Department of Computer Engineering
School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

Lehrstuhl für
Rechnerarchitektur & Parallele Systeme
Prof. Dr. Martin Schulz
Dominic Prinz
Jakob Schäffeler

Lehrstuhl für
Design Automation
Prof. Dr.-Ing. Robert Wille
Stefan Engels
Benjamin Hien

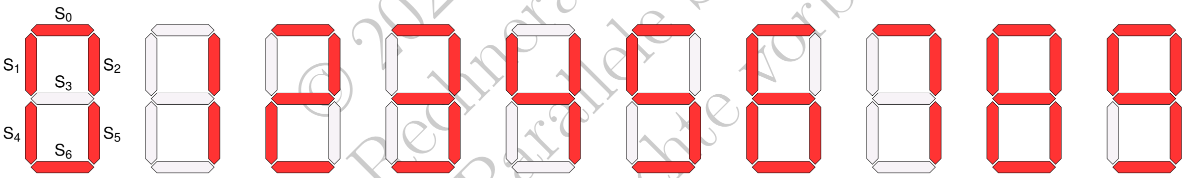
Einführung in die Rechnerarchitektur

Wintersemester 2025/2026

Übungsblatt 13: K-Maps und BDDs 26.01.2026 – 30.01.2026

1 Sieben-Segment Anzeige

Entwirf einen Dekodierer, welcher eine 4-Bit Binärzahl $A = (a_3\ a_2\ a_1\ a_0)_2$ als Eingabe erhält und diese entsprechend für die direkte Ansteuerung einer 7-Segmentanzeige (wie unten dargestellt) dekodiert. Dabei bedeutet eine 1 an einem Ausgang S_0, S_1,..., S_6, dass das entsprechende LED-Segment leuchtet. Die Eingaben mit den Dezimalwerten 10 bis 15 werden niemals angelegt und sollen daher zur Minimierung mittels *Don't Care*-Werten verwendet werden.

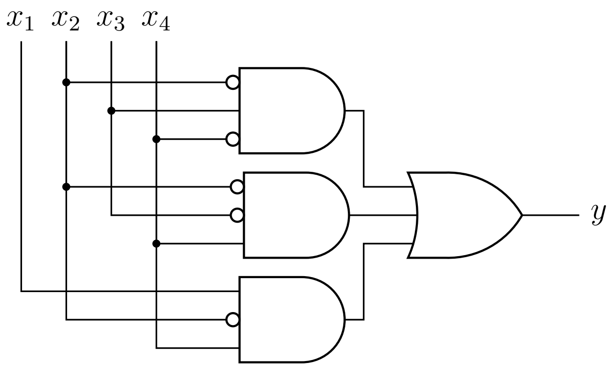


a) Entwirf die Wahrheitstabelle für die Segmente S_0 bis S_6.

b) Minimiere die Boolesche Funktion für die Segmente S_0, S_2 und S_6 mittels eines Karnaugh–Veitch Diagramms und gib die gefundenen Booleschen Funktionen an.

2 Logik-Hazards

Betrachte das folgende Schaltnetz.



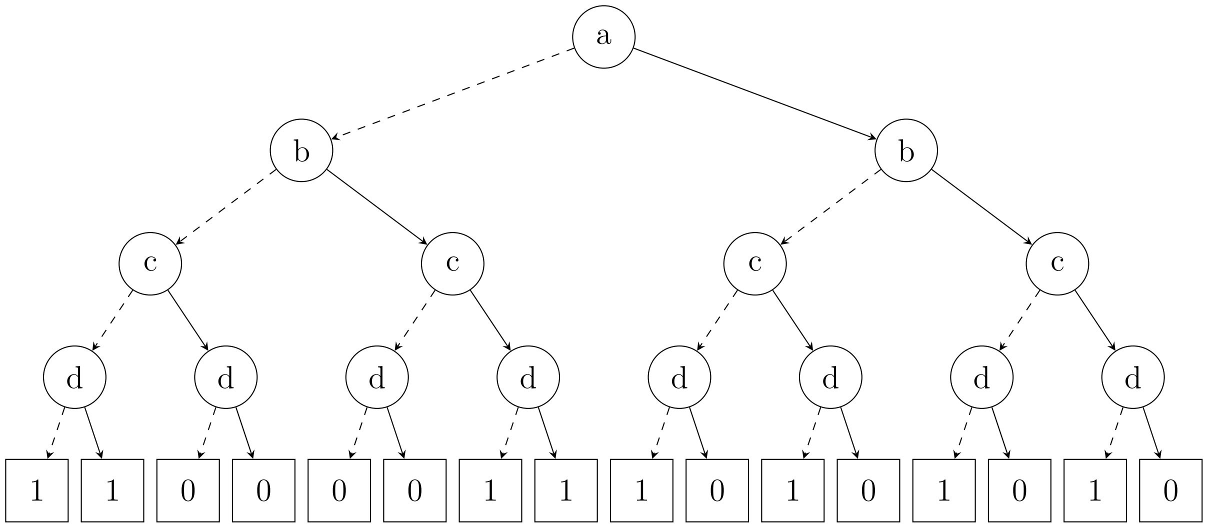
a) Bestimme das zugehörige KV-Diagramm.

