pose：10个
FeaturePoints：20个
相机位姿相互独立，特征点相互独立，在每个相机位姿都能观测到所有的特征点



BA信息矩阵



作业3-单目BA信息矩阵零空间

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

代码运行结果

```
            double x = Pc.x();
            double y = Pc.y();
            double z = Pc.z();
            double z_2 = z * z;
            Eigen::Matrix<double,2,3> jacobian_uv_Pc;
            jacobian_uv_Pc<< fx/z, 0 , -x * fx/z_2,
                    0, fy/z, -y * fy/z_2;
            Eigen::Matrix<double,2,3> jacobian_Pj = jacobian_uv_Pc * Rcw;
            Eigen::Matrix<double,2,6> jacobian_Ti;
            jacobian_Ti << -x* y * fx/z_2, (1+ x*x/z_2)*fx, -y/z*fx, fx/z, 0 , -x * fx/z_2,
                            -(1+y*y/z_2)*fy, x*y/z_2 * fy, x/z * fy, 0,fy/z, -y * fy/z_2;

            H.block( startRow: i*6, startCol: i*6, blockRows: 6, blockCols: 6) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Ti;
            /// 请补充完整作业信息矩阵块的计算
            H.block( startRow: poseNums*6 + j*3, startCol: poseNums*6 + j*3, blockRows: 3, blockCols: 3) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Pj;
            H.block( startRow: poseNums*6 + j*3, startCol: i*6, blockRows: 3, blockCols: 6) = jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Ti;
            H.block( startRow: i*6, startCol: poseNums*6 + j*3, blockRows: 6, blockCols: 3) = jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Pj;
        }
    }
```

main

NullSpaceTest

```
 0.00253459
 0.00230246
 0.00172459
0.000422374
3.21708e-17
2.06732e-17
1.43188e-17
7.66992e-18
6.08423e-18
6.05715e-18
3.94363e-18
```

在线问答

Q&A

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening