Министерство цифрового развития, связи и
массовых коммуникаций Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5
по дисциплине «**Моделирование**»

Выполнил:
студент гр. ИС-142
«__» мая 2025 г. _____ /Григорьев Ю.В./

Проверил:
преподаватель
«__» мая 2025 г. _____ /Уженцева А.В./

Оценка « _____ »

Новосибирск 2025

ВВЕДЕНИЕ

Цепи Маркова представляют собой важный инструмент в теории вероятностей и математическом моделировании, находящий широкий спектр применения в таких областях, как физика, биология, экономика и информатика. Рандомизированная цепь Маркова (РЦМ) — это дискретная стохастическая модель, в которой переходы между состояниями определяются случайным образом на основе заданной матрицы вероятностей переходов. Особенностью двухстохастических матриц, используемых в данной работе, является то, что сумма элементов как по строкам, так и по столбцам равна единице, что накладывает дополнительные ограничения на структуру переходов и стационарное распределение.

Целью данной работы является реализация модели РЦМ с использованием языка программирования Python и библиотеки Matplotlib для визуализации результатов. Задание включает создание двух различных двухстохастических матриц, генерацию последовательностей состояний и связанных с ними случайных значений, нормировку данных, анализ частот посещений состояний, а также построение графиков поведения и автокорреляции. В рамках работы исследуется влияние структуры матриц переходов на динамику цепи Маркова, что позволяет глубже понять зависимость поведения модели от её параметров.

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Программа реализована на Python с использованием библиотек NumPy для работы с массивами и генерации случайных чисел, а также Matplotlib для построения графиков. Основные этапы работы включают:

1. Определение и проверка двухстохастических матриц.
2. Генерация цепей Маркова с использованием экспоненциального распределения для значений.
3. Нормировка сгенерированных значений в диапазон [0, 1].
4. Подсчёт частот посещений состояний.
5. Визуализация поведения цепей и их автокорреляции.

1. Описание матриц переходов

Для исследования были выбраны две двухстохастические матрицы:

Матрица P1:

[0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
[0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
[0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
[0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
[0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],

[0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03],
[0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03],
[0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03],
[0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06],
[0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7]

Эта матрица характеризуется высокими значениями на главной диагонали (0.7), что означает 70% вероятность остаться в текущем состоянии. Остальные 30% вероятности равномерно распределены между 9 другими состояниями (по 0.033 ≈ 3.33% на каждое). Такая структура предполагает "инерционное" поведение цепи с редкими переходами между состояниями.

Матрица P2:

[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]

В отличие от P1, эта матрица имеет полностью равномерное распределение вероятностей, где каждый элемент равен 0.1. Это обеспечивает максимальную подвижность цепи с равновероятными переходами между всеми 10 состояниями.

Обе матрицы были проверены на двухстохастичность: суммы по строкам и столбцам равны 1, что подтверждает корректность их построения.

