Prof. Dr. Stefanie Jegelka — Jonathan Eichhorn, Marta Grobelna, Fabian Weisbrodt, Yongkuan Zhang

Übungsblatt 3

Tutoriumsaufgaben

T3.1 Seien $f, g : A \to B$ Abbildungen. Seien $a, b \in A$. Wir definieren zwei Relationen R_f und R_g auf A wie folg:

- $a \, R_f \, b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$
- $a \, R_g \, b \Leftrightarrow (f(a) = f(b)) \vee (g(a) = g(b))$.

(a) Zeigen Sie, dass R_f eine Äquivalenzrelation auf A ist.

(b) Entscheiden Sie ob R_g Äquivalenzrelation auf A ist und begründen Sie Ihre Antwort.

T3.2 Beweisen sie die folgenden Aussagen, die Sie in der Vorlesung gesehen haben.
Seien $R, X, S \subseteq A \times A$ Relationen.

(a) Wenn X transitiv ist und $R \subseteq X$, dann ist $R^+ \subseteq X$.

(b) Wenn X transitiv und reflexiv ist und $R \subseteq X$, dann ist $R^* \subseteq X$.

(c) Sei $R \subseteq S$, dann ist ebenfalls $R^+ \subseteq S^+$ und $R^* \subseteq S^*$.

Seien nun $R, S \subseteq A \times A$ Äquivalenzrelationen.

(d) Dann ist $R \cap S$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation.

(e) Für die Äquivalenzklassen von $R \cap S$ gilt, $[a]_{R \cap S} = [a]_R \cap [a]_S$

(f) Es gilt $R \subseteq S$ genau dann, wenn $[a]_R \subseteq [a]_S$ für alle Elemente $a \in A$ gilt.

T3.3 Geben Sie die Hasse-Diagramme aller partiellen Ordnungen $\preceq$ auf $[4]_0 := \{0, 1, \ldots, 4\}$ an, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

- Falls $a \preceq b$ gilt, dann auch $a \leq b$.
  (Mit anderen Worten: $\{(a, b) \in [4]_0 \times [4]_0 \mid a \preceq b\} \subseteq \{(a, b) \in [4]_0 \times [4]_0 \mid a \leq b\}$.)
- Bzgl. $\preceq$ gibt es genau 3 minimale Elemente und ein größtes Element.

Zusatzaufgaben

Zusätzliche Übungsaufgaben. Besprechung im Tutorium je nach Zeit.

T3.4* Eigenschaften des Relationenprodukts

Seien $R, R_1, R_2 \subseteq A \times B$; $S, S_1, S_2 \subseteq B \times C$; $T \subseteq C \times D$.

(a) Zeigen Sie das Assoziativgesetz für das Produkt von Relationen: Es gilt $(RS)T = R(ST)$.

(b) Zeigen Sie: $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.

(c) Zeigen Sie: $\mathrm{Id}_A\, R = R = R\, \mathrm{Id}_B$.

(d) Zeigen Sie das Distributivgesetz für das Produkt von Relationen über $\cup$: Es gilt $(R_1 \cup R_2)S = (R_1 S) \cup (R_2 S)$ und $R(S_1 \cup S_2) = (RS_1) \cup (RS_2)$

Sei nun $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf der Menge A. Erinnerung: Es gilt nach Definition

$$\begin{aligned} R^0 &:= \mathrm{Id}_A \\ R^{n+1} &:= R^n R \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

(e) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion nach m:

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : R^n R^m = R^{n+m}$$

(f) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion nach m:

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : (R^n)^m = R^{n \cdot m}$$

(g) Zeigen Sie: $(R^*)^* = (R^+)^* = (R^*)^+ = R^*$

T3.5* Konstruktion der ganzen Zahlen

Es seien $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0. Entsprechend bezeichne $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ die positiven natürlichen Zahlen.

In dieser Aufgabe wollen wir uns eine Möglichkeit (es gibt verschiedene) anschauen, die ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen zu konstruieren. Die Idee hierbei ist zunächst, dass sich jede ganze Zahl als Differenz zweier natürlicher Zahlen darstellen lässt, bspw. gilt (wenn wir schon -3 und Subtraktion definiert hätten):

$$-3 = 5 - 8.$$

Wir könnten nun also bspw. -3 *definieren* als $(5, 8)$, und Addition/Multiplikation mit obiger Idee im Hinterkopf für alle solchen Paare definieren. Es stellt sich aber heraus, dass diese Darstellung nicht eindeutig ist: bspw. würden $(5, 8)$ und $(4, 7)$ die gleiche Zahl bezeichnen. Dieses Problem lösen wir, indem wir eine Äquivalenzrelation definieren, die angibt, ob zwei Paare "dieselbe Zahl" bezeichnen, und definieren dann bspw. -3 als die Äquivalenzklasse, zu der $(5, 8)$ oder $(4, 7)$ gehören. Das führt zu folgender Konstruktion:

Setze $Z := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und definiere $\equiv$ auf Z durch

$$(a, b) \equiv (c, d) \text{ falls } b + c = d + a$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf Z ist.
Versuchen Sie die Eigenschaften ohne Verwendung der Subtraktion zu beweisen.

Hinweis: Ab dieser Stelle könnte man die ganzen Zahlen definieren als $Z/\equiv$.

