Министерство цифрового развития, связи и
массовых коммуникаций Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
по дисциплине «**Моделирование**»

Выполнил:
студент гр. ИС-142
«__» мая 2025 г. ____________ /Григорьев Ю.В./

Проверил:
преподаватель
«__» мая 2025 г. ____________ /Уженцева А.В./

Оценка « ________ »

Новосибирск 2025

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривалась задача моделирования случайной величины с заданной функцией плотности распределения f(x). Цель работы заключалась в нахождении функции распределения F(x), определении коэффициента k, необходимого для построении обратной функции генерации случайных величин и визуализации результатов с помощью гистограммы и графика плотности распределения.

Функция плотности распределения f(x) задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5\cos(x+\pi/6), & \text{при } x \in (-\pi/6, \pi/6); \\ ke^{-(x-\pi/6)} & \text{при } x \in (\pi/6, \pi). \end{cases}$$

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Математические вычисления:

Вар. 3. $f(x) = \begin{cases} 0.5\cos(x+\frac{\pi}{6}), \text{ при } x\in(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}) \\ ke^{-(x-\frac{\pi}{6})}, \text{ при } x\in(\frac{\pi}{6}; \pi). \end{cases}$

Григорьев Ю., ИС-142

$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$: 1. $0.5\cos(x+\frac{\pi}{6}) > 0$ при $x\in(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6})$,

т.к. $\cos(x), x\in[0; \frac{\pi}{3})$ (подст.) > 0.

2. $ke^{-(x-\frac{\pi}{6})} \geq 0$ при $k \geq 0$, т.к. $e^x > 0$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 0.5\cos(x+\frac{\pi}{6})dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} ke^{-(x-\frac{\pi}{6})}dx = 1 \quad (I_1 + I_2 = 1)$$

$$I_1 = 0.5\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos u\, du = 0.5\sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 0.5(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0) = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433$$

$\{u = x + \frac{\pi}{6}\}$

$$I_2 = k\int_0^{\frac{5\pi}{6}} e^{-t}dt = ke^{-t}\Big|_0^{\frac{5\pi}{6}} = k(1-e^{-\frac{5\pi}{6}}). \quad \frac{\sqrt{3}}{4} + k(1-e^{-\frac{5\pi}{6}}) = 1$$

$\{t = x - \frac{\pi}{6}\}$

$$\boxed{k = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-e^{-\frac{5\pi}{6}}} \approx 0.6115}$$

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{x} 0.5\cos(t+\frac{\pi}{6})dt = 0.5\sin(x+\frac{\pi}{6})$$

$F(x) = 1$

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} ke^{-(t-\frac{\pi}{6})}dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + k(1-e^{-(x-\frac{\pi}{6})})$$

π

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<-\frac{\pi}{6}\\ 0.5\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right), \text{ при } x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\\ \frac{\sqrt{3}}{4}+k\left(1-e^{-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right), \text{ при } x\in\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]\\ 1, \text{ при } x>\pi\end{cases}$$

$$X=F_x^{-1}: \ (1)\ 0.5\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=u \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2u \Rightarrow X=\arcsin(2u)-\frac{\pi}{6}$$

$$(2)\ \frac{\sqrt{3}}{4}+k\left(1-e^{-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right)=u \qquad k\left(1-e^{-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right)=u-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$e^{-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=1-\frac{u-\frac{\sqrt{3}}{4}}{k} \qquad X=\frac{\pi}{6}-\ln\left(1-\frac{u-\frac{\sqrt{3}}{4}}{k}\right)$$

$$X(u)=\begin{cases}\arcsin(2u)-\frac{\pi}{6}, \text{ при } u\le\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\pi}{6}-\ln\left(1-\frac{u-\frac{\sqrt{3}}{4}}{k}\right), \text{ при } u>\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

Найдена обратная функция X(U) ((Fx)^-1).

Для реализации алгоритма была написана программа на Python, которая:

1. Генерирует случайные величины с использованием обратной функции.
2. Строит гистограмму сгенерированных данных.
3. Сравнивает гистограмму с графиком исходной плотности распределения f(x).