2. Реализация алгоритма

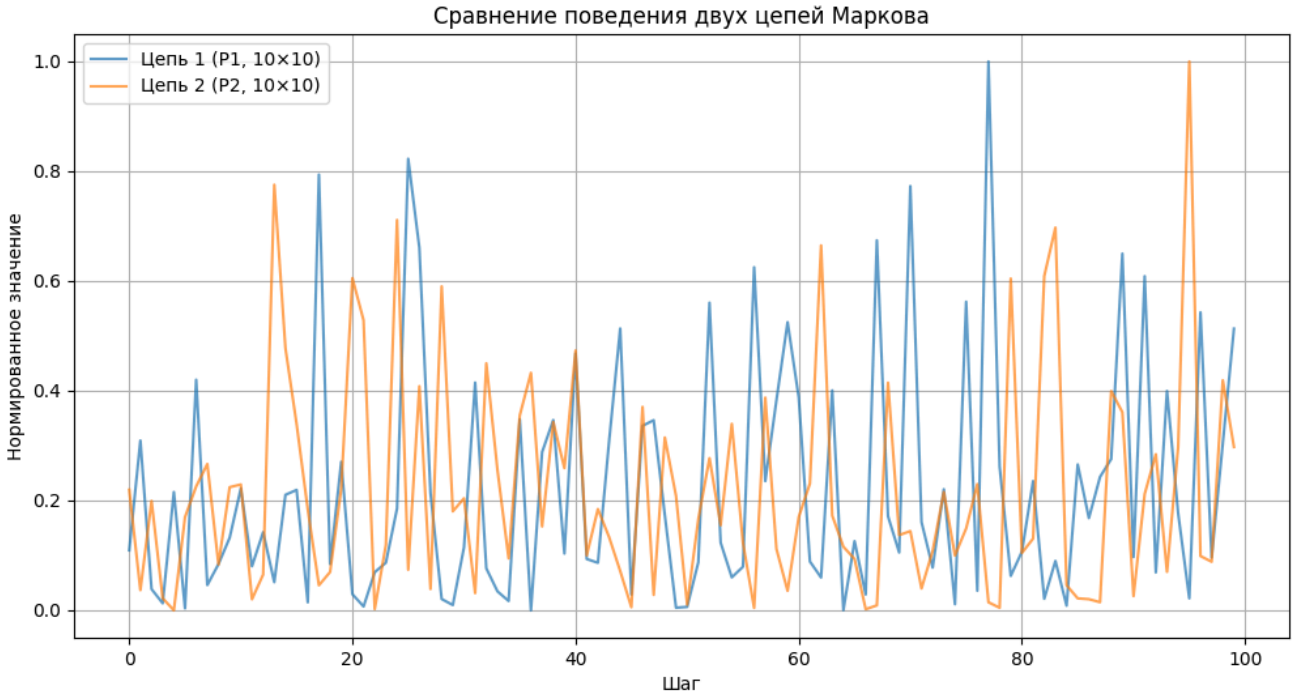
Алгоритм генерации цепи Маркова реализован в функции generate_markov_chain. Начальное состояние задается как 0, а затем на каждом из 100 шагов:

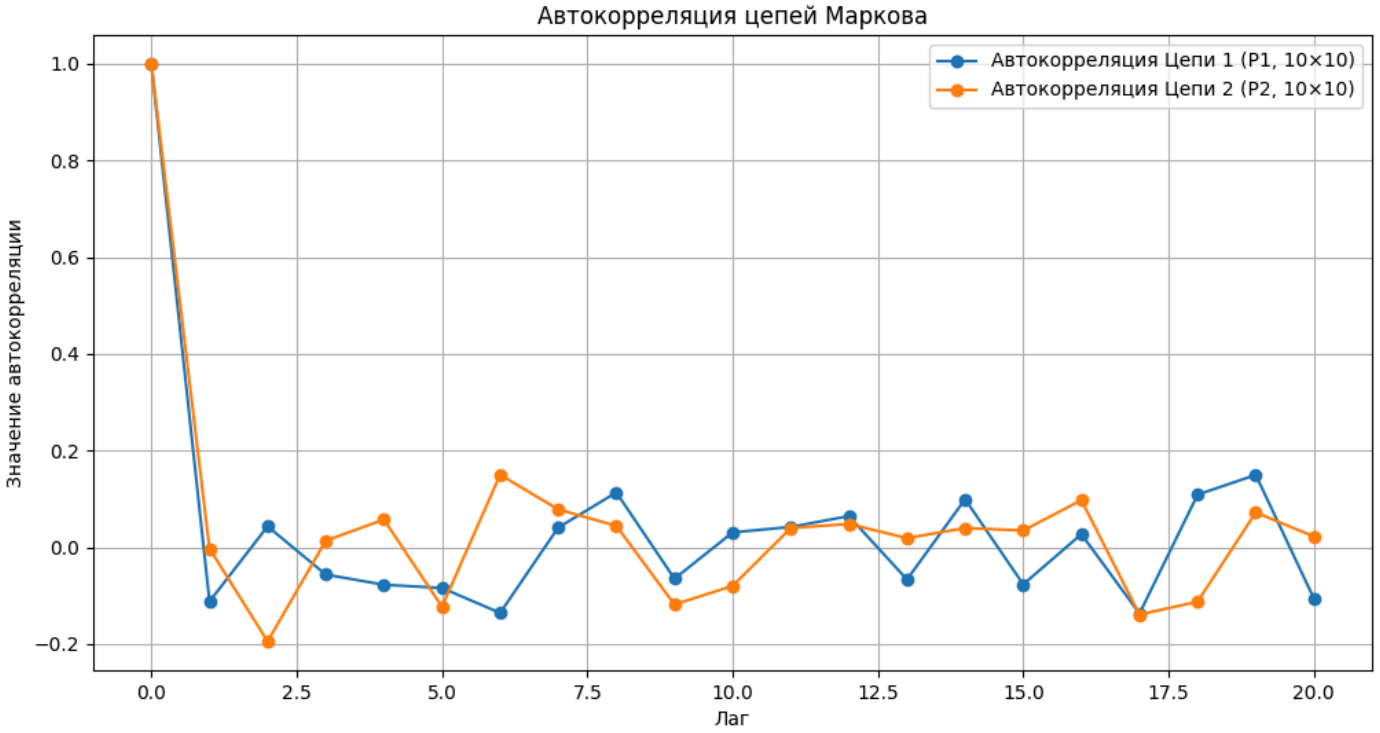
- Генерируется случайное значение из экспоненциального распределения с параметром scale=1.0.
- На основе текущего состояния и соответствующей строки матрицы переходов выбирается следующее состояние с помощью функции np.random.choice.
- Значения нормируются в диапазон [0, 1] для унификации анализа.

