

高等数学

高中公式

三角函数公式

和差角公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}\end{aligned}$$

和差化积公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

积化和差公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

倍角公式

半角公式

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ \cot \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}\end{aligned}$$

$$V_{\text{棱柱}} = SH \quad V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3} SH \quad V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3} H(S + \sqrt{SS'} + S')$$

$$\text{球的表面积: } 4\pi R^2 \quad \text{球的体积: } \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{椭圆面积: } \pi ab \quad \text{椭球的体积: } \frac{4}{3}\pi abc$$

第 1 章 极限与连续

1.1 集合、映射、函数

空集, 子集, 有限集, 无限集, 可列集, 积集, 区间, 邻域, 上界, 下界, 上有界集, 下有界集, 无界集, 上确界, 下确界
确界存在定理: 凡有上(下)界的非空数集必有有限的上(下)确界。
映射, 象, 原象, 定义域, 值域, 满映射, 单映射, 双射, 函数, 自变量, 因变量, 基本初等函数

1.2 数列的极限

- 性质:
- (唯一性) 收敛数列的极限必唯一。
 - (有界性) 收敛数列必为有界数列。
 - (子列不变性) 若数列收敛于 a, 则其任何子列也收敛于 a。
注1. 一个数列有若干子列收敛且收敛于一个数, 仍不能保证原数列收敛。
注2. 若数列 {x_n} 有两个子列 {x<sub>n₁}, {x<sub>n₂}} 均收敛于 a, 且这两个子列合起来就是原数列, 则原数列也收敛于 a。
注3. 性质 3 提供了证明了某数列发散的方法, 即用其逆否命题: 若能从该数列中选出两个具有不同极限的子列, 则该数列必发散。</sub></sub>
 - (对有限变动的不变性) 若数列 {x_n} 收敛于 a, 则改变 {x_n} 中的有限项所得到的新数列仍收敛于 a。
 - (保序性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 且 a < b, 则存在 N, 当 n > N 时, 有 x_n < y_n。

判别法则:

1. 夹逼法则: 若 $\exists N$, 当 n > N 时, x_n ≤ y_n ≤ z_n, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ 。

2. 单调收敛原理: 单调有界数列必收敛。
注: 任何有界的数列必存在收敛的子数列。

3. 柯西收敛准则: 数列 {x_n} 收敛的充要条件是: 对于任意给定的正数 ε, 都存在正整数 N, 使得当 m, n > N 时, 有 |x_m - x_n| < ε。

1.3 函数的极限

性质: 极限唯一性, 局部有界性, 局部保序性。
判别法则:

1. 夹逼法则: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 且存在 x₀ 的某一去心邻域

$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, 使得 $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, 均有 f(x) ≤ g(x) ≤ h(x), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ 。

2. 单调收敛原理: 单调有界函数必收敛。

3. 柯西收敛准则: 函数 f(x) 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, 有 |f(x') - f(x'')| < ε。

4. 海涅(Heine)归结原则: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是: 对于任何满足

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 的数列 {x_n}, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

归结原则对于验证函数在某点没有极限是较方便的, 例如可以挑选一个收敛于该点的自变量 x 的数列 {x_n}, 而相应的函数值数列 {f(x_n)} 却不收敛; 或者选出两个收敛于该点的数列 {x_n}, {x'_n}, 而相应的函数值数列 {f(x_n)}, {f(x'_n)} 却具有不同的极限。

1.4 无穷小与无穷大

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$, 当 $\begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \\ = 1 \end{cases}$ 时, 则称 x → x₀ 时称 α(x) 是 β(x) 的

$\begin{cases} \text{高阶无穷小, 记作 } \alpha(x) = o(\beta(x)) \\ \text{同阶无穷小, 记作 } \alpha(x) = O(\beta(x)) \\ \text{等阶无穷小, 记作 } \alpha(x) \sim \beta(x) \end{cases}$

常用等价无穷小

$$\begin{aligned}\sin x \sim x \quad \arcsin x \sim x \quad \arctan x \sim x \quad e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad (1+x)^a - 1 \sim ax \quad a^x - 1 \sim x \ln a\end{aligned}$$

$$\text{若 } f(x=0), f'(0) \neq 0, \text{ 则 } \int_0^x f(t) dt \sim \frac{1}{2} f'(0) x^2$$

确定等价无穷小的方法: 1. 洛必达法则, 2. 泰勒公式

1.5 连续函数

极限存在 ⇔ 左右极限存在且相等。
连续 ⇔ 左右极限存在且相等, 且等于该点函数值。
间断点: 1. 第一类间断点, 左右极限不相等, 或相等但不等于该点函数值; 2. 左右极限至少有一个不存在。
闭区间上连续函数的性质: 有界性, 最值性, 介值性, 零点存在定理。

1.6 常见题型

求极限的方法: 1. 四则运算; 2. 换元和两个重要极限; 3. 等价无穷小替换; 4. 泰勒公式; 5. 洛必达法则; 6. 利用函数极限求数列极限; 7. 放缩法;

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 就要将数列 x_n 放大与缩小成: z_n ≤ x_n ≤ y_n。

8. 求递归数列的极限

(1) 先证递归数列 {a_n} 收敛 (常用单调收敛原理), 然后设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 再对递

归方程 $a_{n+1} = f(a_n)$ 取极限得 A = f(A), 最后解出 A 即可。

(2) 先设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 对递归方程取极限后解得 A, 再用某种方法证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A。$$

第 2 章 导数与微分

2.1 求导法则和求导公式

求导法则:

1.四则运算法则

$$[u(x)+v(x)]' = u'(x) + v'(x) \quad [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

2.复合函数求导

$$(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

关键在于区分哪些是中间变量，哪些是自变量

$$3.反函数求导 \quad [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$$

4.隐函数求导

5.参数式求导

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

6.对数求导法

7.分段函数求导

(1)按求导法则求连接点处的左右导数

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} g(x), & x - \delta < x \leq x_0 \\ h(x), & x_0 < x \leq x + \delta \end{cases}, \text{若 } g'(x_0) = h'(x_0) = A, \text{则 } f'(x_0) = A.$$

