

Modelování proudění vzduchu clonkou

Ing. Aleksei Karavaev

Srpen 2022

1 Úvod

Tato úloha je zaměřena na modelování průtoku vzduchu clonkou v prostředí COMSOL multiphysics. Simulace je založená na aplikaci metody konečných prvků.

1.1 Cíle úlohy

Cílem úlohy je podle zadané geometrie a charakteristik materiálů implementovat model laminárního proudění nestlačitelné tekutiny trubici ve prostředí COMSOL multiphysics, provést simulaci se zadanými parametry a následně vizualizovat výsledky.

1.2 Vstupy a výstupy úlohy

Na vstupu je popis geometrie modelované trubice a parametry simulované tekutiny (vzduch). Výstupem je vytvořený model v prostředí COMSOL multiphysics, popis závislosti tlaku a rychlosti pohybu tekutiny v trubici na nastaveném objemovém průtoku a graf závislosti tlaku a rychlosti pohybu tekutiny na stěně trubice pro jeden konkrétní objemový průtok.

2 Metody

V této kapitole jsou popsány teoretické principy, které umožňují provést numerickou simulaci laminárního proudění nestlačitelné tekutiny.

2.1 Modelování tekutin

Studiem proudění tekutin a plynu se zabývá hydrodynamika. Za předpokladu, že se zanedbávají procesy disipace energie vlivem vnitřního tření a výměny tepla mezi různými oblastmi tekutiny (takové tekutině se říká ideální) lze její pohyb popsat pomocí Eulerové rovnice. [1]

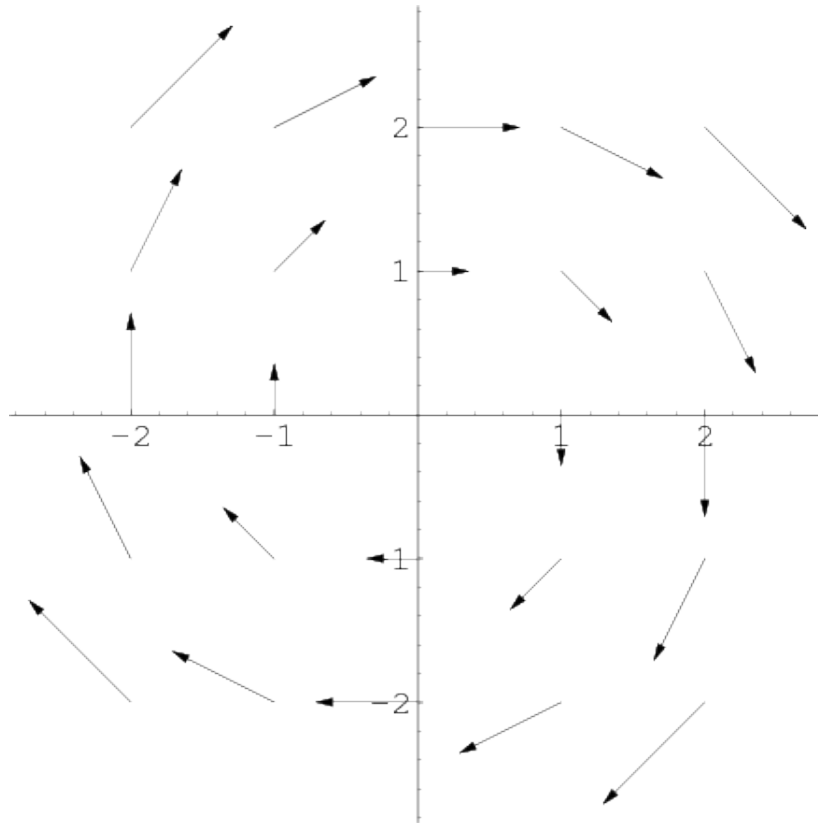
$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad (1)$$

$\frac{\partial v}{\partial t}$ reprezentuje změnu rychlosti tekutiny v určitém bodě prostoru za čas. X, y a z koordináty jsou fixované.

$(v \cdot \nabla)v$ reprezentuje změnu rychlosti částice tekutiny vlivem její posunu mezi dvěma body, které ležejí nekonečně blízko.