Частоты посещений состояний вычисляются как доля шагов, проведённых в каждом состоянии, с использованием функции np.bincount. Для визуализации строятся два графика: график поведения (нормированные

значения в зависимости от шага) и график автокорреляции (зависимость значений от предыдущих на разных лагах).

3. Визуализация





Общее число шагов моделирования составило 100, что достаточно для демонстрации различий в поведении цепей.

Выводы в консоль:

```
Проверка P1:
Сумма по строкам: [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
Сумма по столбцам: [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
Проверка P2:
Сумма по строкам: [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0]
Сумма по столбцам: [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0]

Матрица P1 (10×10):
[[0.7  0.06 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03]
 [0.03 0.7  0.06 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03]
 [0.03 0.03 0.7  0.06 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03]
 [0.03 0.03 0.03 0.7  0.06 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03]
 [0.03 0.03 0.03 0.03 0.7  0.06 0.03 0.03 0.03 0.03]
 [0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.7  0.06 0.03 0.03 0.03]
 [0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.7  0.06 0.03 0.03]
 [0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.7  0.06 0.03]
 [0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.7  0.06]
 [0.06 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.7 ]]
Сгенерированные значения: [0.10940915830976777, 0.30935670840951174, 0.038713570138890985, 0.012811455430245743, 0.2155349363227671, 0.00360077602
91332535, 0.42017041569253855, 0.04604024738193646, 0.08427895387013175, 0.13212214326820335, 0.22197323361920865, 0.08021189730802905, 0.14236105
457211534, 0.05124418171179484, 0.21044411774400948, 0.21936904478112912, 0.014563292881586809, 0.793934946240117, 0.08440497264173662, 0.27066496
66649062, 0.02940069044449198, 0.006949700155679851, 0.06934537851160325, 0.08682533898558624, 0.1853689887349571, 0.822760427635355, 0.6605066150
901189, 0.21364093087906988, 0.020553980789171797, 0.00961296437868922, 0.11480309582978976, 0.4150101749534347, 0.07650476660353711, 0.0345312593
04263484, 0.01697262141490918, 0.3477519188622604, 0.0, 0.2882054059634546, 0.34674466378642355, 0.10342227139660266, 0.4678523902535486, 0.09349
56757824928, 0.08657566779139815, 0.3072640080429173, 0.5135577956449184, 0.02874483563121979, 0.3361697486994986, 0.34643215713101433, 0.17320785
519049645, 0.00476828021742216, 0.006227737087030021, 0.08773370928996868, 0.5605115854288004, 0.12333245452325957, 0.059990034871472635, 0.079415
57585847299, 0.6250826799908707, 0.2354504832406649, 0.382784402013113, 0.5250150323677152, 0.38735662156355477, 0.08899217529778407, 0.0597261653
6727909, 0.4006824304980585, 0.00033950429499511657, 0.12616160334347634, 0.02881750236755471, 0.6741970030558334, 0.17126706626358454, 0.10532903
732451042, 0.7730264911091334, 0.16093474779729047, 0.07778985255597137, 0.22058623266972652, 0.011162833995778403, 0.5623035925133433, 0.03562426
7123849834, 1.0, 0.2617949049250613, 0.0627098689186705, 0.10687399449654372, 0.2355315583032103, 0.02101964082511682, 0.08995468035155899, 0.0085
15357590208427, 0.2657342055489911, 0.1680059543989508, 0.2431489979032266, 0.27572849543349676, 0.6499484916716439, 0.09710866016977444, 0.608860