(2) 按定义求连接点处的左右导数

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} g(x), & x - \delta < x < x_0 \\ A, & x = x_0 \\ h(x), & x_0 < x \leq x + \delta \end{cases}, \quad g(x) \text{ 与 } f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处无定义,} \\ \text{可按定义求 } g'(x_0) \text{ 与 } h'(x_0)$$

$$(3) \text{对于 } f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}, \quad (1) f'(x) \text{ 很复杂, 按定义求, } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ (2) \text{否则, 先求出 } f'(x), \text{ 再求 } \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

8.变限积分求导

$$y = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt, \frac{dy}{dx} = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

求导公式:

$$\begin{aligned} (C)' &= 0 & (\sin x)' &= \cos x & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^\mu)' &= \mu x^{\mu-1} & (\cos x)' &= -\sin x & & \\ (a^x)' &= a^x \ln a & (\tan x)' &= \sec^2 x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} & (ctgx)' &= -\csc^2 x & & \\ & & (\sec x)' &= \sec x \cdot \tan x & (arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ & & (\csc x)' &= -\csc x \cdot ctgx & (arctctgx)' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

2.2 高阶导数和高阶微分

求高阶导数的方法:

$$1. \text{莱布尼茨 (Leibniz) 公式: } (u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$$

2.常用公式

$$(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}$$

$$(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin(ax+b + \frac{n}{2}\pi)$$

$$(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos(ax+b + \frac{n}{2}\pi)$$

$$((ax+b)^\beta)^{(n)} = a^n \beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)(ax+b)^{\beta-n}$$

$$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = a^n \frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$(\ln(ax+b))^{(n)} = a^n (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(ax+b)^n}$$

3.分解法

分解为上述初等函数之和

第3章 中值定理和泰勒公式

3.1 中值定理

费马定理: 若是 x_0 是 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f'(x_0)$ 存在, 则必有 $f'(x_0)=0$ (可微函数的极值点必为驻点),

1.罗尔定理: 若函数 $f(x)$ 满足以下条件: (i) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续; (ii) 在开区间 (a,b) 内可导; (iii) $f(a)=f(b)$, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi)=0$.

2.拉格朗日定理: 若函数 $f(x)$ 满足以下条件: (i) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续; (ii) 在开区间 (a,b) 内可导, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

3.柯西定理: 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足以下条件: (i) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续; (ii) 在开区间 (a,b) 内可导; (iii) $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

3.2 泰勒公式

求泰勒公式的方法:

$$1. \text{泰勒公式 (拉格朗日余项): } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

2.常用麦克劳林公式 (带拉格朗日余项)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} x^{n+1} (1+\theta x)^{-(n+1)}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} (1+\theta x)^{-(n+1)}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

3.逐项求导或逐项积分

若 $f(x) = \varphi'(x)$ 或 $f(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$, $\varphi(x)$ 的泰勒公式可以比较方便的求出来,

然后对其逐项求导或逐项积分便可以得到 $f(x)$ 的泰勒公式。

$$\text{例如: } \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1-t^2+t^4) dt + o(x^5) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$$

3.3 函数的极值、最值

驻点, 导数不存在的点为极值可疑点。

驻点, 导数不存在的点, 端点为最值可疑点。

极值判别法则:

1.设点 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值可疑点, $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内连续, 去心邻域内可微, 如果在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'(x_0) \geq 0$, 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'(x_0) \leq 0$, 则 x_0 必为 $f(x)$ 的极大值点。反之必为极小值点。

2.若点 x_0 是 $f(x)$ 的驻点且 $f''(x_0)$ 存在, 则当 $f''(x_0) > 0 (< 0)$ 时, x_0 必为 $f(x)$ 的极小(大)值点。

3.设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 n 阶导数, 且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则(i)当 n 为偶数时, $f(x)$ 在点 x_0 处取极值, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时

取极小值, 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时取极大值; (ii)当 n 为奇数时 $f(x_0)$ 不是极值。

3.4 函数作图

定理: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸(凹)函数的充要条件是: 1. $f'(x)$ 在开区间 (a,b) 内单调递减(增)。

2. $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < (>) \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, $\lambda \in (0,1)$.

3. $f''(x_0) \leq (>) 0$.

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处凹凸性相反, 则点 x_0 称为 $f(x)$ 的拐点。

拐点的必要条件: $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在。

拐点的充要条件: $f''(x)$ 经过时变号。

渐近线: 1.垂直渐近线: $x=a$ 是垂直渐近线 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a-0} = \infty$.

2.斜渐近线: $f(x)=ax+b, a=\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-ax)$ 或

$$a=\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)-ax) \quad (\text{水平渐近线为其特例}).$$

函数作图的步骤:

1. 确定函数的定义域;
2. 观察函数的某些特性, 奇偶性, 周期性等;
3. 判断函数是否有渐近线, 如有, 求出渐近线;
4. 确定函数的单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 并列列表;
5. 适当确定一些特殊点的函数值;
6. 根据上面提供的数据, 作图。

第4章 积分

4.1 不定积分

4.1.1.基本积分表

$$\int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \quad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln|\tan \frac{x}{2}| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x \sec x dx = \sec x + C \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \text{ 或 } -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \text{ 或 } -\operatorname{arccot} x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$e^{-x^2} \frac{1}{\ln x} \sin x^2 \cos x^2 \frac{\sin x}{x} \frac{\cos x}{x}$$

不可积的几个初等函数:

4.1.2.换元积分法和分部积分法

换元积分法: 1.第一类换元积分法, 即凑微分法, 合并。
2.第二类换元积分法, 拆分。

$$\text{分部积分法: } \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

4.1.3.有理函数和可化为有理函数的积分

有理函数 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分可以归结为下列四种简单分式的积分:

$$(1) \int \frac{A}{x-a} dx; (2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx;$$

$$(3) \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx; (4) \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$$

三角函数有理式的积分一般用万能代换 $\tan \frac{x}{2} = t$, 对于如下

形式可以采用更灵活的代换:

对于积分 $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$, 可令 $\tan x = t$;

对于积分 $\int R(\sin x) \cos x dx$, 可令 $\sin x = t$;

对于积分 $\int R(\cos x) \sin x dx$, 可令 $\cos x = t$, 等等。

某些可化为有理函数的积分

$$1. \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx \text{ 型积分, 其中 } n>1, \text{ 其中 } ad \neq bc.$$

