Курсова работа №4

Александър Игнатов
ФN№ 62136

14 февруари 2021 г.

Условие

$$(8x+3)y'' + y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

Решение

Предполагаме, че търсената функция и нейните производни имат следния вид на степенен ред:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2}$$

Имаме $y(0) = 1$ и $y'(0) = -2$, следователно

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n$$
$$y'(x) = -2 + \sum_{n=2}^{\infty} y_n n x^{n-1}$$

Така уравнението от условието добива вида

$$(8x+3)\sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} y_n n x^{n-1} - 2 = 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(8n+1)(n+1)y_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1)y_{n+2}x^n - 2 = 0$$

При $n = 0$:

$$3.2.1.y_2x^0 = 0$$
$$y_2 = 0$$

При $n = 1$:

$$32y_2 + 18y_3 - 2 = 0$$
$$y_3 = \frac{1}{9}$$

При $n \geq 2$:

$$(8n+1)(n+1)y_{n+1} + 3y_{n+2}(n+2)(n+1) = 0$$
$$y_{n+2} = -\frac{8n+1}{3(n+2)}y_{n+1}$$
$$y_{n+2} = \left(-\frac{8n+1}{3(n+2)}\right)\left(-\frac{8n-7}{3(n+1)}\right)\dots y_3$$

Т.е., за $n \geq 4$:

$$y_n = \left(-\frac{8n-7}{3n}\right)\left(-\frac{8n-15}{3(n-1)}\right)\dots\left(-\frac{1}{3.4}\right).\frac{-4}{3}.\frac{2}{2}$$

Следователно общият член има формула

$$y_n = \frac{-6(-1)^{n-3}(8n-7)(8n-15)...}{3^{n-3}n!} \tag{1}$$

И търсената функция е

$$y(x) = 1 - 2x + \frac{1}{9}x^3 - 6\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n-3}(8n-7)(8n-15)...}{3^{n-3}n!}x^n \tag{2}$$

Радиус на сходимост

Радиусът на сходимост R намираме чрез

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-2}(n+1)!(8n-7)(8n-15)...}{3^{n-3}n!(8n+1)(8n-7)(8n-15)...} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{8n+1} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Следователно за $\left(-\infty, -\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}, +\infty\right)$ редът е разходящ, а за $\left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$ е абсолютно сходящ.

За точка $x = -\frac{3}{8}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(8n-7)(8n-15)...}{3^{n-3}n!} . \frac{(-1)^n 3^n}{8^n} = \\
&= -27 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(8n-7)(8n-15)...}{8^n n!} = \\
&= -27 \sum_{n=4}^{\infty} b_n
\end{aligned}$$

Проверка за сходимост на реда b_n по Даламбер:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{8^n n!(8n+1)(8n-7)(8n-15)...}{8^{n+1}(n+1)!(8n-7)(8n-1)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{8n+1}{8n+8} = 1 - 0
\end{aligned}$$

С критерия на Даламбер не можем да определим дали редът е сходящ или не, затова трябва да приложим критерият на Раабе-Дюамел:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{8n+8}{8n+1} - 1\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{8n+1} = \frac{7}{8} < 1
\end{aligned}$$

Следователно, редът е разходящ за $x = -\frac{3}{8}$

За точка $x = \frac{3}{8}$ чрез критерият на Раабе-Дюамел и достатъчното условие на Лайбниц намиране, че редът е сходящ. Той в тази точка не е абсолютно сходящ, следователно за $x = \frac{3}{8}$ редът е условно сходящ.