0314521098, 0.06907867876028843, 0.3996571492786291, 0.1766526052022117, 0.021750319599018485, 0.5429367099088905, 0.09638059021517535, 0.30410006
900418407, 0.51329370619806]
Переходы: [0, 8, 8, 5, 6, 6, 8, 7, 6, 6, 6, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 8, 8, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 8, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 9, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 9, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 5,
 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7]
Частоты состояний: [0.06930693069306931, 0.07920792079207921, 0.21782178217821782, 0.0594059405940594, 0.06930693069306931, 0.16831683168316833, 0
.19801980198019803, 0.0594059405940594, 0.0594059405940594, 0.019801980198019802]
```

```
Матрица P2 (10×10):
[[0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]
 [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]]
Сгенерированные значения: [0.21974452688501428, 0.03680617742639318, 0.19936229040098297, 0.02190971370100463, 0.0, 0.16995598215838265, 0.2257916
4836527366, 0.2666297066034755, 0.08352671558284383, 0.2243583363457326, 0.2293110058018502, 0.020052454639489035, 0.06515267454306296, 0.77542753
60493131, 0.4774320675241842, 0.33937541232768526, 0.18381217737726419, 0.04560267192571649, 0.06975661708335026, 0.22182067415870296, 0.605341962
5721076, 0.5284763975673541, 0.002257746203659275, 0.11906107487775362, 0.7112447342977315, 0.07388365638445402, 0.40835782791316166, 0.0388320894
01514475, 0.5903396582233984, 0.18036337985810133, 0.20409941378972535, 0.031351747637078146, 0.4500355759745059, 0.2555928125409731, 0.0946742238
9575, 0.35518589258163724, 0.43269684072335224, 0.1528438154979421, 0.3430566108737036, 0.25913461596559334, 0.4734054091098651, 0.100143877122339
96, 0.18451255843426956, 0.13360743833082778, 0.07148778912675709, 0.005567715448643912, 0.3706583642800561, 0.028120498697219925, 0.3148313411309
9276, 0.20854679393596973, 0.010316288977762173, 0.1661323215031851, 0.2772797527548004, 0.15503599837777904, 0.3397685237601815, 0.12315510732563
681, 0.0044289510983550615, 0.38751508072663704, 0.11195034247934504, 0.03547909973836395, 0.17019089585397698, 0.23093980520103416, 0.66489150959
92108, 0.17265005420412424, 0.11585801505747674, 0.0934966024658768, 0.002025748829230859, 0.009032796238995004, 0.41469420405524465, 0.1370850582
9826353, 0.1443365363082035, 0.03979429134103369, 0.10818351276023319, 0.2156180340837196, 0.0998100836385049, 0.14926384273328963, 0.229990610950
10354, 0.014640803402214814, 0.004685073398104628, 0.6045191446205602, 0.10452139387623538, 0.13067296322018732, 0.6090058176386381, 0.69734865066
63577, 0.045749141358585835, 0.02174385439547549, 0.020234733849355705, 0.014784225729120677, 0.39950115802175146, 0.361023468873909, 0.0259409903
0375521, 0.2120248248179632, 0.2844451685287155, 0.07013420096130989, 0.2974425290547919, 1.0, 0.09892011059718821, 0.08849212988677724, 0.4191302
384626142, 0.29766358147601923]
Переходы: [0, 0, 8, 0, 6, 1, 6, 2, 2, 7, 8, 5, 3, 2, 3, 6, 5, 4, 7, 0, 1, 9, 3, 9, 9, 8, 3, 3, 5, 6, 0, 9, 5, 7, 7, 2, 8, 9, 5, 6, 7, 3, 0, 0, 5,
5, 0, 3, 5, 2, 0, 5, 6, 9, 3, 2, 0, 9, 6, 1, 2, 7, 2, 7, 6, 2, 7, 1, 0, 7, 0, 4, 4, 6, 0, 6, 8, 1, 6, 5, 5, 6, 5, 3, 9, 0, 0, 6, 3, 0, 2, 6, 8, 8,
 1, 8, 4, 7, 9, 4, 7]
Частоты состояний: [0.15841584158415842, 0.0594059405940594, 0.09900990099009901, 0.09900990099009901, 0.04950495049504951, 0.1188118811881188, 0.
13861386138613863, 0.10891089108910891, 0.07920792079207921, 0.0891089108910891]
```