这里的关键问题是消去根号, 可令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ 。

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+cd}) dx$ 型积分, 其中 $b^2-4ac \neq 0$, $a \neq 0$ 。由于

$$ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}, \text{ 故此类型积分可以化为以下三种类型:}$$

$$\int R(u, \sqrt{k^2-u^2}) dx, \text{ 可用三角替换 } u = k \sin t;$$

$$\int R(u, \sqrt{u^2-k^2}) dx, \text{ 可用三角替换 } u = k \sec t;$$

$$\int R(u, \sqrt{u^2+k^2}) dx, \text{ 可用三角替换 } u = k \tan t.$$

$$I_n = \int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

$$\text{倒代换: } \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx, \int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx, \text{ 由此还可以求出 } \int \frac{1}{1+x^4} dx, \int \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx, (a^2+b^2 \neq 0)$$

解: 设 $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$, 为此应有

$$\begin{cases} aA - bB = a_1, \\ bA + aB = b_1 \end{cases} \text{ 解得 } A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}, \text{ 故}$$

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \int dx + B \int \frac{(a \sin x + b \cos x)'}{a \sin x + b \cos x} dx$$

$$= \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} x + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2} \ln|a \sin x + b \cos x| + C$$

4.2 定积分

4.2.1.可积条件

可积的必要条件: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。
可积函数类: 闭区间上的连续函数, 单调函数, 有界且只有有限个间断点。

4.2.2.定积分的计算

$$1. \text{换元积分法 } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

从右到左, 相当于不定积分的第一类换元积分法, 从左到右, 相当于第二类换元积分法。

$$2. \text{分部积分法 } \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

常见的积分和式

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{i(b-a)}{n}) \frac{(b-a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}) \frac{(b-a)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

使用分部积分法的常见题型:

被积函数的形式	所用方法
$P_n(x)e^x, P_n(x)\sin x, P_n(x)\cos x$	进行 n 次分部积分, 每次均取 $e^{\alpha x}, \sin \alpha x, \cos \alpha x$ 为 $v'(x)$
$P_n(x)\ln x, P_n(x)\arcsin x, P_n(x)\arctan x$	取 $P_n(x)$ 为 $v'(x)$
$e^{\alpha x} \sin \beta x, e^{\alpha x} \cos \beta x$	取 $e^{\alpha x}$ 为 $v'(x)$, 进行两次分部积分

4.2.3.定积分的应用

(1)平面图形的面积

$$dS = f(x)dx = \varphi(y)dy = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

(2)旋转体的体积

$$dV = \pi f^2(x)dx = \pi \varphi^2(y)dy = 2\pi x f(x)dx$$

(3)弧长、曲率

$$\text{弧微分公式: } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy \\ = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta$$

$$\text{曲率: } K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

(4)静矩、转动惯量

$$mr, mr^2$$

$$(5) \text{引力 } F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

①均匀细杆质量为 M , 长度为 l , 在杆的延长线上离右端为 a 处有一质量为 m 的质点, 则质点与细杆之间的引力为 $F = kMm/a(a+l)$.

②均匀圆环质量为 M , 半径为 r , 在圆心的正上方距离为 b 处有一质量为 m 的质点, 则质点与均匀圆环之间的引力为 $F = \frac{kMmb}{(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

③均匀圆盘可以看作是无数个均匀圆环。

4.3 广义积分

广义积分审敛法

1.比较法 $f(x) \leq kg(x), k \geq 0$

2.比较法的极限形式 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

3.柯西收敛准则 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon$

几个常见的广义积分

$$1. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, a > 0 \begin{cases} \text{收敛, } p > 1 \\ \text{发散, } p \leq 1 \end{cases}; \quad 2. \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, a > 0 \begin{cases} \text{收敛, } p < 1 \\ \text{发散, } p \geq 1 \end{cases}$$

$$3. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}, a > 1 \begin{cases} \text{收敛, } p > 1 \\ \text{发散, } p \leq 1 \end{cases}; \quad 4. \int_a^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx, k \geq 0 \begin{cases} \text{收敛, } \lambda > 0 \\ \text{发散, } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)} dx \begin{matrix} x = \frac{1}{t} \\ \rightarrow \end{matrix} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

第5章 无穷级数

常数项级数敛散性的判定

1.若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 级数发散, 等于零, 需进一步判定。

2.若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 根据一般项的特点选择相应判别法:

- ①一般项中含有 $n!$ 或 n 的乘积形式, 采用比值判别法;
- ②一般项中含有以 n 为指数幂的因子, 采用根值判别法;
- ③一般项中含有形如 n^a (a 不一定是整数) 的因子, 采用比较判别法;
- ④利用已知敛散性的结果, 结合级数的性质, 判别其敛散性;
- ⑤采用定义, 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意级数, 若其为交错级数, 采用莱布尼茨判别法, 若不为交错级数或是交错级数但不满足莱布尼茨判别法的条件, 采用比值判别法和根值判别法。

求函数项级数的收敛域: (1) 比值法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$; (2) 根值法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n(x)} < 1$ 。

求幂级数的收敛域: (1) 比值法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$;

(2) 根值法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n(x)} < 1$ 。

常数项级数的求和: 1. 直接计算部分和 S_n , 然后求极限;

2. 利用相应的幂级数。

幂级数的求和: 利用逐项求导, 逐项积分, 四则运算等手段, 将其化为可求和形式 (即前面的麦克劳林公式)。

求函数的幂级数展开式: 就是求泰勒公式 (前面有求泰勒公式的三个方法)。

$$\text{傅立叶级数 } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad , \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases}$$

$$\text{狄利克雷充分条件 } S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & \text{间断点} \\ \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)], & x = \pm\pi \end{cases}$$

几个重要的级数

1. 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{当 } |q| < 1 \text{ 时收敛} \\ \text{当 } |q| \geq 1 \text{ 时发散} \end{cases}$ 2. p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{当 } p > 1 \text{ 时收敛} \\ \text{当 } p \leq 1 \text{ 时发散} \end{cases}$

$$3. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \begin{cases} \text{当 } p > 1 \text{ 时收敛} \\ \text{当 } p \leq 1 \text{ 时发散} \end{cases} = 4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad 5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

第6章 微分方程

1. 可分离变量方程 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$

2. 可化为可分离变量方程的方程 $\begin{cases} \text{齐次方程 } \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \\ \text{可化为齐次方程的方程 } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \end{cases}$

3. 一阶线性方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ $y = e^{-\int P(x)dx} (C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx)$

4.伯努利方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ 令 $y = z^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$

5.全微分方程 特殊路径法, 凑微分法

6.可降阶的
高阶方程 $\begin{cases} \text{不含 } y \quad y'' = f(x, y') \quad \text{令 } p = y', y'' = \frac{dp}{dx} \\ \text{不含 } x \quad y'' = f(y, y') \quad \text{令 } p = y', y'' = y \frac{dp}{dy} \end{cases}$

7.

