



深蓝学院
shenlanxueyuan.com

vio第八期第六章作业讲解



主讲人 梁章科



作业



基础题

- ① 证明式(15)中, 取 $y = u_4$ 是该问题的最优解。提示: 设 $y' = u_4 + v$, 其中 v 正交于 u_4 , 证明

$$y'^T D^T D y' \geq y^T D^T D y$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

- ② 请依据本节课公式, 完成特征点三角化代码, 并通过仿真测试

提升题

- ① 请对测量值加上不同噪声 (增大测量噪声方差), 观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化, 并绘制比例值的变化曲线。
- ② 固定噪声方差参数, 将观测图像帧扩成多帧 (如 3, 4, 5 帧等), 观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化, 并绘制比例值的变化曲线。

- 基础题1：证明题：奇异值构造零空间
- 基础题2：特征点三角化代码
- 提升题1：改变噪声
- 提升题2：改变帧数

基础题1：证明题

- 方法1：根据作业给的提示使用奇异值分解

$$D^T D = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 u_i u_i^T$$

$$\begin{aligned} y' D^T D y - y^T D^T D y &= (u_4 + v)^T D^T D (u_4 + v) - u_4^T D^T D u_4 \\ &= u_4^T D^T D v + v^T D^T D u_4 + v^T D^T D v, \quad \text{其中} \quad u_4^T D^T D v = 0, \quad v^T D^T D u_4 = 0, \quad \text{请自行证明} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 v^T u_i u_i^T v \\ &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 (v^T u_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

因此 $y' D^T D y \geq y^T D^T D y$, 证毕

基础题1：证明题

●方法2：线性组合（更加general的方法）

$$\text{令 } y = \sum_{i=1}^4 a_i u_i$$

$$s. t. \|y\| = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 a_i^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \|Dy\|_2^2 &= y^T D^T D y = \sum_{i=1}^4 a_i u_i^T \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 u_i u_i^T \sum_{i=1}^4 a_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^4 (a_i u_i^T) (\sigma_i^2 u_i u_i^T) (a_i u_i) \\ &= \sum_{i=1}^4 a_i^2 \sigma_i^2 \end{aligned}$$

$$\text{原问题化为求: } \min \sum_{i=1}^4 a_i^2 \sigma_i^2, \quad s. t. \sum_{i=1}^4 a_i^2 = 1$$

$$\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \sigma_3^2 > \sigma_4^2, \text{ 当 } a_i = 0 (i = 1, 2, 3), \quad a_4 = 1, \quad \text{此时有最小值:} \\ y = u_4$$

基础题1：证明题

●方法3：拉格朗日乘子

$$\min f(y) = y^T D^T D y \quad s.t. \|y\| = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min y^T D^T D y \quad s.t. \|y\| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min_y \max_{\lambda} y^T D^T D y + \lambda(1 - y^T y), s.t. \lambda \geq 0$$

$$\min_y \max_{\lambda} y^T D^T D y + \lambda(1 - y^T y) = \max_{\lambda} \min_y y^T D^T D y + \lambda(1 - y^T y)$$

基础题1：证明题

●方法3：拉格朗日乘子

分类讨论：

(1) 若 $\lambda > \sigma_4$

$y^T D^T D y + \lambda(1 - y^T y)$ 的极小值为 $-\infty$ ，不满足拉格朗日乘子的对偶条件 $p^* > -\infty$

(2) 若 $\lambda \leq \sigma_4$

$$\min_y y^T D^T D y + \lambda(1 - y^T y) \Rightarrow D^T D y = \lambda y$$

$$\max_{\lambda} \min_y y^T D^T D y + \lambda(1 - y^T y), \text{ s.t. } D^T D y = \lambda y, \lambda \in [0, \sigma_4]$$

$$\Leftrightarrow \max_{\lambda} \lambda = \sigma_4$$

基础题2：特征点三角化代码

- ◆ 更多的特征点三角化内容可参考SLAM14讲7.5节，根据PPT上的公式拼接矩阵D

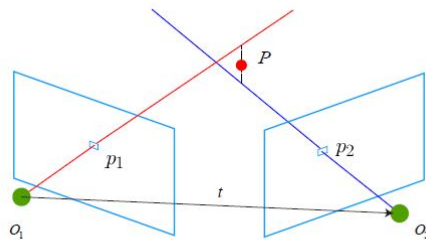


图 7-9 三角化获得地图点深度

```
/* your code begin */
Eigen::MatrixX_d D( x: 2*(end_frame_id-start_frame_id), y: 4);
int j = 0;
for (int i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i){
    Eigen::MatrixX_d P( x: 3, y: 4);
    P.leftCols( n: 3) = camera_pose[i].Rwc.transpose();
    P.rightCols( n: 1) = -camera_pose[i].Rwc.transpose() * camera_pose[i].twc;
    D.block<2, 4>( startRow: j*2, startCol: 0) = camera_pose[i].uv * P.row( i: 2) - P.topRows( n: 2);
    ++j;
}
```


提升题：改变噪声、改变帧数

◆ 加入噪声：一个像素坐标在归一化平面代表多少距离？

相机大小一般 10^{-2}m 级别，大约 10^3 个像素，一个像素的物理长度 $d = 10^{-5}\text{m}$ 。
焦距长度 10^{-2}m 级别

