

Курсова работа №1

Александър Игнатов
Ф№ 62136

3 януари 2021 г.

1 Условие

Дадена е рекурентната редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където за всяко $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 6}$ и $a_1 = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$. Изследвайте за сходимост редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в зависимост от λ .

2 Решение

Нека допуснем, че редицата е сходяща и има граница

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Чрез използване на граничен преход получаваме:

$$l = \frac{2l^2 + l + 6}{l + 6} \iff (l - 2)(l - 3) = 0$$
$$l_1 = 2 \cup l_2 = 3$$

Пресмятаме:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 2)(a_n - 3)}{a_n + 6} \tag{1}$$

Наблюдаваме знакът на израза (1):

$a_n \in (-\infty, -6)$	$\implies a_{n+1} - a_n < 0$
$a_n \in (-6, 2)$	$\implies a_{n+1} - a_n > 0$
$a_n = 2$	$\implies a_{n+1} - a_n = 0$
$a_n \in (2, 3)$	$\implies a_{n+1} - a_n < 0$
$a_n = 3$	$\implies a_{n+1} - a_n = 0$
$a_n \in (3, +\infty)$	$\implies a_{n+1} - a_n > 0$

Пресмятаме:

$$a_{n+1} - (-6) = \frac{8a_n^2 + 7a_n + 42}{a_n + 6} \quad (2)$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{2(a_n + \frac{3}{2})(a_n - 2)}{a_n + 6} \quad (3)$$

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2(a_n + 2)(a_n - 2)}{a_n + 6} \quad (4)$$

$$2a_{n+1} - (-3) = \frac{4a_n^2 + 5a_n + 30}{a_n + 6} \quad (5)$$

$$a_{n+1} - (-2) = \frac{2a_n^2 + 3a_n + 18}{a_n + 6} \quad (6)$$

От уравнение (2):

$$8a_n^2 + 7a_n + 42 > 0, \forall a_n \implies \text{sign}(a_{n+1} + 6) = \text{sign}(a_n + 6)$$

$$\{a_n\} \downarrow, a_n \in (-\infty, -6)$$

$$\{a_n\} \uparrow, a_n \in (-6, +\infty)$$

От уравнения (3) и (5):

$$\{a_n\} \downarrow, a_n \in (-\infty, -6)$$

$$\{a_n\} \uparrow, a_n \in \left(-6, -\frac{3}{2}\right)$$

$$a_n = 2, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, a_1 = -\frac{3}{2}$$

$$\{a_n\} \downarrow, a_n \in \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$a_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}, a_1 = 2$$

$$\{a_n\} \uparrow, a_n \in (2, +\infty)$$

От уравнения (4) и (6):

$$\{a_n\} \downarrow, a_n \in (-\infty, -6)$$

$$\{a_n\} \uparrow, a_n \in (-6, -2)$$

$$a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, a_1 = -2$$

$$\{a_n\} \downarrow, a_n \in (-2, 3)$$

$$a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}, a_1 = 3$$

$$\{a_n\} \uparrow, a_n \in (3, +\infty)$$

Така получваме следното поведение за следните интервали:

$$\begin{aligned}
\lambda \in (-\infty, -6) &\implies \{a_n\} \downarrow, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \\
\lambda \in (-6, -2) &\implies \{a_n\} \uparrow, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \\
\lambda = -2 &\implies a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \\
\lambda \in \left(-2, -\frac{3}{2}\right) &\implies \{a_n\} \downarrow, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \\
\lambda = -\frac{3}{2} &\implies a_n = 2, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \\
\lambda \in \left(-\frac{3}{2}, 2\right) &\implies \{a_n\} \uparrow, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \\
\lambda = 2 &\implies a_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \\
\lambda \in (2, 3) &\implies \{a_n\} \downarrow, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \\
\lambda \in (3, +\infty) &\implies \{a_n\} \uparrow, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty
\end{aligned}$$

3 Отговор

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -\infty & , \lambda \in (-\infty, -6) \\ 2 & , \lambda \in (-2, 3) \\ 3 & , \lambda \in \{-2, 3\} \\ +\infty & , \lambda \in (-6, -2) \cup (3, +\infty) \end{cases} \quad (7)$$