线性微分方程 $\begin{cases} \text{二阶齐次} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \begin{cases} (1) \text{已知 } y_1 \\ (2) \text{令 } y_2 = u(x)y_1, \text{ 代入求出 } y_2 \\ (3) y = c_1y_1 + c_2y_2 \end{cases} \\ \text{二阶非齐次} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \begin{cases} (1) \text{求出对应齐次方程的 } y_1, y_2 \\ (2) \text{令 } y^* = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \text{ 求出 } u_1, u_2 \quad \begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \end{cases} \\ (3) y = c_1y_1 + c_2y_2 + y^* \end{cases} \end{cases}$

8.常系数线性微分方程

二阶齐次	特征方程的根	微分方程的 线性无关解	微分方程的 通解
$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$	互异实根 r_1, r_2	e^{r_1x}, e^{r_2x}	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
	二重实根 $r_1 = r_2 = r$	e^{rx}, xe^{rx}	$(c_1 + c_2x)e^{rx}$
	共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$
二阶非齐次	(1) 求对应齐次方程的 y_1, y_2		
$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$	(2) 令 $y^* = Q(x)e^{\lambda x} = x^k (A_0 + A_1x + \dots + A_m x^m) e^{\lambda x}$ $Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = p_m(x)$		
	(3) $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y^*$		

9.欧拉方程

$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$
 令 $x = e^t, D^k = \frac{d^k}{dt^k}$, 则 $x^k y^{(k)} = D(D-1)\dots(D-k+1)y$
 $\therefore [D(D-1)\dots(D-n+1) + p_1 D(D-1)\dots(D-n+2) + \dots + p_{n-1} D]y = f(e^t)$

第7章 向量代数与空间解析几何

叉积 $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ 混合积 $(a, b, c) = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ (平行六面体的体积)

平面方程 $\begin{cases} \text{点法式 } A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \\ \text{三点式 混合积为零} \\ \text{截距式 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ \text{一般式 } Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$ 直线方程 $\begin{cases} \text{参数式 } \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \\ \text{对称式 } \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \\ \text{一般式 } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$

平面束方程 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

两平面夹角 $\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \sin \varphi$ (平面与直线的夹角)
 两直线夹角 $\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \sin \varphi$ (平面与直线的夹角)

点到直线的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 点到直线的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{p_1 p_0} \times s|}{|s|}$

常见二次曲线 $\begin{cases} \text{柱面: 椭圆柱面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ 双曲柱面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ 抛物柱面 } x^2 = 2pz \\ \text{球面 } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ 椎面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ \text{旋转面} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{绕 } z \text{ 轴旋转}} \begin{cases} x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos \theta \\ y = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x, z) \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{绕 } z \text{ 轴旋转}} f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad \begin{cases} \text{旋转椭圆面 } \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ \text{旋转双曲面 } \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ (单叶)} \\ \text{曲面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \text{ (双叶)} \\ \text{旋转抛物面 } x^2 + y^2 = 2pz \end{cases} \\ \text{椭球面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 双曲面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \text{ (单/双)} \text{ 抛物面 } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z \text{ (椭圆)} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z \text{ (双曲)} \end{cases} \end{cases}$

第8章 多元函数微分学

复合函数微分法, 关键在于确定哪些是中间变量, 哪些是自变量

隐函数微分法 $\begin{cases} \text{由方程确定的隐函数 } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{-F_{x_i}}{F_y} \\ \text{由方程组确定的隐函数} \quad \begin{cases} F(x, u, v) = 0 \\ G(x, u, v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \\ \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \end{cases} \\ \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \frac{du}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \end{cases} \end{cases}$

曲线的切线 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 曲面的切平面 $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$
 和法平面 $(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)})$ 和法线 $(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)})$

二元函数泰勒公式

$f(x_0 + h, y_0 + l) = \sum_{k=0}^n \frac{(h \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y})^k}{k!} f(x_0, y_0) + \frac{(h \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial y})^{(n+1)}}{n!} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta l)$

多元函数取极值的必要条件: $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$

多元函数取极值的充分条件 $\begin{cases} 1. f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0 \\ 2. (1) AC - B^2 > 0, A > 0, \text{正定, 有极小值}; A < 0, \text{负定, 有极大值} \\ (2) AC - B^2 < 0, A > 0, \text{不定, 无极值} \\ (3) AC - B^2 = 0, \text{不能确定} \end{cases}$

求条件极值, 用拉格朗日数乘法

$\begin{cases} \min(\text{或 } \max) z = f(x, y) \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$, 令 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, 有 $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

方向导数: 偏导数是函数在平行于坐标轴方向上的变化率, 有时需要考虑函数沿某一指定方向的变化率, 这种变化率就是方向导数。

$$\text{方向导数 } \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad \text{梯度} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

第9章 多元函数积分学

9.1 二重积分

$$\text{二重积分} \quad I = \iint_D f(x, y) d\sigma \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. x\text{-型区域} I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \\ 2. y\text{-型区域} I = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \\ 3. \text{换元法} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right. \Rightarrow I = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv \\ (1) \text{平移变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = u + a \\ y = v + b \end{array} \right. \Rightarrow I = \iint_{D'} f(u + a, v + b) du dv \\ (2) \text{极坐标变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right. \Rightarrow I = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \end{array} \right.$$

9.2 三重积分

$$\text{三重积分} \quad I = \iiint_V f(x, y, z) dv \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{二套一, 一套二} \\ 2. \text{换元法} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \right. \Rightarrow I = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw \\ (1) \text{平移变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = u + a \\ y = v + b \\ z = w + c \end{array} \right. \Rightarrow I = \iiint_{V'} f(u + a, v + b, w + c) du dv dw \\ (2) \text{柱坐标变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right. \Rightarrow I = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz \\ (3) \text{球坐标变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{array} \right. \Rightarrow I = \iiint_{V'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ (4) \text{坐标变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = ar \sin \varphi \cos \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \\ z = cr \cos \varphi \end{array} \right. \Rightarrow I = \iiint_{V'} f(ar \sin \varphi \cos \theta, br \sin \varphi \sin \theta, cr \cos \varphi) abc r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \end{array} \right.$$