$-\frac{1}{\rho}\nabla p$ je síla která vzniká rozdílem tlaku mezi body tekutiny, která působí na nekonečně malý objem tekutiny lomeno hustotou v tomto objemu.

v je vektorovou funkcí $v(x, y, z, t)$ (nebo jenom $v(x, y, t)$ ve 2D prostoru), která každému bodu prostoru přiřadí měnící se v čase vektor \vec{v} . Tento vektor reprezentuje rychlost v bodě v daný okamžik.



Obrázek 1: Příklad reprezentace rychlosti tekutiny jako funkci pozice ve 2D prostoru, převzato z [2]

V případě trojrozměrného prostoru a kartézských souřadnic lze $v(x, y, z, t)$ reprezentovat pomocí výrazu:

$$v(x, y, z, t) = v_x(x, y, z, t)i + v_y(x, y, z, t)j + v_z(x, y, z, t)k \quad (2)$$

kde $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ jsou jednotkové vektory prostoru. Pak $\frac{\partial v}{\partial t}$ lze vyjádřit jako

$$\frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial t} = i \frac{\partial v_x(x, y, z, t)}{\partial t} + j \frac{\partial v_y(x, y, z, t)}{\partial t} + k \frac{\partial v_z(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (3)$$

∇ je matematický operátor, který označuje vektor parciálních derivace podle souřadnic v kartézském prostoru, a lze ho představit jako:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (4)$$

pro 3d prostor.

$v \cdot \nabla$ je pak skalární součin vektorové funkce $v(x, y, z, t)$ a vektoru parciálních derivací, a výsledek je pak:

$$v \cdot \nabla = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (5)$$

což je divergence vektoru rychlosti, která se též může označovat jako *div*. Operátor divergence promění vektorovou funkce na skalární. Hodnota této funkce pak vyjadřuje nako-lik bod prostředí působí jako 'zdroj' vektorového pole. Na vstupu operátoru je v tomto případě vektorová funkce, na výstupu je skalární funkce.

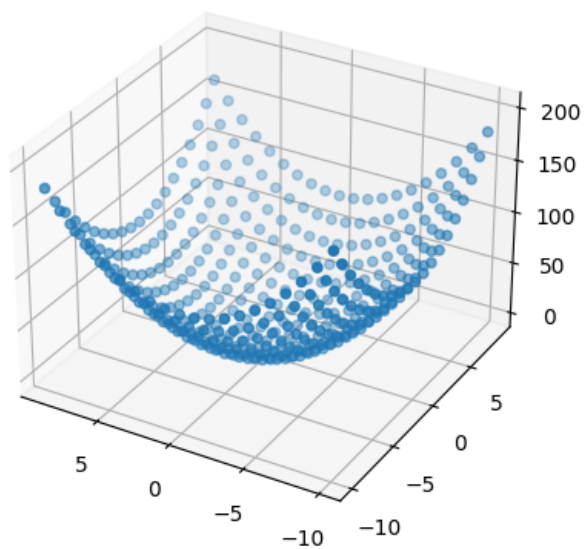
Pro výraz ∇p platí

$$\nabla p = i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6)$$

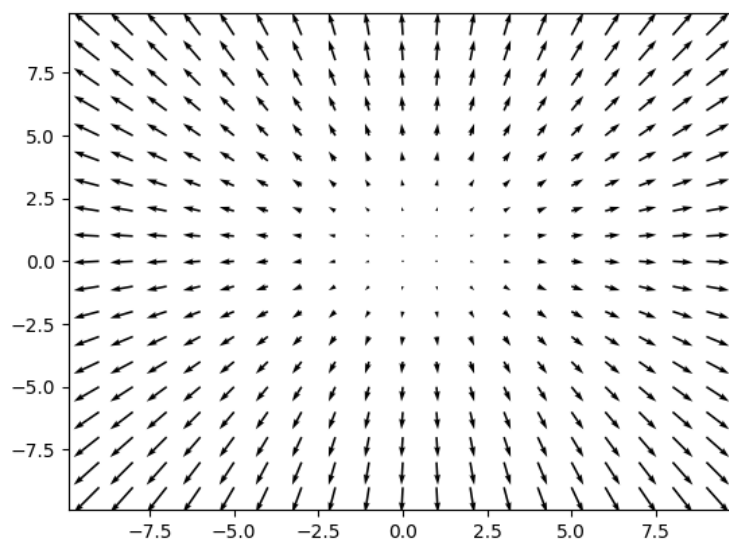
Vstupem je skalární funkce, která reprezentuje tlak v bodě prostředí v určitý okamžik, výstupem je vektorová funkce, která popisuje směr největšího růstu tlaku v daný časový okamžik. Pak $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ lze si představit jako vektor, který má opačný směr než směr největšího růstu tlaku a je škálovaný hustotou v daným bodě prostředí. Čím hustota je větší, tím je délka vektoru menší.