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

b) Ist die Schaltung gegen Logik-Hazards abgesichert? Falls ja, warum? Falls nein, sicher das Schaltnetz gegen Logik-Hazards ab.

3 BDD Reduktion

Reduziere das folgende Entscheidungsdiagramm mittels I- und S-Reduktion so weit wie möglich. Markiere dafür bei jedem Zwischenschritt die verwendeten Knoten und gib die Art der verwendeten Reduktion, sowie das durch die Reduktion entstandene Diagramm an.



4 ITE-Algorithmus

a) *(Bonus)* Sei $f\colon \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ ein beliebiger m-stelliger Operator. Für $j \in \{1,\dots,m\}$, seien $b^{(j)}\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ beliebige boolesche Funktionen mit n Inputs $x_1,\dots,x_n$. Zeige:

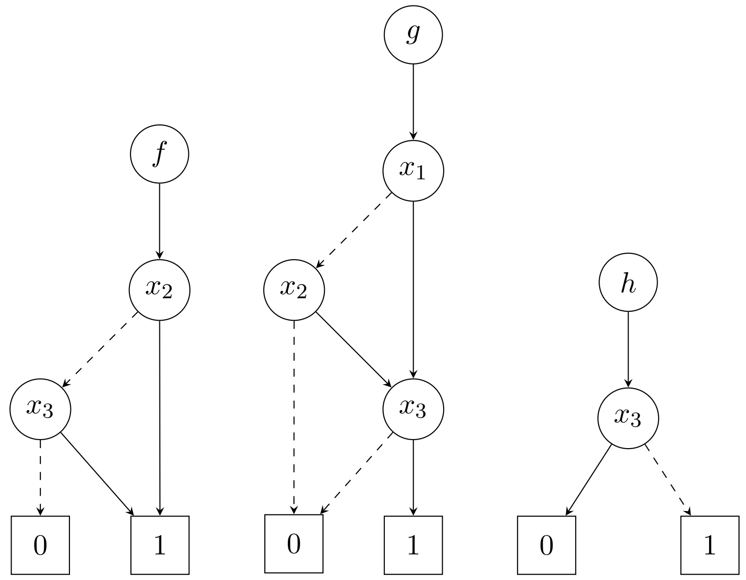
$$f\left(x_i \cdot b^{(1)}_{x_i=1} + \overline{x_i} \cdot b^{(1)}_{x_i=0}, \dots, x_i \cdot b^{(m)}_{x_i=1} + \overline{x_i} \cdot b^{(m)}_{x_i=0}\right) = x_i \cdot f\left(b^{(1)}_{x_i=1}, \dots, b^{(m)}_{x_i=1}\right) + \overline{x_i} \cdot f\left(b^{(1)}_{x_i=0}, \dots, b^{(m)}_{x_i=0}\right)$$

für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.