4. Результаты моделирования

4.1. Поведение цепей

Для матрицы **P1** цепь демонстрирует "вязкую" динамику с длительными периодами пребывания в одном состоянии, что соответствует высокой диагональной вероятности (0.7). Переходы между состояниями редки, что приводит к менее выраженным колебаниям нормированных значений. Частоты посещений состояний, как правило, неравномерны (например, малая часть состояний (3 шт.) имеют частоту около 17-22%, а остальные лишь около 2–6% пропорционально), что отражает инерционное поведение.

Для матрицы **P2** состояния сменялись чаще и более равномерно, например, [0, 9, 2, 10, 3, 11, 12, 8, 5, 3, ...]. Частоты посещений были близки к равномерному распределению (примерно 0.09-0.11 для каждого состояния), что соответствует симметричной структуре матрицы и её стационарному распределению.

График поведения (нормированных значений) показал, что цепь для **P1** имеет более "ступенчатую" динамику с редкими резкими изменениями, тогда как цепь для **P2** демонстрирует более хаотичное и плавное изменение значений. Это отражает различия в интенсивности переходов.

4.2. Автокорреляция

Автокорреляция для **P1** медленно менялась, что указывает на сильную зависимость значений от предыдущих из-за редких смен состояний. Для **P2** автокорреляция изменяется быстрее, что свидетельствует о меньшей зависимости между шагами и более случайном характере цепи.

4.3. Влияние структуры матриц

Матрица **P1** с высокой диагональной вероятностью приводит к "вязкому" поведению цепи, где изменения редки, а система обладает значительной инерцией. Это может быть полезно для моделирования процессов с сильной памятью или стабильностью (например, физических систем с низкой подвижностью). Матрица **P2**, напротив, моделирует более подвижную систему с частыми переходами, что характерно для процессов с высокой степенью случайности (например, социальные взаимодействия или финансовые рынки).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы была успешно реализована модель рандомизированной цепи Маркова с использованием двух различных двухстохастических матриц. Анализ результатов подтвердил значительное влияние структуры матрицы переходов на динамику цепи. Матрица с высокой вероятностью сохранения состояния (P1) привела к инерционному поведению с редкими переходами и высокой автокорреляцией, тогда как матрица с равномерными переходами (P2) обеспечила более динамичную и случайную последовательность с быстрым спадом автокорреляции.

