Курсова работа №4

Александър Игнатов
ФН№ 62136

7 февруари 2021 г.

Условие

$$(8x+3)y'' + y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

Решение

Предполагаме, че търсената функция и нейните производни имат следния вид на степенен ред:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2}$$

Имаме $y(0) = 1$ и $y'(0) = -2$, следователно

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n$$
$$y'(x) = -2 + \sum_{n=2}^{\infty} y_n n x^{n-1}$$

Така уравнението от условието добива вида

$$(8x+3)\sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} y_n n x^{n-1} - 2 = 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[8n(n+1)+1]y_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1)y_{n+2}x^n - 2 = 0$$

При $n = 0$ имаме

$$3.2.1. y_2 x^0 - 2 = 0$$
$$y_2 = \frac{1}{3}$$

Следователно чрез премахване на нулевия член на сумата:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1) y_{n+2} x^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n+2)(n+1) y_{n+2} x^n$$

Уравнението от условието придобива вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{[8n(n+1)+1] y_{n+1} x^n + 3(n+2)(n+1) y_{n+2}\} x^n = 0$$

При $n \geq 1$:

$$[8n(n+1)+1] y_{n+1} + 3 y_{n+2}(n+2)(n+1) = 0$$

Т.е., за $n \geq 2$

$$[8n(n+1)+1] y_n + 3 y_{n+1}(n+2)(n+1) = 0$$
$$y_{n+1} = \frac{8n(n+1)+1}{3(n+2)(n+1)} y_n$$

Използвайки разлагане стигаме до крайния отговор.

$$y_n = -\frac{6}{7} \left(\frac{8}{3}\right)^n \binom{\frac{7}{8}}{n}$$

Отговор

$$y(x) = 1 - \frac{6}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^n \binom{\frac{7}{8}}{n} x^n$$