Wir schreiben $[(a, b)] = \{(c, d) \in Z \mid (a, b) \equiv (c, d)\}$ für die Äquivalenzklassen bzgl. $\equiv$.

(b) Wir definieren
$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$
Zeigen Sie: Gilt $(a, b) \equiv (a', b')$ und $(c, d) \equiv (c', d')$, dann gilt auch
$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a', b')] + [(c', d')]$$
Hinweis: Weil diese Addition über Repräsentanten/Vertreter der Äquivalenzklassen definiert ist, könnte es a priori sein, dass andere Vertreter ein anderes Ergebnis liefern – dann wäre die so definierte Addition nicht ***wohldefiniert****, denn das Ergebnis von $A+B$ (für $A, B \in Z/\equiv$)) wäre dann nicht eindeutig definiert.*

(c) Geben Sie eine Abbildung an, die jeder Äquivalenzklasse bzgl. $\equiv$ **eindeutig** eine ganze Zahl zuordnet.

(d) Definieren Sie eine geeignete Multiplikation auf den Äquivalenzklassen und zeigen Sie Wohldefiniertheit.

(e) Zeigen Sie die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze für die in dieser Aufgabe definierte Addition und Multiplikation. Sie dürfen die entsprechenden Gesetze für die natürlichen Zahlen verwenden, nicht jedoch die für die ganzen Zahlen.

Hausaufgaben

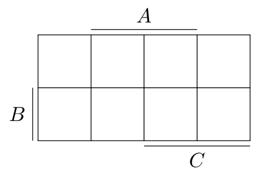
Abgabe über TUMexam bis Freitag, 07.11.25, 14:00. Beachten Sie die Hinweise in unserem Moodle-Kurs. Verwenden Sie für die Abgabe ausschließlich das über Ihren individuellen TUMexam-Link zur Verfügung gestellte Template.

H3.1 Sei $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Sei außerdem $k \in \mathbb{N}$. Welche Elemente sind in den folgenden Mengen enthalten? Beweisen Sie ihre Antwort oder leiten Sie diese durch eine explizite Konstruktion der jeweiligen Mengen her.

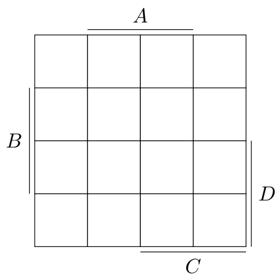
- $M_1 = \bigcup_{i=1}^{k} A_{2i}$
- $M_2 = \bigcup_{i=1}^{5} (A_{2i} \setminus A_{3i})$
- $M_3 = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{2i} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_{2i}$

H3.2 In jeder der folgenden Teilaufgaben sind jeweils zwei Mengenausdrücke gegeben. Stellen Sie für beide Mengenausdrücke das entsprechende KV-Diagramme auf, halten Sie sich dabei an das vorgegebene Diagramm. Falls die beiden KV-Diagramme nicht identisch sind, geben Sie konkrete Mengen inkl. eines Universums an, für die sich die beiden Ausdrücke zu unterschiedlichen Mengen auswerten.

(a) $F_a := \overline{(A \cup A) \cap (C \cup B)}$ und $G_a := \overline{((B \cap A) \cup \overline{B}) \setminus ((B \cap A) \cap (C \cup A))}$



(b) $F_b := (D \cap (\overline{C \setminus A})) \cup \overline{\overline{B \setminus C}}$ und $G_b := \overline{\overline{B \cap D} \setminus ((\overline{D \setminus A}) \cup (C \cup D))}$



H3.3 *Vorbemerkung*: Wir definieren die Mengen $A_{-1} := \emptyset$, $A_0 := \{a\}$ und A_{n+1} für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch $A_{n+1} := \{x, (x), (x, y) \mid x, y \in A_n\}$. Damit gilt nach Definition $A_{n-1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die *Höhe* $h(t)$ eines Elements $t \in A_n$ ist dann wie folgt definiert:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t = a \\ 1 + h(t') & \text{falls } t = (t') \text{ für ein } t' \in A_{n-1} \\ 1 + \max\{h(t'), h(t'')\} & \text{falls } t = (t', t'') \text{ für } t', t'' \in A_{n-1} \end{cases}$$

Zeigen Sie jeweils mittels Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $h(t) \leq n$ für alle $t \in A_n$.

(b) Sei $D_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $h(t) = n + 1$ für alle $t \in D_{n+1}$.

(c) Sei $a_n := |A_n|$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$.
Hinweis: Nach (b) ist D_{n+1} die disjunkte Vereinigung der Mengen $\{(x) \mid x \in D_n\}$, $\{(x, y) \mid x, y \in D_n\}$ und $\{(x, y), (y, x) \mid x \in D_n, y \in A_{n-1}\}$. Es gilt daher offensichtlich (nicht zu beweisen) $|D_{n+1}| = |D_n| + |D_n|^2 + 2\,|A_{n-1}|\,|D_n|$ und $|A_{n+1}| = |A_n| + |D_{n+1}|$.

Geben Sie explizit Induktionsbasis und Induktionsschritt an. Gliedern Sie den Induktionsschritt in Induktionsannahme, Induktionsbehauptung und Beweis der Induktionsbehauptung.