Hinweis: Fallunterscheidung nach $x_i = 0$ und $x_i = 1$.

b) Welche Aussagen aus der Vorlesung sind Spezialfälle von Teilaufgabe a)?

c) Im Folgenden sind ROBDDs für die Funktionen f, g und h gegeben. Konstruiere davon ausgehend den ROBDD der Funktion $ITE(f,g,h)$ für die Variablenordnung $x_1 < x_2 < x_3$.



f
x_2
x_3
0
1
g
x_1
x_2
x_3
0
1
h
x_3
0
1

5 Konstruktion von BDDs

Betrachte die Boolesche Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_4$$

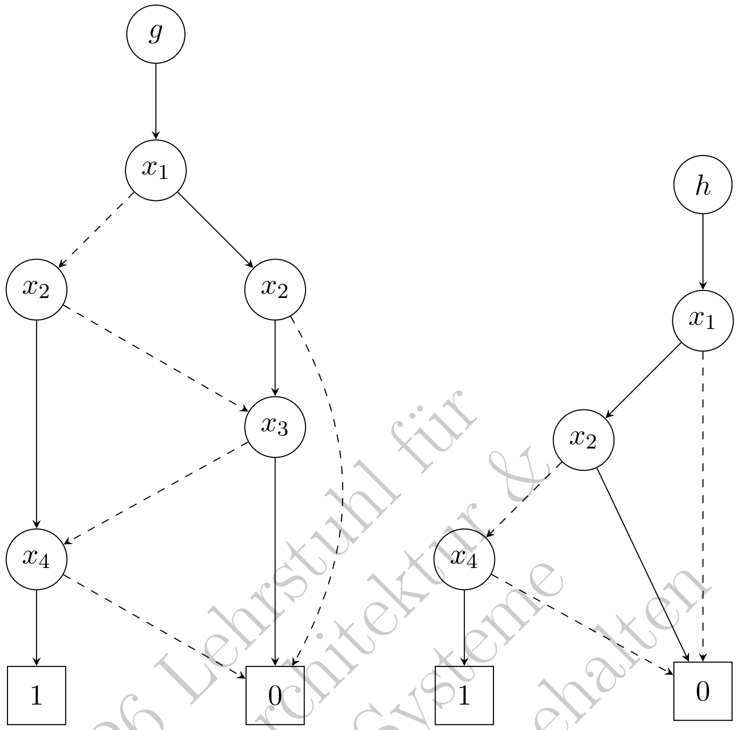
a) Konstruiere den ROBDD der Funktion f für die Variablenordnung $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$. Baue den BDD dafür ausgehend von der Wurzel auf und gib in jedem Knoten die übrige Schaltfunktion an die sich durch die Shannon-Entwicklung ergibt. Fasse dabei nach Möglichkeit entsprechende Knoten sofort zusammen.

b) Konstruiere den ROBDD der Funktion f für die Variablenordnung $x_1 < x_4 < x_3 < x_2$ durch Umordnen.

c) Im Folgenden sind ROBDDs für die Funktionen

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4 \text{ und } h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_2x_4$$

gegeben. Konstruiere davon ausgehend den ROBDD der Funktion f für die Variablenordnung $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.



6 K-Maps und BDDs (Hausaufgabe)

Bearbeitung und Abgabe der Hausaufgabe 13 auf `https://artemis.tum.de/courses/516` bis **Sonntag, den 01.02.2026, 23:59 Uhr**.

Ziel dieser Übung ist es verschiedene Berechnungen mit Entscheidungsdiagrammen durchzuführen. Für die Abgaben, in denen BDDs konstruiert werden müssen, sollen die BDDs in Form von If-Then-Else (ITE) Ausdrücken abgegeben werden. Jede Tabellenzeile der Abgabedatei ist ein Tupel der Form (`Variable`, `Knotenbezeichner`, `Low Knoten`, `High Knoten`) wobei die Terminalknoten einfach als 0 und 1 bezeichnet werden. Das Tupel `x1, v1, v2, v3` steht also für den Ausdruck $ITE(v1, v3, v2)$ wobei die Entscheidung des Knotens anhand der Variable x_1 getroffen wird.

Zum Beispiel beschreibt

Variable	Knotenbezeichner	Low Knoten	High Knoten
x1	v1	v2	v3
x4	v2	v4	v5
x4	v3	0	1
x3	v4	0	v6
x3	v5	0	v7
x2	v6	0	1
x2	v7	1	0

den BDD aus Abbildung 1. Die hierdurch beschriebene Funktion nennen wir F.

a) Berechne den ROBDD von F für die Variablenordnung $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ durch Umordnen.

b) Berechne den ROBDD von F für die Variablenordnung $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ durch Umordnen.

c) Im folgenden betrachten wir die Wahrheitstabelle 1 der Funktion Y. Gib das Minimalpolynom von Y an. Hinweis: Beachte die *Don't Cares*!