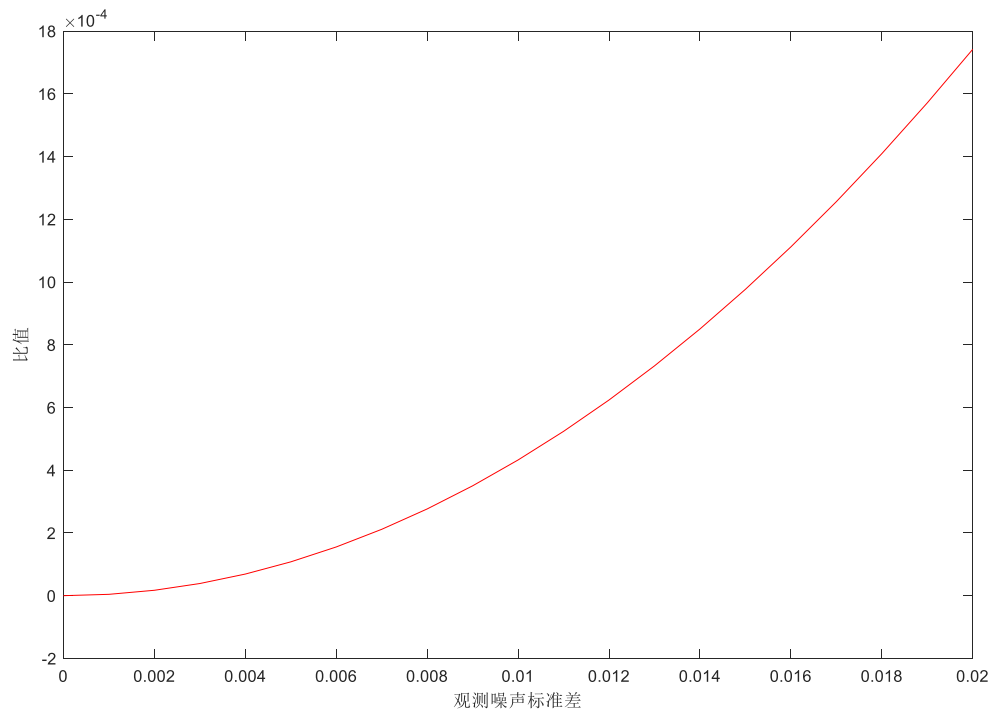
$$u = f_x \frac{X}{Z} + c_x$$

因此，上式中 $f_x = \frac{10^{-2}}{d} = 10^3$

像素坐标 u 的 1 个像素，代表归一化平面的 $10^{-3}m$

提升题：改变噪声、改变帧数

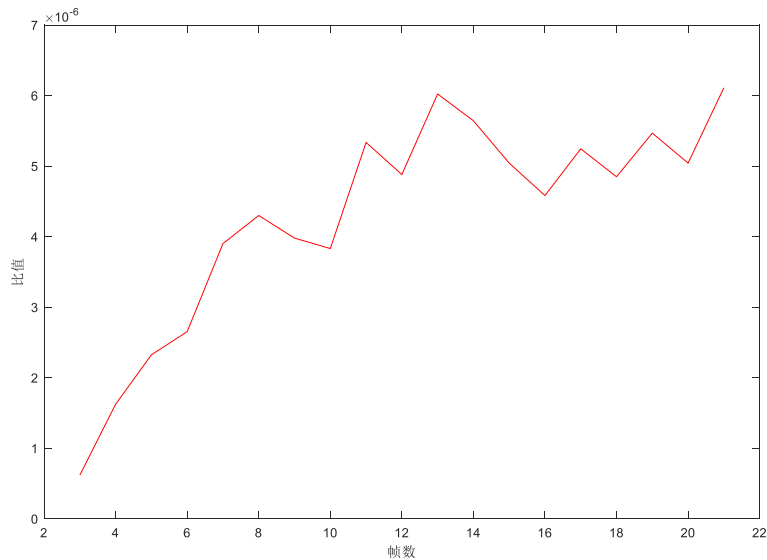
◆ 改变噪声



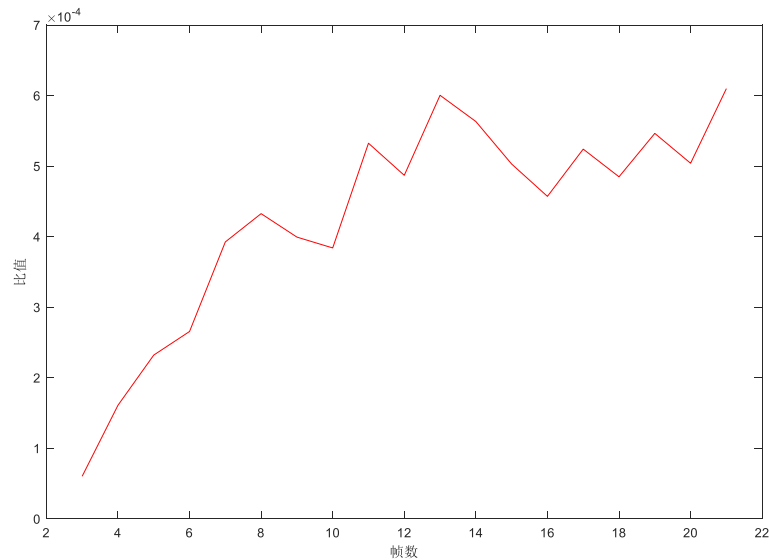
提升题：改变噪声、改变帧数

◆ 改变帧数

➤ 噪声标准差0.001



➤ 噪声标准差0.01





深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听 !
Thanks for Listening