9.3 重积分的应用

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{曲面面积元素: } \frac{dxdy}{\cos(n, z)}, \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dxdy, \sqrt{EG - F^2} dudv \\ (2) \text{物体重心 } \bar{x} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dv}{\iiint_V \rho(x, y, z) dv} \\ (3) \text{转动惯量}(mr^2) \text{对} z \text{轴} dJ_z = (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv \text{对} xy \text{平面} dJ_{xy} = z^2 \rho(x, y, z) dv \end{array} \right.$$

9.4 曲线积分

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类} \left(\int_L f(x, y, z) ds \right) \text{代入弧微分公式} \\ \text{第二类} \left(\int_{L(A, B)} P dx + Q dy + R dz \right) \xrightarrow{\text{代入参数方程}} \int_a^\beta [P(\dots)x'(t) + Q(\dots)y'(t) + R(\dots)z'(t)] dt \end{array} \right.$$

9.5 曲面积分

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类} \left(\iint_S f(x, y, z) dS \right) \text{代入面积元素} \\ \text{第二类} \left(\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \right) = \pm \iint_{D_{xy}} \left[P \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + Q \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + R \right] dxdy \end{array} \right.$$

9.6 格林公式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q dy \\ \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P dx \end{array} \right. \\ (i) \oint_L P dx + Q dy = 0 \Rightarrow (ii) \text{与路径无关} \Rightarrow (iii) du = P dx + Q dy \Rightarrow (iv) \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow (i) \\ \text{求} P dx + Q dy \text{的原函数} \left\{ \begin{array}{l} (1) \text{不定积分法} \\ (2) \text{若} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{特殊路径法} \\ (3) \text{凑微分法} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

9.7 高斯公式

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \quad \left\{ \begin{array}{l} \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dv = \iint_S P dy dz \\ \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \iint_S Q dz dx \\ \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dv = \iint_S R dx dy \end{array} \right.$$

9.8 斯托克公式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L P dx + Q dy + R dz = \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \oint_L P dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ \oint_L Q dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dz dy \\ \oint_L R dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz \end{array} \right. \\ (i) \oint_L P dx + Q dy + R dz = 0 \Rightarrow (ii) \text{与路径无关} \Rightarrow (iii) du = P dx + Q dy + R dz \Rightarrow \\ (iv) \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow (i) \end{array} \right.$$

9.9 如何简化计算

1. 选择积分顺序 (二重积分, 三重积分)
2. 选择投影方向 (第 II 类曲面积分)
3. 利用对称性与奇偶性
4. 换元
5. 曲线和曲面积分, 利用已有方程
6. 利用几何或物理意义
7. 利用三个公式

线性代数

第1章 行列式

$$\begin{array}{l} \text{上三角行列式} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \\ \text{次三角行列式} \quad \begin{vmatrix} * & & & a_n \\ & \ddots & & \\ & & a_2 & \\ a_1 & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_n \\ & \ddots & & \\ & & a_2 & \\ a_1 & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \dots a_n \\ \text{两种特殊的} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{拉普拉斯} \left(\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \\ * & B \end{vmatrix} = |A| |B| \right. \\ \text{Laplace) 展开式} \left(\begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |A| |B| \right) \end{array} \right. \end{array}$$

行列式的性质: 行列不变; 行行变反; 倍加行不变。
范德蒙行列式 三对角行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & & & 0 \\ c & a & b & & \\ & c & a & b & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & a & b \\ 0 & & & & c & a \end{vmatrix} D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

重要公式: $|AB| = |A||B|$ $|A^*| = |A|^{n-1}$ $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ $|A^k| = |A|^k$

Cramer 法则: $x_j = D_j / D$

第 2 章 矩阵

2.1 基本概念

奇异矩阵, 非奇异矩阵, 零矩阵, 同型矩阵, 单位矩阵, 数量矩阵, 对角矩阵, 对角块矩阵, 对称矩阵, 反对称矩阵, 逆矩阵, 伴随矩阵, 正交矩阵

2.2 矩阵的运算

加法, 数量乘法, 乘法, 转置, 逆, 伴随

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \quad AA^* = A^*A = |A|I$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

$$(AB)^* = B^*A^* \quad (A^*)^T = (A^T)^* \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) \leq n-2 \end{cases}$$

2 阶矩阵的伴随矩阵: 主对角线互换, 副对角线变号

2.3 初等变换

$E_i(c)$ $E_{ij}(c)$ E_{ij} 左乘是行变换, 右乘是列变换

$$E_i\left(\frac{1}{c}\right)E_i(c) = I \quad E_{ij}(-c)E_{ij}(c) = I \quad E_{ij}E_{ij} = I$$

2.4 分块矩阵

同型对角块矩阵

$$\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & \ddots \\ & & & C_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ & & \ddots \\ & & & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1D_1 & & \\ & C_2D_2 & \\ & & \ddots \\ & & & C_nD_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

2.5 常见题型

求方阵的幂: 1. $r(A)=1$; 2. $A=B+C$; 3. 相似对角化, $A^n = P^{-1}\Lambda^n P$

求逆矩阵: 公式法, 分块矩阵法, 初等变换法

第 3 章 线性方程组

3.1 n 维向量

线性组合, 线性表出, 向量组等价, 线性相关, 线性无关, 向量组的秩, 极大线性无关组

3.2 矩阵的秩

1. 矩阵的秩=矩阵的行秩=矩阵的列秩=矩阵的非零主子式的最高阶数
2. 初等变换不改变矩阵的秩

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B) \quad r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 $AB=0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

标准相抵型 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

同型等秩 \Leftrightarrow 相抵

3.3 齐次方程组 $Ax=0$

判定: 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$

解的结构: 有 $n-r$ 个基础解系。对 A 作初等行变换化为阶梯形矩阵, 每个非零行中第一个非零系数所在列代表的未知数是基本未知量 (有 r 个), 剩余的是自由未知量, 对自由未知量按阶梯形赋值后, 再代入求解就可以得到基础解系。