Полученные данные демонстрируют, как параметры модели могут быть адаптированы для описания различных реальных процессов. Например, матрицы типа P1 подходят для систем с устойчивостью, а матрицы типа P2 — для систем с более высокой вариабельностью. Построенные графики и вычисления частот позволили наглядно оценить различия в поведении цепей, что подчеркивает важность выбора подходящей матрицы переходов в задачах моделирования.

Работа также выявила потенциал для дальнейших исследований: увеличение числа шагов, использование других распределений (например, равномерного вместо экспоненциального) или расширение размерности матриц могут дать более глубокое понимание свойств РЦМ. В целом, задание позволило закрепить навыки программирования, анализа данных и визуализации, а также углубить теоретические знания о цепях Маркова.

Приложение. Листинг программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(42)

P1 = np.array([
    [0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
    [0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
    [0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
    [0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
    [0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03],
    [0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03, 0.03],
    [0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03, 0.03],
    [0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06, 0.03],
    [0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7, 0.06],
    [0.06, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.7]
])

P2 = np.full((10, 10), 0.1)

print("Проверка P1:")
print("Сумма по строкам:", [round(s, 2) for s in np.sum(P1, axis=1).tolist()])
print("Сумма по столбцам:", [round(s, 2) for s in np.sum(P1, axis=0).tolist()])
print("Проверка P2:")
print("Сумма по строкам:", [round(s, 2) for s in np.sum(P2, axis=1).tolist()])
print("Сумма по столбцам:", [round(s, 2) for s in np.sum(P2, axis=0).tolist()])
```

```
def generate_markov_chain(P, n_steps, initial_state=0):
    states = [initial_state]
    values = []
    n_states = P.shape[0]

    for _ in range(n_steps):
        val = np.random.exponential(scale=1.0)
        values.append(val)
        current_state = states[-1]
        next_state = np.random.choice(range(n_states), p=P[current_state])
        states.append(next_state)

    values = np.array(values)
    values = (values - values.min()) / (values.max() - values.min())
    return states, values

n_steps = 100
states1, values1 = generate_markov_chain(P1, n_steps)
states2, values2 = generate_markov_chain(P2, n_steps)

freq1 = np.bincount(states1, minlength=10) / len(states1)
freq2 = np.bincount(states2, minlength=10) / len(states2)

print("\nМатрица P1 (10×10):")
print(P1)
print("Сгенерированные значения:", values1.tolist())
print("Переходы:", [int(s) for s in states1])
print("Частоты состояний:", freq1.tolist())

print("\nМатрица P2 (10×10):")
print(P2)
print("Сгенерированные значения:", values2.tolist())
print("Переходы:", [int(s) for s in states2])
print("Частоты состояний:", freq2.tolist())

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(values1, label="Цепь 1 (P1, 10×10)", alpha=0.7)
plt.plot(values2, label="Цепь 2 (P2, 10×10)", alpha=0.7)
plt.title("Сравнение поведения двух цепей Маркова")
plt.xlabel("Шаг")
plt.ylabel("Нормированное значение")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

def autocorrelation(x, max_lag=20):
    n = len(x)
    mean = np.mean(x)
    var = np.var(x)
    acf = []
    for lag in range(max_lag + 1):
        cov = np.sum((x[:n-lag] - mean) * (x[lag:] - mean)) / n
        acf.append(cov / var)
    return np.array(acf)

acf1 = autocorrelation(values1)
acf2 = autocorrelation(values2)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(acf1, label="Автокорреляция Цепи 1 (P1, 10×10)", marker='o')
plt.plot(acf2, label="Автокорреляция Цепи 2 (P2, 10×10)", marker='o')
plt.title("Автокорреляция цепей Маркова")
plt.xlabel("Лаг")
plt.ylabel("Значение автокорреляции")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```