Když by se operátor ∇ aplikoval na následující skalární funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$, výsledkem pak by byla následující vektorová funkce:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$



Obrázek 2: Hodnoty funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ pro celá $x \in [-10, 10]$ a $y \in [-10, 10]$



Obrázek 3: Hodnoty funkce $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$ pro celá $x \in [-10, 10]$ a $y \in [-10, 10]$

Směr každého vektoru na obrázku 3 reprezentuje směr největšího růstu funkce na obrázku 2 v zvolených bodech. Kdyby se na výsledek $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$ následně aplikoval skalární součin s operátorem ∇ získali bychom divergenci gradientu funkce $f(x, y)$, kterému se taky říká Laplaceův operátor. Výsledek jeho aplikace na funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ by pak vypadal následovně:

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 4$$

Pro funkci jedné proměnné Laplaceův operátor je roven druhé derivaci.

V případě pokud je potřeba zahrnout do modelu viskozitu tekutiny, do rovnice 1 se přidá člen $\nu \Delta v$, u kterého ν je koeficientem viskozity, v je rychlosti. Pak model vypadá následně:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v \quad (7)$$

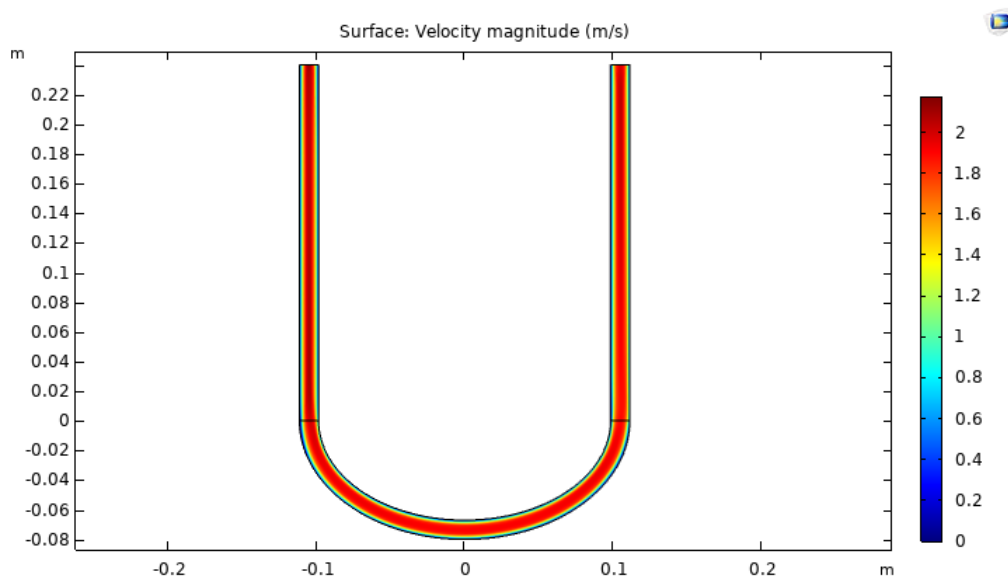
V tomto případě je operátor Δ je ale aplikován na vektorovou funkci v .