3.4 非齐次方程组 $Ax=b$

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 方程组 $Ax=b$, 则

- (1) 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)=n$;
- (2) 有无穷解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)<n$;
- (3) 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(A,b)$ 。

解的结构: $x = x_0 + \bar{x}$

3.5 常见题型

1. 线性无关的证明, 常用思路是设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$, 两边同乘

作恒等变形。

2. $Ax=0$ 和 $A^T Ax=0$ 同解。

3. 基础解系的证明: 是解, 线性无关, $n-r$

第 4 章 向量空间与线性变换

4.1 基本概念

自然基, 标准基, 标准正交基, 基, 维数, 坐标, 过度矩阵, 向量的内积, 欧氏空间, 线性空间

4.2 坐标变换

基变换: $B_1A=B_2$ 坐标变换: $x=Ay$

旋转变换 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

4.3 施密特正交化

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_j = \alpha_j + \sum_{i=1}^j k_{ij}\beta_i, k_{ij} = -\frac{(\alpha_j, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}$$

4.5 正交矩阵

正交矩阵 $A^T A = I \Leftrightarrow$ 列向量组是标准正交基

设 A, B 是正交矩阵, 则 A^T, A^{-1}, AB 也是正交矩阵。

Ax, Ay 的长度, 夹角和内积保持不变。

第 5 章 特征值和特征向量

5.1 特征值和特征向量

概念: 特征值, 特征向量, 特征矩阵, 特征多项式, 特征方程

定义: $Ax=\lambda x$

性质:

1. 不同特征值的特征向量是线性无关的

$$2. \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}; \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A$$

$$3. k\lambda, \lambda+k, \lambda^m, \lambda^{-1}$$

4. A 和 A^T , AB 和 BA 的特征值相同。

5.2 相似矩阵

定义: 若存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$, 就称 A 相似于 B, 记作 $A \sim B$ 。

性质: 1. 若 $A \sim B$, 则 $A+kI \sim B+kI, A^m \sim B^m$;

2. 相似矩阵的特征值相同。

5.3 可对角化的条件

(1) 有 n 个线性无关的特征向量; 或 (2) 每个特征值的重数等于对应特征向量数

空间的维数。

5.4 实对称矩阵

性质:

1. 实对称矩阵一定是对角化的;
2. 实对称矩阵的特征值全是实数, 特征向量全是实向量, 不同特征值的特征向量是正交的;
3. 存在正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

求 T : 先求得特征向量, 再正交化。

第 6 章 二次型

6.1 二次型的定义和矩阵表示

二次型: 二次型就是二次齐次多项式 (即每项都是二次的)
矩阵表示: $x^T A x$

合同矩阵: 若存在存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = B$, 就称 A 合同于 B , 记作

$A \sim B$ 。

6.2 化二次型为标准型

1. 正交变换法
2. 配方法
3. 初等变换法

6.3 惯性定理和二次型的规范性

惯性定理: 对于一个 n 元二次型, 不论做怎样的坐标变换使之化为标准型, 其中正平方项的项数和负平方项的项数都是唯一的。

规范型: 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 若 A 的正、负惯性指数分别为 p 和 q , 则

$$A \sim \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

其中 1 有 p 个, -1 有 q 个。
或者说对于二次型 $x^T A x$, 存在坐标变换 $x = Cy$, 使得

$$x^T A x = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2$$

把右端的二次型称为 $x^T A x$ 的规范型, 把上面的对角矩阵称为 A 的合同规范型。

合同的充要条件: A, B 有相同的正惯性指数和负惯性指数。

合同的充分条件: $A \sim B$ 。(二者的前提是, A, B 是实对称矩阵)

合同的必要条件: $r(A) = r(B)$

6.4 正定二次型和正定矩阵

定义: 如果对于任意的非零向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 都有 $x^T A x > 0$, 就称 $x^T A x$ 为正定二次型, 称 A 为正定矩阵。

二次型正定的充要条件:

1. $x^T A x$ 是正定二次型;
2. A 的正惯性指数为 n , 即 $A \geq I$;
3. 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$;
4. A 的特征值全大于 0 ;
5. A 的顺序主子式全大于 0 。

必要条件: 1. $a_{ii} > 0$; 2. $|A| > 0$ 。

概率论与数理统计

第 1 章 概率论的基本概念

1.1 基本概念

随机试验: 1. 可以重复; 2. 总体明确; 3. 单个未知。

样本空间, 样本点, 随机事件, 事件发生, 基本事件, 必然事件, 不可能事件, 差事件, 不相容事件, 对立事件, 逆事件

1.2 频率和概率

在相同条件下, 进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的频数, 比值 n_A/n 称为 A 发生的频率, 并记成 $f_n(A)$ 。

对随机试验 E 的每一事件 A 都赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率。集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件: ① 非负性: $P(A) \geq 0$; ② 规范性: $P(\Omega) = 1$;

③ 可列可加性: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ 。

当 $n \rightarrow \infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$ 。

$$\text{加法公式} \begin{cases} \text{若 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 互不相容, 则 } P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \\ \text{广义的, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(B) + P(\bar{A}B) \\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ \text{式 } P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{cases}$$

减法: 若 $B \subset A$, $P(A - B) = P(A) - P(B)$

公式: 任意的, $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

1.3 等可能概型

1. 样本空间包含有限个元素。
 2. 每个基本事件发生的可能性相同。
- 具有以上两个特点的试验称为等可能概型, 也叫古典概型。

1.4 条件概率

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

乘法公式 $P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$
全概率公式 $P(A) = P(A|B_1) + P(A|B_2) + \dots + P(A|B_n)$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

1.5 独立性

设 A, B 是两个事件, 如果满足等式 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立。

A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow \bar{A}$ 与 \bar{B} 相互独立 $\Leftrightarrow \bar{A}$ 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow \bar{A}$ 与 \bar{B} 相互独立 $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$

第 2 章 随机变量及其分布

2.1 随机变量

设随机试验 E 的样本空间为 $S = \{e\}$, $X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实值单值函数, 称 $X = X(e)$ 为随机变量。