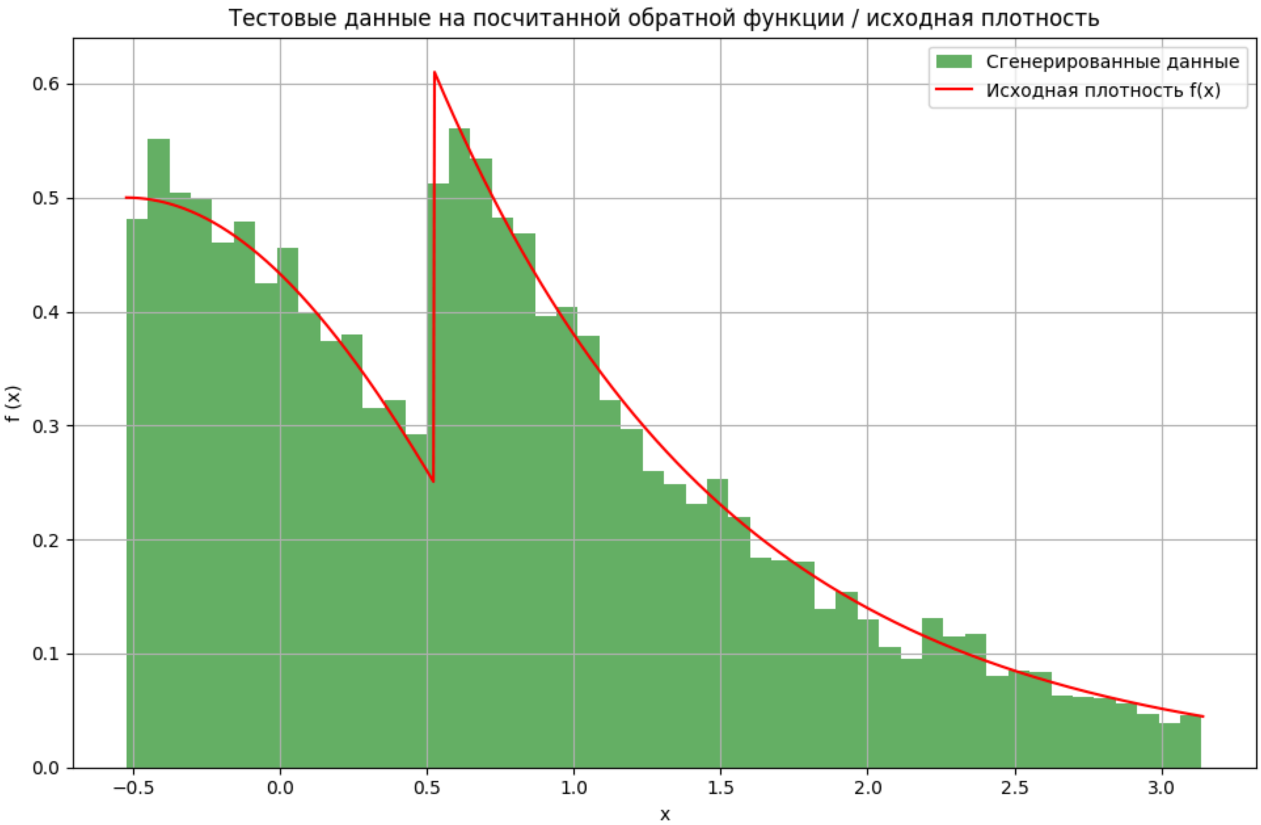
Программный код

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Заданные параметры
k = 0.6115  # Найденный коэффициент k
sqrt3_4 = np.sqrt(3) / 4  # Значение F(pi/6)

# Обратная функция для генерации случайных величин
def inverse_transform_sampling(u):
    if u <= sqrt3_4:
        return np.arcsin(2 * u) - np.pi / 6
    else:
        return np.pi / 6 - np.log(1 - (u - sqrt3_4) / k)
```

```
# Генерация случайных величин
np.random.seed(42)  # Для воспроизводимости результатов
u_samples = np.random.uniform(0, 1, 10000)  # Генерация 10000 случайных чисел U[0, 1]
x_samples = np.array([inverse_transform_sampling(u) for u in u_samples])  # Применение обратной функции

# Построение гистограммы сгенерированных данных
plt.hist(x_samples, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Гистограмма сгенерированных данных')

# Построение графика исходной плотности распределения f(x)
x_values = np.linspace(-np.pi/6, np.pi, 1000)  # Точки для построения графика f(x)
f_values = np.where(
    x_values <= np.pi/6,
    0.5 * np.cos(x_values + np.pi/6),  # Первая часть f(x)
    k * np.exp(-(x_values - np.pi/6))  # Вторая часть f(x)
)

plt.plot(x_values, f_values, 'r-', label='Исходная плотность f(x)')
plt.title('Сравнение гистограммы и исходной плотности')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('Плотность')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Гистограмма сгенерированных данных хорошо согласуется с графиком исходной плотности распределения f(x), что подтверждает корректность работы алгоритма.

Графики визуализируют, что случайные величины генерируются в соответствии с заданной функцией плотности.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были выполнены следующие этапы:

1. Найден коэффициент k для функции плотности распределения f(x).

2. Построена функция распределения F(x) и обратная функция для генерации случайных величин.

3. Реализован алгоритм на языке Python для генерации случайных величин и визуализации результатов.

Результаты работы подтвердили, что метод обратной функции корректно моделирует случайные величины с заданной плотностью распределения. Гистограмма сгенерированных данных совпадает с графиком исходной плотности, что свидетельствует о правильности выполнения всех этапов работы.