2.2 Numerická simulace metodou konečných prvků

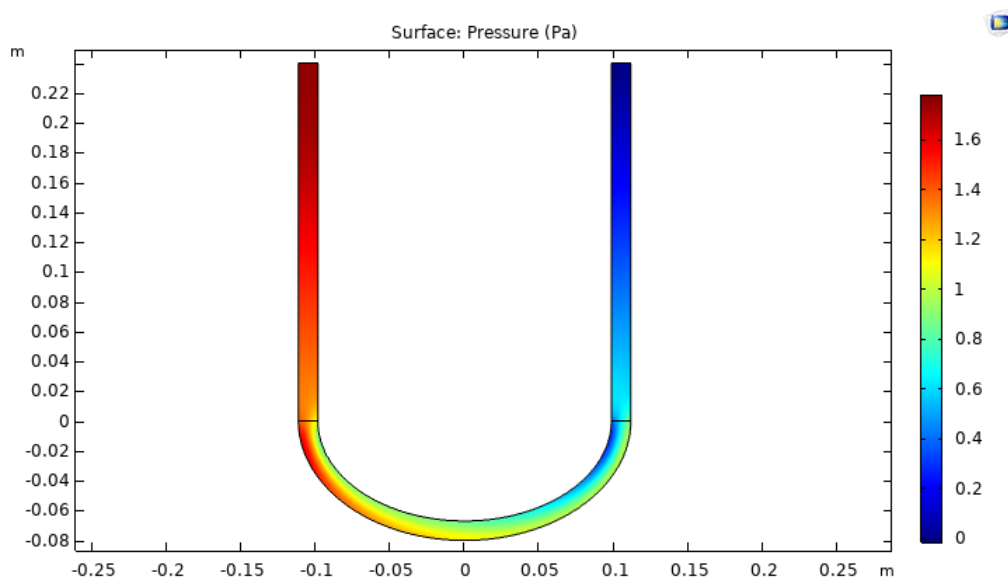
V rámci modelování fyzikální soustavy na základě fyzikálních zákonů vznikají diferenční rovnice, které popisují modelovaný systém. Je ale často nemožný najít řešení těchto rovnic analyticky. Metoda konečných prvků je způsobem najít numerické řešení parciálních diferenčních rovnic i v případě, kdy je nemožný získat analytické řešení. Základním principem této metody je přeměna původních diferenčních rovnic na soustavu algebraických rovnic a následné její řešení [3].

3 Výsledky

Na základě požadované geometrii a parametrů průtoku se implementoval model v prostředí COMSOL multiphysics. Pro nastavenou hodnotu objemového průtoku 10 l/min rychlost částic je na obrázku 4 tlak je na obrázku 5 Jak je vidět rychlost částic je menší u krajů trubici. Rozložení tlaku není rovnoměrný.

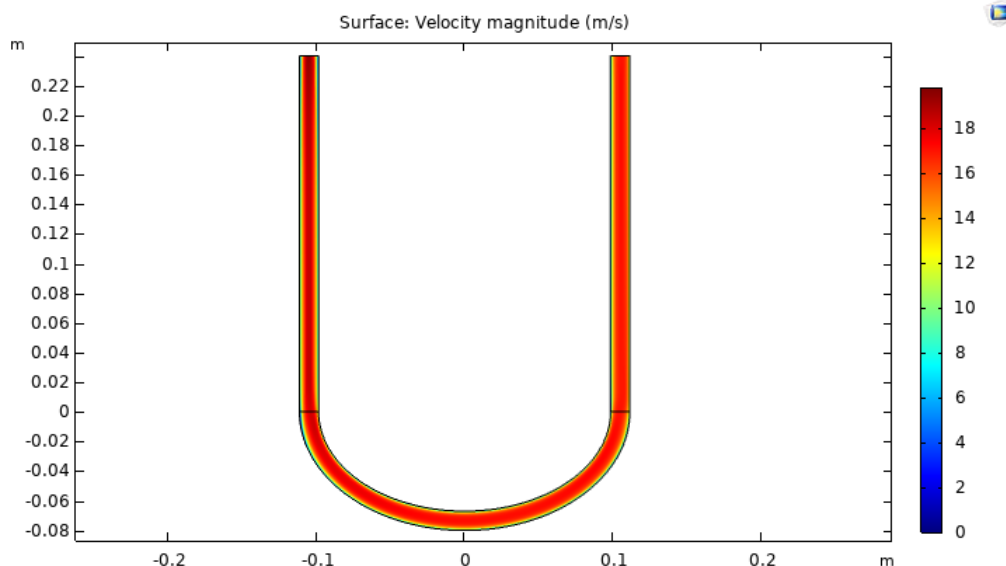


Obrázek 4: Rozložení rychlosti částic za předpokladu, že objemový průtok je 10 l/min