随机变量的取值随随机试验的结果而定, 在试验之前不能预知它取什么值, 且它的取值有一定的概率。这些性质显示了随机变量与普通函数有着本质的差异。

2.2 离散型随机变量及其分布律

如果随机变量 X 全部可能的取值是有限个或可列无限个, 则称 X 为离散型随机变量。

$P(X = x_k) = p_k$ 为 X 的分布律。

几个常见分布:

1. 0-1 分布 $P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, k = 1, 2$
2. 二项分布 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$
3. 泊松分布 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$
4. 几何分布 $P(X = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots$
5. 超几何分布 $P(X = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_{N_1+N_2}^n}, k = 0, 1, 2, \dots, n$

2.3 随机变量的分布函数

设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数 $F(x) = P(X \leq x)$ 称为 X 的分布函数。

分布函数 $F(x)$ 具有以下性质:

1. $F(x)$ 是一个不减函数
2. $0 \leq F(x) \leq 1$, 且 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
3. $F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$ 是右连续的

2.4 连续型随机变量及其概率密度

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x , 均有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

则称 X 为连续型随机变量, 其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度。

概率密度 $f(x)$ 具有以下性质:

1. $f(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;
3. $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$;
4. 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$ 。

几个常见分布:

$$1. \text{ 均匀分布 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

记为 $X \sim U(a, b)$

2. 指数分布 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

指数分布和几何分布具有“无记忆性”

3. 正态分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。特别地, 当

$\mu=0, \sigma=1$ 时, 称 X 服从标准正态分布。正态分布具有以下性质

(1) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

(2) $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

(3) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

(4) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

2.5 随机变量函数的分布

求随机变量函数的分布:

1. 离散型随机变量函数的分布
列举法: 逐点求出 Y 的值, 概率不变, 相同值合并

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) 分布函数法

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f(x) dx$$

(2) 公式法

如果 $y=g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$ ($g'(x) < 0$), 则 $Y=g(X)$ 也是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)|, & y \in R_g \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数。

第 3 章 多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量

设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$, $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在样本空间 S 上的两个随机变量, 由它们构成的一个向量 (X, Y) , 叫做二维随机向量或二维随机变量

设 (X, Y) 是一个二维随机变量, x, y 是任意实数, 函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x \cap Y \leq y\} \xrightarrow{\text{记成}} P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。分布函数 $F(x, y)$ 具有以下性质:

1. $F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数。
2. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且 $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$ 。
3. $F(x, y)$ 关于 x 右连续, 关于 y 也右连续。
4. 对于任意的 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 有 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$ 。

如果二维随机变量 (X, Y) 全部可能取到的值是有限个或可列无限个, 则称 (X, Y) 为离散型二维随机变量。 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$ 是 (X, Y) 的分布律

如果对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$, 存在非负函数 $f(x, y)$, 使得对于任意实数 x, y , 均有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

则称 (X, Y) 为连续型二维随机变量, 其中函数 $f(x, y)$ 称为 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度。

概率密度 $f(x, y)$ 具有以下性质:

1. $f(x, y) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

3. $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$.

4. 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 则有 $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.

3.2 边缘分布

边缘分布函数: $F_X(x) = F(x, +\infty), F_Y(y) = F(+\infty, y)$

边缘分布律: $P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{i\cdot}, P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = p_{\cdot j}$

边缘概率密度: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

3.3 条件分布

条件分布率: $P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

条件概率密度: $f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

3.4 相互独立的随机变量

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ (连续

型) $\Leftrightarrow P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$ (离散型)

3.5 二维随机变量函数的分布

1. 离散型二维随机变量

列举法

2. 连续型二维随机变量

(1) 分布函数法

$$F(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$$

(2) 公式法

① $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx, Y \text{ 对称 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

当 X 和 Y 相互独立时, 有卷积公式

$$f_Z(z) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

② $Z = \max(X, Y)$ 和 $Z = \min(X, Y)$

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

第 4 章 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

离散型 $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k$ 连续型 $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n g(x_k) p_k, & \text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx, & \text{连续型} \end{cases}$$

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

性质:

1. $E(C) = C$

2. $E(CX) = CE(X)$

3. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

4. 当 X, Y 相互独立时, $E(XY) = E(X)E(Y)$

4.2 方差

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - E(X)^2$$

性质:

1. $D(C) = 0$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$

3. $D(X \pm Y) = D(X) \pm 2\text{Cov}(X, Y) + D(Y) = D(X) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} + D(Y)$

4. $D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X=C\} = 1$

常见分布的数字特征:

离散型:

1. 0-1 分布 $E(X) = p, D(X) = pq$

2. 二项分布 $E(X) = np, D(X) = npq$

3. 泊松分布 $E(X) = D(X) = \lambda$

4. 几何分布 $E(X) = 1/p, D(X) = q/p^2$

5. 超几何分布 $E(X) = n \cdot N_1 / N, D(X) = n \cdot N_1 / N \cdot N_2 / N \cdot (N - n) / (N - 1)$

连续型:

1. 均匀分布 $E(X) = (b+a)/2, D(X) = (b-a)^2/12$

2. 指数分布 $E(X) = 1/\lambda, D(X) = 1/\lambda^2$

3. 正态分布 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$

4.3 协方差及相关系数

协方差 $\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$

性质:

1. $\text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y)$
2. $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$

相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

性质: 1. $|\rho_{XY}| \leq 1$

2. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \{Y = ax + b\}$, 且当 $a > 0$ 时 $\rho_{XY} = 1$, 当 $a < 0$ 时 $\rho_{XY} = -1$ 。

独立一定不相关, 不相关不一定独立。
对于二维正态分布, 独立与不相关等价。

4.4 矩、协方差矩阵

$E(X^k)$, k 阶原点矩

$E[(X - E(X))^k]$, k 阶中心矩

$E(X^k Y^l)$, k, l 阶混合矩

$E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l]$, k, l 阶混合中心矩

$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, 协方差矩阵

第 5 章 大数定律和中心极限定理

5.1 大数定律

1. 切比雪夫(Chebyshev)大数定律
设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 期望和方差都存在, 且它们的方差有公共上界, 则对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

切比雪夫不等式 $P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

2. 伯努力大数定律
设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且都服从参数为 p 的 0-1 分布, 则对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

3. 辛钦大数定律
设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 服从统一分布, 且具有共同的数学期望, 则对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad \text{即} \quad \bar{X} \xrightarrow{P} \mu$$