d) Realisiere die Funktionalität von Y in Digital mit möglichst wenig Gattern. In dieser Teilaufgabe sind ausschließlich UND, ODER sowie NICHT-Gatter erlaubt. Jedes Gatter darf maximal zwei 1bit-Eingänge nutzen. Kein Eingang darf invertiert sein.
Hinweis: Ausklammern, De-Morgan bzw. Negationstheorem

Schwierige Knobelaufgabe: Wir verlangen in dieser Aufgabe nicht das Finden der optimalen Schaltung. Wer eine Lösung mit maximal einem Gatter mehr als die optimale Schaltung findet, erhält volle Punktzahl. Für Lösungen mit zwei Gattern mehr wird ein halber Punkt abgezogen. Für alle anderen Lösungen wird ein Punkt abgezogen. Wer eine Lösung mit optimaler Gatterzahl findet erhält jedoch zwei Bonuspunkte. Für die Herleitung einer der uns bekannten optimalen Lösungen muss man zusätzlich an der richtigen Stelle geschickt „0 addieren“ [1]. Dies kann z.B. ermöglichen, dass ein Subterm doppelt

[1] Mit „0 addieren“ meinen wir das Verodern mit einem Ausdruck, der zu 0 vereinfacht, z.B. $x_1\bar{x}_2 = x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_2 = \bar{x}_2 \cdot (x_1 + x_2)$.

vorkommt und dadurch Gatter recyclet[2] werden können. Es sind jedoch (außer plagiieren) alle Mittel erlaubt (auch das Schreiben eines Skriptes zur Lösung der Knobelaufgabe, z.B. mit Hilfe von SAT, siehe nächste Woche). Die Bonuspunkte sind als schwierige Knobelaufgabe gedacht. Der Zeitaufwand für diese Bonuspunkte dürfte höher sein, als für bisherige (Bonus-)punkte.

e) Zerlege das Minimalpolynom rekursiv mittels Shannon-Zerlegung in seine Kofaktoren in der Reihenfolge x_1, x_3, x_2. Breche jeweils die Zerlegung ab, wenn ein Term nur noch x_4 oder Konstanten beinhaltet. Trage alle erhaltenen Kofaktoren (nicht nur die vollständig zerlegten) in die vorgegebene Tabelle ein.

f) Konstruiere aus den Kofaktoren ein ROBDD mit der Variablenordnung $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$, d. h. entsprechend der Kofaktor-Zerlegung.

g) Das so konstruierte BDD für das Minimalpolynom von Y sowie das F beschreibende BDD aus Teilaufgabe 6 x) sind beides ROBDDs der gleichen Variablenordnung. Da ROBDDs kanonisch sind, sind sie identisch, genau dann wenn die zugrunde liegende Logik bzw. Schaltung äquivalent ist. Was ist x und sind F und das Minimalpolynom von Y äquivalent?

[2] z.B. kann $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4$ mit 4 statt 5 Gattern realisiert werden, da $z := x_1x_2$ nur ein Gatter benötigt und das Resultat zwei mal verwendet werden kann, da $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 = zx_3 + zx_4$.

7 Referenzmaterial

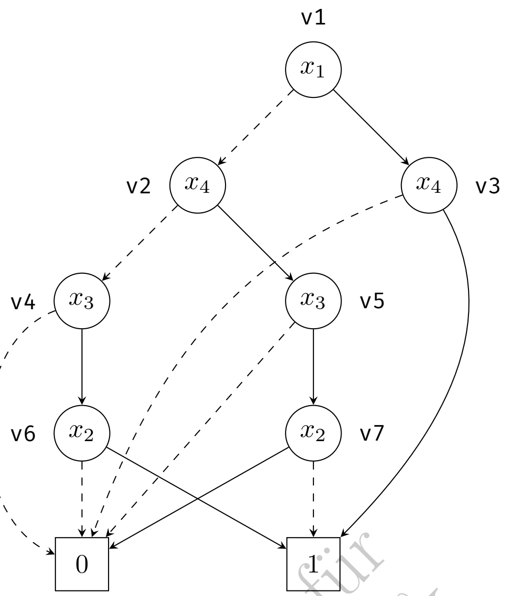


Abbildung 1: ROBDD für Funktion F

x_1	x_2	x_3	x_4	Y
0	0	0	0	X
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X

Tabelle 1: Wahrheitstabelle für Funktion Y