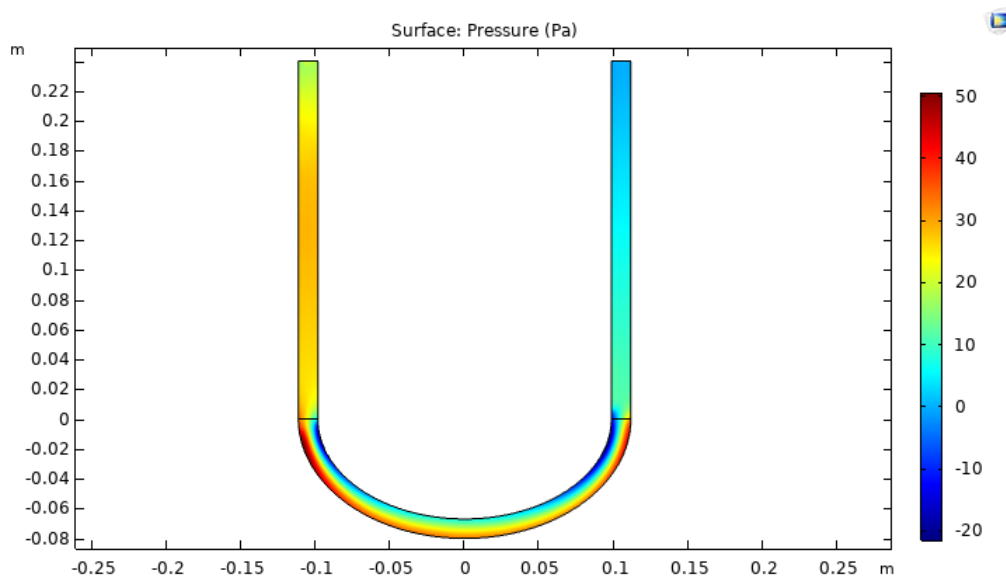


Obrázek 5: Rozložení tlaku částic za předpokladu, že objemový průtok je 10 l/min

V případě navýšení objemového průtoku na 100 l/min tlak a rychlost budou vypadat následovně:



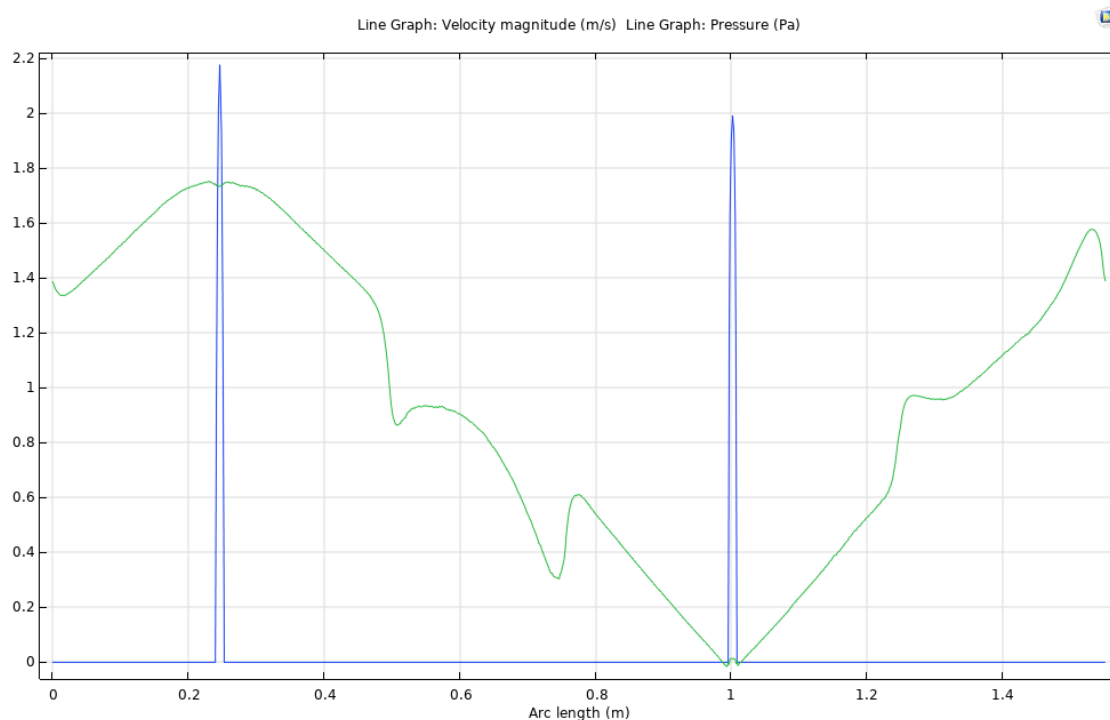
Obrázek 6: Rozložení rychlosti částic za předpokladu, že objemový průtok je 100 l/min