5.2 中心极限定理

1. 列维-林德伯格定理(独立同分布的中心极限定理)
设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 服从同一分布, 且具有共同的期望和方差, 则

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1), \quad \text{即} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

2. 李雅普诺夫(Liapunov)定理
设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 他们具有数学期望和方差:

$$E(X_k) = \mu_k, D(X_k) = \sigma_k^2, k = 1, 2, \dots, n,$$

记 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, 若存在正数 δ , 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \rightarrow 0, \quad \text{则} \quad \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n} \sim N(0, 1)$$

3. 棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理(二项分布以正态分布为极限)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right\} = \Phi(x)$$

第 6 章 数理统计的基本概念

6.1 随机样本

随机试验全部可能的观察值称为总体。

每一个可能观察值称为个体。

一个总体对应于一个随机变量 X , 一般不区分总体与相应随机变量, 笼统称为总体 X 。

被抽取的部分个体叫做总体的一个样本。

来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量称为简单随机变量。

6.2 抽样分布

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个连续函数, 若 g 中不含未知参数, 则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个统计量。
常用的统计量:

样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 样本方差 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

样本 k 阶原点矩 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 样本 k 阶中心矩 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$

经验分布函数 $F_n(x) = \frac{1}{n} S(x)$, $S(x)$ 表示值小于 x 的随机变量的个数。

$$F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$$

来自正态总体的几个常用抽样分布:

1. χ^2 分布

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(0, 1)$ 的样本, 则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 。

现 $X_i \sim N(0, 1)$, 由定义 $X_i^2 \sim \chi^2(1)$, 即 $X_i^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 1)$, 再由分布的可加性知

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, 1)$$

2. $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$
t 分布

设 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立, 则称随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服

从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $t \sim t(n)$ 。

当 n 足够大时, t 分布近似于 $N(0, 1)$ 分布。

3. T 分布的上 α 分位点记为 $t_{\alpha}(n)$, 由其概率密度的对称性知 $t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$ 。
F 分布

设 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$, 且 U, V 相互独立, 则称随机变量 $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服

自由度为 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$ 。

F 分布的性质:

- (1) 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $1/F \sim F(n_2, n_1)$ 。
- (2) 若 $t \sim t(n)$, 则 $t^2 \sim F(1, n)$ 。

F 分布的上 α 分位点记为 $F_{\alpha}(n)$, $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_1, n_2)}$

正态总体样本均值与样本方差的抽样分布:

首选, 不论 X 服从什么分布, 总有 $E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = \sigma^2$ 。

$$1. \quad \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$2. \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \text{ 且 } \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立}$$

$$3. \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$4. \quad \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1), \text{ 若 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma, \text{ 则}$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

第 7 章 参数估计

7.1 点估计

设总体 X 的分布函数的形式为已知, 但它的的一个或多个参数未知, 借助于总体 X 的一个样本来估计未知参数的值称为参数的点估计。

1. 矩估计法

用样本原点矩 $a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 来估计总体的原点矩 $a_k = E(X^k)$, 用样本的

中心矩 $b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$ 来估计总体的中心矩 $b_k = E[(X - E(X))^k]$ 。

2. 最大似然估计法

(1) 写出似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ (或 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$)。

(2) 求出使 $L(\theta)$ 达到最大值的 θ 。
 $L(\theta)$ 是 n 个乘积的形式，而且 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 在同一 θ 处取极值，因此的 θ

最大似然估计量 θ 可以从 $\frac{d \ln(\theta)}{d \theta} = 0$ (对数似然方程) 求得。

(3) 用 θ 作为 θ 的估计量。

7.2 估计量的评价标准

1. 无偏性 $E(\theta) = \theta$
2. 有效性 $D(\theta_1) \leq D(\theta_2)$
3. 相合性 $\theta \xrightarrow{P} \theta$

7.3 区间估计

设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$ 含有一个未知参数 θ ，对于给定值 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ，若由来自 X 的样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定的两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和

$\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，对于任意 θ 满足 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$ ，则称随机区

间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是置信水平为 $1 - \alpha$ 置信区间。

置信水平为 $1 - \alpha$ 置信区间不是唯一的。
 区间越小表示估计的精度越高。

7.4 正态总体期望与方差的区间估计

待估参数		抽样分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$
	σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$
σ^2	μ 已知	$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}$
	μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}$
μ_1, μ_2	σ_1^2, σ_2^2 已知	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$\bar{X} - \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} z_{\alpha/2}$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 未知	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, $s_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	$\bar{X} - \bar{Y} \pm s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$		$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$

第 8 章 假设检验

8.1 假设检验

拒绝域：当检验统计量落入其中时，则否定原假设。
 小概率事件原理：小概率事件在一次试验中实际上不会发生，若在一次试验中发生了，就认为不合理，小概率的值常根据实际问题的要求，规定一个可以接受的充分小的数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ，当一个事件的概率不大于 α 时，就认为它是小概率事件。 α 称为显著性水平。
 统计推断有两类错误，弃真和存伪，只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑第二类错误的检验称为显著性检验。 α 就是允许犯第一类错误的概率的最大允许值。
 假设检验的基本步骤：
 1. 根据实际问题的要求，提出原假设 H_0 和备择假设 H_1 ；
 2. 给定显著性水平 α 和样本容量 n ；
 3. 确定检验统计量以及拒绝域的形式；
 4. 按 $P(H_0 \text{ 为真拒绝 } H_0) \leq \alpha$ 求出拒绝域；
 5. 取样，根据样本观察值做出决策，是接受 H_0 还是拒绝 H_0 。

8.2 正态总体样本均值与样本方差的假设检验

原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
$\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2 已知)	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$z \geq z_\alpha$ $z \leq -z_\alpha$ $ z \geq z_{\alpha/2}$
$\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2 未知)	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t \geq t_\alpha(n-1)$ $t \leq -t_\alpha(n-1)$ $ t \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2 已知)	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1 - \mu_2 > \delta$ $\mu_1 - \mu_2 < \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$z \geq z_\alpha$ $z \leq -z_\alpha$ $ z \geq z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 未知)	$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$\mu_1 - \mu_2 > \delta$ $\mu_1 - \mu_2 < \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$t \geq t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $t \leq -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $ t \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ 已知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n)$ $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ 未知)	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2 未知)	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geq F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ $F \geq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$