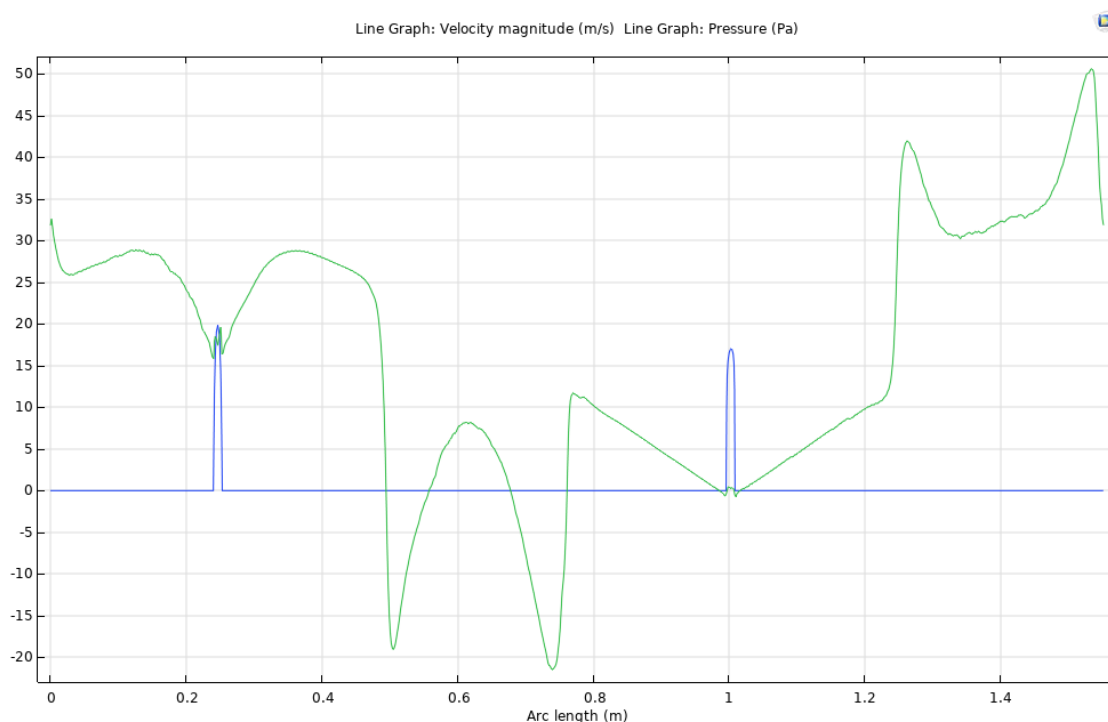
Obrázek 7: Rozložení tlaku částic za předpokladu, že objemový průtok je 100 l/min

Graf rychlosti vypadá podobně, pochopitelně se vůči obrázku 4 zhruba 10 krát zvýšily rychlosti ve všech bodech simulovaného prostředí. Co se týče tlaku, amplitudy se též výrazně zvětšily, navíc se též změnil tvar rozložení. Největší hodnoty tlaku jsou na rozdíl od obrázku 5 v dolní části trubici. Velikosti vektorů rychlosti jsou stejné na začátku a na konci trubice, směr je ale opačný. Změna rychlosti za čas je akcelerace. Podle rovnice 1 místa ve kterých se rychlost mění nejvíc by měla mít největší gradient tlaku.

Na obrazcích 9 a 8 je závislost tlaku a rychlosti částic na stěně trubici. Je vidět, že v místech, kde vzduch vyteka z trubice a vteka do trubice rychlost průtoku stěnou není nulová. Tlak lineárně klesá na výstupním úseku trubici. Kladné špičky u hodnot 1.26 a 1.55 m a záporné špičky u hodnot 0.51 a 0.74 m jsou vyvolané zakřivením trubice.



Obrázek 8: Závislost tlaku a rychlosti částic na stěně trubici pro objemový průtok 10 l/min



Obrázek 9: Závislost tlaku a rychlosti částic na stěně trubici pro objemový průtok 100 l/min

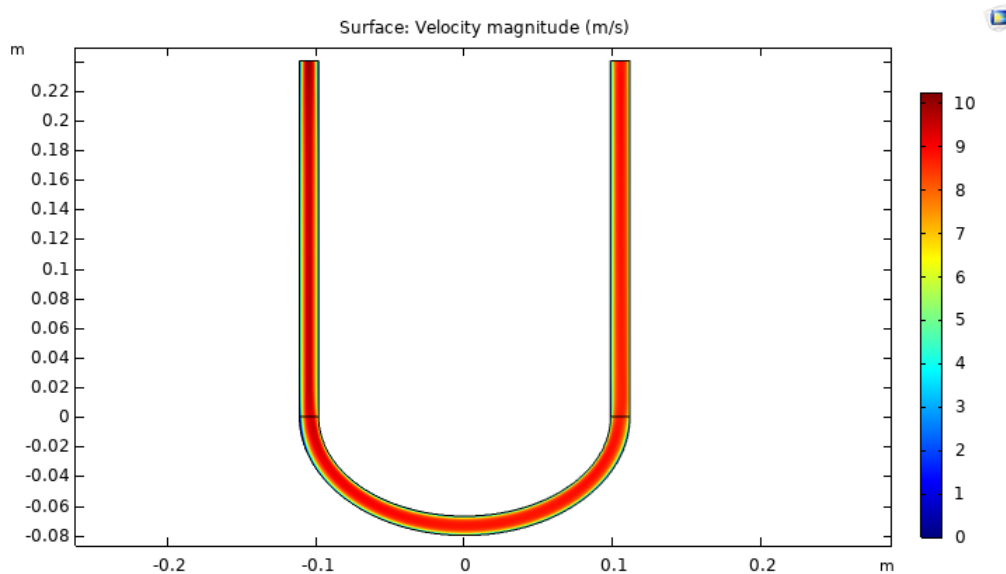
4 Závěr

Podle zadané geometrie a charakteristik materiálů se implementoval model laminárního proudění nestlačitelné tekutiny trubicí ve prostředí COMSOL multiphysics. Následovně se provedla simulace proudění s požadovanými hodnotami vstupního objemového průtoku. Výsledky se vizualizovaly pomocí grafu.

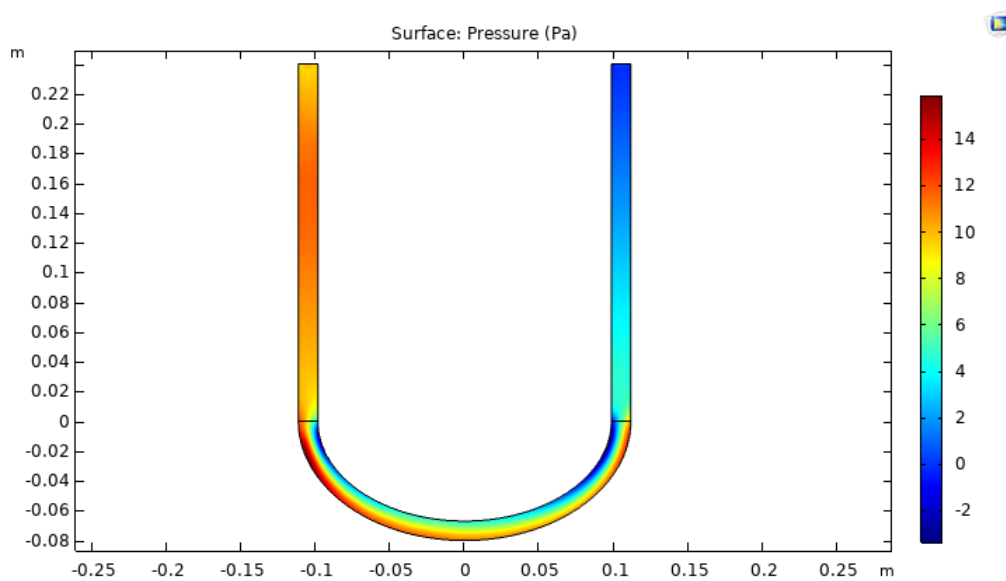
Použitá literatura

- [1] Landau, L.: *Hydrodynamics*. Science, třetí vydání, 1988, ISBN 978-5-9221-1625-1.
- [2] Vector fields as fluid flow. Dostupné z: https://mathinsight.org/vector_field_fluid_flow
- [3] Seshu, P.: *Textbook of Finite Element Analysis*. PHI Learning Private Limited, New Delhi, volume 1 vydání, January, 2012, ISBN 978-81-203-2315-5.

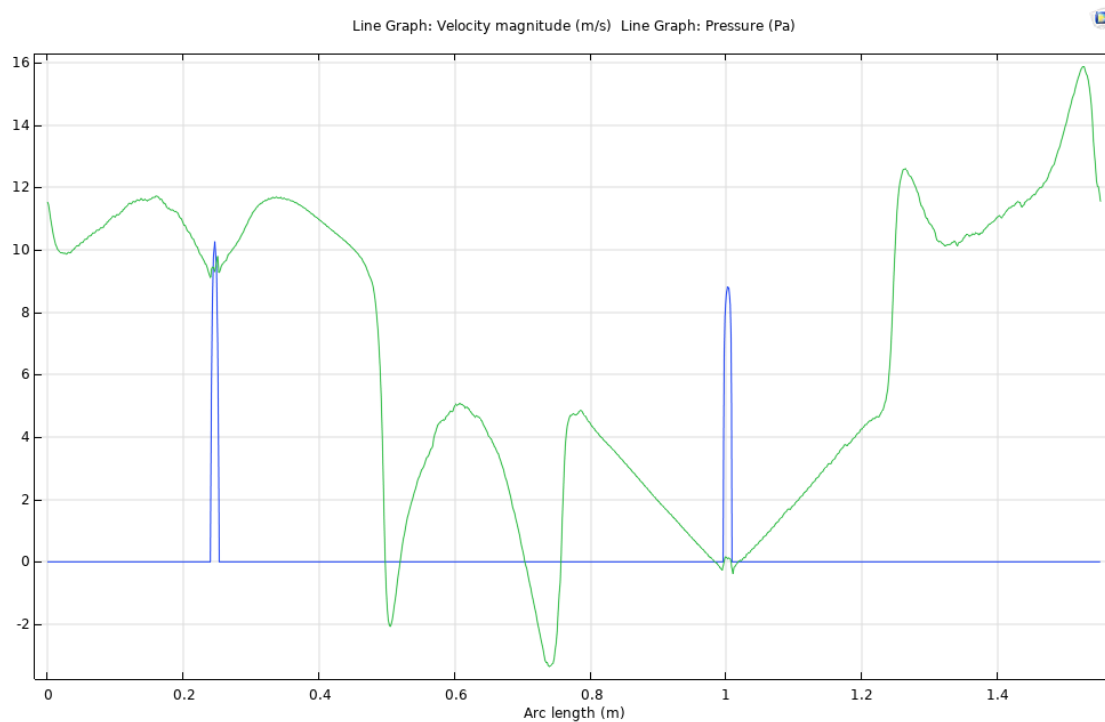
5 Přílohy



Obrázek 10: Rozložení rychlosti částic za předpokladu, že objemový průtok je 50 l/min



Obrázek 11: Rozložení tlaku částic za předpokladu, že objemový průtok je 50 l/min



Obrázek 12: Závislost tlaku a rychlosti částic na stěně trubici pro objemový průtok 50 l/min